MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.14, No.1, 2023, páginas 133-141.
Recibido 13-06-2022. Aceptado 20-08-2023.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v14n1/reblo

FORMAS $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ DE LA REGLA DE L'HÔPITAL

RENÉ BENÍTEZ LÓPEZ

Resumen. En esta nota, se da una nueva demostración de las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en un punto a, y en $\pm\infty$.

1. Introducción

La regla de L'Hôpital surge a fines del siglo XVII, fue descubierta por Jean Bernoulli (1667-1746) quien por razones económicas firma un pacto con Guillaume Francois Antoine marqués de L'Hôpital (1661-1704); en ese pacto, Jean Bernoulli a cambio de un salario se comprometió a enviarle sus descubrimientos matemáticos al marqués de L'Hôpital para que éste los utilizara como quisiera; así, el año 1696 en Paris el marqués de L'Hôpital publica un libro de Cálculo Diferencial titulado "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" el cual históricamente se considera el primer libro de Cálculo Diferencial, y en él da a conocer la famosa regla conocida como Regla de L'Hôpital, la cual descubre Jean Bernoulli en 1694 y la envía escrita al marqués para cumplir el referido pacto (véase la sección 4 del capítulo XX en [2]); además, en la introducción de esta obra el marqués reconoce que se ha servido libremente de los descubrimientos de Leibniz y de Bernoulli. En 1694, Jean Bernoulli descubrió que, si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables en $x = a$ tales que $f(a) = g(a) = 0$, y si existe el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)};$$

entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es una herramienta muy eficaz para el cálculo de límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$; con el paso de los años la regla evolucionó y se demostró para resolver límites indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Hoy en día, hay varias (quizá muchas) demostraciones de las formas $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital, y en este artículo doy a conocer una nueva demostración de las referidas formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en un punto a y en ∞.

2. Preliminares y notación

Vale la pena mencionar que, todas las funciones aludidas en este artículo son funciones reales de variable real. En la siguiente sección, se demuestran dos sencillos lemas, los cuales simplificarán la demostración de la Regla de L'Hôpital para las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ en un punto a real. Para ello, se utilizará la teoría de límites infinitos y al infinito, la cuál puede consultarse en [1], en [3], en [4] y en [5]; aquí, sólo se recuerdan algunos conceptos vertidos en la definición 1 dada más adelante, en donde $+\infty$ se lee "más infinito", $-\infty$ se lee "menos infinito" e ∞ se lee "infinito sin signo" y debe interpretarse como $\pm\infty$, lo cual se lee "más o menos infinito" es decir, $\infty = \pm\infty$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 00A05, 00A06, 26A06, 26A24, 97I40.
Palabras clave. Regla de L'Hôpital, formas indeterminadas, infinito entre infinito, límites infinitos, límites al infinito.

y deberá entenderse como una forma abreviada de referirse a las opciones $+\infty$ y/o $-\infty$; por ejemplo, $x \to \infty$ es lo mismo que $x \to \pm\infty$, y expresa en forma abreviada las posibilidades $x \to +\infty$ y/o $x \to -\infty$; asimismo, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ es lo mismo que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, lo cual expresa las opciones $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y/o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$ es lo mismo que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$, lo cual expresa las opciones $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, mientras que, $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$ expresa las posibilidades $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, y/o $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = -\infty$, y/o $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$ y/o $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, de las cuales sólo ocurren dos; a saber, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$. También es oportuno mencionar que, $+\infty$, $-\infty$ e ∞ se comportan opcionalmente en relación con los puntos de acumulación en los límites. Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ es equivalente a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$, lo cual se precisa como sigue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \to 0^+ \\ -\infty & \text{si } x \to 0^- \end{cases}$$

en este caso, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$ se traduce como $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; mientras que, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ se traduce en una única posibilidad; a saber, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, de donde $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Además, $+\infty$ y $-\infty$ no son números, son puntos ideales y representan, por así decirlo, los extremos de la recta real, la cual se expresa como el intervalo abierto $]-\infty, +\infty[$; es decir, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Por tanto, ∞ también es un punto ideal, y como puntos, $+\infty$, $-\infty$ e ∞ son considerados puntos de acumulación en los límites; más aún, para cualquier $N > 0$ los intervalos $]N, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > N\}$ son vecindades de $+\infty$, los intervalos $]-\infty, -N[= \{x \in \mathbb{R} : x < -N\}$ son vecindades de $-\infty$, y los conjuntos abiertos $]-\infty, -N[\cup]N, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : |x| > N\}$ son vecindades de ∞. Más aún, los intervalos abiertos $]a-\delta, a+\delta[= \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} : a-\delta < x < a+\delta\}$ con $\delta > 0$ son vecindades de un punto real a.

Definición 1. Suponga que f es una función de dominio $\mathcal{D}$ tal que $\big(I \setminus \{a\}\big) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ para toda vecindad I de un punto a.

1. Si a es un número real, entonces
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$
si y sólo si para cada $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$0 < |x-a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow f(x) > N.$$
2. Si a es un número real, entonces
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$
si y sólo si para cada $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$0 < |x-a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow f(x) < -N.$$
3. Si $a = +\infty$, entonces
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que
$$x > M \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow f(x) > N.$$
4. Si $a = -\infty$, entonces
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que
$$x < -M \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow f(x) > N.$$

5. Si $a = +\infty$, entonces
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que
$$x > M \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow f(x) < -N.$$
6. Si $a = -\infty$, entonces
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que
$$x < -M \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow f(x) < -N.$$
7. Si el límite es ∞, léase "infinito sin signo" entonces
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$
si y sólo si para cada $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$0 < |x-a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow |f(x)| > N.$$
8. Si el punto de acumulación es ∞, entonces
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$
si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que
$$|x| > M \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow f(x) > N.$$
9. Si el punto de acumulación es ∞, entonces
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$
si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que
$$|x| > M \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow f(x) < -N.$$
10. Si el límite y el punto de acumulación son ambos ∞, entonces
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
si y sólo si para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que
$$|x| > M \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow f(x) > N.$$

Además, para demostrar la Regla de L'Hôpital en cuestión, se utilizará el Teorema del Valor Medio de Cauchy, llamado también Segundo Teorema del Valor Medio, cuya demostración también puede verse en [1] o en [4], y cuyo enunciado es como sigue:

Teorema 2. *Suponga que f y g son funciones reales de variable real, tales que*
1. *f y g son continuas en $[a,b]$, con $a \neq b$;*
2. *f y g son diferenciables en $]a,b[$;*
3. *$g'(x) \neq 0$ para todo x en $]a,b[$;*

entonces, hay un punto c en $]a,b[$ tal que
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

También, es conveniente mencionar que, la notación $\frac{\infty}{\infty}$ es equivalente con $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, la cual es un manera abreviada de referirse a los casos $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$ y $\frac{-\infty}{-\infty}$ de la regla de L'Hôpital en cuestión, y que utilizando las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ alrededor de un número real a, se demuestran las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en $\pm\infty$; es decir, en $+\infty$ y en $-\infty$.

3. Formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en un punto a, y en $\pm\infty$.

Para simplificar la demostración de las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en un punto a, se utilizará el siguiente lema.

Lema 3. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$*, entonces existe una vecindad* I *de* a *tal que* $f(x) \neq 0$ *para todo* x *en* $I \setminus \{a\}$.

Demostración. Suponga primero que a es un número real, y que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, lo cual implica que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ o $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$; ahora, considere cualquier número $N > 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ implica que existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) > N > 0$ para todo x en $]a - \delta_1, a + \delta_1[\setminus\{a\}$, y si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, entonces existe $\delta_2 > 0$ tal que $f(x) < -N < 0$ para todo x en $]a - \delta_2, a + \delta_2[\setminus\{a\}$; en consecuencia, al tomar $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que $f(x) \neq 0$ para todo x en $I =]a - \delta, a + \delta[\setminus\{a\}$.

Por otra parte, suponga que $a = +\infty$ y que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ o $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$. Para cada una de estas posibilidades, se demostrará que existe una vecindad I de $a = +\infty$ tal que $f(x) \neq 0$ en $I \setminus \{a\} = I$. Para este propósito, considere cualquier número $N > 0$, entonces $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ implica que existe $M > 0$ tal que $f(x) > N > 0$ siempre que $x > M$; por tanto, existe una vecindad $I =]M, +\infty[$ de $+\infty$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo x en $I\setminus\{a\} = I$; y si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) < -N < 0$ siempre que $x > K$; así, existe una vecindad $I = \{x \in \mathbb{R} : x > K\}$ de $a = +\infty$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo x en $I \setminus \{a\} = I$. Similarmente, cuando $a = -\infty$ existe una vecindad $I = \{x \in \mathbb{R} : x < -M\}$ de $-\infty$ en donde $M > 0$, tal que $f(x) \neq 0$ para todo x en $I \setminus \{a\} = I$. □

Más aún, para la demostración de las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en un punto a, también se utilizarán la definición de límite restringido a un conjunto $\mathcal{S}$ dada en [3] y enunciada enseguida, y el lema 5 demostrado a continuación.

Definición 4. Sean f una función de dominio $\mathcal{D}$ y $\mathcal{S}$ un conjunto. La función f restringida a $\mathcal{S}$ se escribe $f_{\mathcal{S}}$, se lee "f restringida a $\mathcal{S}$" y tiene dominio $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$, y se define como

$$f_{\mathcal{S}}(x) = f(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{D}.$$

El límite de f en x_0 restringido a $\mathcal{S}$ se escribe $\lim\limits_{x_0} f_{\mathcal{S}}$ o $\lim\limits_{x\to x_0} f_{\mathcal{S}}(x)$, y se define así

$$\lim_{x_0} f_{\mathcal{S}} = \lim_{x\to x_0} f_{\mathcal{S}}(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{D}.$$

Lema 5. *Sean* f *una función de dominio* $\mathcal{D}$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$, *y* a *un punto de acumulación de* $\mathcal{D}$ *y de* $\mathcal{S}$.

1. *Si* a *y* L *son números reales, entonces*
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to a} f_{\mathcal{S}}(x) = L.$$
2. *Si* a *es número real, entonces*
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} f_{\mathcal{S}}(x) = +\infty.$$
3. *Si* a *es número real, entonces*
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} f_{\mathcal{S}}(x) = -\infty.$$
4. *Si* $a = +\infty$ *y* L *es número real, entonces*
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = L.$$

5. *Si $a = -\infty$ y L es número real, entonces*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = L.$$

6. *Si $a = +\infty$, entonces*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = +\infty.$$

7. *Si $a = +\infty$, entonces*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = -\infty.$$

8. *Si $a = -\infty$, entonces*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = +\infty.$$

9. *Si $a = -\infty$, entonces*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = -\infty.$$

10. *Si a es número real, entonces*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to a} f_{\mathcal{S}}(x) = \infty.$$

11. *Si $a = \infty$, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = +\infty.$$

12. *Si $a = \infty$, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = -\infty.$$

13. *Si $a = \infty$, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = \infty.$$

Demostración. Utilizando las definiciones 1 y 4, se demostrarán sólo las partes 1, 8, 10 y 13, las otras partes se demuestran de igual manera. Ahora, dado que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$, en la demostración de cada una de las partes se dará por hecho que $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \mathcal{S}$.

1. Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces por definición, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$

además, por la definición 4 se sigue que $f_{\mathcal{S}}(x) = f(x)$ siempre que $x \in \mathcal{S}$; en consecuencia, dado que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ se tiene

$$0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D} \Longrightarrow |f_{\mathcal{S}}(x) - L| = |f(x) - L| < \varepsilon;$$

entonces, por la definición de límites finitos en un punto real a se obtiene que $\lim_{x\to a} f_{\mathcal{S}}(x) = L$.

8. Suponga que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, entonces por la parte 4 de la definición 4, para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$x < -M \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow f(x) > N; \qquad (*)$$

además, la definición 4 afirma $f_{\mathcal{S}}(x) = f(x)$ siempre que $x \in \mathcal{S}$; en consecuencia, dado que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ de $(*)$ se sigue que

$$x < -M \text{ y } x \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D} \Longrightarrow f_{\mathcal{S}}(x) = f(x) > N;$$

entonces, por la parte 4 de la definición 4, $\lim_{x\to-\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = +\infty$.

10. Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, entonces por la parte 7 de la definición 1, para cada $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow |f(x)| > N; \qquad (**)$$
además, por la definición 4, $f_{\mathcal{S}}(x) = f(x)$ siempre que $x \in \mathcal{S}$; en consecuencia, dado que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ de $(**)$ se sigue que
$$0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D} \Longrightarrow |f_{\mathcal{S}}(x)| = |f(x)| > N;$$
entonces, por la parte 7 de la definición 4, $\lim_{x\to a} f_{\mathcal{S}}(x) = \infty$.
13. Suponga que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, entonces por la parte 10 de la definición 1 para cada $N > 0$ existe $M > 0$ tal que
$$|x| > M \text{ y } x \in \mathcal{D} \Longrightarrow |f(x)| > N; \qquad (***)$$
además, la definición 4 afirma $f_{\mathcal{S}}(x) = f(x)$ siempre que $x \in \mathcal{S}$; en consecuencia, dado que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ de $(***)$ se sigue que
$$|x| > M \text{ y } x \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D} \Longrightarrow |f_{\mathcal{S}}(x)| = |f(x)| > N;$$
entonces, por la parte 10 de la definición 4, $\lim_{x\to\infty} f_{\mathcal{S}}(x) = \infty$.

□

Utilizando las definiciones 1 y 4, los lemas 2 y 5 y el teorema 2, se demuestra el siguiente resultado, conocido como la Regla de L'Hôpital para las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ en un punto real a.

TEOREMA 6. *Suponga que f y g son funciones tales que:*

1. *f y g son diferenciables en $]a-\delta, a+\delta[$ para todo $\delta > 0$, excepto quizá en $x = a$.*
2. *$g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ en $]a - \delta, a + \delta[$.*
3. *$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.*
4. *$\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.*

Entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración. Suponga que $I =]a - \delta, a + \delta[$. Entonces, de la hipótesis 3 y el lema 3 se sigue que $f(z) \neq 0$ y $g(z) \neq 0$ para todo z en $I \setminus \{a\}$, por lo que las funciones
$$\frac{1}{f(z)} = (f(z))^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{g(z)} = (g(z))^{-1}$$
son funciones bien definidas para todo z en $I \setminus \{a\}$; así, al considerar las funciones
$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a \end{cases} \quad \text{y} \quad G(z) = \begin{cases} \frac{1}{g(z)} & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a, \end{cases}$$
la hipótesis 1 implica que F y G son funciones diferenciables en $I \setminus \{a\}$, y para todo z en $I \setminus \{a\}$ se tiene
$$F'(z) = -\left(\frac{1}{f(z)}\right)^2 f'(z) \qquad \text{y} \quad G'(z) = -\left(\frac{1}{g(z)}\right)^2 g'(z); \qquad (i)$$
por tanto, F y G son continuas en $I \setminus \{a\}$; además,
$$\lim_{z\to a} F(z) = \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0 = F(a) \quad \text{y} \quad \lim_{z\to a} G(z) = \lim_{z\to a} \frac{1}{g(z)} = 0 = G(a),$$

por lo que F y G son continuas en todo $\mathbb{R}$; más aún,

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(a+h)}{h} = 0, \quad \text{y}$$

$$G'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{G(a+h)-G(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{G(a+h)}{h} = 0;$$

en consecuencia, las funciones F y G son diferenciables en todo $\mathbb{R}$. En particular, al fijar cualquier punto x en $]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$ se tiene que, las funciones F y G son continuas en $[a,x]$ y diferenciables en $]a,x[$; y también, F y G son continuas en $[x,a]$ y diferenciables en $]x,a[$. Ahora, la hipótesis 2 e (i) implican que $G'(z)\neq 0$ para todo z en $I\setminus\{a\}$, en particular $G'(z)\neq 0$ para todo z en $]x,a[$ o en $]a,x[$; también, dado que $g(z)\neq 0$ en $I\setminus\{a\}$, entonces $G(z)=G(z)-G(a)=g(z)\neq 0$ para todo z en $I\setminus\{a\}$; por tanto, al aplicar el Teorema del Valor Medio de Cauchy a las funciones F y G se tiene que, para el referido punto x existe $y=y_x$ en $]a,x[$ tal que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(y)}{G'(y)}; \tag{ii}$$

o bien, existe $y=y_x$ en $]x,a[$ tal que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{-F(x)}{-G(x)} = \frac{F(a)-F(x)}{G(a)-G(x)} = \frac{F'(y)}{G'(y)}; \tag{iii}$$

en consecuencia, de (i) y (ii), o de (i) y (iii) se sigue que

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\left(\frac{1}{f(y)}\right)^2 f'(y)}{\left(\frac{1}{g(y)}\right)^2 g'(y)};$$

de donde, por el hecho de que $\left(\frac{1}{f(y)}\right)^2 \neq 0$ y $\left(\frac{1}{g(y)}\right)^2 \neq 0$ para todo y en $I\setminus\{a\}$, resulta

$$\frac{\left(\frac{1}{g(y)}\right)^2 g(x)}{\left(\frac{1}{f(y)}\right)^2 f(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}. \tag{iv}$$

Ahora, dado que a es punto de acumulación de $\mathcal{S}=\{y\in\mathbb{R} : a<y<a+\delta\}\subset I$; entonces, de (iv) y el lema 5 se infiere que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{y\to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim_{y\to a^+} \frac{\left(\frac{1}{g(y)}\right)^2 g(x)}{\left(\frac{1}{f(y)}\right)^2 f(x)} = \lim_{a^+} \left(\frac{\left(\frac{1}{g}\right)^2 g}{\left(\frac{1}{f}\right)^2 f}\right)_{\mathcal{S}} \\ &= \lim_{y\to a^+} \frac{\left(\frac{1}{g(y)}\right)^2 g(y)}{\left(\frac{1}{f(y)}\right)^2 f(y)} = \lim_{y\to a^+} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

De igual manera, considerando $\mathcal{S}=\{y\in\mathbb{R} : a-\delta<y<a\}$ se obtiene que $\displaystyle\lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Así, de la hipótesis 4 se concluye que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Vale la pena mencionar que, si en el enunciado del teorema anterior se cambia $x\to a$ por $x\to a^+$ en $]a, a+\delta[$, o $x\to a^-$ en $]a-\delta, a[$, y/o se reemplaza la palabra "existe" por $=\pm\infty$, se obtiene un resultado verdadero, cuya demostración es similar a la del teorema 6. Por ejemplo, estos cambios dan como resultado el teorema que sigue.

Teorema 7. *Suponga que f y g son funciones tales que:*

1. *f y g son diferenciables en $[a, a+\delta[$ para todo $\delta > 0$, excepto quizá en $x = a$.*
2. *$g'(x) \neq 0$ para todo x en $]a, a+\delta[$.*
3. *$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, y $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$.*
4. *$\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$.*

Entonces $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración. Es análoga a la demostración del teorema 6. □

Finalmente, se utilizará el teorema 6 para demostrar las formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ de la Regla de L'Hôpital en $\pm\infty$, la cual se enuncia enseguida, en donde la expresión "para todo $|x| > N$" debe traducirse como "para todo x en $]-\infty, -N[$ si $x \to -\infty$" o "para todo x en $]N, +\infty[$ si $x \to +\infty$", y como se mencionó en la sección 2 anterior, la notación $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ es una forma abreviada de enunciar que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ó $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ó $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, ó $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Teorema 8. *Suponga que f y g son funciones tales que:*

1. *f y g son diferenciables para todo $|x| > N$ y todo $N > 0$.*
2. *$g'(x) \neq 0$ para todo $|x| > N$ y todo $N > 0$*
3. *$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, y $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$.*
4. *$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.*

Entonces $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración. Considere las siguientes funciones.

$$F(z) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{z}\right) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad G(z) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{z}\right) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Note que, por la propiedad arquimediana (véase la sección 3 del capítulo 9 de [3]) para cada $\delta > 0$ y cada z en $]-\delta, \delta[\setminus\{0\}$ existe $N > 0$ tal que $\frac{1}{z} > N$ si $z > 0$, o $-\frac{1}{z} > N$ si $z < 0$, lo cual implica que $\left|\frac{1}{z}\right| > N$ para todo z en $]-\delta, \delta[\setminus\{0\}$; entonces, $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ y $G(z) = g\left(\frac{1}{z}\right)$ para todo z en $]-\delta, \delta[\setminus\{0\}$; en consecuencia, de la hipótesis 1 se infiere que F y G son diferenciables en $]-\delta, \delta[\setminus\{0\}$; en tal caso, para cada z en $]-\delta, \delta[\setminus\{0\}$ se tiene

$$\begin{aligned} F'(z) &= \left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)' = f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(\frac{1}{z}\right)' = f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right), \quad \text{y} \\ G'(z) &= \left(g\left(\frac{1}{z}\right)\right)' = g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(\frac{1}{z}\right)' = g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right); \end{aligned} \tag{$*$}$$

Más aún, de $(*)$ y la hipótesis 2 se sigue que $F'(z) \neq 0$ y $G'(z) \neq 0$ para todo z en $]-\delta, \delta[\setminus\{0\}$. Además, para todo z en $]-\delta, \delta[\setminus\{0\}$ de $(*)$ se obtiene

$$\frac{F'(z)}{G'(z)} = \frac{f'(\frac{1}{z}) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'(\frac{1}{z}) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})}.$$

Ahora, al considerar el cambio de variable $x = \dfrac{1}{z}$, se tiene que $x \to \pm\infty$ es equivalente con $z \to 0^{\pm} = 0$; precisando se tiene, $x \to +\infty$ si sólo si $z \to 0^+$, y $x \to -\infty$ si y sólo si $z \to 0^-$; entonces, con este cambio de variable resulta

$$\lim_{z\to 0} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}; \tag{$**$}$$

así, de la hipótesis 4 se infiere que $\lim\limits_{z\to 0} \frac{F'(z)}{G'(z)}$ existe; además, con el cambio de variable aludido y la hipótesis 3 se tiene

$$\lim_{z\to 0} F(z) = \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \text{y}$$

$$\lim_{z\to 0} G(z) = \lim_{z\to 0} g\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty;$$

por tanto, al aplicar el teorema 6 a las funciones F y G se obtiene

$$\lim_{z\to 0} \frac{F(z)}{G(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{F'(z)}{G'(z)}; \tag{$***$}$$

en consecuencia, de $(**)$, $(***)$ y el cambio de variable multicitado se tiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z\to 0} \frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})} = \lim_{z\to 0} \frac{F(z)}{G(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

es decir, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. $\square$

También aquí, vale la pena mencionar que esta Regla es válida si en el enunciado del teorema 8 se reemplaza la palabra "existe" por $= \pm\infty$. La demostración esencialmente es la misma.

AGRADECIMIENTOS. El autor expresa su gratitud al árbitro(a) anónimo(a) que propuso mejoras para el artículo.

Referencias

[1] Benítez, López, R., *Cálculo diferencial*, Editorial Trillas, México 2018.
[2] Boyer, Carl, B., *Historia de las matemáticas*, Alianza Editorial S. A., Madrid, 1986.
[3] Haaser, B., Norman, LaSalle P., Joseph, Sullivan, A., Joseph, *Análisis matemático 1, curso de introducción*, Editorial Trillas, México, 1976.
[4] Leithold, Louis, *El cálculo con geometría analítica*, Editorial Harla, México 1978.
[5] Piskunov, N., *Diferential and integral calculus*, Mir Publisher, Moscow, 1969.

René Benítez López:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1A Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310, CDMX, México
e-mail: `rbl@xanum.uam.mx`
ORCID: `https://orcid.org/0000-0002-0405-6998`