MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.14, No.1, 2023, páginas 143-222
Recibido 02-05-2022. Aceptado 20-08-2023.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v14n1/boqueri

ELEMENTOS MATEMÁTICOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

JORGE R. BOLAÑOS SERVÍN
ROBERTO QUEZADA BATALLA
JOSUÉ I. RIOS CANGAS

Resumen. En estas notas se exponen con detalle y de manera autocontenida las herramientas básicas de la teoría de los espacios de Hilbert complejos de dimensión infinita, que son necesarias para un primer estudio, matemáticamente riguroso, de la mecánica cuántica. En la última parte incluimos una introducción axiomática a la mecánica cuántica y una breve exposición del modelo del oscilador armónico y de la teoría de estados cuánticos Gaussianos.

Introducción

La mecánica cuántica es la rama de la física que estudia los fenómenos físicos que ocurren en escalas de longitudes muy pequeñas. El calificativo "cuántico" surge de, en contraste con la mecánica clásica, considerar algunas cantidades que toman solamente valores discretos i.e., en "paquetes" o *quantum-quanta* en latín. Aún cuando hay muchas nociones de la mecánica cuántica que aún suscitan controversia, esta teoría se aplica exitosamente para describir el comportamiento de sistema físicos y sus predicciones son consistentes con los experimentos.
Los sistemas físicos que estudia la mecánica cuántica, exhiben propiedades ondulatorias que se pueden describir mediante una ecuación de onda, por ejemplo, la bien conocida "ecuación de Schrödinger", que describe la evolución temporal de una partícula subatómica con masa, en el contexto no relativista. En estas notas trabajamos con el formalismo de matrices de densidad, que permite describir estados que son mezclas de estados puros. En consecuencia, este enfoque resulta ser una herramienta poderosa para describir sistemas cuánticos más generales, por ejemplo, acoplamientos (ensambles) de muchos sistemas cuánticos idénticos.

El material que se presenta en este trabajo está dividido en cuatro secciones compuestas de la siguiente manera: la sección 1 contiene una selección de resultados de índole geométrico y analítico de la teoría de espacios de Hilbert: ortogonalidad y descomposición ortogonal, convexidad, operadores lineales, norma de operadores y funcionales lineales.

La sección 2 se concentra en la clase de los operadores compactos, particularmente en los operadores de la clase de traza y de manera especial, en los operadores de Hilbert-Schmidt. Es relevante mencionar que los estados cuánticos se representan mediante operadores positivos de traza uno.

La sección 3 se dedica al estudio de operadores no acotados que pueden no estar densamente definidos en un espacio de Hilbert. Abordamos también el estudio de operadores cerrados y cerrables, el adjunto de un operador y una introducción a la teoría espectral de operadores. Una parte esencial de esta sección son los operadores simétricos e isométricos, los cuales exhiben similitudes en sus propiedades geométricas y espectrales. Cabe señalar que las observables físicas se representan por operadores simétricos típicamente no acotados.

Por último, en la sección 4 se discuten brevemente postulados de la mecánica cuántica en el marco del formalismo de matrices de densidad, se revisa el modelo del oscilador armónico cuántico y se ofrece una introducción a los estados cuánticos Gaussianos.
Al final de cada sección incluimos una selección de problemas que sirven para complementar estas notas. El lector interesado puede profundizar en el estudio de resultados aquí expuestos, desde los más básicos hasta los más avanzados, en la literatura clásica de operadores lineales, por ejemplo en [1, 2, 3, 4, 13, 20].
Una versión preliminar de estas notas se elaboró para un curso corto de la Escuela Taller de Verano 2022 realizado en la Facultad de Matemáticas de la UAGro en Chilpancingo. Agradecemos el apoyo de CONAHCYT para la escritura de este texto y la retroalimentación por parte de los estudiantes que las han utilizado.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46C05; 47A05; 47B07; 47L60; 81Q10.
Palabras clave. Espacios de Hilbert, operadores lineales acotados y no acotados, mecánica cuántica.

Índice

1. Espacios de Hilbert

Iniciaremos esta sección con el estudio de los elementos que le dan estructura geométrica a un espacio de Hilbert.

1.1. Productos internos y funcionales lineales. A menos que se diga lo contrario todos los espacios vectoriales considerados son **complejos**, es decir, sobre el campo de los números complejos. Recordemos que una transformación lineal de un espacio vectorial V en otro espacio vectorial W es una función Λ de V en W tal que:

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\Lambda(x) + \beta\Lambda(y)\,, \tag{1}$$

para todo $x, y \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. En el caso particular cuando $W = \mathbb{C}$, Λ se llama **funcional lineal**. Por lo tanto, un funcional lineal es una función que toma valores complejos y satisface (1).

Definición 1.1.1. Un espacio vectorial $\mathcal{H}$ se llama **espacio con producto interno** (o espacio unitario) si a cada par ordenado de vectores $x, y \in \mathcal{H}$ se le asocia un número complejo $\langle x, y\rangle$, llamado **producto interno** (o producto escalar) de x con y, que satisface las siguientes propiedades:

(a) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ (la barra denota conjugación compleja).
(b) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
(c) $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, con $\alpha \in \mathbb{C}$.
(d) $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.
(e) $\langle x, x\rangle = 0$ solo si $x = 0$.

Entonces un espacio con producto interno es un par de la forma $(\mathcal{H}\,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Listemos algunas consecuencias inmediatas de estos axiomas:

(1) El inciso (c) implica que $\langle 0, y\rangle = 0$ para todo $y \in \mathcal{H}$.
(2) Los incisos (b) y (c) se pueden combinar en sólo una proposición: *para cada $x \in \mathcal{H}$, la función $y \to \langle x, y\rangle$ es un funcional lineal en $\mathcal{H}$.*
(3) Los incisos (a) y (b) implican que $\langle z, x + y\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle$ (se distribuye en la segunda coordenada).
(4) Incisos (a) y (c) implican que $\langle \alpha x, y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$. Es decir, *para cada $y \in \mathcal{H}$ la función $x \to \langle x, y\rangle$ es **lineal conjugada** (o anti-lineal).*
(5) Los incisos (1) y (e) implican que $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

El producto interno es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ que es *lineal* en la segunda coordenada y *anti-lineal* en la primera. Es importante remarcar que la anterior es una elección *arbitraria* y es la convención típicamente usada en la literatura de la Física y Física-Matemática. En contraposición a esto es común encontrar textos matemáticos donde se usa el producto interno como una función que es *anti-lineal* en la segunda coordenada y *lineal* en la primera. Ambas corrientes dan origen a teorías equivalentes, sin embargo aconsejamos al lector que cada vez que consulte material de un nuevo autor verifique a cuál de estas convenciones se adhiere.

Dicho lo anterior, de manera general una función $S : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ que es lineal en una de las coordenadas y antilineal en la otra se llama **forma sesquilineal**.

Como una consecuencia de (d), podemos definir la **norma** $\|x\|$ del vector $x \in \mathcal{H}$, como la raíz cuadrada no negativa de $\langle x, x\rangle$. De manera que

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle\,.$$

Lema 1.1.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Para $x, y \in \mathcal{H}$, se cumple que*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|\,.$$

Demostración. Para $A = \|x\|^2$, $B = |\langle x, y\rangle|$ y $C = \|y\|^2$, existe un número complejo α de módulo unitario $|\alpha| = 1$ tal que $\alpha\langle y, x\rangle = B$. De hecho,

$$\alpha = \frac{|\langle x, y\rangle|}{\langle y, x\rangle}\,, \quad \text{si} \quad \langle y, x\rangle \neq 0\,.$$

Además, para cualquier λ real tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x-\lambda\alpha y, x-\lambda\alpha y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - \lambda\overline{\alpha}\langle y,x\rangle - \lambda\alpha\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2\lambda|\langle x,y\rangle| + \lambda^2\|y\|^2 . \end{aligned}$$

De esta manera se cumple que

$$A - 2B\lambda + C\lambda^2 \geq 0\,, \tag{2}$$

de donde si $C = 0$, entonces $B = 0$, pues en caso contrario (2) es falsa para $\lambda > 0$ grande. Si $C > 0$, tomando $\lambda = B/C$ en (2) se obtiene que $B^2 \leq AC$. □

Observación 1.1.3. La demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se puede extender al caso de formas sesquilineales que satisfagan las propiedades de un producto interno. Ciertamente, basta tomar la forma sesquilineal $S(x,x) = A \geq 0$, $|S(x,y)| = B$ y $S(y,y) = C$. De esta manera, se cumple la siguiente desigualdad de Cauchy-Schwarz para formas sesquilineales que satisfacen las propiedades de un producto interno:

$$|S(x,y)| \leq S(x,x)^{\frac{1}{2}} S(y,y)^{\frac{1}{2}} . \tag{3}$$

Definición 1.1.4. Un espacio vectorial complejo $\mathcal{X}$ se llama **espacio lineal normado** (o espacio vectorial normado) si cada $x \in \mathcal{X}$ tiene asociado un número real no negativo $\|x\|$, llamado la **norma** de x, tal que para todo $x, y \in \mathcal{X}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$,

(a) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
(c) Si $\|x\| = 0$, entonces $x = 0$.

Entonces un espacio lineal normado es un par $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Además, de (a) se cumple la desigualdad del triángulo

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|y-z\|\,, \quad x,y,z \in \mathcal{X}\,.$$

Definiendo la función $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ mediante

$$d(x,y) = \|x-y\|,$$

se obtiene que cada espacio lineal normado es un espacio métrico $(\mathcal{X}, d)$.

Es bien conocido que un **espacio de Banach** es un espacio vectorial normado que es completo en la métrica d inducida por la norma. Además, una seminorma sobre un espacio vectorial $\mathcal{X}$ es una función real $p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ que satisface

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)\,,$$

para todo $x, y \in \mathcal{X}$ y para $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)\,.$$

A diferencia de una norma, una seminorma puede anularse sobre vectores no nulos de $\mathcal{X}$. Un par $(\mathcal{X}, p)$ donde $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial y p una seminorma se llama **espacio semi-normado**.

Si s es una forma sesquilineal definida positiva en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, entonces $p(x) = \sqrt{s(x,x)}$ es una seminorma en $\mathcal{H}$. Si además satisface la implicación: $s(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$, entonces p es una norma. En efecto, aplicando el lema de Cauchy-Schwarz a la forma sesquilineal positiva se tiene que

$$\begin{aligned} p(x+y)^2 &= s(x+y, x+y) \\ &= s(x,x) + s(y,x) + s(x,y) + s(y,y) \\ &\leq s(x,x) + 2|s(x,y)| + s(y,y) \\ &\leq p(x)^2 + 2p(x)p(y) + p(y)^2 = (p(x)+p(y))^2 . \end{aligned}$$

De esta manera $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. Note que

$$p(\alpha x) = s(\alpha x, \alpha x)^{\frac{1}{2}} = [\alpha\overline{\alpha} s(x,x)]^{\frac{1}{2}} = |\alpha| p(x)\,.$$

Por lo tanto p es una seminorma. Si $s(x,x) = 0$ implica $x = 0$, entonces $p(x) = 0$ conlleva $x = 0$, es decir, p es una norma.

Todo espacio unitario $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ puede considerarse como un espacio vectorial normado $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ con la norma inducida por su producto interno, y también puede considerarse como un espacio métrico $(\mathcal{H}, d)$ con la métrica inducida por su norma. Si este espacio $(\mathcal{H}, d)$ es completo, i.e., si cualquier sucesión de Cauchy converge en $\mathcal{H}$, entonces el espacio unitario original se llama **espacio de Hilbert**.

TEOREMA 1.1.5. *Para cada $y \in \mathcal{H}$ fijo, las funciones:*

$$x \longmapsto \langle x, y \rangle \,, \quad x \longmapsto \langle y, x \rangle \,, \quad x \longmapsto \|x\|, \tag{4}$$

son uniformemente continuas en $\mathcal{H}$. Además, el producto interno es una función continua en el espacio $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Demostración. Para $x, y, h, h' \in \mathcal{H}$, se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle - \langle x + h, y + h' \rangle| &= |\langle h, y \rangle + \langle x, h' \rangle + \langle h, h' \rangle| \\ &\leq \|h\|\|y\| + \|x\|\|h'\| + \|h\|\|h'\| \,, \end{aligned}$$

de donde haciendo $h = 0$ o $h' = 0$ se obtienen las continuidades. De hecho se cumple la continuidad uniforme de las dos primeras funciones en (4). Además se obtiene que $\langle x + h, y + h' \rangle \to \langle x, y \rangle$ cuando $\|h'\| + \|h\| \to 0$, lo cual demuestra la continuidad del producto interno. □

Ejemplo 1.1.I.

1.1.I.1 Si la aplicación $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal, entonces $p(x) = |f(x)|$ es una seminorma en $\mathcal{X}$.

1.1.I.2 Sea $L_1(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones Lebesgue integrables en $\mathbb{R}$, i.e.,

$$L_1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,:\, f \quad \text{es medible y} \quad \int_{\mathbb{R}} |f| < \infty \right\} .$$

La función $p : L_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ dada por:

$$p(f) = \int_{\mathbb{R}} |f|$$

es una seminorma, pero no una norma, debido a que se anula en las funciones que son cero casi en todas partes.

1.1.I.3 Para $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathbb{C}^n$ de todas las n-uplas $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$, donde $\xi_1, ..., \xi_n$ son números complejos, es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\xi}_j \eta_j \,, \qquad y = (\eta_1, ..., \eta_n) \,.$$

1.1.I.4 El espacio vectorial de todas las funciones complejas continuas en $[0, 1]$ es un espacio con producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) dt \,,$$

pero no es un espacio de Hilbert.

1.1.I.5 El espacio $L_\infty(E, \mu)$ de todas las funciones $f : E \to \mathbb{C}$ con (E, μ) un espacio de medida, que satisfacen la condición

$$\exists\, c > 0 \quad \text{tal que} \quad \mu_c(f) = \mu(\{x \in E : |f(x)| > c\}) = 0 \,.$$

Es decir, el espacio de las funciones **esencialmente acotadas**, es un espacio vectorial complejo. El par $(L_\infty(E, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio seminormado, donde la seminorma $\|\cdot\|_\infty$ está definida mediante

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{c > 0 \,:\, \mu_c(f) = 0\} \,.$$

La seminorma $\|\cdot\|_\infty$ no es una norma, pues se anula en las funciones que son cero μ-c.d (casi dondequiera).

1.1.I.6 Denotemos por ℓ_2 el espacio de todas las sucesiones complejas $x = (x_n)$ tales que $\sum_{n\geq 1} |x_n|^2 < \infty$, la estructura de espacio vectorial de ℓ_2 es clara. Defínase el producto interno en ℓ_2 mediante

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 1} \overline{x_n} y_n \,, \qquad y = (y_n) \;.$$

ℓ_2 es un espacio de Hilbert. *Queda como ejercicio demostrar la completez.*

1.1.I.7 Los espacios $\mathcal{L}_p(\mathcal{X}, \mu)$, $p \geq 1$, donde $(\mathcal{X}, \Sigma, \mu)$ es un espacio de medida, son espacios de Banach y $\mathcal{L}_2(\mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de Hilbert.

1.1.I.8 El espacio de las matrices complejas 2×2 es un espacio de Hilbert con las operaciones de suma de matrices y producto por escalares y el producto escalar Hilbert-Schmidt definido por

$$\langle a, b\rangle := \operatorname{tr}(a^* b) \;,$$

donde $\operatorname{tr}(a)$ represente la traza de a. ¿Puede dar una demostración de esto?

1.2. Subespacios. Un subconjunto M de un espacio vectorial $\mathcal{X}$ se llama subespacio de $\mathcal{X}$ si el mismo M es un espacio vectorial con las operaciones de $\mathcal{X}$ restringidas a M. Una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $M \subset \mathcal{X}$ sea subespacio es que sea cerrado bajo las operaciones de suma y producto por escalares, i.e., para cualesquiera $x, y \in M$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene $x + y \in M$ y $\alpha x \in M$.

Ejemplo 1.2.I.

1.2.I.1 Si $\mathcal{X}$ es el espacio de todas las funciones complejas sobre un conjunto E, el conjunto de las funciones acotadas es un subespacio de $\mathcal{X}$.

1.2.I.2 Si $\mathcal{X}$ es como en el ejemplo 1, el conjunto de las funciones que cumple $|f(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathcal{X}$, no es un subespacio de $\mathcal{X}$, pues no es cerrado bajo las operaciones de $\mathcal{X}$.

1.2.I.3 El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ tiene los siguientes subespacios y solo estos:
- a) El espacio total $\mathbb{R}^3$.
- b) Todos los planos que pasan por el origen.
- c) Todas las rectas que pasan por el origen.
- d) El espacio trivial $\{0\}$.

1.2.I.4 En ℓ_2 el conjunto de sucesiones complejas $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{n} = 0 \,,$$

es un subespacio de ℓ_2.

1.2.I.5 Sea $C[0,1]$ el espacio de las funciones complejas continuas en $[0,1]$ y considere M como el conjunto de las funciones derivables; este es un subespacio.

Un conjunto de vectores $x_1, .., x_n$ es **linealmente independiente** (abreviado l.i.), si cualquier combinación lineal

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \,,$$

implica que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Caso contrario se dice que el conjunto es **linealmente dependiente** (abreviado l.d.). Un subconjunto S es l.i. si cada subconjunto finito de S es l.i.

Un conjunto de elementos $x_1, x_2, \ldots$ de un espacio vectorial $\mathcal{X}$ se dice que **generan** a $\mathcal{X}$, si cualquier elemento de $y \in \mathcal{X}$ se puede representar de manera única como

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j \,, \quad \alpha_j \in \mathbb{C} \,.$$

Además, los vectores $x_1, x_2, \ldots$ forman una **base** de $\mathcal{X}$ si lo generan y son l.i.

Un subespacio M de un espacio vectorial $\mathcal{X}$ es de **dimensión finita** igual a k, si tiene una base con k elementos. Si ningún conjunto finito de vectores genera a M, entonces M tiene dimensión infinita.

TEOREMA 1.2.1. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial y M un subespacio de $\mathcal{X}$ de dimensión k. Entonces, el máximo número de vectores l.i. en M es k.*

Demostración. Bastará demostrar que cualquier subconjunto de $k+1$ vectores es l.d. Por inducción, sea $k = 1$ y x_1 una base de M. Si $y_1, y_2 \in M$ y ninguno de estos vectores es nulo, entonces existen escalares no nulos α_1, α_2 tales que $y_1 = \alpha_1 x_1$ y $y_2 = \alpha_2 x_2$. Así, $\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2 = 0$ y no todos los escalares son nulos.

Supongamos ahora que cualquier subconjunto de k vectores en un subespacio de dimensión $k-1$ es l.d. Sean $y_1, y_2, .., y_{k+1}$ vectores en un subespacio $M \subset \mathcal{X}$ de dimensión k, tales que ninguno de ellos es nulo. Si $x_1, .., x_k$ es una base de M tenemos para cada $j = 1, 2, \ldots, k+1$, que

$$y_j = \alpha_{1j} x_1 + \alpha_{2j} x_2 + \alpha_{kj} x_k \,,$$

con α_{ij}'s no todos iguales a cero. Suponga $\alpha_{11} \neq 0$ y considere los k vectores

$$\alpha_{11} y_j - \alpha_{1j} y_1 \,, \qquad j = 2, 3, \ldots, k+1 \,.$$

Estos vectores pertenecen a M_k, el subespacio generado por $x_2, .., x_k$, pues

$$\begin{aligned} \alpha_{11} y_j - \alpha_{1j} y_1 &= \alpha_{11}\alpha_{1j} x_1 + \alpha_{11}\alpha_{2j} x_2 + \alpha_{11}\alpha_{kj} x_k - \alpha_{1j}\alpha_{1j} x_1 - \alpha_{1j}\alpha_{2j} x_2 - ... \\ &\quad ... - \alpha_{1j}\alpha_{k1} x_k \\ &= (\alpha_{11}\alpha_{2j} - \alpha_{1j}\alpha_{21}) x_2 + ... + (\alpha_{11}\alpha_{kj} - \alpha_{1j}\alpha_{k1}) x_k \,. \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción existen escalares $\beta_2, .., \beta_{k+1}$, no todos nulos, tales que

$$\beta_2(\alpha_{11} y_2 - \alpha_{12} y_1) + ... + \beta_{k+1}(\alpha_{11} y_{k+1} - \alpha_{1k+1} y_1) = 0 \,,$$

es decir,

$$\beta_2 \alpha_{11} y_2 + ... + \beta_{k+1}\alpha_{11} y_{k+1} - (\beta_2 \alpha_{12} + \beta_{k+1}\alpha_{1k+1}) y_1 = 0$$

de donde se sigue la afirmación. □

Un **subespacio cerrado** M de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un subespacio que es cerrado con la topología inducida por la métrica de $\mathcal{H}$.

Ejemplo 1.2.II.

1.2.II.1 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se cumple lo siguiente:
- a) El único subespacio de dimensión 3 es el mismo $\mathbb{R}^3$.
- b) El único subespacio de dimensión cero es $\{0\}$.
- c) Los subespacios de dimensión dos son todos los planos que pasan por el origen.
- d) Las rectas que pasan por el origen son los subespacios de dimensión uno.
- e) Todo subespacio de $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión finita menor o igual a tres.

1.2.II.2 Sobre el espacio ℓ_2 se tiene que:
- a) El subconjunto M de vectores (sucesiones) de la forma $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$ es un subespacio de dimensión n.
- b) El subespacio M de todas las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{n} = 0 \,,$$

es un subespacio de ℓ_2 de dimensión infinita. Además, uno verifica que el conjunto de vectores $\{(1, -2, 3, -4, \ldots, 2k-1, -2k, \ldots)\}_{k\geq 1}$ es l.i. en M.

1.2.II.3 En $L_2[0,1]$, el subconjunto de las funciones que satisfacen la condición:

$$\int_0^1 f(t)dt = 0\,,$$

es un subespacio de dimensión infinita. Esto debido a que el conjunto de funciones $\{\sin(2\pi k)\}_{k\geq 1}$ es l.i. y

$$\int_0^1 \sin(2k\pi t)dt = 0\,, \quad \text{para toda} \quad k \geq 1\,.$$

1.2.II.4 En ℓ_2, el conjunto M de las sucesiones con solo un número finito de coordenadas distintas de cero es un subespacio pero no es un subespacio cerrado de ℓ_2; la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ definida por:

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$$

es una sucesión en M que converge en ℓ_2 al punto $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \notin M$.

1.2.II.5 En ℓ_2, el subconjunto M de las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{n} = 0$$

es un subespacio cerrado de ℓ_2. En efecto, si $\{x_k = (x_{k,n})_{n\geq 1}\}_{k\geq 1}$ es una sucesión en M que converge en ℓ_2 a $x = (x_n)_{n\geq 1}$, entonces como

$$\langle x_0, x_k\rangle = \sum_{n\geq 1} \frac{x_{k,n}}{n} = 0\,, \quad k = 1, 2, \dots$$

donde $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ y como el producto interno es una función continua en la segunda componente, tenemos que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{n} = \langle x_0, x\rangle = \lim_k \langle x_0, x_k\rangle = 0\,,$$

es decir, $x \in M$.

1.3. Ortogonalidad. Dos elementos x, y en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se dicen **ortogonales** si $\langle x, y\rangle = 0$ y se denota por $x \perp y$. Como $\langle x, y\rangle = 0$ implica que $\langle y, x\rangle = 0$, entonces $\perp$ es una relación simétrica.

Mediante el símbolo $x^\perp$ denotaremos al conjunto de todos los $y \in \mathcal{H}$ que son ortogonales a x. Si M es un subespacio de $\mathcal{H}$, $M^\perp$ denota al conjunto de todos los $y \in \mathcal{H}$ que son ortogonales a cada $x \in M$. Se le llama **conjunto ortogonal** a M. Obsérvese que $x^\perp$ es un subespacio de $\mathcal{H}$ debido a que si $x \perp y$ y $x \perp y'$ entonces $x \perp y + y'$ y $x \perp \alpha y$, con $\alpha \in \mathbb{C}$. Además,

$$x^\perp = \{y \in \mathcal{H} \,:\, \langle x, y\rangle = 0\}\;,$$

es decir, es la imagen inversa del $\{0\}$ bajo la función continua $y \longmapsto \langle x, y\rangle$, por lo tanto $x^\perp$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. Más aún, de la definición se sigue que

$$M^\perp = \bigcap_{x\in M} x^\perp,$$

por lo tanto $M^\perp$ también es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, al ser intersección de subespacios cerrados.

Introduzcamos el siguiente concepto sobre espacios vectoriales. Decimos que un subconjunto E de un espacio vectorial $\mathcal{X}$ es **convexo** si tiene la siguiente propiedad geométrica:

Para cualesquiera $x, y \in E$ y $0 < t < 1$, el punto

$$z_t = (1-t)x + ty\,,$$

también pertenece a E. Además, se cumple lo siguiente:

(a) Cualquier subespacio de $\mathcal{X}$ es convexo.

(b) Si $E \subset \mathcal{X}$ es convexo, entonces cada uno de sus trasladados

$$E + x = \{y + x \, : \, y \in E\}$$

también son convexos.

(c) La bola abierta unitaria B en un espacio normado es un subconjunto convexo. Ciertamente, si $x, y \in B$ y $0 < t < 1$, entonces:

$$\|(1-t)x + ty\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| < (1-t) + t = 1\,.$$

El siguiente teorema es uno de los resultados geométricos más importantes en la teoría de los espacios de Hilbert.

Teorema 1.3.1 (Beppo-Levi). *Cualquier subconjunto convexo, cerrado y no vacío E de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tiene un único elemento de norma mínima.*

Demostración. Debemos demostrar que existe un único $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| \leq \|x\|$ para cualquier $x \in E$. De la definición de producto interno se puede obtener, después de algunos cálculos, la siguiente **identidad del paralelogramo** *(Tarea)*:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)\,, \quad x, y \in \mathcal{H}\,. \tag{5}$$

Sea $\delta = \text{ínf}\{||x|| \, : \, x \in E\}$. Este ínfimo existe pues el conjunto está acotado inferiormente por 0 y por consiguiente $\delta \geq 0$. Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en E tal que $\text{lím}_n ||x_n|| = \delta$. Como E es convexo, $(x_n + x_m)/2 \in E$, con $m, n \in \mathbb{N}$ y

$$\delta \leq \left\| \frac{1}{2}(x_n + x_m) \right\| . \tag{6}$$

Usando (5) y (6), uno tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}||x_n - x_m||^2 &= \frac{1}{2}||x_n||^2 + \frac{1}{2}||x_m||^2 - \frac{1}{4}||x_n + x_m||^2 \\ &\leq \frac{1}{2}||x_n||^2 + \frac{1}{2}||x_m||^2 - \delta^2 \to 0 \end{aligned}$$

debido a que $||x_n||^2, ||x_m||^2 \to \delta$, es decir, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy. Como $\mathcal{H}$ es completo y E es cerrado, entonces existe $x_0 \in E$ tal que $x_n \to x_0$ y como la norma es una función continua, $||x_0|| = \text{lím}_n ||x_n|| = \delta$. □

Veamos a continuación dos consecuencias del teorema de Beppo-Levi 1.3.1.

Corolario 1.3.2. *Sea E un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, para cada $x \in \mathcal{H}$, existe un único vector $x_0 \in E$ tal que*

$$||x - x_0|| = \inf_{y \in E} ||x - y||\,. \tag{7}$$

Demostración. Considerando $E_x = \{x - y \, : \, y \in E\}$, uno comprueba de manera simple que E_x es cerrado, convexo y no vacío. Por lo tanto, aplicando el teorema 1.3.1 a E_x se obtiene la existencia de un único $x_0 \in$ tal que (7) se cumple. □

Corolario 1.3.3. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Sea $x \in \mathcal{H}$ y $x_0 \in M$ el único vector que satisface:*

$$||x - x_0|| = \inf_{y \in E} ||x - y||\,.$$

Entonces, $x - x_0$ pertenece a $M^\perp$.

Demostración. Como $x_0 \in M$ para todo $y \in M$, con $||y|| = 1$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$||x - x_0 - \alpha y||^2 \geq ||x - x_0||^2\,,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - x_0 - \alpha y, x - x_0 - \alpha y\rangle - \langle x - x_0, x - x_0\rangle \\ &= -\alpha\langle y, x - x_0\rangle - \overline{\alpha}\langle x - x_0, y\rangle + |\alpha|^2\,. \end{aligned}$$

Haciendo $\alpha = \langle x - x_0, y\rangle$, se obtiene $0 \leq -|\langle x - x_0, y\rangle|^2$, i.e., $\langle x - x_0, y\rangle = 0$, para todo $y \in M$. Por lo tanto, $x - x_0 \in M^{\perp}$. Note que la restricción $||y|| = 1$ no es esencial. $\square$

Observación 1.3.4. Al vector x_0 definido en el corolario 1.3.3 se le llama la **proyección ortogonal** de x sobre el subespacio cerrado M. Por consiguiente, cada elemento de $\mathcal{H}$ tiene una representación única de la forma:

$$x = x_0 + (x - x_0)\,,$$

con $x_0 \in M$ y $x - x_0 \in M^{\perp}$, es decir,

$$\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}\,, \tag{8}$$

donde $\oplus$ representa la suma ortogonal. Más aún, si $x = x_1 + x_2 \in \mathcal{H}$, con $x_1 \in M$ y $x_2 \in M^{\perp}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2\rangle = \|x_1\|^2 + \langle x_1, x_2\rangle + \langle x_2, x_1\rangle + \|x_2\|^2 \\ &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\,, \end{aligned} \tag{9}$$

que es una generalización del **Teorema de pitágoras**.

Teorema 1.3.5. *Para un subespacio cerrado M de $\mathcal{H}$, existe un único par de transformaciones P y Q tales que P envía $\mathcal{H}$ en M y Q envía $\mathcal{H}$ en $M^{\perp}$ y*

$$x = Px + Qx\,, \quad x \in \mathcal{H}\,. \tag{10}$$

Además, estas transformaciones cumplen las siguientes propiedades:
(a) Si $x \in M$, entonces $Px = x$ y $Qx = 0$.
(b) Si $x \in M^{\perp}$, entonces $Px = 0$ y $Qx = x$.
(c) Para $x \in M$, se tiene que $||x - Px|| = \inf_{y\in M} ||x - y||$.
(d) $||x||^2 = ||Px||^2 + ||Qx||^2$.
(e) P y Q son operadores lineales.

Demostración. Considere a P como la proyección ortogonal de x sobre M y defina $Qx = x - Px \in M^{\perp}$. Entonces los puntos (a), (b) y (e) se cumplen. Además, P envía $\mathcal{H}$ en M y Q envía $\mathcal{H}$ en $M^{\perp}$. Para la unicidad, si P_1 y Q_1 son otro par de transformaciones que satisfacen (10), entonces $x = P_1x + Q_1x$, con $P_1x \in M$ y $Q_1x \in M^{\perp}$. Así,

$$P_1x - Px = Qx - Q_1x\,,$$

como $P_1x - Px \in M$, $Qx - Q_1x \in M^{\perp}$ y $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ (que es una consecuencia inmediata de la propiedad; $\langle x, x\rangle = 0$ implica $x = 0$), entonces $P_1x = Px$ y $Q_1x = Qx$, que demuestra la unicidad. El punto (c) es consecuencia directa del corolario 1.3.2 y (d) se sigue de manera simple de (9). $\square$

El siguiente resultado es una implicación directa del teorema 1.3.5.

Corolario 1.3.6. *Si M es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $M \neq \mathcal{H}$, entonces existe $y \in \mathcal{H}$ no cero tal que $y \perp M$, i.e., $y \in M^{\perp}$ (o bien $M^{\perp} \neq 0$).*

Definición 1.3.7. Considere una transformación lineal Λ de un espacio normado $\mathcal{X}$ en otro espacio normado $\mathcal{Y}$ y defina su norma como

$$\|\Lambda\| = \sup\left\{\frac{\|\Lambda x\|}{\|x\|} \;:\; x \in \mathcal{X}, \quad x \neq 0\right\}. \tag{11}$$

Cuando $\|\Lambda\| \leq \infty$ se dice que Λ es una **Transformación lineal acotada** (o un operador lineal acotado).

No debe causar confusión en (11) el usar el mismo símbolo para la norma que aparece en el numerador y la que aparece en el denominador, pues note que son normas que actúan sobre vectores de espacios distintos. Trabajaremos de manera frecuente con estas expresiones. Además, el conjunto sobre el que toma el supremo en (11) se puede restringir a vectores al conjunto de vectores unitarios . Pues por una parte,

$$\|\Lambda x\| \leq \|\Lambda\| \,, \quad x \in \mathcal{X} \,, \quad \|x\| = 1 \,.$$

Mientras que por la otra, para todo $\epsilon > 0$ existe un vector unitario $x \in \mathcal{X}$, tal que $\|\Lambda x\| > \|\Lambda\| - \epsilon$, de donde se cumple que $\|\Lambda\| = \sup_{\|x\|=1} \|\Lambda x\|$. Note que $\|\Lambda\|$ es el número más pequeño que satisface la desigualdad $\|\Lambda x\| \leq \|\Lambda\| \, \|x\|$, para todo $x \in \mathcal{X}$.

Geométricamente, se puede decir que un operador acotado envía la bola unitaria cerrada en $\mathcal{X}$ en la bola cerrada en $\mathcal{Y}$ con centro en 0 y radio $\|\Lambda\|$. En el caso cuando $\mathcal{Y} = \mathbb{C}$ al operador acotado Λ se llama **funcional lineal acotado**. Es decir, un fuuncional lineal acotado es un operador lineal acotado cuyo contradominio son los complejos.

Teorema 1.3.8. *Para una transformación lineal Λ entre dos espacios normados $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, los siguientes son equivalentes:*

(a) Λ es acotada.
(b) Λ es continua.
(c) Λ es continua en punto de $\mathcal{X}$.

Demostración. Como $||\Lambda(x_1 - x_2)|| \leq ||\Lambda|| ||x_1 - x_2||$, es claro que (a) implica (b) y a la vez (c). Supóngase que λ es continua en x_0. A cada $\epsilon > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que $||x - x_0|| < \delta$ implica $||\Lambda x - \Lambda x_0|| < \epsilon$. En otras palabras, $||x|| < \delta$ conlleva a

$$||\Lambda(x_0 + x) - \Lambda x_0|| < \epsilon \,.$$

Pero la linealidad de λ cumple que $||\Lambda x|| < \epsilon$. Por otro lado,

$$\forall x \neq 0 \quad \text{y} \quad \delta_1 < \delta \,, \left\| \frac{\delta_1 x}{\|x\|} \right\| = \delta_1 < \delta \Rightarrow \left\| \Lambda\left(\frac{\delta_1 x}{\|x\|} \right) \right\| < \epsilon \,,$$

de donde se sigue que $\|\Lambda x\| \,/\, \|x\| < \epsilon/\delta_1$. Por lo tanto, por la propiedad del supremo, $\|\Lambda\| < \infty$, por lo que (c) implica (a). □

Dos subespacios cerrados E_1, E_2 de un espacio vectorial normado $\mathcal{X}$ son *l.i.* si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Además, si para cada $x \in \mathcal{X}$, existen $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, tales que

$$x = x_1 + x_2 \,, \tag{12}$$

entonces $\mathcal{X}$ es la **suma directa** de E_1 y E_2 y se denota como $\mathcal{X} = E_1 \oplus E_2$. Cuando en $\mathcal{X}$ exista un producto interno, la suma directa se denota como $\dot{+}$ para diferenciarlo de la suma ortogonal $\oplus$.

Observación 1.3.9. Si un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es suma ortogonal de dos subespacios cerrados E_1, E_2, entonces $E_1 = E_2^{\perp}$. Además, es simple ver que la suma ortogonal implica la suma directa.

Observación 1.3.10. La descomposición en (12) es única. Ciertamente, si tenemos $x = y_1 + y_2$, con $y_1 \in E_1$ y $y_2 \in E_2$, entonces se cumple que

$$e_1 - y_1 = e_2 - y_2 \in E_1 \cap E_2 = \{0\} \,,$$

de donde se sigue la unicidad.

Proposición 1.3.11. *Para $\mathcal{X} = E_1 \oplus E_2$, la forma $E_1 \times E_2 \to \mathcal{X}$ dada por $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, es un homeomorfismo si y solo si por lo menos una de las proyecciones $P_i : X \to E_i$ sobre E_i, para $i = 1, 2$, es continua.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, consideramos $P_1 : \mathcal{X} \to E_1$ continua. Entonces, $P_2 = I - P_1$ es continua al igual que la función $\mathcal{X} \to E_1 \times E_2$ dada por $x \mapsto (P_1(x), P_2(x))$. La función inversa $E_1 \times E_2 \to \mathcal{X}$ que actúa $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ es continua, ya que las operaciones lineales son continuas en un espacio normado. Por lo tanto, se tiene el homeomorfismo entre $\mathcal{X}$ y $E_1 \times E_2$. □

Observación 1.3.12. La proyección ortogonal $P : \mathcal{H} \to M$, sobre un subespacio cerrado M de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es un operador continuo. Ciertamente, de (8) y (9) se tiene que

$$\|Px\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2 \ ,$$

de donde se sigue que P es acotado.

Hemos observado que para cada $y \in E$, el funcional $x \to \langle y, x\rangle$ es lineal y continuo en $\mathcal{H}$. Es un hecho notable que todos los funcionales lineales sobre $\mathcal{H}$ son de este tipo.

TEOREMA 1.3.13. *Para cada funcional continuo $L\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, se tiene un único $y \in \mathcal{H}$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$,*

$$Lx = \langle y, x\rangle \, . \tag{13}$$

Demostración. Si $Lx = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces basta tomar $y = 0$. En otro caso, defínase el conjunto

$$M = \{x \, : \, Lx = 0\} = L^{-1}[\{0\}] \, .$$

La linealidad y continuidad de L muestra que M es un subespacio cerrado. Como $Lx \neq 0$ para algún $x \in \mathcal{H}$, el corolario 1.3.6 muestra que $M^{\perp} \neq \{0\}$. Entonces tenemos la existencia de $z \in M^{\perp}$ unitario y consideremos $u = (Lx)z - (Lz)x$. Como

$$Lu = LxLz - LzLx = 0 \, ,$$

tenemos que $u \in M$ y $\langle z, u\rangle = 0$, que sustituyendo u se sigue que $Lx = \left\langle \overline{(Lz)}z, x \right\rangle$, de donde se sigue (13). Para la unicidad, si existe $\hat{y}$ que cumple (13), entonces $\langle y - \hat{y}, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, lo cual implica que $\hat{y} = y$. $\square$

1.4. Conjuntos ortonormales. Recordemos que un subconjunto S de un espacio vectorial E es l.i. si cualquier subconjunto finito de S es l.i. El conjunto **generado** span S (también denotado por $[S]$) de S, consiste en todas las combinaciones lineales de todos los subconjuntos finitos de S y es un subespacio vectorial de E.

Un conjunto de vectores $M = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es **ortogonal** si para cada par de elementos distintos $u_n, u_m \in M$, se tiene $\langle u_n, u_m\rangle = 0$. El conjunto M es **ortonormal** si es ortogonal y sus elementos son de norma uno.

Observación 1.4.1. Extendiendo el concepto de (9), podemos calcular de manera directa que un conjunto ortogonal finito $M = \{u_n\}_{n=1}^{k} \subset \mathcal{H}$, con $k \in \mathbb{N}$, es linealmente independiente y cumple

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} u_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \|u_n\|^2 \ .$$

Además, si M es ortonormal, para $x = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n u_n \in \mathcal{H}$, con $\alpha_n \in \mathbb{C}$, entonces es simple comprobar que $\alpha_n = \langle u_n, x\rangle$ y $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n|^2$.

Si $M = \{u_n\}_{n\in\mathcal{A}}$ es ortonormal, indexado con $\mathcal{A}$, podemos asociar a cada $x \in \mathcal{H}$, una función compleja sobre el conjunto $\mathcal{A}$ dada por

$$\widehat{x}(n) = \langle u_n, x\rangle \, , \quad n \in \mathcal{A} \, .$$

Algunos autores llaman a cada $\widehat{x}(\cdot)$ **coeficientes de Fourier** de x relativos al conjunto M.

1.5. Bases ortonormales: un problema de aproximación. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_k$ un conjunto de vectores l.i. en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $x \in \mathcal{H}$. Surge el problema de encontrar un método para calcular el valor mínimo de

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \right\| , \quad c_j \in \mathbb{C} .$$

Si mostramos que $M = \text{span}\,\{v_n\}_{n=1}^{k}$ es cerrado, uno puede aplicar el teorema de Beppo-Levi 1.3.1 y deducir la existencia de un único elemento de norma mínima,

$$x_0 = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j$$

que satisface $x - x_0 \in M^{\perp}$. Con lo anterior, podemos obtener información acerca de los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Lema 1.5.1. *Sea E subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $y \notin E$. Entonces, E,* span $\{y\}$ *son linealmente independientes y $E \dotplus$* span $\{y\}$ *es cerrado.*

Demostración. Como $y \notin E$ se sigue que E y span $\{y\}$ son l.i. Luego, sea z un punto límite de $E \dotplus \text{span}\,\{y\}$, i.e.,

$$z = \lim_{n\to\infty} (x_n + \lambda_n y) ,$$

donde $\{x_n\} \subset E$ y $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$. Toda sucesión convergente en un espacio métrico es acotada, entonces existe $\eta > 0$ tal que

$$||x_n + \lambda_n y|| < \eta , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Si $|\lambda_n| \to \infty$ entonces

$$||\lambda_n^{-1} x_n + y|| < \frac{\eta}{|\lambda_n|} \to 0 ,$$

de manera que $y \in E$, lo cual resulta contradictorio. Por consiguiente, $\{\lambda_n\}$ es acotada y debe tener una subsucesión convergente $\{\lambda_{n_i}\}_{i\geq 1}$ a algún λ. Como

$$z_n = x_n + \lambda_n y$$

se sigue que $\{z_n\}_{n\geq 1}$, $\{\lambda_n y\}_{n\geq 1}$ son sucesiones de Cauchy al igual que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ y converge a algún punto $x \in E$. Por lo tanto, $z = x + \lambda y$ y $E \dotplus \text{span}\,\{y\}$ contiene a z, es decir, es cerrado. □

El siguiente resultado se sigue de lema anterior aplicando inducción.

Corolario 1.5.2. *Cualquier subespacio que es generado por un número finito de vectores es cerrado.*

Pongamos $a_{ij} = \langle v_j, v_i \rangle$ y $b_i = \langle x, v_i \rangle$. Si x_0 es la proyección ortogonal de x sobre $\{v_j\}_{j=1}^{k}$ l.i., entonces

$$x_0 = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \tag{14}$$

es el elemento minimizador. Debemos tener que

$$\langle x - x_0, v_i \rangle = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{15}$$

lo cual nos lleva al siguiente sistema

$$b_i = \langle x, v_i \rangle = \langle x_0, v_i \rangle = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} c_j , \qquad 1 \leq i \leq k . \tag{16}$$

Sabemos que x_0 existe y es único, entonces el determinante de a_{ij} es diferente de cero y las c_j's se pueden calcular de (16). Ahora, si δ el mínimo valor de $||x - \sum_{j=1}^{k} c_j v_j||$. Entonces por (14) se tiene $\langle x - x_0, x_0 \rangle$. Así,

$$\delta^2 = \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = \langle x, x - x_0 \rangle = \left\langle x, x - \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \right\rangle = ||x||^2 - \sum_{j=1}^{k} c_j b_j \,. \tag{17}$$

Esto resuelve el problema en términos de a_{ij} y b_i.

Consideremos ahora un caso especial: reemplacemos $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ por un subconjunto ortonormal $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Entonces $a_{ij} = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker) y de (16) se obtiene $c_{ij} = b_{ij}$. Además, (17) implica que

$$\delta^2 = ||x||^2 - \sum_{j=1}^{k} |b_j|^2$$

Con lo anterior hemos probado lo siguiente.

TEOREMA 1.5.3. *Sea $\{u_j\}_{j=1}^{k} \subset \mathcal{H}$ un conjunto ortonormal y $x \in \mathcal{H}$. Entonces*

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{k} \langle u_j, x \rangle u_j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j \right\| ,$$

para todos los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. La igualdad se cumple si y solo si $\lambda_j = \langle u_j, x \rangle$, para $j = 1, 2, \ldots, k$. El vector

$$\sum_{j=1}^{k} \langle u_j, x \rangle u_j$$

es la proyección ortogonal de x en el subespacio $\operatorname{span}\{u_n\}_{n=1}^{k}$*. Si δ es la distancia de x a este subespacio, entonces:*

$$\sum_{j=1}^{k} |\langle u_j, x \rangle|^2 = ||x||^2 - \delta^2 \,. \tag{18}$$

Lo siguiente se conoce como la **desigualdad de Bessel** y es consecuencia del teorema anterior.

COROLARIO 1.5.4. *Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un conjunto ortonormal en $\mathcal{H}$ y $x \in \mathcal{H}$. Si $\hat{x}(\alpha) = \langle u_\alpha, x \rangle$ entonces*

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq ||x||^2 \,. \tag{19}$$

Como A es cualquier conjunto de índices (posiblemente no numerable), la suma en el lado izquierdo de (19) debe definirse de una manera apropiada. En general, para $0 \leq \varphi(\alpha) \leq \infty$, con $\alpha \in A$, donde el símbolo

$$\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) \tag{20}$$

denota el supremo del conjunto de todas las sumas $\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_k)$, con elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, diferentes de A, se tiene que (19) es consecuencia directa de (18).

Obsérvese que (20) es la integral de Lebesgue de φ con respecto a la medida de conteo en A. Sea $\ell_2(A) = L_2(A)$ con respecto a esta medida de conteo, entonces (19) asegura que $\hat{x} \in \ell_2(A)$ y

$$\|\hat{x}\|_2 \leq \|x\| \,.$$

Lo siguiente es una consecuencia sencilla de (19).

TEOREMA 1.5.5. *Para $x \in \mathcal{H}$ y $\{u_\alpha\} \subset \mathcal{H}$ un conjunto ortonormal, el conjunto de todos los índices α tales que $\hat{x}(\alpha) \neq 0$ es a lo más contable.*

Demostración. Sea $\Lambda = \sum_{\alpha\in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 = ||\hat{x}||^2 < \infty$, debido a que $||\hat{x}||^2 < ||x||^2$, y considere $J = \{\alpha \in A : \hat{x}(\alpha) \neq 0\}$. El siguiente subconjunto de A

$$J_n = \left\{\alpha \in A : |\hat{x}(\alpha)|^2 \in \left[\frac{\Lambda}{n+1}, \frac{\lambda}{n}\right]\right\},$$

es finito para cada $n \in \mathbb{N}$, de lo contrario $\Lambda = \infty$. Además, $J = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ de donde se sigue que J es a lo más numerable.

Sea F la transformación que asigna a cada $x \in \mathcal{H}$, la función $\hat{x}$ sobre A. Para cada $\alpha \in A$, $x \to \langle u_\alpha, x\rangle = \hat{x}(\alpha)$ es lineal. Más aún, F es una transformación lineal de $\mathcal{H}$ en $\ell_2(A)$, ya que de (19), $\hat{x} \in \ell_2(A)$ y

$$||\hat{x} - \hat{y}||_2 \leq ||x - y||,$$

es decir, F es una contracción. En particular F es continua. □

Veremos ahora que la completez de $\mathcal{H}$ implica que F actúa de $\mathcal{H}$ sobre $\ell_2(A)$ y que es una isometría, i.e., $||\hat{x}||_2 = ||x||$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Teorema 1.5.6 (Teorema de Riesz-fisher). *Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$ y suponga que $\varphi \in \ell_2(A)$. Entonces $\varphi = \hat{x}$ para algún $x \in \mathcal{H}$.*

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$, considere $A_n = \{\alpha : |\varphi(\alpha)| > 1/n\}$. Cada A_n es finito (de hecho, A_n tiene a lo más $n^2||\varphi||_2^2$ elementos). Pongamos

$$x_n = \sum_{\alpha\in A_n} \varphi(\alpha)u_\alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\hat{x}_n = \varphi\chi_{A_n}$, $\hat{x}_n(\alpha) \to \varphi(\alpha)$, para todo $\alpha \in A$ y $|\hat{x}_n|^2 \leq |\varphi|^2$. En virtud del teorema de convergencia dominada de Lebesgue [17, Teo. 1.34], $\|\hat{x}_n\|_2 \to \|\varphi\|_2$. Por consiguiente, $\{\hat{x}_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de cauchy en $\ell_2(A)$ y como cada A_n es finito,

$$||x_n - x_m|| = ||\hat{x_n} - \hat{x_m}||_2,$$

i.e., $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathcal{H}$ y por la completez, $x_n \to x \in \mathcal{H}$. Por lo tanto,

$$\hat{x}(\alpha) = \langle u_\alpha, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_\alpha, x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \hat{x}_n(\alpha) = \varphi(\alpha), \quad \alpha \in A$$

lo cual completa la demostración. □

El ingrediente crucial en la demostración del teorema 1.5.6 anterior es la completez de L_2. Este hecho es reconocido y frecuentemente se asigna el nombre **Teorema de Riesz-Fisher** al teorema que asegura la completez de cualquier espacio L_p, $p \geq 1$, y en particular, a la del espacio L_2.

Veamos en lo siguiente condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto ortonormal sea una base. Un conjunto ortonormal $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es maximal si no existe un vector en $\mathcal{H}$ que pueda adjuntarse a $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$, de manera que el conjunto resultante también sea ortonormal.

Un conjunto ortonormal maximal se llama frecuentemente un **conjunto ortonormal completo** o **base ortonormal**.

Teorema 1.5.7. *Para un conjunto ortonormal $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{H}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) El conjunto $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es maximal en $\mathcal{H}$.
(b) El subespacio $\mathcal{S} = \mathrm{span}\,\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es denso en $\mathcal{H}$.
(c) Para cada $x \in \mathcal{H}$, tenemos

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\hat{x}(\alpha)|^2. \tag{21}$$

(d) Si $x, y \in \mathcal{H}$, entonces $\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in A} \overline{\hat{x}(\alpha)}\hat{y}(\alpha)$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Si $\overline{\mathcal{S}} \neq \mathcal{H}$ entonces existe un elemento no nulo en $\mathcal{S}^{\perp}$, lo que implica que $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ no es maximal.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sea $x \in \mathcal{H}$, $\epsilon > 0$ fijos. Como $\mathcal{S}$ es denso, existe un conjunto finito $u_{\alpha_1}, .., u_{\alpha_n}$ y escalares tales que la combinación lineal de estos, digamos z, dista de x en menos que ϵ, en símbolos

$$z = \hat{x}(\alpha_1) + \cdots + u_{\alpha_1}\hat{x}(\alpha_n)u_{\alpha_n} ,$$

de donde $||x - z|| < \epsilon$. Entonces $||x|| < ||z|| + \epsilon$ y

$$(||x|| - \epsilon)^2 < ||z||^2 = |\hat{x}(\alpha_1)|^2 + ... + |\hat{x}(\alpha_n)|^2 \leq \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 . \tag{22}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, (21) se sigue de (22) y la desigualdad de Bessel (19). Note que (21) también puede escribirse en la forma $\langle x, x\rangle = \langle \hat{x}, \hat{x}\rangle$, con los productos internos en $\mathcal{H}$ y $\ell_2(A)$, respectivamente.

(c) $\Rightarrow$ (d): Sean $x, y \in \mathcal{H}$ fijos y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle \hat{x} + \lambda\hat{y}, \hat{x} + \lambda\hat{y}\rangle .$$

Luego, $\lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle y, x\rangle = \lambda\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle + \overline{\lambda}\langle \hat{y}, \hat{x}\rangle$ y haciendo $\lambda = 1, i$, se tiene que

$$\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \mathrm{Im}\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle .$$

(d) $\Rightarrow$ (a): Si $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ no es maximal, entonces existe $u \in \mathcal{H}$ de norma uno, tal que $\hat{u}(\alpha) = \langle u_\alpha, u\rangle = 0$. Así, $1 = \|u\|^2 = \|\hat{u}\|_2^2 = 0$, que resulta contradictorio. $\square$

Ejemplo 1.5.I. En el espacio de Hilbert $l_2(\mathbb{N})$ (de sucesiones cuadrado sumables), al conjunto $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ con

$$e_j = (0, \ldots, 0, \overset{\overset{j}{\curlyvee}}{1}, 0, \ldots)$$

se le conoce como la **base canónica** de $l_2(\mathbb{N})$ y es en efecto, una base ortonormal. Ciertamente, como $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk}$, se tiene que $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal. Además, para $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})$, considere

$$z^{(N)} = (z_1, z_2, \ldots, z_N, 0, \ldots) = \sum_{j=1}^{N} z_j e_j \in \mathrm{span}\ \{e_j\}_{j \in \mathbb{N}} .$$

De esta manera, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| z - z^{(N)} \right\|_2 = \|(0, \ldots, z_{N+1}, z_{N+2}, \ldots)\| = \sum_{j > N} |z_j|^2 < \varepsilon ,$$

ya que $z \in l_2(\mathbb{N})$. Así, $z \in \overline{\mathrm{span}\ \{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}}$ y, por lo tanto, del teorema 1.5.7 se tiene que $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es base ortonormal.

Dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ son isomorfos si existe una transformación lineal Λ uno-a-uno de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ que preserva $\langle \Lambda x, \Lambda y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}_1}$, con $x, y \in \mathcal{H}_1$. Al operador Λ se le conoce como **un isomorfismo entre espacios de Hilbert** .

Corolario 1.5.8. *Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{H}$ ortonormal maximal. Si $\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha\rangle$ entonces la transformación $x \longmapsto \hat{x}$ es un isomorfismo entre $\mathcal{H}$ y $\ell_2(A)$.*

Demostración. Es suficiente mostrar que la transformación es biyectiva. Para cualquier $\alpha \in A$, si $\hat{x} = \hat{y}$, entonces $\langle x, u_\alpha\rangle = \langle y, u_\alpha\rangle$ lo que implica que $\langle x - y, u_\alpha\rangle = 0$. Por lo tanto, $x - y = 0$. La transformación es suprayectiva, debido al teorema 1.5.6. $\square$

1.6. Existencia de bases ortonormales. En esta sección mostraremos que cada espacio de Hilbert no trivial (que no consista solo del vector cero) es isomorfo a algún $\ell_2(A)$, lo que implica que cada espacio de esta clase tiene una base ortonormal. La prueba requiere de una propiedad de los conjuntos que son parcialmente ordenados.

Un conjunto P es **parcialmente ordenado** por una relación binaria $\leq$ si:

(a) $a \leq b$ y $b \leq c$ implica $a \leq c$.
(b) $a \leq a$ para cada $a \in P$.
(c) $a \leq b$ y $b \leq a$ implica $a = b$.

Un subconjunto Q de un conjunto parcialmente ordenado P se llama **totalmente ordenado** (o **linealmente ordenado**) si cada par $a, b \in Q$ satisface $a \leq b$ o $b \leq a$.

Ejemplo 1.6.I. La colección de subconjuntos de un conjunto fijo X está parcialmente ordenado por la relación de contención.

Un subconjunto totalmente ordenado Q de P se dice ser **maximal** si no existe un elemento de P que pueda adjuntarse a Q de manera que la colección resultante sea totalmente ordenada.

Ejemplo 1.6.II. Sea P subconjuntos abiertos del plano, Q los discos circulares abiertos con centro en el origen. Q es totalmente ordenado y maximal en P.

Teorema 1.6.1 (Maximalidad de Hausdorff). *Cada conjunto no vacío parcialmente ordenado contiene un subconjunto totalmente ordenado maximal.*

El teorema anterior es equivalente al axioma de selección, por lo que no lo demostraremos en este trabajo.

Teorema 1.6.2. *Cada conjunto ortonormal B en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ está contenido en un conjunto ortonormal maximal en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Sea P la colección de todos los conjuntos ortonormales en $\mathcal{H}$ que contienen a B. Ordénese P parcialmente por inclusión. Como $B \in P$,$P \neq \emptyset$. Consecuentemente, P contiene una subcolección Ω totalmente ordenada y maximal. Sea $\mathcal{S}$ la unión de todos los miembros de Ω. Es claro que $B \subset \mathcal{S}$. Afirmamos que $\mathcal{S}$ es un conjunto ortonormal maximal.

En efecto, si $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$ entonces $u_1 \in A_1$ y $u_2 \in A_2$, para algunos $A_1, A_2 \in \Omega$. Como Ω es totalmente ordenado, $A_1 \subset A_2$ (o $A_2 \subset A_1$) de manera que $u_1, u_2 \in A_2$. Como A_2 es un subconjunto ortonormal que contiene a B, $\langle u_1, u_2 \rangle = 0 si u_1 \neq u_2$ y $\langle u_1, u_2 \rangle = 1$ si $u_1 = u_2$. Por lo tanto, $\mathcal{S}$ es ortonormal.

Si $\mathcal{S}$ no es maximal, entonces $\mathcal{S}$ es subconjunto propio de un conjunto ortonormal $\mathcal{S}^*$. Claramente $\mathcal{S}^* \notin \Omega$ y $\mathcal{S}^*$ contiene cada elemento de Ω . Con esto que podemos adjuntar $\mathcal{S}^*$ a Ω y obtener una clase totalmente ordenada. Contradiciendo la maximalidad de Ω. $\square$

Todo espacio de Hilbert no vacío contienen un conjunto ortonormal. El teorema anterior implica de manera simple lo siguiente.

Corolario 1.6.3. *Todo espacio de Hilbert no trivial tiene una base ortonormal.*

1.7. El sistema trigonométrico. Abordamos en esta sección un ejemplo especial de bases ortonormales en espacios de Hilbert. Trabajaremos con las funciones de los reales a los complejos, que son medibles y de periodo 2π. Consideremos el intervalo real $\mathcal{A} = [0, 2\pi]$ y el espacio

$$L_2\left(\mathcal{A}, \frac{1}{2\pi}dx\right) = \left\{f \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{A}} |f(x)|^2\, dx < \infty\right\}.$$

Uno calcula de manera simple que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{A}} \sin^2(kx)dx = \frac{1}{2}\,, \quad k \in \mathbb{N}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, considere los polinomios trigonométricos dados por

$$p_n(t) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \sin(kt) + b_k \cos(kt))\,, \quad a_k, b_k \in \mathbb{C}\,. \tag{23}$$

Usando las fórmulas de Euler y $e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt)$, podemos reescribir (23) como

$$p_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikt}\,.$$

Además, uno tiene que

$$\left\langle e^{ijt}, e^{ikt}\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{A}} e^{-ijt}e^{ikt}dt = \delta_{jk}\,, \quad j,k \in \mathbb{N}$$

es decir, $\left\{e^{ikt}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal en $L_2\left(\mathcal{A}, \frac{1}{2\pi}dx\right)$. Para ver que este sistema resulta ser una base, del teorema 1.5.7, basta demostrar que los polinomios (23) son densos en $L_2\left(\mathcal{A}, \frac{1}{2\pi}dx\right)$.

Dado $f \in L_2\left(\mathcal{A}, \frac{1}{2\pi}dx\right)$ y $\varepsilon > 0$, debemos mostrar que existe un polinomio trigonométrico $p_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikt}$ tal que $\|p_n - f\|_2 < \varepsilon$. Para ello, usamos el hecho de que el espacio $C_1(\mathcal{A})$ es denso en $L_2\left(\mathcal{A}, \frac{1}{2\pi}dx\right)$. De manera que podemos suponer f en $C_1(\mathcal{A})$, con norma dada por $\|f\|_\infty = \sup_{t\epsilon\mathcal{A}}|f(t)| < \infty$. Además, para toda $f \in C_1(\mathcal{A})$ se cumple lo siguiente:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{A}} |f(t)|^2\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\sup_{t\epsilon[0,2\pi]}|f(t)|^2\int_0^{2\pi} dt = \|f\|_\infty^2\,.$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_2^2 \leq \|f\|_\infty^2\,,$$

por lo que bastaría demostrar que $\|p - f\|_\infty < \varepsilon$.

Construimos una sucesión de polinomios trigonométricos $q_1, q_2, \ldots$, donde

$$q_k(t) = c_k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t\right)^k = c_k\left(\sin\frac{t}{2}\right)^k\,, \quad k \in \mathbb{N} \tag{24}$$

tales que los coeficientes c_k satisfagan

$$q_k \geqslant 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{A}} q_k = 1\,. \tag{25}$$

Así, de (24) y (25), los coeficientes c_k son de la forma

$$c_k = 2\pi\left(\int_{\mathcal{A}} \sin^k\frac{t}{2}dt\right)^{-1}\,.$$

Sobre el intervalo $[0,\pi]$, utilizando el hecho de que la función $\sin\frac{t}{2}$ es decreciente en este intervalo, la paridad del $\cos t$ y de las ecuaciones (24) y (25), tenemos que

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q_k(t)\,dt \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q_k \sin t dt \qquad (\text{pues } 1 \geqslant \sin t\,, \quad \forall t \in [0,\pi]) \\
&= \frac{c_k}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t\right)^k \sin t dt = \frac{-2c_k}{\pi}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t\right)^{k+1}}{k+1}\Bigg|_0^\pi \qquad (26)\\
&= \frac{2c_k}{\pi(k+1)}\,.
\end{aligned}
$$

Como $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t$ es monótona decreciente en $[0,\pi]$, entonces $q_k(t) \leqslant q_k(\delta)$ para toda δ tal que $0<\delta\leq|t|\leq\pi$ (si esto no queda claro se pide al lector revisar la gráfica de esta función en el intervalo de $[-\pi,\pi]$). Si definimos a $\eta_k(\delta)$ como

$$\eta_k(\delta) = \sup\left\{q_k(t)\,:\,0<\delta\leq|t|\leq\pi\right\}\,. \tag{27}$$

Además, para toda ε mayor que cero tenemos que

$$\eta_k(\delta) < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}\,,$$

si $k \gg 1$, con δ mayor que cero, esto gracias a la ecuación (26), pues se tiene que

$$c_k \leq \frac{\pi(k+1)}{2}\,.$$

Entonces, para $0<\delta<\pi$,

$$q_k(t) \leq \frac{\pi(k+1)}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\delta\right)^k\,,$$

que haciendo r igual a $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t$ tenemos que $r<1$ y

$$\frac{\pi}{2}(k+1)\,r^k \to 0\,,\quad \text{cuando} k\to\infty\,.$$

Por lo tanto, $q_k(t)$ converge uniformente a cero en $0<\delta\leq|t|\leq\pi$, es decir, converge uniformente en $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

Ahora, para cada $f\in C_1(\mathbb{R})$, definamos

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\,q_k(s)\,ds\,. \tag{28}$$

Haciendo un primer cambio de variable $s\to -s$, tenemos:

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+s)\,q_k(s)\,ds\,,$$

pues $q_k(-s) = q_k(s)$ para toda s en $[-\pi,\pi]$. Haciendo nuevamente otro cambio de variable con $s = u-t$ y despejando u tenemos que $u = s+t$, así $du = ds$ por lo que p_k se ve de la forma (cuidado con los límites)

$$
\begin{aligned}
p_k(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)\,q_k(u-t)\,du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,q_k(u-t)\,du \quad (\text{cambiando otra vez de variable}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,q_k(s-t)\,ds\,.
\end{aligned}
$$

Se deja al lector la justificación de la segunda igualdad que incide en el siguiente ejercicio (*Tarea*): *Demostrar que para h de periodo 2π,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\,dt = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} h(t)\,dt\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}\,.$$

Ahora como f es continua en $[-\pi,\pi]$ entonces es uniformemente continua, i.e., para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|f(t) - f(t')| < \varepsilon/2$ si $|t - t'| < \delta$. Ahora calculemos

$$\|p_k(t) - f(t)\|_\infty = \sup_{t\epsilon[-\pi,\pi]} |p_k(t) - f(t)|\ , \text{ pero}$$

$$\begin{aligned} |p_k(t) - f(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\,q_k(s) - f(t)\right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\,q_k(s) - \frac{1}{2\pi} f(t)\int_{-\pi}^{\pi} q_k(s)\,ds\right|. \end{aligned}$$

En virtud de (25), la igualdad anterior implica

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t))\,q_k(s)\,ds\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)|\,q_k(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|s|<\delta} |f(t-s) - f(t)|\,q_k(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|s|\le\pi} |f(t-s) - f(t)|\,q_k(s)\,ds \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{|s|\le\delta} q_k(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|s|\le\pi} |f(t-s) - f(t)|\,q_k(s)\,ds, \end{aligned}$$

donde se usó la continuidad uniforme de f. Para el segundo sumando es necesario trabajar usando (27). Continuando el desarrollo

$$\begin{aligned} &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{|s|\le\delta} q_k(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\eta_k(\delta)\int_{\delta\le|s|\le\pi} |f(t-s) - f(t)|\,ds \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \eta_k(\delta)\,\|f\|_\infty < \varepsilon, \end{aligned}$$

en donde la penúltima desigualdad se obtuvo de (25) y usando propiedades del valor absoluto, la norma de f y la definición de $\eta_k(\delta)$. Por lo tanto hemos demostrado que el sistema trigonométrico $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es denso en $L_2\left(\mathcal{A}, \frac{1}{2\pi}dx\right)$.

Problemas de la sección.

P.1.1 Muestre la identidad del paralelogramo (5)

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)\,, \quad x, y \in \mathcal{H}\,.$$

P.1.2 Muestre quue la identidad del paralelogramo implica la identidad de Apolonio

$$\Big|\Big|z - x\Big|\Big|^2 + \Big|\Big|z - y\Big|\Big|^2 = \frac{1}{2}\Big|\Big|x - y\Big|\Big|^2 + 2\Big|\Big|z - \frac{1}{2}(x+y)\Big|\Big|^2, \quad x, y, z \in \mathcal{H}\,.$$

P.1.3 Muestre que un subespacio de un de un espacio métrico que consiste en un número finito de puntos siempre es completo.

P.1.4 Si consideramos sobre $X = \mathbb{Q}$ la métrica $d(x,y) = |x-y|$, calcule la completación de X con respecto a esta métrica.

P.1.5 Muestre que si (X,d) es un espacio métrico completo, entonces $(X,\overline{d})$ es también completo, donde $\overline{d} = \frac{d}{1+d}$.

P.1.6 Construya ejemplos que muestren que si Y y Z son subespacios de un espacio vectorial X, $Y \cap Z$ es un subespacio de X pero $Y \cup Z$ podría no serlo.

P.1.7 Muestre que en un espacio de Hilbert

$$y \perp x_n\,, \quad x_n \to x \quad \Rightarrow \quad x \perp y\,.$$

P.1.8 Muestre que en un espacio con producto interno

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \|x + \alpha y\| \geq \|x\| \text{ para todo escalar } \alpha\,.$$

P.1.9 Muestre que el funcional definido en $C[a,b]$ por

$$f(x) = \int_a^b x(t)y_0(t)dt\,, \quad y_0 \in C[a,b]$$

es lineal y acotado.

P.1.10 Encuentre la norma del funcional lineal definido en $C[-1,1]$ por

$$g(x) = \int_{-1}^0 x(t)dt - \int_0^1 x(t)dt\,.$$

P.1.11 Muestre que si $f \neq 0$ y $g \neq 0$ son dos funcionales definidos en el mismo espacio vectorial y tienen el mismo espacio nulo entonces son proporcionales.

2. Clases Especiales de Operadores

Esta sección está dedicada principalmente a los operadores de clases de traza y de Hilbert-Schmidt, los cuales son subclases de operadores compactos.

2.1. Operadores de rango finito y compactos.

Definición 2.1.1. Si E es un espacio normado decimos que un conjunto $A \subset E$ es **precompacto** en E (o relativamente compacto), cuando $\overline{A}$ (la clausura de A) es un conjunto compacto, i.e., un conjunto es precompacto si su cerradura es compacta.

Definición 2.1.2. Sean X, Y espacios normados. Un operador lineal $T : X \to Y$ es **compacto** (o completamente continuo) si manda conjuntos acotados de X en conjuntos precompactos de Y, i.e., T es compacto si y solo si TA es precompacto para todo $A \subset X$ con A acotado.

Ejemplo 2.1.I. Sea $\mathcal{C}([a,b])$ el espacio vectorial de las funciones continuas con dominio $[a,b]$ y valores en un campo $\mathbb{K}$. Recordemos que este espacio es de Banach con la norma dada por $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Sea $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una medida y $K\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{K}$ una función continua. Definimos lo siguiente.

$$A \star K\colon \mathcal{C}([a,b]) \to C([a,b])$$
$$(A \star Kf)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)d\mu(y)\,.$$

Se puede mostrar que $A \star K$ es un operador lineal continuo y compacto. Esto último usando el conocido Teorema de Ascoli cuya demostración se puede encontrar en [18, Ap. A].

Teorema 2.1.3 (Teorema de Ascoli). *Para que $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}([a,b])$ sea relativamente compacto en $\mathcal{C}([a,b])$ es necesario y suficiente que:*

1. *$\mathcal{F}$ sea puntualmente acotada, i.e., $\forall \xi \in [a,b]$, $\sup_{f\in\mathcal{F}} |f(\xi)| < \infty$.*
2. *$\mathcal{F}$ sea equicontinua, i.e., $\forall \xi \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(\xi)| \leq \varepsilon\,, \quad \forall x \in [a,b] \cap [\xi - \delta, \xi + \delta]\,, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Proposición 2.1.4. *Para X, Y espacios normados, los siguientes son equivalentes:*

(a) $T : X \to Y$ es un operador compacto.
(b) TA es precompacto, para todo $A \subset X$ acotado.
(c) TB_1 es precompacto, en donde B_1 es la bola unitaria en X.
(d) Cada sucesión acotada $\{x_n\}$ de elementos de X tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $\{Tx_{n_k}\}$ converge en Y.

Demostración. Es suficiente demostrar las implicaciones (a) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a):

(a) $\Rightarrow$ (d): En X, sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada por M. Entonces la sucesión $\left\{\frac{x_n}{M}\right\}$ de elementos de B_1 tiene una subsucesión tal que $\left\{\frac{Tx_{n_k}}{M}\right\}$ converge, digamos que a $y \in Y$, es claro que Tx_{n_k} converge a $(M+1)y$.

(d) $\Rightarrow$ (a): Se usará el siguiente resultado de la cual se omitirá su demostración: *En un espacio métrico E, si $K \subset E$ tiene la propiedad de que cada sucesión en K tiene una subsucesión que converge en E, entonces $\overline{K}$ es un subconjunto compacto de E.*

Ahora bien, sea A un subconjunto acotado en X. Veamos que $\overline{TA}$ es compacto, para lo cual sea $\{y_n\}$ una sucesión en TA, es decir, $y_n = Tx_n$ para alguna sucesión $\{x_n\}$ en A. Por hipótesis, podemos extraer una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ con $\{Tx_{n_k}\}$ convergente en Y, y por el resultado mencionado concluimos que $\overline{TA}$ es compacto. □

Ejemplo 2.1.II. Si $T\colon X \to Y$ es un operador continuo y lineal de rango finito (i.e., su imagen o rango es de dimensión finita), entonces T es un operador compacto. En efecto, de la proposición 2.1.4.(d) y el teorema de Bolzano-Weierstrass [15, Teo. 6.21], para una sucesión acotada $\{x_n\}$ en X se tiene $\|Tx_n\| \leq \|T\|\,\|x_n\|$, es decir, $\{Tx_n\}$ es acotada en su imagen TX. Por hipótesis es un espacio isométrico a $\mathbb{K}^m$ donde m es su dimensión como espacio vectorial. El teorema de Bolzano-Weierstrass nos permite concluir que $\{Tx_{n_k}\}$ converge para alguna subsucesión de $\{x_n\}$.

Ejemplo 2.1.III. Todo operador lineal $T\colon X \to Y$ compacto es un operador continuo. Ciertamente, la imagen $\overline{TB_1}$ de la bola unitaria abierta B_1 es un conjunto compacto y por lo tanto existe $M \geq 0$ tal que $\|Tx\| \star Y \leq M$ para todo $x \in B_1$.

Ejemplo 2.1.IV. Sea X un espacio normado. El operador identidad $I : X \to X$ tal que $I(x) = x$ para todo $x \in X$ es compacto si y sólo si X como espacio vectorial tiene dimensión finita. Esto es consecuencia inmediata del siguiente resultado cuya investigación y estudio dejamos a cargo del lector: *La bola unitaria cerrada es compacta en un espacio normado si y sólo si el espacio tiene dimensión finita.*

Lema 2.1.5 (Lema de Riesz). *Sea E un espacio normado; si $S \subsetneq E$ es subespacio cerrado, entonces para cualquier $0 < \varepsilon < 1$, existe $x_\varepsilon \in E \setminus S$ tal que $\|x_\varepsilon\| = 1$ y $\|s - x_\varepsilon\| > \varepsilon$ para todo $s \in S$.*

Demostración. Para $x \in E \setminus S$ fijo sea $r = d(x, S) = \text{ínf}\{d(x,s) : s \in S\}$. Como S es cerrado entonces $r > 0$ y se sigue que $r < r_\varepsilon$. Por las propiedades del ínfimo, podemos encontrar $b \in S$ tal que $\|x - b\| < r_\varepsilon$. Definimos x_ε como

$$x_\varepsilon = \frac{x-b}{\|x-b\|}\,.$$

De esta manera, $\|x_\varepsilon\| = 1$ y $x_\varepsilon \in E \setminus S$, pues S es subespacio de E. Finalmente, para $s \in S$ tenemos que

$$\|s - x_\varepsilon\| = \left\| s - \frac{x-b}{\|x-b\|} \right\| = \frac{1}{\|x-b\|} \Big\| \|x-b\|s + b - x \Big\| \geq \frac{r}{\|x-b\|}\,.$$

Concluimos que $\|s - x_\varepsilon\| > \varepsilon$ por como se escogió a b. □

Definición 2.1.6. El **conjunto dual** de un espacio vectorial X viene dado por

$$X^* := \{f\colon X \to \mathbb{C} \;:\; f \text{ es lineal y continua}\}\,.$$

Con la norma de operadores lineales, $(X^*, \|\cdot\|_*)$ es un espacio de Banach. Además, de manera similar podemos definir al dual de X^* como

$$X^{**} := \{f \;:\; X^* \to \mathbb{C} \;:\; f \text{ es lineal y continua}\}\,.$$

Definición 2.1.7. Dada una sucesión $\{x_n\}$ en X decimos que $\{x_n\}$ **converge débilmente** a x si y solo si $\{\Lambda x_n\}$ converge a Λx, para todo operador lineal y continuo Λ. En símbolos,

$$x_n \xrightarrow{\omega} x \;\Leftrightarrow\; \Lambda x_n \to \Lambda x\,, \quad \forall \Lambda \in X^*\,.$$

Definición 2.1.8. Sean X, Y espacios normados y $T\colon X \to Y$ un operador lineal. El **operador adjunto** de T se define como

$$\begin{aligned} &T^*\colon Y^* \to X^* \\ &(T^*f)(x) = f(Tx)\,, \quad f \in Y^*\,, \quad x \in X\,. \end{aligned}$$

Es decir, a cada $f \in Y^*$ se le asocia $T^*f \in X^*$,

$$f \to T^*f\,, \quad \text{donde} \quad f\colon Y \to \mathbb{C} \quad \text{y} \quad T^*f\colon X \to \mathbb{C}\,.$$

Proposición 2.1.9. *La aplicación* $\hat{}\,\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{**}$ *satisface*

$$\|\hat{x}\|_{**} = \|x\|,\,, \quad \forall x \in \mathcal{H}\,.$$

Demostración. La primera desigualdad se sigue de la definición de la norma $\|\cdot\|_{**}$, pues si $x \in \mathcal{H}$, entonces

$$\|\hat{x}\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\hat{x}(f)| = \sup_{\|f\|_*=1} |f(x)| \leq \|f\|_*\,\|x\| = \|x\|.$$

Por el teorema de representación de Riesz [14, Sec. 3.8] tenemos que para $x \in \mathcal{H}$ la aplicación $g(z) = \langle z, x\rangle$ es un operador lineal y continuo que satisface $\|g\|_* = \|x\|$. Defina al operador $\tilde{g}$ como

$$\tilde{g}(z) = \frac{g(z)}{\|x\|}$$

de donde se sigue que $\|\tilde{g}\|_* = 1$ y como consecuencia

$$\|\hat{x}\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |f(x)| \geq |\tilde{g}(x)| = \frac{\langle x, x\rangle}{\|x\|} = \|x\|\,.$$

Como se quería. □

En otras palabras, la aplicación de la proposición 2.1.9 es una isometría.

Proposición 2.1.10. *Si una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathcal{H}$ converge débilmente, entonces se cumplen lo siguiente:*

(a) El límite es único.
(b) $\{x_n\}$ está acotada.

Demostración. (a): Supongamos que $\{x_n\}$ tiene dos límites en $\mathcal{H}$, digamos x y y. De la definición 2.1.7 tenemos que

$$x_n \xrightarrow{\omega} x \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda x_n \to \Lambda x\,, \quad \forall \Lambda \in \mathcal{H}^*\,,$$

similarmente para y. Como $\{\Lambda x_n\}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{C}$, su límite es único y entonces $\Lambda(x - y) = 0$, para todo $\Lambda \in \mathcal{H}^*$. Llamemos $z = x - y$. Si $z \neq 0$, por el teorema de representación de Riesz tenemos que existe $\Lambda_z \in \mathcal{H}^*$ tal que $\Lambda_z(w) = \langle z, w\rangle$, de donde se sigue que

$$0 = \Lambda_z(x - y) = \langle z, z\rangle = \|z\|^2 > 0\,.$$

(b): Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación $\hat{x}_n(f) = \Lambda(x_n)$ (véase proposición 2.1.9). Como $\{\Lambda x_n\}$ converge en $\mathbb{C}$, entonces está acotada para cada $\Lambda \in \mathcal{H}^*$. Es decir, para todo $\Lambda \in \mathcal{H}^*$,

$$|\Lambda(x_n)| \leq M_\Lambda\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad M_\Lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Del principio de acotación uniforme y de la proposición 2.1.9,

$$\|x_n\| = \|\hat{x}_n\|_{**} \leq M\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

de donde se sigue la conclusión. □

Los puntos claves de la demostración anterior son: el teorema de representación de Riesz y principio de acotación uniforme [14, Sec. 3.8 y 4.7].

Teorema 2.1.11. *Para un operador compacto entre dos espacios de Hilbert $T\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, se cumple lo siguiente: para toda sucesión $\{x_n\}$ de $\mathcal{H}_1$ débilmente convergente, la sucesión $\{Tx_n\}$ converge en norma.*

Demostración. Vemos que para todo $\Lambda \in \mathcal{H}_2^*$ la diferencia

$$\Lambda T x_n - \Lambda T x = T^* \Lambda x_n - T^* \Lambda x$$

tiende a cero por la convergencia débil de $\{x_n\}$, ya que es fácil ver que el operador $T^*\Lambda$ está en $\mathcal{H}_1^*$ y por consiguiente $Tx_n \xrightarrow{\omega} Tx$.

Supongamos que $Tx_n \to Tx$ es falso. Entonces existe $\varepsilon > 0$ y $\{Tx_{n_k}\}$ subsucesión tal que $\|Tx_{n_k} - Tx\| > \varepsilon$. Como $\{x_n\}$ es acotada y T compacto existe una subsucesión S de $\{Tx_{n_k}\}$ convergente en $\mathcal{H}_2$, digamos a $y \in \mathcal{H}_2$. La desigualdad anterior implica que $y \neq Tx$. Por último, la convergencia de S implica convergencia débil por las siguientes desigualdades:

$$\|\Lambda S - \Lambda y\| = \|\Lambda S - y\| \leq \|\Lambda\|_* \|S - y\|\,, \quad \forall \Lambda \in \mathcal{H}_2^*\,,$$

De este modo, S converge débilmente a y y a Tx con $y \neq Tx$ lo cual es absurdo por proposición 2.1.10. □

En el siguiente resultado veremos algunas propiedades de operadores acotados.

Teorema 2.1.12. *Para un operador acotado entre espacios de Hilbert $T\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, se cumple lo siguiente:*

(a) Si $\{T_n\}$ es una sucesión de operadores compactos y $T_n \to T$, con la topología inducida por la norma de operadores, entonces T es compacto.
(b) El operador T es compacto si y solo si T^* es compacto.
(c) El producto de un operador compacto y un operador acotado es compacto.

Demostración. (a): Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $\mathcal{H}_1$ por $M > 0$. Como T_1 es compacto, $\{x_n\}$ tiene una subsucesión $\{x_{n,1}\}$, tal que $\{T_1 x_{n,1}\}$ converge en $\mathcal{H}_2$. Así, $\{T_1 x_{n,1}\}$ es de Cauchy. Como $\{x_{n,1}\}$ es acotada, utilizando nuevamente la proposición 2.1.4, existe una subsucesión de $\{x_{n,1}\}$, digamos $\{x_{n,2}\}$, tal que $\{T_2 x_{n,2}\}$ converge y es de Cauchy. Construimos de la misma forma las sucesiones subsecuentes.

Tenemos que $\{z_n = x_{n,n}\}$ es subsucesión de la sucesión original. Si fijamos $r \in \mathbb{N}$, cuando $n \geq r$, se tiene que $\{z_n\}$ es subsucesión de $\{x_{n,r}\}$ y $\{T_r x_{n,n}\}$ es de Cauchy, ya que es subsucesión de $\{T_r x_{n,r}\}$, la cual es de Cauchy, es decir, para toda $r \in \mathbb{N}$,

$$\{T_r x_{n,n}\}\,, \qquad \text{es de Cauchy, si } n \geq r\,.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y como T_n converge a T, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N_1$, entonces $\|T_n - T\|_* < \varepsilon/3M$. Si $r = N_1$, entonces $\|T_r - T\|_* < \varepsilon/3M$. Para esta r existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_r z_n - T_r z_m\| < \varepsilon/3$ si $n, m \geq N$, pues $\{T_r z_n\}$ es de Cauchy. Verifiquemos que $\{Tz_n\}$ es de Cauchy; si $n, m \geq N$ entonces

$$\begin{aligned}
\|Tz_n - Tz_m\| &= \|Tz_n - T_r z_n + T_r z_n - T_r z_m + T_r z_m - Tz_m\| \\
&\leq \|Tz_n - T_r z_n\| + \|T_r z_n - T_r z_m\| + \|T_r z_m - Tz_m\| \\
&\leq \|T - T_r\|_* \, \|z_n\| + \|T_r z_n - T_r z_m\| + \|T_r - T\|_* \, \|z_m\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3M} M \; + \; \frac{\varepsilon}{3} \; + \; \frac{\varepsilon}{3M} M = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{H}_2$ es completo, $\{Tz_n\}$ converge y tiene una subsucesión convergente acotada, pues es subsucesión a la vez de $\{Tx_n\}$. Por lo tanto, de la proposición 2.1.4, se concluye que T es compacto.

(b): Si T es compacto, entonces $\overline{TB_1}$ es un conjunto compacto, donde B_1 es la bola unitaria abierta de $\mathcal{H}_1$. Tomemos una sucesión $\{y_n^*\}$ de B_2^*, la bola unitaria abierta de $\mathcal{H}_2^*$. Mostraremos que existe $\left\{y_{n_k}^*\right\}$ tal que $\left\{T^* y_{n_k}^*\right\}$ converge en $\mathcal{H}_1^*$.

Para Φ la familia de cada funcional $y_n^* : \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ restringida a $\overline{TB_1}$, tenemos que:

1. Como $\{y_n^*\} \subset B_2^*$ entonces $\|y_n^*\|_* \leq 1$, para todo $y_n^* \in \Phi$, i.e., Φ es una familia equiacotada.
2. Para $y, y\prime \in \overline{TB_1}$ tenemos que:

$$|y_n^*(y) - y_n^*(y\prime)| = |y_n^*(y - y\prime)| \leq \|y_n^*\|_* \, \|y - y\prime\| < \|y - y\prime\|\,, \quad \forall y, y\prime \in \overline{TB_1}\,, \quad y_n^* \in \Phi$$

i.e., Φ es una familia equicontinua.

Por el teorema de Ascoli, existe una subsucesión $\left\{y_{n_k}^*\right\}$ que converge uniformemente en $\overline{TB_1}$. Para $\varepsilon > 0$ y $k, l \geq N \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T^* y_{n_k}^* - T^* y_{n_l}^*\| &= \sup_{x \in B_1} |(T^* y_{n_k}^* - T^* y_{n_l}^*)x| = \sup_{x \in B_1} |T^* y_{n_k} x - T^* y_{n_l} x| \\
&= \sup_{x \in B_1]} |y_{n_k}^* Tx - y_{n_l}^* Tx| = \sup_{y \in TB_1} |y_{n_k}^* y - y_{n_l}^* y| \\
&\leq \sup_{y \in \overline{TB_1}} |y_{n_k}^* y - y_{n_l}^* y| < \varepsilon \,.
\end{aligned}$$

De la convergencia uniforme de $\left\{y_{n_k}^*\right\}$ se sigue que $\left\{T^* y_{n_k}^*\right\}$ es de Cauchy y, por lo tanto, converge, es decir, T^* es compacto.

Reciprocamente, consideremos las inclusiones canónicas i, j (véase la proposición 2.1.9), dadas por

$$\begin{aligned}
i : \mathcal{H}_1 &\longrightarrow \mathcal{H}_2^{**} & \qquad i(x) : \mathcal{H}_1^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\
x &\longmapsto i(x) & f &\longmapsto f(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j : \mathcal{H}_2 &\longrightarrow \mathcal{H}_2^{**} & \qquad j(y) : \mathcal{H}_2^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\
y &\longmapsto j(y) & g &\longmapsto g(y)
\end{aligned}$$

Donde $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$, $f \in \mathcal{H}_1^*$ y $g \in \mathcal{H}_2^*$. Note que para $\Lambda \in \mathcal{H}_2^*$ se cumple:

$$[T^{**} i(x)] (\Lambda) = i(x) [T^* \Lambda] = [T^* \Lambda] (x) = \Lambda(Tx) = [j(Tx)] (\Lambda) \,.$$

Afirmamos que

$$j [TB_1] = T^{**} i[B_1] \subset T^{**} [B_1^{**}] \;.$$

Ciertamente, si $b \in T^{**} i[B_1]$ entonces, existe $x \in B_1$ tal que $b = i(x)$. Por la proposición 2.1.9, uno tiene que $b \in B^{**}$ de donde $T^{**} b \in T^{**} B^{**}$.

Luego, como T^* es compacto, T^{**} también lo es, así $\overline{T^{**} B_1^{**}}$ es compacto. Es claro que $\overline{j[TB_1]}$ es compacto, de modo que $j[B_1]$ es precompacto. Mostremos que

$$\overline{TB_1} \subset \overline{jTB_|} \,.$$

Considerando $j(z) \in j[\overline{TB_1}]$, para algún $z \in j[\overline{TB_1}]$. Existe $\{a_n\} \subset \overline{TB_1}$ convergente a w. La sucesión $\{j(a_n)\}$ está en $j[TB_1]$ y por la continuidad de j se tiene que $j(a_n) \to j(w)$ y $j(w) \in \overline{j[TB_1]}$. Por último, afirmamos que $\overline{TB_1}$ es compacto. En efecto, para $\{w_n\}$ una sucesión en $\overline{TB_1}$, tenemos que $\{j(w_n)\} \subset j[\overline{TB_1}] \subset \overline{j[TB_1]}$. Como $\overline{j[TB_1]}$ es compacto, existe una subsucesión $\{j(w_{n_k})\}$ convergente en $\overline{j[TB_1]}$. De modo que $\{j(w_{n_k})\}$ es una sucesión de Cauchy. Por la proposición 2.1.9, la sucesión $\{w_{n_k}\}$ es de Cauchy y converge en $\overline{TB_1}$, por ser este cerrado. Concluimos que T es un operador compacto.

(c): Para este punto analizamos los siguientes dos casos:

1. *Si $S\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ es compacto y $T\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3$ es acotado.* Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $\mathcal{H}_1$. Entonces, por ser S compacto, existe una subsucesión convergente $\{Sx_{n_k}\}$ en $\mathcal{H}_2$. Además, por ser T continuo (pues es acotado) entonces $\{TSx_{n_k}\}$ converge en $\mathcal{H}_3$. Así, TS es compacto.
2. *Si $S\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ es acotado y $T\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3$ es compacto.* Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en $\mathcal{H}_1$. Como S es acotado tenemos que $\|Sx_n\| \leq \|S\| \|x_n\| < \infty$. Por ser T compacto, $\{TSx_{n_k}\}$ converge, siendo TS compacto.

Lo anterior concluye la demostración del punto (c). □

El siguiente resultado es de gran utilidad en la secuela.

LEMA 2.1.13. *Si $\mathcal{H}$ es espacio de Hilbert separable, entonces cada base ortonormal para $\mathcal{H}$ es a lo más numerable.*

Demostración. Considera $\mathbb{B} = \{\varphi_\alpha : \alpha \in I\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Como

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|^2 = \langle \varphi_\alpha - \varphi_\beta, \varphi_\alpha - \varphi_\beta\rangle = \|\varphi_\alpha\|^2 - \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle - \langle \varphi_\beta, \varphi_\alpha\rangle + \|\varphi_\beta\|^2 = 2\,,$$

cada elemento de la familia de bolas abiertas $\{B(\varphi_\alpha, \sqrt{2}/2) : \varphi_\alpha \in \mathbb{B}\}$ contiene un solo elemento de $\mathbb{B}$ por construcción. Por otro lado, como $\mathcal{H}$ es separable, existe $S \subset \mathcal{H}$ numerable tal que $\overline{S} = \mathcal{H}$. Además, para cada φ_α se tiene $B(\varphi_\alpha, \sqrt{2}/2) \cap S \neq \emptyset$, escogemos $v_\alpha \in B(\varphi_\alpha, \sqrt{2}/2) \cap S$. Para ver que $\mathbb{B}$ es numerable, consideramos la función $f \colon \mathbb{B} \to S$ tal que $\varphi_\alpha \to v_\alpha$. Afirmamos que f es inyectiva, pues si $v_\alpha = v_\beta$, entonces $v_\alpha, v_\beta \in B(\varphi_\alpha, \sqrt{2}/2) \cap S$, y por construcción $\varphi_\alpha = \varphi_\beta$. □

En lo que resta del capítulo $\mathcal{H}$ representará un espacio de Hilbert separable. Aunque algunas veces para enfatizar algún resultado volveremos a recordar esta hipótesis.

Observación 2.1.14. Del ejemplo 2.1.II, tenemos que un operador de rango finito siempre es compacto, y por el teorema 2.1.12, todo límite de compactos es compacto, de tal manera que el límite (en norma) de operadores de rango finito es compacto.

A continuación veremos que la afirmación recíproca de la observación 2.1.14 se cumple cuando se trata de un operador compacto en un espacio de Hlibert (separable). Esto es: *Los operadores de rango finito son densos en los operadores compactos.*

TEOREMA 2.1.15. *Todo operador compacto T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ separable, es límite en norma de operadores de una sucesión de operadores de rango finito.*

Demostración. Sea $\{\varphi_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y para $n \in \mathbb{N}$, defina el operador $T_n \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como

$$T_n(x) = T\left[\sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, x\rangle\, \varphi_j\right] = \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, x\rangle\, T(\varphi_j)\,,$$

los cuales son de rango finito. Mostremos que $\|T_n - T\| \to 0$. Sea $x \in \mathcal{H}$, utilizando la base ortonormal escribimos $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \varphi_j, x\rangle\, \varphi_j$, luego

$$Tx - T_n x = T\left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \langle \varphi_j, x\rangle\, \varphi_j\right] = T\psi_n\,,$$

es decir,

$$Tx - Tx = \psi_n\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

para algún $\psi_n \in \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}^\perp$. Consideremos la sucesión $\{\lambda_n\}$, donde

$$\lambda_n = \sup_{\substack{\psi \in \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}^\perp \\ \|\psi_n\| = 1}} \|T\psi_n\| = \|T - T_n\|$$

Es claro que $\{\lambda_n\}$ es una sucesión de números reales no negativos, decreciente, acotada y por lo tanto, converge, digamos a λ. Para terminar demostraremos que $\lambda = 0$. Utilizando la desigualdad de Schwarz en el espacio l_2 calculamos que

$$|\langle h, \psi_n\rangle| = \left|\left\langle h, \sum_{j=n+1}^{\infty} \langle \varphi_j, \psi_n\rangle \varphi_j \right\rangle\right| = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\langle \varphi_j, \psi_n\rangle \langle h, \varphi_j\rangle| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \varphi_j, \psi_n\rangle \langle h, \varphi_j\rangle|$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle \varphi_j, \psi_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_j\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\psi_n\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_j\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Tomando límite en ambos lados vemos que $|\langle h, \psi_n\rangle| \to 0$, para todo $h \in \mathcal{H}$. Por lo tanto, como T es compacto, entonces $\|T(\psi_n)\| \to 0$ por el teorema 2.1.11, lo que implica que $\lambda = 0$. □

De ahora en adelante usaremos la notación de Dirac $|\varphi\rangle\langle\psi|$ para denotar al operador de rango uno $|\varphi\rangle\langle\psi|\eta = \langle\psi, \eta\rangle\varphi$. Por ejemplo, el operador T_n en la demostración anterior se escribe así:

$$T_n(x) = T\left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|x\right).$$

Teorema 2.1.16 (Teorema analítico de Fredholm). *Sea Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$, si $f\colon \Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una función analítica operador-valuada tal que $f(z)$ es un operador compacto para cada $z \in \Omega$, entonces se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:*

(a) $(I - f(z))^{-1}$ no existe para todo $z \in \Omega$.
(b) $(I - f(z))^{-1}$ existe para todo $z \in \Omega - S$, donde

$$S = \{z \in \Omega \,:\, f(z)\zeta = \zeta\,,\ \text{para algún } 0 \neq \zeta \in \mathcal{H}\}\,,$$

tal que S no tiene puntos de acumulación en Ω.

Demostración. Por la conexidad es suficiente demostrar que $\forall z_0 \in \Omega$ existe un disco abierto centrado en Z_0 donde (a) o (b) se cumple. Por el teorema 2.1.15 existe un operador de rango finito F, tal que $\|F - f(z_0)\| < \frac{1}{2}$ y por la continuidad, existe $r > 0$ tal que $\|f(z) - f(z_0\| < \frac{1}{2}$ cuando $z \in D_r(z_0) = \{z \in \Omega \,:\, |z - z_0| < r\}$, es decir, para $z \in D_r(z_0)$ se cumple $\|f(z) - F\| < 1$ lo cual garantiza que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(f(z) - F)^n$ converge absolutamente a $(I - (f(z) - F))^{-1}$, que resulta un operador analítico. Como F tiene rango finito, existen vectores linealmente independientes $\{\psi_1, \ldots, \psi_N\} \subset \mathcal{H}$ tales que $F(\varphi) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(\varphi)\psi_j$, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$.

Cada $\alpha_j(\cdot)$ es funcional acotado en $\mathcal{H}$ y el teorema de Riesz nos dá $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\} \subset \mathcal{H}$ tales que $F(\varphi) = \sum_{j=1}^{N} \langle\phi_j, \varphi\rangle\,\psi_j$, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$. A continuación, para cada $z \in D_r(z_0)$ y $1 \leq n \leq N$, definimos las funciones auxiliares

$$\Phi_n(z) = \left((I - f(z) + F)^{-1}\right)^* \phi_n\,, \quad g(z) = F(I - f(z) + F)^{-1}\,.$$

Al desarrollar $((I - f(z) + F)^{-1}x$ y $(I - g(z))(I - f(z) + F)$ obtenemos respectivamente,

$$g(z) = \sum_{j=1}^{N} \langle\Phi_n(z), \cdot\rangle\,\psi_j\,, \quad (I - f(z)) = (I - g(z))(I - f(z) + F)\,.$$

Usando estas últimas dos igualdades y que $(I - f(z) + F)$ es invertible, concluimos que $I - f(z)$ y $I - g(z)$ son invertibles simultáneamente. Además, $\psi = f(z)\psi$ y $\varphi = g(z)\varphi$ tiene solución no trivial simultáneamente. Nos concentraremos en la forma de las soluciones de dicha ecuación. Si φ es solución, entonces

$$\varphi = g(z)\varphi = \sum_{n=1}^{N} \langle\Phi_n(z), \varphi\rangle\,\psi_n = \sum_{n=1}^{N} \beta_n\psi_n\,,$$

dónde $\beta_n = \sum_{n=1}^{N} \langle\Psi_n(z), \varphi\rangle$ y al usar la última expresión de φ obtenemos

$$\beta_n = \left\langle \Phi_n(z), \sum_{m=1}^{N} \beta_m\psi_m \right\rangle = \sum_{m=1}^{N} \beta_m \langle\Phi_n(z), \psi_m\rangle\,,$$

es decir, obtenemos un sistema de ecuaciones, pues para $n = 1, \ldots, N$, dados por

$$\beta_n = \sum_{m=1}^{N} \beta_m \langle\Phi_n(z), \psi_m\rangle\,.$$

Recíprocamente, si la N-áda $(\beta_1, \ldots, \beta_N)$ es una solución del sistema, entonces $\varphi = \sum_{m=1}^{N} \beta_m\psi_m$, satisface $g(z)\varphi = \varphi$ de manera que resolver (no trivialmente) esta última ecuación equivale a resolver el sistema $N \times N$, dado por $\beta_n = \sum_{m=1}^{N} \beta_m \langle\Phi_n(z), \psi_m\rangle$

o bien $\sum_{m=1}^{N} \beta_m(\delta_{nm} - \langle \Phi_n(z), \psi_m \rangle)$, el cual tiene solución no trivial si y solo si $d(z) = \det(\delta_{nm} - \langle \Phi_n(z), \psi_m \rangle) = 0$. Por la discusión anterior, son iguales los conjuntos

$$\begin{aligned} &\{z \in D_r(z_0) \,:\, g(z)\psi = \psi, \quad \text{para algún } 0 \neq \psi \in \mathcal{H}\} \quad \text{y} \\ &S_r = \{z \in D_r(z_0) \in \Omega \,:\, d(z) = 0\}\,. \end{aligned}$$

Por otra parte, como $\langle \Phi_n(z), \psi_m \rangle$, con $n, m \in \mathbb{N}$, y $d(z)$ son funciones analíticas, podemos utilizar el teorema de unicidad para concluir que S_r no tiene puntos de acumulación, o bién, $S_r = D_r(z_0)$. Para terminar veamos que $(I - g(z)) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es biyectivo para cada $z \in\ D_r(z_0) - S_r$. En efecto, es inyectivo debido a que $z \notin S_r$ y entonces la ecuación $(I - g(z))\varphi = 0$ solo tiene la solución $\varphi = 0$. Es sobreyectivo ya que si $\psi \in \mathcal{H}$, entonces el sistema $N \times N$, dado por

$$\beta_n - \langle \Phi_n(z), \psi \rangle = \sum_{m=1}^{N} \langle \Phi_n(z), \psi_m \rangle \beta_m\,,$$

tiene como determinante a $d(z) \neq 0$. Así, el sistema tiene una solución $(\beta_1, \ldots \beta_N)$; se comprueba que el elemento $\varphi = \psi + \sum_{m=1}^{N} \beta_m \psi_m$ satisface $g(z)\varphi = \varphi - \psi$, lo que se ve simplemente desarrollando el lado izquierdo de la ecuación. □

Observación 2.1.17. En el teorema 2.1.16.(b), $(I - f(z))^{-1}$ es meromorfa en $\Omega - S$ y se puede demostrar que los residuos en los polos son operadores de rango finito.

Corolario 2.1.18 (La alternativa de Fredholm). *Para todo operador compacto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, el operador $(I - A)^{-1}$ existe o $A\psi = \psi$ tiene solución no trivial.*

Demostración. La función $f\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $f(z) = zA$ es analítica y no cumple el teorema 2.1.16.(a), debido a que $(I - f(0))^{-1}$ existe. Entonces se cumple el teorema 2.1.16.(b), es decir, $(I - f(z))^{-1}$ existe $\forall z \in \mathbb{C} - S$, donde

$$S = \{z \in \mathbb{C} \,:\, f(z)\zeta = \zeta \text{ para algún } 0 \neq \zeta \in \mathcal{B}\}\,.$$

Se cumple que $1 \notin S$ o $1 \in S$, i.e., $(I - A)^{-1}$ existe o $f(1)\psi = \psi$ para algún $\psi \neq 0$. □

Teorema 2.1.19 (Riesz-Schauder). *Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador compacto, entonces $\sigma(\mathcal{A})$ es un conjunto sin puntos límites excepto, quizás, $\lambda = 0$. Más aún, todo $\lambda \in \sigma(A)$ distinto de cero, es un valor propio de A de multiplicidad finita, i.e., el correspondiente espacio de vectores propio tiene dimensión finita.*

Demostración. La función entera $f\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $f(z) = zA$ no cumple el teorema 2.1.16.(a), entonces cumple 2.1.16.(b), lo que significa que $(I - f(z))^{-1}$ existe para $z \in \mathcal{C} - S$, donde S es un conjunto sin puntos límites. Además, todo elemento a distinto de cero, $a \notin S$, y tenemos que

$$(I - aA)^{-1} = a^{-1}(a^{-1}I - A)^{-1}$$

existe y, por tanto, $a^{-1} \notin \sigma(A)$, es decir, $a \in S$. En consecuencia, $\sigma(A)$ no tiene puntos de acumulación excepto posiblemente $\lambda = 0$ y $\forall \lambda \in \sigma(A) - \{0\}$, $\lambda^{-1} \in S$ por lo que existe $\psi \neq 0$ tal que $f(\lambda^{-1})\psi = \psi$ si y solo si $A\psi = \lambda\psi$, i.e., todo $\lambda \in \sigma(A) - \{0\}$ es un valor propio de A. Consideremos el espacio propio

$$E_\lambda = \{x \in \mathcal{H} : Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathcal{H} : (\lambda I - A)x = 0\}\,.$$

Como es un espacio cerrado de $\mathcal{H}$, su bola unitaria cerrada $\overline{B_\lambda}$ también es cerrada en $\mathcal{H}$. Ahora $\lambda^{-1}A$ es un operador compacto que restringido al espacio E_λ es el operador identidad. Por lo tanto, $\lambda^{-1}A\overline{B_\lambda}$ es un conjunto precompacto y $\lambda^{-1}A\overline{B_\lambda} = \overline{B_\lambda}$, de aquí que $\overline{B_\lambda}$ es compacto. Concluimos la prueba usando el hecho de que un espacio normado es de dimensión finita si y solo si su bola unitaria cerrada es compacta. □

El siguiente teorema también se le conoce como el teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos.

TEOREMA 2.1.20 (Hilbert-Schmidt). *Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto, entonces existe una base ortonormal $\{\phi_n\}$ para $\mathcal{H}$, tal que $A\phi_n = \lambda_n \phi_n$ y en el caso no finito, $\lambda_n \to 0$. Además,*

$$A = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \,, \tag{29}$$

donde la convergencia es en la norma de operadores.

Demostración. Por el teorema 2.1.19, los elementos de $\sigma(A)\backslash\{0\}$ son valores propios de A y cada espacio propio asociado tiene una base (vectorial) finita que podemos suponer ortonormal. Por consiguiente, la unión de estas bases, que llamaremos β, es un conjunto ortonormal, ya que los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales. Sea $\mathcal{M}$ la cerradura del espacio vectorial generado por β y sabemos que

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp} \,.$$

Afirmamos que $\mathcal{M}^{\perp} = \emptyset$: es inmediato verificar que $A(\mathcal{M}^{\perp}) \subset \mathcal{M}^{\perp}$ y al restringir A a $\mathcal{M}^{\perp}$, obtenemos un operador $\hat{A}\colon \mathcal{M}^{\perp} \to \mathcal{M}$, que es compacto y autoadjunto (pues A mismo posee dichos atributos), que además no tiene valores propios distintos de cero, de lo contrario, $\mathcal{M}^{\perp}$, $\mathcal{M}$ tendrían un elemento no cero en común. Así, $\sigma(\hat{A})\backslash\{0\} = \emptyset$ y $0 = r(\hat{A}) = \|\hat{A}\|$, esta última por ser $\hat{A}$ autoadjunto. Entonces $\hat{A} = 0$ y $\mathcal{M}^{\perp} = 0$, de lo contrario, $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp} \neq \emptyset$. Concluimos que $\mathcal{H} = \mathcal{M}$ y que β es una base ortonormal numerable, debido a que $\mathcal{H}$ es separable y el conjunto de valores propios de A es a lo más numerable, pues siempre se encuentra dentro de $\sigma(A)$.

Para el caso no finito, el conjunto de autovalores de A por ser subconjunto del compacto $\sigma(A)$ tiene un punto de acumulación, que es necesariamente cero por el teorema 2.1.19. Por último, es sencillo verificar utilizando la norma de operadores que $A = \lim_{N\to\infty} \sum_n^N \lambda_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, i.e., (29). □

A la expresión (29) del resultado anterior se le conoce como representación espectral de un operador autoadjunto. Por conveniencia, denotamos como $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ al conjunto de todos los operadores acotados con dominio todo $\mathcal{H}$.

COROLARIO 2.1.21. *Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador compacto y autoadjunto, entonces lo siguiente se cumple:*

(a) Los autovalores $\{\lambda_n\}$ de A pueden ser ordenados como $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$ Cada $|\lambda_j|$ se repite p_j-veces, donde $p_j = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_j I)$.
(b) $|\lambda_1| = \|A\|$.
(c) $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$.

Demostración. (a): Sea $\sigma(A)$ el espectro de A y consideremos la función $\nu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida como $\nu(z) = |z|$. La continuidad de ν se sigue directamente de

$$||z_0| - |z|| = |\nu(z_0) - \nu(z)| \geq |z_0 - z|$$

Por el teorema 2.1.20, se tiene que $\sigma(A)$ es numerable. Consideremos

$$|\lambda_1| = \max_{\sigma(A)\backslash\{0\}} \nu(z) \,, \quad |\lambda_2| = \max_{\sigma(A)\backslash\{0,\lambda_1\}} \nu(z) \,, \quad \dots$$

El conjunto que resulta en cada paso es compacto y se cumple la existencia del máximo.

(b): Se deja de ejercicio mostrar que $\|A\| \leq \sup_j |\lambda_j|$, es decir, $\|A\| \leq |\lambda_1|$. Además, como $\|A\| \geq \|A\phi_1\| = |\lambda_1|$ (se ha conservado la notación del teorema de 2.1.20), Por lo que se tiene la igualdad.

(c): Uno calcula que

$$\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax\rangle \geq |\langle \phi_1, A\phi_1\rangle| = |\langle \phi_1, \lambda_1\phi_1\rangle| = |\lambda_1| \,.$$

Por otro lado,

$$|\langle x, Ax\rangle| \leq \|Ax\| \, \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2 = \|A\| \,,$$

que tomando el máximo se llega a lo buscado. □

Veamos una implicación del resultado anterior.

COROLARIO 2.1.22. *Para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador compacto autoadjunto, lo siguiente se cumple:*

(a) Si $\mathcal{M}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, entonces $\max_{x\in\mathcal{M}^\perp} |\langle x, Ax\rangle| = \|P_{\mathcal{M}^\perp} A\|$.
(b) Si $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$, es una enumeración de los valores propios de A, entonces

$$|\lambda_n| = \max_{x\in(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{n-1})^\perp} |\langle x, Ax\rangle| \,.$$

Demostración. (a): Consideremos la restricción $P_{\mathcal{M}^\perp} A \colon \mathcal{M}^\perp \to \mathcal{M}^\perp$ donde $P_{\mathcal{M}^\perp}$ es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{M}^\perp$. Se tiene que $P_{\mathcal{M}^\perp} A$ es acotado, pues es el producto de un operador compacto y un operador acotado. Para verificar que es autoadjunto, para $x, y \in \mathcal{M}^\perp$,

$$\langle y, P_{\mathcal{M}^\perp} Ax\rangle = \langle y, Ax\rangle = \langle Ay, x\rangle = \langle P_{\mathcal{M}^\perp} Ay, x\rangle \,.$$

Luego, por el corolario 2.1.21 tenemos que

$$\|P_{\mathcal{M}^\perp} A\| = \max_{\substack{x\in\mathcal{M}^\perp \\ \|x\|=1}} |\langle x, P_{\mathcal{M}^\perp} Ax\rangle| = \max_{\substack{x\in\mathcal{M}^\perp \\ \|x\|=1}} |\langle x, Ax\rangle| \,.$$

(b): Sea $\mathcal{M} = \operatorname{span} \{\varphi\}_{j=1}^{n-1}$ el espacio generado por los primeros $n-1$ vectores propios de A. Consideremos $\hat{A} = A\restriction_{\mathcal{M}^\perp}$. Así, $\hat{A} \colon \mathcal{M}^\perp \to \mathcal{M}^\perp$, pues $A(\mathcal{M}^\perp) \subset \mathcal{M}^\perp$. Puesto que $\hat{A}$ es compacto y autoadjunto, por el corolario 2.1.21 tenemos que

$$|\lambda_n| = \|\hat{A}\| = \max_{\substack{x\in\mathcal{M}^\perp \\ \|x\|=1}} |\langle x, Ax\rangle| \,,$$

como se quería. □

Antes de proseguir, comentemos que la representación espectral de un operador autoadjunto $A = \sum_n \lambda_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$, enunciada en el teorema de Hilbert-Schmidt es única en el siguiente sentido: Si $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ es el conjunto de valores propios no cero de A distintos entre si y P_n es la proyección ortogonal sobre el correspondiente espacio propio asociado a λ_n, entonces $A = \sum_n \lambda_n P_n$. Ciertamente, si $\lambda \neq 0$ es cualquier valor propio de A y φ un vector propio asociado con λ, entonces

$$0 = \|(\lambda I - A)\varphi\|^2 = \|\lambda\varphi - A\varphi\|^2 = \left\|\lambda\varphi + \sum_n \lambda P_n\varphi - \sum_n \lambda P_n\varphi - \sum_n \lambda_n P_n\varphi\right\|^2 .$$

Se deja al lector verificar que $\left\langle \lambda\varphi - \sum_j \lambda P_j\varphi, \sum_n (\lambda - \lambda_n) P_n\varphi \right\rangle = 0$ y como consecuencia de (9) obtenemos

$$\sum_j |\lambda - \lambda_j|^2 \left\|P_j\varphi\right\|^2 + |\lambda|^2 \left\|\varphi - \sum_j \|P_j\varphi\right\|^2 ,$$

de donde $|\lambda - \lambda_j| \, \|P_j\varphi\| = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $\varphi = \sum_j P_j\varphi$. Como $\varphi \neq 0$, existe j_0 tal que $P_{j_0}\varphi \neq 0$ y por tanto $\lambda = \lambda_{j_0}$. Por consiguiente, para $j \neq j_0$ se cumple $\lambda \neq \lambda_{j_0}$ y $P_j\varphi = 0$, que implica $\varphi \in \mathcal{R}(P_{j_0})$, es decir, en la segunda representación aparecen los valores propios no cero de A.

Lo anterior implica que $A^k = \sum_n \lambda_n^k P_n$, con $k \in \mathbb{N}$. Así, seleccionando $\lambda_n^{1/k}$ como la raíz de argumento más pequeño, $0 \leq \arg \lambda_n^{1/k} \leq 2\pi/k$, el operador $(A^{1/k})^k = A$.

Definición 2.1.23. Un operador $A \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es **positivo** (o no negativo para algunos autores) si $\langle \varphi, A\varphi\rangle \geq 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$.

Como consecuencia del ejercicio P.2.1 es claro que todo operador acotado y positivo es autoadjunto.

TEOREMA 2.1.24. *Para $n \geq 2$, cada operador compacto autoadjunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tiene exactamente una raíz n-ésima $A^{1/n}$ que es un operador compacto cuyos valores propios están en*

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 \leq \arg z \leq 2\pi/n\}\,.$$

En particular, cada operador compacto positivo tiene exactamente una raiz n-ésima que es también un operador compacto positivo.

Demostración. El operador $A^{1/n} = \sum_j \lambda_j^{1/n} P_j$ con $0 \leq \arg \lambda_j^{1/n} \leq 2\pi/n$ tiene las propiedades enunciadas. Si $B = \sum_j \mu_j Q_j$ es otro operador compacto autoadjunto con las mismas propiedades, entonces

$$\sum_j \mu_j^n Q_j = B^n = A = \sum_j \lambda_j P_j\,.$$

Por la unicidad de la representación utilizada se concluye que $\mu_j^n = \lambda_j$ y $Q_j = P_j$. Las desigualdades $0 \leq \arg \mu_j \leq 2\pi/n$ implican que $\mu_j = \lambda_j^{1/n}$ y consecuentemente $B = A^{1/n}$. Si A es positivo entonces $\lambda_j \geq 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ y la condición $0 \leq \arg \lambda_j^{1/n} \leq 2\pi/n$ implica $\lambda_j^{1/n} \geq 0$. $\square$

Para un operador A compacto, tenemos que A^*A es compacto, positivo y autoadjunto. Se puede definir el **valor absoluto** de A como $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$, que es la única raíz cuadrada positiva de A^*A. Es claro que $|A|$ es un operador compacto y positivo.

TEOREMA 2.1.25 (Forma canónica para operadores compactos). *Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es compacto, entonces existen conjuntos (no necesariamente completos) ortonormales $\{\varphi_n\}$ y $\{\phi_n\}$ y números reales positivos $\{\lambda_n\}$ tales que $A = \sum_n \lambda_n |\varphi_n\rangle\langle\phi_n|$. Esta expresión puede ser una suma finita o una serie que converge en norma. Los números $\{\lambda_n\}$ son llamados valores singulares de A.*

Demostración. Como A es compacto y autoadjunto, es claro que A^*A, que es compacto y positivo. Por el teorema 2.1.20, existe un base ortonormal de vectores propios $\{\psi_n\}$, con $\{\mu_n\}$ los valores propios de A^*A. Sean $\{\varphi_n\} \subset \{\psi_n\}$ los elementos tales que $\varphi_n \notin \mathcal{N}(A)$, luego $A^*A\varphi_n = \mu_n\varphi_n$ y $\mu_n > 0$ y, por tanto, para $n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_n > 0$ tal que $\lambda_n^2 = \mu_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\phi_n = A\varphi_n/\lambda_n$ y como $\langle\varphi_n, \varphi_n\rangle = 0$, si $m \neq n$ entonces $\{\varphi_n\}$ forma un conjunto ortonormal. Así, cada $h \in \mathcal{H}$ se puede ver como $h = \sum_m a_m\psi_m$ donde $a_m = \langle\psi_m, h\rangle$. Aplicando A en h obtenemos

$$\begin{aligned} Ah = A\left(\sum_m a_m\psi_m\right) &= \sum_m a_m A\varphi_m \\ &= \sum_m \lambda_m a_m A\varphi_m/\lambda_m = \sum_m \lambda_m a_m \phi_m\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A = \sum_m \lambda_m |\varphi_m\rangle\langle\phi_m|$.

Para ver la convergencia (en norma) de la serie; supongamos que $\{\mu_m\}$ es un conjunto infinito, entonces $\mu_m \to 0$ y por ende $\lambda_n \searrow 0^+$ lo que implica para todo $\varepsilon > 0$ que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$ entonces $0 < \lambda_n < \varepsilon$. De esta manera, si $x \in \mathcal{H}$ y $n \geq N$, entonces

$$\begin{aligned} \left\|Ax - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\langle\varphi_j, x\rangle\phi_j\right\|^2 &= \left\|\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j\langle\varphi_j, x\rangle\phi_j\right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j\langle\varphi_j, x\rangle|^2\|\phi_j\|^2 \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j|^2|\langle\varphi_j, x\rangle|^2 \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \varepsilon^2|\langle\varphi_j, x\rangle|^2 \\ &= \varepsilon^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} |\langle\varphi_j, x\rangle|^2 = \varepsilon^2\|x\|^2\,. \end{aligned}$$

La segunda igualdad se calcula directamente usando la ortonormalidad de $\{\phi_n\}$ y la última desigualdad es la de Bessel, utilizando el conjunto ortogonal $\{\varphi_n\}$. Por lo tanto,

$$\left\| A - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\cdot|\varphi_j \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \varepsilon\,, \quad n \geq N\,,$$

de donde se concluye la demostración. □

Se puede verificar que, cuando P es un operador positivo, λ es un valor propio de P si y solo si $\sqrt{\lambda}$ es valor propio de $\sqrt{P}$.

Lema 2.1.26. *Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ subespacios de dimensión finita. Si* $\dim \mathcal{M} < \dim \mathcal{N}$ *entonces $\mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$.*

Demostración. Como $\mathcal{M}^\perp \oplus \mathcal{M} = \mathcal{H}$, entonces $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^\perp \oplus \mathcal{N} \cap \mathcal{M} = \mathcal{N}$. Por lo tanto, si $\mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N} = \emptyset$, se cumple que $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{N}$. □

El siguiente resultado es conocido como el **principio del minimax**.

Teorema 2.1.27. *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ compacto y positivo. Si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots$, son todos sus valores propios positivos (incluyendo multiplicidades), entonces*

$$\lambda_n = \min_{\substack{M \in \mathbb{N} \\ \dim M = n-1}} \max_{\substack{x \in M^\perp \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle\,. \tag{30}$$

Demostración. Del teorema 2.1.20, existe una base ortonormal $\{\phi_n\}$ para $\mathcal{H}$, tal que $A\phi_n = \lambda_n \phi_n$. Dado M un subespacio de dimensión $n-1$, por el lema 2.1.26 existe $x_0 \in \operatorname{span}\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$ tal que $x_0 \in M^\perp$ y $\|x_0\| = 1$. Si $x_0 = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k$, entonces $\|x_0\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 = 1$ y

$$\langle x_0, Ax_0\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |a_k|^2 \geq \lambda_n \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \lambda_n\,,$$

de donde $\max_{\substack{x \in M^\perp \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle \geq \lambda_n$, el máximo existe por el corolario 2.1.22.(a). Además, por 2.1.22.(b) tenemos para $M_0 = \operatorname{span}, \{\phi_1, \cdots, \phi_{n-1}\}$ que

$$\lambda_n = \max_{\substack{x \in M_0 \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle\,.$$

Por lo tanto, conjuntando ambas conclusiones llegamos a (30). □

Del teorema 2.1.27, se cumple que $\|Ax\|^2 = \langle x, A^*Ax\rangle = \langle x, |A|^2 x\rangle$. Como los valores propios de $|A|^2$ son los cuadrados de los valores propios de $|A|$, entonces hemos probado lo siguiente.

Corolario 2.1.28. *Para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ compacto, si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$, es una enumeración incluyendo multiplicidades, de todos los valores propios positivos de $|A|$. Entonces*

$$\lambda_n = \min_{\substack{M \in \mathbb{N} \\ \dim M = n-1}} \max_{\substack{x \in M^\perp \\ \|x\|=1}} \|Ax\|\,.$$

2.2. La clase de traza.

A partir de aquí, $\mathcal{H}$ representa un espacio de Hilbert separable y por consiguiente, contiene una base ortonormal numerable.

Definición 2.2.1. La **traza** de un operador positivo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ viene dada por

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_n \langle \varphi_n, A\varphi_n\rangle\,, \tag{31}$$

donde $\{\varphi_n\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Observación 2.2.2. Note de (31) que $\operatorname{tr}(A) = \sum_n \langle A\varphi_n, \varphi_n\rangle$, ya que A es también autoadjunto. Además, como $\langle \varphi_n, A\varphi_n\rangle = \langle A^{1/2}\varphi_n, A^{1/2}\varphi_n\rangle = \|A^{1/2}\varphi_n\|^2$, entonces

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_n \|A^{1/2}\varphi_n\|^2 \,. \tag{32}$$

PROPOSICIÓN 2.2.3. *La traza de un operador positivo no depende de la base ortonormal elegida.*

Demostración. Sean $\{\varphi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ bases ortonormales de $\mathcal{H}$ y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador positivo. Por la identidad de Parseval,

$$\|A^{1/2}\varphi_n\|^2 = \sum_n |\langle A^{1/2}\varphi_n, \psi_m\rangle|^2 \quad \text{y} \quad \|A^{1/2}\psi_m\|^2 = \sum_n |\langle A^{1/2}\psi_m, \varphi_n\rangle|^2 \,.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}_\varphi(A) &= \sum_n \langle A\varphi_n, \varphi_n\rangle = \sum_n\sum_m |\langle A^{1/2}\varphi_n, \psi_m\rangle|^2 \\
&= \sum_m\sum_n |\langle \varphi_n, A^{1/2}\psi_m\rangle|^2 = \sum_m \|A^{1/2}\psi_m\|^2 = \operatorname{tr}_\psi(A)\,.
\end{aligned}$$

El intercambio de las sumas es válido, debido a que sus términos son positivos. □

Lo siguiente muestra una propiedad de operadores compactos respecto a su traza.

PROPOSICIÓN 2.2.4. *Si A es un operador compacto, entonces* $\operatorname{tr}(|A|) = \sum_n \lambda_n$, *donde $\{\lambda_n\}$ son los valores singulares de A, i.e., los valores propios de $|A|$.*

Demostración. Como $|A|^2 = A^*A$ es un operador compacto y autoadjunto, por el teorema de Hilbert-Schmidt 2.1.20, existe una base ortonormal $\{\varphi_n\}$ de $\mathcal{H}$ tal que $|A|^2\varphi_n = \mu_n\varphi_n$. De esta manera, $|A|\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, con $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{tr}(|A|) = \sum_n \langle |A|\varphi_n, \varphi_n\rangle = \sum_n \lambda_n \,,$$

como se quería. □

Ejemplo 2.2.I. Para $a \in \mathcal{H}$, defina $|a\rangle\langle a| \in B(\mathcal{H})$ como $h \mapsto |a\rangle\langle a|\, h$ o equivalentemente $h \mapsto \langle a, h\rangle\, a$. Este operador es un operador positivo con $\operatorname{tr}(|a\rangle\langle a|) = \|a\|^2$. Ciertamente,

$$\langle h, |a\rangle\langle a|\, h\rangle = \overline{\langle a, h\rangle}\, \langle a, h\rangle = |\langle a, h\rangle|^2 \ , \quad h \in \mathcal{H}$$

lo que implica que el operador es positivo. Además, $a = \sum_n \alpha_n\varphi_n$, con $\alpha_n \in \mathbb{C}$ y $\{\varphi_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Así,

$$\operatorname{tr}(|a\rangle\langle a|) = \sum_m \langle \varphi_m, |a\rangle\langle a|\, \varphi_m\rangle = \sum_m |\langle \varphi_m, a\rangle|^2 = \sum_m |\alpha_m|^2 = \|a\|^2 \ .$$

Recordamos que un operador $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es **isométrico** (o isometría) si es invertible tal que $U^{-1} \subset V^*$ y **unitario** si $U^{-1} = V^*$. Además, U es una **isometría parcial** si $U\restriction_{(\mathcal{N}(U))^\perp}$ es una isometría.

TEOREMA 2.2.5. *La traza de operadores positivos en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ cumple las siguientes propiedades:*

(a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
(b) $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda\operatorname{tr}(A)$, *con* $\lambda \geq 0$.
(c) $\operatorname{tr}(U^*AU) = \operatorname{tr}(A)$, *con U unitario.*
(d) $\operatorname{tr}(V^*AV) \leq \operatorname{tr}(A)$, *con V isometría parcial.*
(e) Si $0 \leq A \leq B$ *entonces* $\operatorname{tr}(A) \leq \operatorname{tr}(B)$.
(f) Para A y B positivos, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Demostración. Las propiedades (a), (b) y (e) son inmediatas. Para lo siguientes puntos, dejamos al lector verificar de manera simple, que una isometría manda bases ortonormales en bases ortonormales. (c): Como U es unitario y $\{U\varphi_n\}$ es base ortonormal, uno tiene de la proposición 2.2.3 que

$$\operatorname{tr}(U^*AU) = \sum_n \langle \varphi_n, U^*AU\varphi_n\rangle = \sum_n \langle U\varphi_n, AU\varphi_n\rangle = \operatorname{tr}(A)\ .$$

(d): Como $\mathcal{H} = \mathcal{N}(V) \oplus \mathcal{N}(V)^\perp$, tenemos que $V(\Phi) = \{V\varphi_n : \varphi_n \notin \mathcal{N}(V)\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{R}(V)$, si Φ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.. De esta manera, completamos $V(\Phi)$ a una base ortonormal $\Psi = \{\psi_n\}$ de $\mathcal{H}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{tr}(V^*AV) = \sum_n \langle V\varphi_n, AV\varphi_n\rangle \le \sum_n \langle \psi_n, A\psi_n\rangle = \operatorname{tr}(A)\ ,$$

como se quería.

(f): Por la observación 2.2.2 el operador AB es autoadjunto y

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_m \langle \varphi_m, AB\varphi_m\rangle = \sum_m \langle B^*A^*\varphi_m, \varphi_m\rangle = \sum_m \langle BA\varphi_m, \varphi_m\rangle = \operatorname{tr}(BA)\,.$$

□

Definición 2.2.6. Decimos que un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es de la **clase de traza** si $\operatorname{tr}(|A|) < \infty$. Denotaremos como $L_1(\mathcal{H})$, a la familia de todos los operadores de la clase de traza.

Es claro que $A \in L_1(\mathcal{H})$ si y solo si $|A| \in L_1(\mathcal{H})$. Además, de la proposición 2.2.4, para $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ compacto, se cumple que $A \in L_1(\mathcal{H})$ si y sólo si $\sum_n \lambda_n < \infty$, con $\{\lambda_n\}$ los valores singulares de A.

Ejemplo 2.2.II. Del ejemplo 2.2.I tenemos para $a \in \mathcal{H}$ que $|a\rangle\langle a| \in L_1(\mathcal{H})$.

Ejemplo 2.2.III. Para $u, v \in \mathcal{H}$, se tiene que $|v\rangle\langle u| \in L_1(\mathcal{H})$ y ejproyector

$$\operatorname{tr}(||v\rangle\langle u||) = \|v\|\,\|u\|\ .$$

En efecto, el caso $u = 0$ es directo. Para $u \neq 0$, se verifica directamente que $\|u\|^{-1}|u\rangle\langle u|$ es raíz cuadrada de $|u\rangle\langle u|$ y como $|v\rangle\langle u|^* = |u\rangle\langle v|$,

$$||v\rangle\langle u||^2 = |v\rangle\langle u|^*\,|v\rangle\langle u| = \|v\|^2\,|u\rangle\langle u|\ ,$$

es decir $||v\rangle\langle u|| = \|v\|\,\|u\|^{-1}|u\rangle\langle u|$. Por lo tanto, del teorema 2.2.5.(b) y del ejemplo 2.2.I, se tiene que

$$\operatorname{tr}(||v\rangle\langle u||) = \|v\|\,\|u\|^{-1}\operatorname{tr}(|u\rangle\langle u|) = \|v\|\,\|u\|\ .$$

Lema 2.2.7 (Descomposición polar). *Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces existen $P, V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, con P positivo y V isometría parcial, tales que*

$$T = VP\,. \tag{33}$$

Demostración. Sea $P = |T| = (T^*T)^{1/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, que es positivo y para $h \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\|Ph\|^2 &= \langle Ph, Ph\rangle = \langle (T^*T)^{\frac12}h, (T^*T)^{\frac12}h\rangle \\ &= \langle T^*Th, h\rangle = \langle Th, Th\rangle = \|Th\|^2\,,\end{aligned} \tag{34}$$

es decir, $\|P\| = \|T\|$. Ahora, definimos $\tilde V$ sobre $\mathcal{R}(P)$ como $\tilde V(Ph) = Th \in \mathcal{R}(T)$ y de (34) se sigue que $\tilde V$ es isometría. Por lo tanto, si V es la extensión de $\tilde V$, tal que $V = 0$ en $\mathcal{R}(P)^\perp$, se sigue que $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es isometría parcial y se cumple (33). □

Recordemos que un operador acotado A es una **contracción** si $\|A\| \le 1$.

Observación 2.2.8. Un operador no trivial $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ cumple que $\|A\|^{-1} A$ es una contracción. Además, un operador autoadjunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que es contracción se puede escribir como

$$A = \frac{1}{2}(U_+ + U_-)\,,$$

donde $U_\pm = A \pm i\sqrt{I - A^2}$ son unitarios y $I - A^2$ es positivo.

LEMA 2.2.9. *Todo operador lineal B en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una combinación lineal de cuatro operadores unitarios.*

Demostración. En virtud de la observación 2.2.8, es suficiente probar el resultado para contracciones. Note que $B = B_1 + iB_2$ donde

$$B_1 = \frac{1}{2}(B + B^*) \quad \text{y} \quad B_2 = \frac{1}{2i}(B - B^*)\,,$$

los cuales son autoadjuntos en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y contracciones, ya que B lo es. Por lo tanto, de la segunda parte de la observación 2.2.8 se tiene lo deseado. □

Lo siguiente muestra algunas propiedades básicas de la clase de traza.

TEOREMA 2.2.10. *La clase $L_1(\mathcal{H})$ es un *-ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, esto es:*

(a) $L_1(\mathcal{H})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
(b) Si $A \in L_1(\mathcal{H})$ y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces AB y $BA \in L_1(\mathcal{H})$. Esto significa que $L_1(\mathcal{H})$ es un ideal bilateral de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
(c) Si $A \in L_1(\mathcal{H})$ entonces $A^* \in L_1(\mathcal{H})$.

Demostración. (a): Es claro que $L_1(\mathcal{H})$ es cerrado bajo la multiplicación escalar y para mostrar que es cerrado bajo la suma; sean $A, B \in L_1(\mathcal{H})$ y considere las siguientes descomposiciones polares

$$A + B = U|A + B|\,, \qquad A = V|A|\,, \qquad B = W|B|\,, \tag{35}$$

donde U, V, W son isometrías parciales. Note que

$$\langle \varphi_n, U^*V|A|\varphi_n\rangle = \left\langle |A|^{\frac{1}{2}}V^*U\varphi_n, |A|^{\frac{1}{2}}\varphi_n \right\rangle\,,$$

donde $\{\varphi_n\}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}$, y aplicando la desigualdad de Schwarz,

$$\langle \varphi_n, U^*V|A|\varphi_n\rangle \le \left\| |A|^{\frac{1}{2}}\varphi_n \right\| \left\| |A|^{\frac{1}{2}}V^*U\varphi_n \right\|\,.$$

Entonces, dado $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle \varphi_n, U^*V|A|\varphi_n\rangle| \le \left(\sum_{n=1}^{N} \left\| |A|^{\frac{1}{2}}\varphi_n \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} \left\| |A|^{\frac{1}{2}}V^*U\varphi_n \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{36}$$

Como U, V son isometrías, uno verifica que $\{V^*U\varphi_n\}$ es un sistema ortonormal y por consiguiente de (32), el lado izquierdo de (36) es $\le (\operatorname{tr}(|A|))^{\frac{1}{2}}(\operatorname{tr}(|A|))^{\frac{1}{2}} = \operatorname{tr}(|A|)$. Análogamente,

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle \varphi_n, U^*W|B|\varphi_n\rangle| \le \operatorname{tr}(|B|)\,.$$

Así, uno tiene de (35) que $|A + B| = U^*(A + B) = U^*V|A| + U^*W|B|$ y

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n, |A + B|\varphi_n\rangle &= \sum_{n=1}^{N} |\langle \varphi_n, U^*V|A| + U^*W|B|\varphi_n\rangle| \\
&\le \sum_{n=1}^{N} |\langle \varphi_n, U^*V|A|\varphi_n\rangle| + \sum_{n=1}^{N} |\langle \varphi_n, U^*W|B|\varphi_n\rangle|
\end{aligned}$$

Como $N \in \mathbb{N}$ es arbitrario, $\operatorname{tr}(|A + B|) \le \operatorname{tr}(|A|) + \operatorname{tr}(|B|) < \infty$, i.e., $A + B \in L_1(\mathcal{H})$.

(b): Del punto anterior y del lema 2.2.9, basta demostrar este punto cuando B es unitario. Note que $(B^*|A|B)^2$ implica $|AB|^2$ y por ende $B^*|A|B = |AB|$. Similarmente, $|BA| = |A|$. Por lo tanto, del teorema 2.2.5.(c), se tiene que $AB, BA \in L_1(\mathcal{H})$.

(c): Sea $A = U|A|$ la descomposición polar de A. Entonces $A^* = (U|A|)^* = |A|U^*$ y el punto anterior asegura $|A|U^* \in L_1(\mathcal{H})$, teniendo en cuenta que $A \in L_1(\mathcal{H})$ si y solo si $|A| \in L_1(\mathcal{H})$. □

Lo siguiente muestra una propiedad de los operadores de la clase de traza.

TEOREMA 2.2.11. *Cada operador en $A \in L_1(\mathcal{H})$ es compacto.*

Demostración. Demostraremos que A es límite de una sucesión de operadores de rango finito. Considere una base ortonormal $\{\varphi_n\}$ de $\mathcal{H}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el operador de rango finito $A_n \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, dado por

$$A_n := A\left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|\right),$$

Es claro que

$$\|A_n - A\| = \sup_{\substack{\psi\in\Omega_n \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\|, \quad \text{donde} \quad \Omega_n = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}^{\perp}.$$

Ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\psi \in \Omega_n$, con$\|\psi\| = 1$, completamos $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi\}$ a una base ortonormal de $\mathcal{H}$, digamos $\{\psi_j\}$ donde $\psi_j = \varphi_j$ para $i \le j \le n$ y $\psi_{n+1} = \psi$. Como $A \in L_1(\mathcal{H})$ entonces $|A|^2 \in L_1(\mathcal{H})$, es decir,

$$\operatorname{tr}\left(|A|^2\right) = \sum_n \|A\psi_n\|^2 < \infty.$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} \|A\varphi_j\| + \|A\psi\|^2 \le \sum_n \|A\psi_n\|^2, \quad \text{o bien}, \quad \|A\psi\|^2 \le \sum_{j=n+1}^{\infty} \|A\psi_j\|^2$$

Así,

$$\sup_{\substack{\psi\in\Omega_n \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\| \le \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \|A\psi_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\|A_n - A\| < \epsilon$, de donde A es compacto, al ser límite de operadores de rango finito. □

Definición 2.2.12. Para cada $A \in L_1(\mathcal{H})$ definimos

$$\|A\|_1 = \operatorname{tr}(|A|).$$

Es fácil verificar que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $L_1(\mathcal{H})$. De hecho, al finalizar la prueba del teorema 2.2.10.(a), obtuvimos la desigualdad del triángulo.

Ejemplo 2.2.IV. Del ejemplo 2.2.III se cumple que

$$\||v\rangle\langle u|\|_1 = \|u\|\|v\|, \quad \text{para todo} \quad u, v, \in \mathcal{H}.$$

COROLARIO 2.2.13. *Si $A \in L_1(\mathcal{H})$ entonces $\|A\|_1 = \sum_n \lambda_n$, con $\{\lambda_n\}$ como los valores singulares de A.*

Demostración. Es directo del teorema 2.2.11 y la proposición 2.2.4 □

LEMA 2.2.14. *Para todo $A \in L_1(\mathcal{H})$ se cumple $\|A\| \le \|A\|_1$.*

Demostración. Como $|A| \in L_1(\mathcal{H})$ es compacto y autoadjunto se tiene para los valores propios $\{\lambda_n\}$ de $|A|$ que $\lambda_1 = \||A|\|$. Por lo tanto, de los corolarios 2.1.21 y (2.2.13), uno simplemente calcula que $\|A\| = \lambda_1 \ge \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \|A\|_1$. □

Hemos demostrado que la clase de traza es un espacio lineal normado. Veamos que también cumple lo siguiente.

TEOREMA 2.2.15 (Completez). *La clase de operadores* $L_1(\mathcal{H})$ *es un espacio de Banach con la norma* $\|\cdot\|_1$.

Demostración. Por el lema 2.2.14 se cumple que si una sucesión $\{A_n\} \subset L_1(\mathcal{H})$ es $\|\cdot\|_1$-Cauchy, entonces también es $\|\cdot\|$-Cauchy y por consiguiente existe un $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A$. Para $\{\varphi_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, |A|\varphi_j\rangle = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, |A_m|\varphi_j\rangle \leq \lim_{m\to\infty} \operatorname{tr}(|A_m|) = \lim_{m\to\infty} \|A_m\|_1 < \infty\,,$$

debido a que $\{\|A_m\|_1\}$ es una sucesión de Cauchy de números reales. También se usó que la función valor absoluto es continua con la norma de operadores.

Ahora, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_n - A_m\|_1 < \epsilon/2$ para $n, m > N$. Así,

$$\begin{aligned}\|A - A_m\|_1 = \operatorname{tr}(|A - A_m|) &= \sum_{j\geq 1} \langle \varphi_j, |A - A_m|\varphi_j\rangle \\ &= \sum_{j\geq 1} \lim_{n\to\infty} \langle \varphi_j, |A_n - A_m|\varphi_j\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{j\geq 1} \langle \varphi_j, |A_n - A_m|\varphi_j\rangle \\ &= \liminf_{n\to\infty} \|A_n - A_m\|_1 \leq \liminf_{n\to\infty} \epsilon/2 < \epsilon\,.\end{aligned}$$

Para la primera desigualdad hemos utilizado el lema de Fatou (ver [7, Lem. 4.1]) con la medida de conteo. □

Lo siguiente muestra una propiedad de los operadores de rango finito sobre el espacio de clase de traza.

COROLARIO 2.2.16. *Los operadores de rango finito son* $\|\cdot\|_1$*-densos en* $L_1(\mathcal{H})$.

Demostración. Si $A \in L_1(\mathcal{H})$ compacto y $\|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$, entonces del teorema 2.1.25, usamos la forma canónica $A = \sum_j \lambda_j |\varphi_j\rangle\langle\phi_j|$, con $\{\varphi_j\}, \{\phi_j\}$ conjuntos ortonormales. Consideramos los operadores de rango finito, $S_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\varphi_n|$, con $n \in \mathbb{N}$, y uno calcula que

$$\begin{aligned}\|S_n - S_{m-1}\|_1 &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\varphi_j| - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\varphi_j| \right\|_1 = \left\| \sum_{j=m}^{n} \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\varphi_j| \right\|_1 \\ &\leq \sum_{j=m}^{n} \lambda_j \,\||\phi_j\rangle\langle\varphi_j|\|_1 = \sum_{j=m}^{n} \lambda_j \,\|\varphi_j\|\,\|\phi_j\| = \sum_{j=m}^{n} \lambda_j\,.\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\{S_n\}$ es sucesión $\|\cdot\|_1$-Cauchy y convergente a $\tilde{A}$. Por lo tanto, como se cumple $\|S_n - \tilde{A}\| \leq \|S_n - \tilde{A}\|_1 \to 0$, entonces $\|A - \tilde{A}\| \leq \|A - S_n\| + \|S_n - \tilde{A}\| \to 0$, es decir, $A = \tilde{A}$. □

La pauta importante en la demostración anterior fue la forma canónica de operadores compactos, la cual servirá para mostrar lo siguiente.

TEOREMA 2.2.17. *Si* $A \in L_1(\mathcal{H})$ *y* $\{\varphi_n\}$ *es una base ortonormal de* $\mathcal{H}$*, entonces* $\sum_n \langle \varphi_n, A\varphi_n\rangle$ *converge absolutamente. El límite es independiente de la base.*

Demostración. En virtud del teorema 2.1.25, existen conjuntos ortonormales $\{u_j\}, \{v_n\}$ en $\mathcal{H}$ y números positivos $\{\lambda_n\}$ tales que $A = \sum_m \lambda_m |v_m\rangle\langle u_m|$. De esta manera, $\langle \varphi_n, A\varphi_n\rangle = \sum_m \lambda_m \langle u_m, \varphi_n\rangle\langle\varphi_n, v_m\rangle$ y aplicando el teorema de Fubini [7, Teo. 4.5],

$$\begin{aligned}\sum_n |\langle \varphi_n, A\varphi_n\rangle| &= \sum_n \left| \sum_m \lambda_m \langle u_m, \varphi_n\rangle\langle \varphi_n, v_m\rangle \right| \\ &\le \sum_m \lambda_m \sum_n |\langle u_m, \varphi_n\rangle||\langle \varphi_n, v_m\rangle| \\ &\le \sum_m \lambda_m \left(\sum_n |\langle u_m, \varphi_n\rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n |\langle \varphi_n, v_m\rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_m \lambda_m \|u_m\|\|v_m\| = \sum_m \lambda_m = \operatorname{tr}(|A|) = \|A\|_1 .\end{aligned}$$

Por lo tanto, las sumas $\sum_n \langle \varphi_n, A\varphi_n\rangle$ y $\sum_{n,m} \lambda_m \langle u_m, \varphi_n\rangle\langle \varphi_n, v_m\rangle$ convergen absolutamente. Además, podemos intercambiar el orden de las series siguientes:

$$\begin{aligned}\sum_n \langle \varphi_n, A\varphi_n\rangle &= \sum_n \sum_m \lambda_m \langle u_m, \varphi_n\rangle\langle \varphi_n, v_m\rangle \\ &= \sum_m \lambda_m \sum_n \langle u_m, \varphi_n\rangle\langle \varphi_n, v_m\rangle = \sum_m \lambda_m \langle u_m, v_m\rangle ,\end{aligned} \tag{37}$$

lo que prueba la independencia de las bases. □

Gracias al resultado anterior podemos definir el siguiente concepto, el cual es independiente de la elección de la base.

Definición 2.2.18. La transformación $\operatorname{tr}\colon L_1(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A\varphi_n\rangle , \quad A \in L_1(\mathcal{H}) \tag{38}$$

se llama la traza de A, donde $\{\varphi_n\}$ es cualquier base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Teorema 2.2.19. *La aplicación* (38) *cumple las siguientes propiedades:*

(a) $\operatorname{tr}\colon L_1(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ *es una función lineal.*
(b) $\operatorname{tr}(A^*) = \overline{\operatorname{tr}(A)}$.
(c) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ *para* $A \in L_1(\mathcal{H})$ *y* $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Demostración. En virtud de las propiedades del producto interno, los puntos (a) y (b) son directos. Además, del teorema 2.2.10, se tiene que $AB, BA \in L_1(\mathcal{H})$ y como consecuencia del lema 2.2.9, es suficiente mostrar (c), cuando B es unitario. Si $\{\varphi_n\}$ base ortonormal en $\mathcal{H}$, entonces también lo es $\{\psi_n = B^*\varphi_n\}$ y, por lo tanto,

$$\sum_n \langle \psi_n, AB\psi_n\rangle = \sum_n \langle B^*\varphi_n, ABB^*\varphi_n\rangle = \sum_n \langle \varphi_n, BA\varphi_n\rangle ,$$

como se queria. □

Ejemplo 2.2.V. Para $A = \sum_m \lambda_m |v_m\rangle\langle u_m| \in L_1(\mathcal{H})$, descomposición garantizada por el teorema 2.1.25, donde $\{u_m\}, \{V_m\} \subset \mathcal{H}$ son ortonormales y $\{\lambda_m\}$ números positivos, tenemos de (37) que

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_m \lambda_m \langle u_m, v_m\rangle .$$

En particular, si $x, y \in \mathcal{H}$ entonces $\operatorname{tr}(|x\rangle\langle y|) = \langle y, x\rangle$.

Proposición 2.2.20. *Para* $A \in L_1(\mathcal{H})$ *el mapeo* $\operatorname{tr}(A(\cdot)) : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ *definido por* $B \mapsto \operatorname{tr}(AB)$, *es un funcional lineal acotado, con*

$$|\operatorname{tr}(AB)| \le \|A\|_1 \|B\| . \tag{39}$$

Demostración. El funcional es lineal debido al teorema 2.2.19. Ahora bien, del teorema 2.1.25 existen conjuntos ortonormales $\{u_n\}, \{v_n\} \subset \mathcal{H}$ y números positivos $\{\lambda_n\}$ tales que $A = \sum_m \lambda_m |v_m\rangle\langle u_m|$. Así, si $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{H}$ es base ortonormal, entonces

$$\begin{aligned}
|\mathrm{tr}\,(AB)| &= \left|\sum_n \langle \varphi_n, AB\varphi_n\rangle\right| \leq \sum_m \sum_n \lambda_m \left|\langle u_m, B\varphi_n\rangle\right| |\varphi_n, \langle v_m| \\
&\leq \sum_m \lambda_m \left(\sum_n |\langle u_m, B\varphi_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n |\langle \varphi_n, v_m\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_m \lambda_m \|B^* u_m\| \, \|v_m\| \\
&\leq \sum_m \lambda_m \|B^*\| = \|B\| \sum_m \lambda_m \,,
\end{aligned}$$

de donde se tiene (39). □

Recordemos que para $u, v \in \mathcal{H}$, la aplicación $|v\rangle\langle u|$ es el operador lineal tal que $h \mapsto \langle u, h\rangle\, v$, para todo $h \in \mathcal{H}$.

PROPOSICIÓN 2.2.21. *Si $F\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, donde $F(|v\rangle\langle u|)$ es un funcional lineal acotado, entonces existe un único $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tal que $F(|v\rangle\langle u|) = \langle u, Bv\rangle$.*

Demostración. La forma $C\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $C(u, v) = F(|v\rangle\langle u|)$ es sesquilineal y acotada, pues $|C(u, v)| \leq \|F\| \, \|u\| \, \|v\|$. Por lo tanto, del lema de Riesz 2.1.5, existe un único $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $C(u, v) = \langle u, Bv\rangle$. □

Permítanos denotar mediante $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$ al subespacio de Banach formado todos por los operadores compactos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

TEOREMA 2.2.22. *La transformación $L_1(\mathcal{H}) \to \mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$ definido por $B \mapsto \mathrm{tr}\,(B(\cdot))$, es un isomorfismo isométrico de $L_1(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$. Esto es $L_1(\mathcal{H}) \approx \mathcal{S}_\infty(\mathcal{H})$.*

Demostración. De la proposición 2.2.20, el mapeo $B \to \mathrm{tr}\,(B(\cdot))$ es acotado y

$$\|\mathrm{tr}\,(B(\cdot))\|_{(\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*} \leq \|B\|_1$$

Veamos que el mapeo es sobreyectivo: dado $f \in (\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*$, determina la forma sesquilineal $f(|u\rangle\langle v|)$ y por la proposición 2.2.21 existe un único $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$f(|u\rangle\langle v|) = \langle v, Bu\rangle = \mathrm{tr}\,(B|u\rangle\langle v|) \,. \tag{40}$$

Demostraremos que $B \in L_1(\mathcal{H})$, el funcional $f = \mathrm{tr}\,(B(\cdot))$ y $\|B\|_1 = \|f\|_{(\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*}$.

Considere la descomposición polar $B = U|B|$ y $\{\varphi_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces de (40), tenemos que

$$\sum_{n=1}^N \langle \varphi_n, |B|\varphi_n\rangle = \sum_{n=1}^N \langle U\varphi_n, B\varphi_n\rangle = \sum_{n=1}^N f(|B\varphi_n\rangle\langle U\varphi_n|) = f\left(\sum_{n=1}^N |B\varphi_n\rangle\langle U\varphi_n|\right) .$$

Observemos que $\sum_{n=1}^N |B\varphi_n\rangle\langle U\varphi_n|$ es un operador con norma menor a uno, de rango finito y por tanto compacto. Así, $\sum_{n=1}^N \langle \varphi_n, |B|\varphi_n\rangle \leq \|f\|_{(\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*}$, para todo $N \in \mathbb{N}$, lo que implica $B \in L_1(\mathcal{H})$ y $\|B\|_1 \leq \|f\|_{(\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*}$.

Es fácil ver de (40) que $\mathrm{tr}\,(B(\cdot)) = f(\cdot)$ en los operadores de rango finito que son $\|\cdot\|_1$-densos en $(\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*$, debido a la continuidad de $\mathrm{tr}\,(B(\cdot))$ y $f(\cdot)$, concluimos que son iguales. Por lo tanto, $\|B\|_1 \leq \|f\|_{(\mathcal{S}_\infty(\mathcal{H}))^*} \leq \|B\|_1$ □

En lo siguiente trabajamos con el dual de los operadores de la clase de traza.

TEOREMA 2.2.23. *El operador $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \to L_1(\mathcal{H})^*$ definido por $B \mapsto \mathrm{tr}\,(B(\cdot))$ es una isometría sobreyectiva.*

Demostración. Para la isometría, si $A \in L_1(\mathcal{H})$ y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces del teorema 2.2.19 y de la proposición 2.2.20, tenemos que $|\mathrm{tr}\,(AB)| = |\mathrm{tr}\,(BA)| \leq \|A\|_1 \|B\|$, de donde $\|\mathrm{tr}\,(B(\cdot))\|_{L_1(\mathcal{H})} \leq \|B\|$. Para la otra desigualdad, uno calcula que

$$\begin{aligned}\|B\| &= \sup_{\|x\|,\,\|y\|=1} |\langle y, Bx\rangle| = \sup_{\|x\|,\,\|y\|=1} |\mathrm{tr}\,(B|x\rangle\langle y|)| \\ &\leq \sup_{\|A\|_{(L_1(\mathcal{H}))^*}} |\mathrm{tr}\,(BA)| = \|\mathrm{tr}\,(B(\cdot))\|_{(L_1(\mathcal{H}))^*}\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\mathrm{tr}\,(B(\cdot))\|_{(L_1(\mathcal{H}))^*} = \|B\|$. La sobreyectividad se verifica de manera análoga al teorema 2.2.22. Dado $g \in (L_1(\mathcal{H}))^*$, se tiene una forma sesquilineal y por la proposición 2.2.21, existe un único operador $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle v, Bu\rangle = g\,(|u\rangle\langle v|)$. Así, $\mathrm{tr}\,(B|u\rangle\langle v|) = g\,(|u\rangle\langle v|)$, para todo $u, v \in \mathcal{H}$, de donde obtenemos que los funcionales continuos $\mathrm{tr}\,(B(\cdot))$ y $g(\cdot)$ coinciden en los operadores de rango finito que son $\|\cdot\|_1$-densos en $L_1(\mathcal{H})$. Por lo tanto, $\mathrm{tr}\,(B(\cdot)) = g(\cdot)$, en todo $L_1(\mathcal{H})$. □

Observación 2.2.24. Es de interés señalar que a la unión de los teoremas 2.2.22 y 2.2.23, se le conoce como el **Teorema de Schatten**.

2.3. Operadores de Hilbert-Schmidt. En esta sección veremos otra clase importante de operadores en la física-matemática, que tienen propiedades análogas a la clase de operadores $L_1(\mathcal{H})$.

Definición 2.3.1. Decimos que $T \in B(\mathcal{H})$ es de **Hilbert-Schmidt** si $\mathrm{tr}\,(T^*T)$ es finita. La familia de todos los operadores de Hilbert-Schmidt se denota por $L_2(\mathcal{H})$.

Observación 2.3.2. Para $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{H}$ una base ortonormal, es directo verificar la equivalencia de las siguientes condiciones:
(a) $T \in L_2(\mathcal{H})$.
(b) $T^*T = |T|^2 \in L_1(\mathcal{H})$.
(c) $\mathrm{tr}\,(|T|^2) < \infty$.
(d) $\sum_n \|T\varphi_n\|^2 < \infty$.
(e) $\{\|T\varphi_n\|\}_n \subset l_2$.

PROPOSICIÓN 2.3.3. *Todo operador de la clase de traza es de Hilbert-Schmidt, i.e., $L_1(\mathcal{H})$ está contenido en $L_2(\mathcal{H})$.*

Demostración. De la desigualdad de Cauchy- Schwarz, uno tiene para todo $f \in \mathcal{H}$ que

$$\left\langle f, |T|^2 f\right\rangle = \left\langle |T|^{1/2} f, |T|\,|T|^{1/2} f\right\rangle \leq \|T\| \left\| |T|^{1/2} f\right\|^2,$$

de donde se sigue que $\mathrm{tr}\left(|T|^2\right) \leq \|T\|\,\mathrm{tr}\,(|T|) < \infty$. Por lo tanto, de la observación 2.3.2 se tiene que $T \in L_2(\mathcal{H})$. □

Una consecuencia del resultado anterior es $|v\rangle\langle u| \in L_2(\mathcal{H})$, con $u, v \in \mathcal{H}$.

LEMA 2.3.4. *Si $A, B \in L_2(\mathcal{H})$ entonces $AB \in L_1(\mathcal{H})$.*

Demostración. Sean $C = AB$ y $C = V|C|$ su descomposición polar. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\langle \varphi_n, |C|\varphi_n\rangle = \langle A^*V\varphi_n, B\varphi_n\rangle \leq \|B\varphi_n\| \|A^*V\varphi_n\|\,,$$

de donde

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, |C|\varphi_j\rangle &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|B\varphi_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \|A^*V\varphi_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\mathrm{tr}\left(|B|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{tr}\left(|A^*V|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathrm{tr}\left(|B|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{tr}\left(|A|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\,,\end{aligned}$$

pues $|A^*V|^2 = V^*|A|^2V$ y $\mathrm{tr}\left(V^*|A|^2V\right) \leq \mathrm{tr}\left(|A|^2\right)$, por el teorema 2.2.10. Podemos concluir que $\mathrm{tr}\,(|C|) \leq \mathrm{tr}\left(|B|^2\right)\mathrm{tr}\left(|A|^2\right) < \infty$ y por definición $C = AB \in L_1(\mathcal{H})$. □

Veamos algunas propiedades cruciales del espacio de Hilbert-Schmidt.

TEOREMA 2.3.5. *El espacio $L_2(\mathcal{H})$ es *-ideal de $B(\mathcal{H})$. Esto es:*
(a) $L_2(\mathcal{H})$ es un espacio lineal.
(b) Si $T \in L_2(\mathcal{H})$ entonces $T^* \in L_2(\mathcal{H})$, i.e, $L_2(\mathcal{H})$ es cerrado bajo la adjunción.
(c) Si $A \in L_2(\mathcal{H})$ y $B \in B(\mathcal{H})$, entonces $AB \in L_2(\mathcal{H})$ y $BA \in L_2(\mathcal{H})$.

Demostración. (a): Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $A, B \in L_2(\mathcal{H})$. La cerradura bajo la multiplicación escalar se sigue de la linealidad de $\operatorname{tr}(\cdot)$ y de que $(\lambda A)^2 = \lambda^2 |A|^2$. Además,

$$|A+B|^2 = (A+B)^*(A+B) = A^*A + A^*B + B^*A + B^*B\,,$$

donde cada sumando está en $L_1(\mathcal{H})$ por ser productos de elementos de $L_2(\mathcal{H})$ y como $L_1(\mathcal{H})$ es un subespacio de $B(\mathcal{H})$ tenemos que $|A+B|^2 \in L_1(\mathcal{H})$, como se quería.

(b): La descomposición $T = U|T|$ cumple $T^* = |T|U^*$ y $|T^*|^2 = TT^* = U|T|^2U^*$. Por lo tanto, $\operatorname{tr}\left(|T^*|^2\right) = \operatorname{tr}\left(U|T|^*U^*\right) \leq \operatorname{tr}\left(|T|^2\right) < \infty$, es decir, $T^* \in L_2(\mathcal{H})$.

(c): Por el lema 2.2.9, basta mostrar la propiedad cuando B es unitario. Entonces,

$$|UA|^2 = (UA)^*(UA) = |A|^2 \quad \text{y} \quad |AU|^2 = (AU)^*(AU) = U^*|A|^2U\,,$$

de donde se sigue que

$$tr|UA|^2 = tr|A| \quad \text{y} \quad tr|AU|^2 = trU^*|A|^2U = tr|A|^2\,.$$

El resultado se concluye del teorema 2.2.10. □

Una consecuencia del resultado anterior es que en el espacio $L_2(\mathcal{H})$, podemos definir la forma $\langle\cdot,\cdot\rangle_2 : L_2(\mathcal{H}) \times L_2(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$, dada por

$$\langle A, B\rangle_2 \coloneqq \operatorname{tr}(A^*B)\ , \quad A, B \in L_2(\mathcal{H})\,,$$

la cual define un producto interno. Además, induce la norma $\|A\|_2 = \sqrt{\langle A, A\rangle}_2$, con las siguientes propiedades:
(a) $\|A\|_2^2 = \operatorname{tr}\left(|A|^2\right) = \left\||A|^2\right\|_1 = \sum_n \lambda_n^2$, con $\{\lambda_n\}$ los valores singulares de A.
(b) Dado cualquier base ortonormal $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{H}$,

$$\|A\|_2^2 = \sum_n \langle\varphi_n, A^*A\varphi_n\rangle = \sum_n \|A\varphi_n\|^2\ .$$

LEMA 2.3.6. *Para todo $A \in L_2(\mathcal{H})$ se cumple que $\|A^*\|_2 = \|A\|_2$. Además,*

$$\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1\ . \tag{41}$$

Demostración. Un cálculo simple muestra que

$$\|A^*\|_2 = \left\||A^*|^2\right\|_1^{1/2} = \left\||A|^2\right\|_1^{1/2} = \|A\|_2\ .$$

Como $\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1}(\|Ax\|^2)$, existe $\varphi \in A$ unitario tal que $\|A\|^2 - \epsilon < \|A\varphi\|^2$, es decir, $\|A\|^2 < \|A\varphi\|^2 + \epsilon$. Si $\{\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces

$$\|A\|^2 < \sum_n \|A\varphi_n\|^2 + \epsilon = \|A\|_2^2 + \epsilon\,.$$

Como ϵ es arbitrario, $\|A\|^2 \leq \|A\|_2^2$ lo cual prueba que $\|A\| \leq \|A\|_2$. Más aún, como los valores singulares $\{\lambda_n\}$ de A son positivos

$$\|A\|_2^2 = \sum_2 \lambda_n^2 \leq \left(\sum_n \lambda_n\right)^2 = \|A\|_1^2\ ,$$

que implica $\|A\|_2 \leq \|A\|_1$. □

Hemos mostrado que $L_2(\mathcal{H})$ es un espacio lineal con producto interno.

TEOREMA 2.3.7. *El espacio $(L_2(\mathcal{H}), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. La prueba es análoga a la de 2.2.10. Si $\{\varphi_j\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $\{A_n\}$ una sucesión de $\|\cdot\|_2$-Cauchy en $L_2(\mathcal{H})$, entonces se tiene de (41) que es $\|\cdot\|$-Cauchy. De esta manera, existe $A \in B(\mathcal{H})$ tal que $A_n \to A$ en la norma $\|\cdot\|$. Demostraremos que $A \in L_2(\mathcal{H})$ y que $A_n \to A$ en la norma $\|\cdot\|_2$. Note que

$$\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi_j, |A|^2\varphi_j\rangle = \lim_m \sum_{j=1}^{n}\langle\varphi_j, |A_m|^2\varphi_j\rangle \leq \lim_m \operatorname{tr}\left(|A_m|^2\right) = \lim_m \|A_m\|_2^2\,,$$

donde el límite existe debido a que $\left\{\|A_n\|_2^2\right\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Así, $\operatorname{tr}\left(|A|^2\right) \leq \lim_m \|A_m\|_2^2 < \infty$, i.e, $A \in L_2(\mathcal{H})$.

Ahora bien, como $\{A_n\}$ es $\|\cdot\|$-Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $\|A_n - A_m\|_2^2 < \epsilon/2$, cuando $n, m \geq N$. Luego,

$$\begin{aligned}\|A - A_m\|_2^2 &= \sum_j \|(A - A_m)\varphi_j\|^2 = \sum_j \lim_n \|(A_n - A_m)\varphi_j\|^2 \\ &\leq \lim_n \sum_j \|(A_n - A_m)\varphi_j\|^2 = \lim_n \|A_n - A_m\|_2^2 < \epsilon\,,\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos usado el lema de Fatou (ver [7, Lem. 4.1]) con la medida de conteo. □

En la prueba del teorema 2.2.11, el argumento esencial para que $A_n = \sum_{j=1}^{n} A|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$ converja en norma a A, es que $A^*A = |A|^2 \in L_1$. Esto ciertamente se cumple en $L_2(\mathcal{H})$ y se cumple lo siguiente de manera simple.

Teorema 2.3.8. *Todo operador en $L_2(\mathcal{H})$ es compacto.*

Permita mostrar una propiedad de densidad en el espacio de Hilbert-Schmidt.

Corolario 2.3.9. *Los operadores de rango finito son $\|\cdot\|_2$-densos en $L_2(\mathcal{H})$.*

Demostración. Si $A \in L_2(\mathcal{H})$ entonces es compacto y por el teorema 2.1.25, existe $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ y conjuntos ortonormales $\{\psi_n\}, \{\varphi_n\} \subset \mathcal{H}$, tales que $A = \sum_n \lambda_n |\varphi_n\rangle\langle\psi_n|$. Así, $\|A\|_2^2 = \sum_j \lambda_j^2$ y

$$\left\|A - \sum_{n=1}^{N}\lambda_n|\varphi_n\rangle\langle\psi_n|\right\|_2^2 = \left\|\sum_{n\geq N+1}\lambda_n|\varphi_n\rangle\langle\psi_n|\right\|_2^2 = \sum_{n\geq N+1}\lambda_n^2 \to 0\,,$$

que muestra la densidad de los operadores de rango finito. □

Veamos en lo siguiente algunas propiedades de $L_2(\mathcal{H})$, cuando $\mathcal{H} = L_2(M, \mu)$. En lo que resta de la sección, (M, μ) representa un espacio de medida σ-finita.

Lema 2.3.10. *Si $K \in L_2(M \times M, \mu \times \mu)$, entonces el operador*

$$\begin{aligned}A_K \colon L_2(M, \mu) &\to L_2(M, \mu) \\ \varphi &\mapsto \int_M K(x, y)\varphi(y)d\mu(y)\,,\end{aligned}$$

está bien definido y $\|A_K\| \leq \|K\|_{L_2(M\times M, \mu\times\mu)}$.

Demostración. Definimos a $f : M \times M \to \mathbb{C}$ como $f(x, y) = |K(x, y)|^2$. Debido a que $K \in L_2(M \times M, \mu \times \mu)$ y por Fubini, existe un conjunto Ω tal que $\mu(\Omega) = 0$ y para todo $x \in M \setminus \Omega$, $f(x) \in L_1(M, \mu)$, esto es $|K(x, \cdot)|^2 \in L_1(M, \mu(y))$, lo que significa que $K(x, \cdot) \in L_2(M, \mu(y))$, es decir

$$\left(\int_M |K(x, y)|^2 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\,,$$

para $x \in M \setminus \Omega$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}\left| \int_M K(x,y)\varphi(y)d\mu(y) \right| &\le \int_M |K(x,y)|\ |\varphi(y)|d\mu(y) \\ &\le \left(\int_M |K(x,y)|^2 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\varphi(y)|^2 d\varphi(y) \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

esta última por lema de Schwarz. De esto se sigue que

$$\left| \int_M K(x,y)\varphi(y)d\mu(y) \right|^2 \le \int_M |K(x,y)|^2 d\mu(y) \int_M |\varphi(y)|^2 d\mu(y)$$

y además,

$$\int_M \left| \int_M K(x,y)\varphi(y)d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) \le \int_M \int_M |K(x,y)|^2 d\mu(y)d\mu(x) \int_M |\varphi(y)|^2 d\mu(y) ,$$

es decir,

$$\int_M |A_K\varphi(x)|^2 d\mu(x) \le \int_{M\times M} |K(x,y)|^2 d\mu \times \mu \int_M |\varphi(y)|^2 d\mu(y) .$$

Esta desigualdad muestra que $A_K \in L_2(M,\mu)$ y $\|A_K\varphi\|_2^2 \le \|\varphi\|^2 \|K\|_{L_2}^2$. □

Veamos extensiones de bases en espacios producto.

Lema 2.3.11. *Si $\{\varphi_n\}$ es una base ortonormal de $L_2(M,\mu)$ entonces $\{\overline{\varphi_n(x),}\varphi_m(y)\}$ es una base ortonormal para $L_2(M \times M, \mu \times \mu)$.*

Demostración. Uno calcula que

$$\int_{M\times M} \overline{\varphi_n(x)}\varphi_m(y)\varphi_r(x)\overline{\varphi_s(y)}d\mu \times \mu = \int_M \overline{\varphi_n(x)}\varphi_y(x)d\mu(x) \int_M \varphi_m(y)\overline{\varphi_s(y)}d\mu(y) ,$$

de donde se sigue que

$$\left\langle \overline{\varphi_n(x)}\varphi_m(y), \overline{\varphi_r(x)}\varphi_s(y) \right\rangle = \left\langle \varphi_r(x), \varphi_n(x) \right\rangle \left\langle \varphi_m(y), \varphi_s(y) \right\rangle = \delta_{rn}\delta_{ms} ,$$

es decir, $\{\overline{\varphi_n(x),}\varphi_m(y)\}$ es ortogonal.

Ahora bien, para $f(x,y) \in L_2(M \times M, \mu \times \mu)$ tal que

$$\int_{M\times M} \overline{\varphi_k(x)}\varphi_l(xy)\overline{f(x,y)}d\mu(x)d\mu(y) = 0 ,$$

se sigue del teorema de Fubini [7, Teo. 4.5] que

$$\int_M \left(\int_M \overline{\varphi_k(x)}\ \overline{f(x,y)}d\mu(x) \right) \varphi_l(y)d\mu(y) .$$

Como $\{\varphi_l(y)\}$ es base ortonormal de $L_2(M,\mu(y))$ lo anterior implica que

$$\int_M \overline{\varphi_k(x)}\ \overline{f(x,y)}d\mu(x) = 0 , \quad \forall n, m \in \mathbb{N} ,$$

excepto para $y \in S_k \subset M$, donde $\mu(S_k) = 0$. Para $y \notin \bigcup_k S_k$, existe $R_y \subset M$ tal que

$$\int_M \overline{\varphi_k(x) f(x,y)}d\mu(x) = 0$$

excepto en R_y con $\mu(R_y) = 0$. Ahora, como $\{\overline{\varphi_k(x)}\}$ es base ortonormal de $L_2(M,\mu)$ de donde $f(x,y) = 0$, μ-c.d. En consecuencia $f(x,y) = 0$ $\mu \times \mu$-c.d.,

$$\|f\|^2 = \int_{M\times M} |f(x,y)|^2 d\mu \times \mu = \int_M \left(\int_M I_{M\setminus R_y} |f(x,y,)^2 d\mu \right) d\mu = \int_M 0 d\mu .$$

Por lo tanto, $f = 0$ $\mu \times \mu$-c.d, de donde se sigue la completez de la base. □

Veamos dos consecuencias simples del resultado anterior.

COROLARIO 2.3.12. *Todo* $K \in L_2(M \times M, \mu \times \mu)$ *se puede escribir como:*

$$K = \sum_{n,m} \alpha_{nm} \overline{\varphi_n(x)} \varphi_m(y)\,,$$

donde $\alpha_{nm} = \langle \varphi_m, A_K \varphi_n \rangle_{L_2(M,\mu)}$ *son los coeficientes de Fourier en* $L_2(M \times M, \mu \times \mu)$.

Demostración. Del lema 2.3.11, se cumple que $\{\overline{\varphi_n}, \varphi_m\}$ es base ortonormal para $L_2(M \times M, \mu \times \mu)$. Entonces, los coeficientes de Fourier son:

$$\begin{aligned}
\hat{K} = \langle \overline{\varphi_n} \varphi_m, K \rangle &= \int_{M \times M} K(x,y) \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(y)} d\mu \times \mu \\
&= \int_M \int_M K(x,y) \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(y)} d\mu(x) d\mu(y) \\
&= \int_M \left[\int_M K(x,y) \varphi_n(x) d\mu(x) \right] \overline{\varphi_m(y)} d\mu(y) \\
&= \int_M \big(A_K \varphi_n\big)(y) \overline{\varphi_m(y)} d\mu(y) \\
&= \langle \varphi_m, A_K \varphi_n \rangle_{L_2(M,\mu)} = \alpha_{nm}\,,
\end{aligned}$$

de donde se sigue la afirmación. □

El resultado anterior exhibe una descripción de los operadores en $L_2(M \times M, \mu \times \mu)$.

COROLARIO 2.3.13. *Sea* $K \in L_2(M \times M, \mu \times \mu)$ *y* $A_K : L_2(\mathcal{H}) \to L_2(\mathcal{H})$*, dado por*

$$\big(A_K \varphi\big)(x) = \int_M K(x,y) \varphi(y) d\mu(y)\,.$$

Entonces, A_K *está en* $L_2(L_2(\mathcal{H}))$ *y* $\|A_K\|_2 = \|K\|_{L_2(M \times M)}$.

Demostración. Mediante unos cálculos simples, uno tiene que

$$\begin{aligned}
\|A_K\|_2^2 = \operatorname{tr}\left(|A_K|^2\right) &= \sum_n \|A_K \varphi_n\|_{L_2}^2 = \sum_n \sum_m |\langle A_K \varphi_n, \varphi_m \rangle|^2 \\
&= \sum_n \sum_m |\alpha_{nm}|^2 = \|K\|_{L_2}^2 < \infty\,,
\end{aligned}$$

pues $K \in L_2(M \times M)$. Por lo tanto, $A_K \in L_2$ y $\|A_K\|_2^2 = \|K\|_{L_2(M \times M)}^2$. □

Concluimos la sección con una caracteriza a los elementos de Hilbert-Schmidt.

TEOREMA 2.3.14. *Un operador* $A \in \mathcal{B}(L_2(M,\mu))$ *es de Hilbert-Schmidt si y sólo si existe un función* $K \in L_2(M \times M, \mu \times \mu)$ *tal que*

$$(Af)(x) = \int_M K(x,y) f(y) d\mu(y)$$

y además, $\|A\|_2^2 = \int_M |K(x,y)|^2 d\mu \times \mu$.

Demostración. Por el corolario 2.3.13 tenemos que $K \mapsto A_K$ es una isometría de $L_2(M \times M, \mu \times \mu)$ en $L_2(\mathcal{H})$ y por consiguiente su rango es cerrado. Mostraremos que contiene a los operadores de rango finito y junto con la densidad de estos en L_2, obtendremos que la imagen del mapeo $K \mapsto A_K$ está en L_2.

Para $R = |\varphi\rangle\langle\psi|$ con $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$, se tiene $K_R = \varphi(x)\overline{\psi(y)}$. Por consiguiente tenemos que $K_R \in L_2(M \times M)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|K_R\|_{L_2(M \times M)}^2 = \|\varphi(x)\overline{\psi(y)}\|_{L_2(M \times M)} &= \int_{M \times M} |\varphi(x)\overline{\psi(y)}|^2 d\mu \times \mu \\
&= \int_M |\varphi(x)|^2 d\mu(x) \int_M |\psi(y)|^2 d\mu(y) = \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty\,.
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}\big(A_{K_R} f\big)(x) &= \int_M \varphi(x)\overline{\psi(y)} f(y) d\mu(y) = \varphi(x) \int_M \overline{\psi(y)} f(y) d\mu(y) \\ &= \varphi(x)\langle f, \psi\rangle = \Big[\big(|\varphi\rangle\langle\psi|\big) f\Big](x)\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, como los proyectores generan a los operadores de rango finito y estos son Hilbert-Schmidt y densos, se concluye que cada operador de rango finito viene de algún K_R. □

Puede profundizarse el estudio de estas clases de operadores en [4, Cap. 11], [13, Cap. 4] , [19, Ap. A], [20, Cap. 6], entre otros.

Problemas de la sección.

P.2.1 Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Demuestre que $A = A^*$ si y solo si $\langle x, Ax\rangle \in \mathbb{R}$.

P.2.2 Muestre que $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es compacto si y solo si toda sucesión $\{x_n\}_n$ tal que $||x_n|| \leq 1$ satisface que la sucesión $\{Tx_n\}_n$ tiene una subsucesión convergente.

P.2.3 Muestre que $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido por $T(x_n)_n = (x_n/2^n)_n$ es compacto.

P.2.4 Muestre que $T : \ell^p \to \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, definido por $T(x_n)_n = (x_n/n)_n$ es compacto.

P.2.5 Si T es un operador lineal compacto en un espacio de Hilbert infinito dimensional tal que su inverso T^{-1} existe y está definido en todo $\mathcal{H}$, muestre que T^{-1} no puede ser acotado.

P.2.6 T es compacto si y solo si T^*T es compacto.

P.2.7 Encuentre los valores propios del operador $T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$T_n(x) = \left(0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{n-1}\right), \quad \text{con} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,.$$

P.2.8 Sean E, F espacios de Banach y $T : E \to F$ un operador lineal acotado compacto. Suponga que el rango de T es cerrado.
   a) Pruebe que T es de rango finito.
   b) Si además $\mathcal{N}(T) < \infty$ entonces $\dim E < \infty$.

3. Operadores Lineales no Acotados

Los operadores no acotados en espacios de Hilbert son de gran interés en la física-matemática y en particular en la mecánica cuántica. La parte esencial de esta sección está dedicada al estudio de los operadores lineales no acotados [18, 4, 19, 20]. De hecho, esta sección es una introducción a la teoría de operadores lineales generales en espacios de Hilbert.

3.1. Preliminares. Para un espacio de Hilbert separable $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$, decimos que una aplicación $T\colon \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un **operador lineal** en $\mathcal{H}$ (o simplemente operador), si para cada $f, g \in \mathcal{D}(T)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se cumple que $T(\alpha f + \beta g) = \alpha Tf + \beta Tg$, donde

$$\mathcal{D}(T) := \{f \in \mathcal{H} \,:\, Tf \in \mathcal{H}\} \quad \mathcal{R}(T) := \{Tf \,:\, f \in \mathcal{D}(T)\}$$
$$\mathcal{N}(T) := \{f \in \mathcal{D}(T) \,:\, Tf = 0\}$$

representan el **dominio**, **rango** y **núcleo** de T, respectivamente. Además, es sencillo verificar que estos conjuntos son lineales en $\mathcal{H}$.

Para operadores lineales T, S en $\mathcal{H}$, el dominio del operador $T + S$ viene dado por

$$\mathcal{D}(T + S) = \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S)$$

y actua como $(T + S)f = Tf + Sf$. Además, el dominio del operador TS es

$$\mathcal{D}(TS) = \{f \in \mathcal{D}(S) \,:\, Sf \in \mathcal{D}(T)\}$$

donde $TSf = T(Sf)$.

Decimos que $T\restriction_{\mathcal{C}}$ es el operador T con dominio restringido a un conjunto lineal $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(T)$. En este sentido, $T \subset S$ si $S\restriction_{\mathcal{D}(T)} = T$ y en este caso se dice que S es **extensión** de T (o T es restricción de S). Así, $T = S$ significa que $T \subset S$ y $S \subset T$.

Recordemos el producto interno en $\mathcal{H}$, induce la norma

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{H} &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \sqrt{\langle f, f\rangle} . \end{aligned} \tag{42}$$

Además, decimos que un operador T es **acotado** si existe $c > 0$ tal que $\|Tf\| \leq c\,\|f\|$, para todo $f \in \mathcal{D}(T)$.

Ejemplo 3.1.I (Operador funcional)**.** Sea $\mathcal{M}$ un conjunto lineal en $\mathcal{H}$ y un elemento no cero $g \in \mathcal{H}$. Considere un funcional lineal no continuo $F\colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ y defina el **operador lineal funcional**

$$\begin{aligned} T_F\colon \mathcal{M} &\to \operatorname{span}\{g\} \\ f &\mapsto F(f)g \end{aligned} \tag{43}$$

Afirmamos que el operador (43) no es acotado. Ciertamente, como F no es continuo existe $\{f_n\} \subset \mathcal{M}$, con $\|f_n\| = 1$, tal que $0 \neq |F(f_n)| \to \infty$. De esta manera, $\|T_F f_n\| = |F(f_n)|\,\|g\| \to \infty$, como se quería.

Proposición 3.1.1. *Un operador T en $\mathcal{H}$ es acotado si y sólo si es uniformemente continuo en su dominio, con respecto a la norma* (42)*.*

Demostración. Si existe $c > 0$ tal que $\|Tf\| \leq c\,\|f\|$, para todo $f \in \mathcal{D}(T)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, con $\|f - g\| < \varepsilon/c$, se cumple que

$$\|Tf - Tg\| = \|T(f-g)\| \leq c\,\|f-g\| < \varepsilon\,, \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(T)$$

lo que implica que T sea uniformemente continuo en su dominio.

Por otra parte, si T es uniformemente continuo en $\mathcal{D}(T)$, existe $\delta > 0$, tal que si $\|f\| \leq \delta$ entonces $\|Tf\| \leq 1$. Así, para $f \in \mathcal{D}(T)$ distinto de cero, $g = \delta f / \|f\|$ cumple $\|g\| \leq \delta$ y, por lo tanto,

$$\|Tf\| = \frac{1}{\delta}\,\|f\|\,\|Tg\| \leq \frac{1}{\delta}\,\|f\|\ ,$$

de donde se sigue que T es acotado. □

La **norma** de un operador acotado T viene dada por

$$\|T\| := \sup_{\substack{f\,\in\,\mathcal{D}(T)\,,\\ f\,\neq\,0}} \frac{\|Tf\|}{\|f\|}\,,$$

la cual cumple las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} T &= \sup_{\substack{f\,\in\,\mathcal{D}(T)\,,\\ \|f\|\,=\,1}} \|Tf\| = \sup_{\substack{f\,\in\,\mathcal{D}(T)\,,\\ \|f\|\,\leq\,1}} \|Tf\| = \sup_{\substack{f\,\in\,\mathcal{D}(T)\,,\\ \|f\|\,<\,1}} \|Tf\| \\ &= \sup_{\substack{f,g\,\in\,\mathcal{D}(T)\,,\\ \|f\|\,,\,\|g\|\,=\,1}} |\langle g, Tf\rangle| = \sup_{\substack{f,g\,\in\,\mathcal{D}(T)\,,\\ \|f\|\,,\,\|g\|\,\leq\,1}} |\langle g, Tf\rangle| = \sup_{\substack{f,g\,\in\,\mathcal{D}(T)\,,\\ \|f\|\,,\,\|g\|\,<\,1}} |\langle g, Tf\rangle|\,. \end{aligned} \tag{44}$$

Recordamos que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el conjunto de todos los operadores acotados con dominio todo $\mathcal{H}$. Este conjunto es un espacio lineal normado, donde se definen tres tipos de convergencia de la siguiente manera. Para $T, T_1, T_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, decimos que:

1. $\{T_n\}$ converge **uniformemente** a T, denotado por $T_n \xrightarrow{u} T$ o por
$$u\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n = T\,, \quad \text{si} \quad \|T - T_n\| \to 0\,.$$
2. $\{T_n\}$ converge **fuertemente** a T, denotado por $T_n \xrightarrow{s} T$ o por
$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n = T\,, \quad \text{si para cada } f \in \mathcal{H}\,, \quad \|Tf - T_n f\| \to 0\,.$$

3. $\{T_n\}$ converge **débilmente** a T, denotado por $T_n \xrightarrow{w} T$ o por

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n = T\,, \quad \text{si para cada } f,g \in \mathcal{H}\,, \quad \langle g, Tf - T_n f\rangle \to 0\,.$$

La convergencia uniforme implica la convergencia fuerte y la convergencia fuerte implica la convergencia débil.

Un operador T en $\mathcal{H}$ es **invertible** si tiene núcleo trivial, cuya inversa se denota por T^{-1}, la cual resulta un operador lineal en $\mathcal{H}$ con $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{D}(T)$. Note que T^{-1} también es invertible y $\left(T^{-1}\right)^{-1} = T$. Además,

$$T^{-1}T = I\restriction_{\mathcal{D}(T)} \quad \text{y} \quad TT^{-1} = I\restriction_{\mathcal{R}(T)}\,. \tag{45}$$

Proposición 3.1.2. *Si T y S son invertibles, entonces TS también lo es y*

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$$

Demostración. El operador TS es invertible, pues $\mathcal{N}(TS) \subset \mathcal{N}(T) \cup \mathcal{N}(S) = \{0\}$. Luego, si $f \in \mathcal{D}((TS)^{-1})$, entonces existe $g \in \mathcal{D}(S)$ tal que $Sg \in \mathcal{D}(T)$ y $TSg = f$. De esta manera, $f \in \mathcal{R}(T) = \mathcal{D}(T)^{-1}$, de (45) se tiene que $Sg = T^{-1}f$, es decir, $T^{-1}f \in \mathcal{R}(S) = \mathcal{D}(S^{-1})$ y $g = S^{-1}T^{-1}f$, lo que implica $(TS)^{-1} \subset S^{-1}T^{-1}$. Para la otra inclusión, como S^{-1}, T^{-1} son invertibles, también lo es $S^{-1}T^{-1}$ y de lo anterior

$$\left(S^{-1}T^{-1}\right)^{-1} \subset \left(T^{-1}\right)^{-1}\left(S^{-1}\right)^{-1} = TS\,,$$

es decir, $S^{-1}T^{-1} \subset (TS)^{-1}$, de donde se concluye la afirmación. □

Lo siguiente muestra una caracterización de la inversa acotada de un operador.

Teorema 3.1.3. *La inversa de un operador T en $\mathcal{H}$ existe y es acotada si y solo si existe $c > 0$ tal que*

$$\|Tf\| \geq c\,\|f\|\,, \quad \forall\, f \in \mathcal{D}(T)\,. \tag{46}$$

Demostración. Es claro de (46) que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ y por lo tanto existe T^{-1}. Substituyendo $Tf = g$ en (46), uno obtiene que

$$\|g\| \geq c\left\|T^{-1}g\right\|\,, \quad \forall\, g \in \mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)\,, \tag{47}$$

es decir, T^{-1} es acotado. Inversamente, si T^{-1} existe y es acotado, entonces se satisface (47), que haciendo $f = T^{-1}g$, se llega a (46). □

3.2. La gráfica de un operador. En lo siguiente abordamos el tema de la gráfica de un operador lineal, de manera análoga a [4, Cap. 3]. Sea $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ la suma ortogonal de dos copias de $\mathcal{H}$ (c.f. [4, Sec. 2.3]), es decir,

$$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H} := \left\{\begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix} \,:\, f,g \in \mathcal{H}\right\}\,, \tag{48}$$

que es un espacio de Hilbert con producto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k\end{pmatrix}\right\rangle := \langle f,h\rangle + \langle g,k\rangle\,, \quad \begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k\end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\,. \tag{49}$$

El producto interno (49) induce la norma

$$\left\|\begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix}\right\|^2 := \|f\|^2 + \|g\|^2\,, \quad \begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$$

la cual es equivalente a la norma $\left\|\begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix}\right\| := \|f\| + \|g\|$. Puntualizamos que la convergencia en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ implica la convergencia en cada una de sus entradas.

La **gráfica** de un operador lineal T en $\mathcal{H}$ viene dada por

$$\mathcal{G}(T) := \left\{\begin{pmatrix} f \\ Tf\end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, f \in \mathcal{D}(T)\right\}\,,$$

que resulta ser un conjunto lineal en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$.

Ejemplo 3.2.I (Continuación de ejemplo 3.1.I)**.** La gráfica del operador (43) es

$$\mathcal{G}(T_F) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ F(f)g \end{pmatrix} \,:\, f \in \mathcal{M} \right\} .$$

Lo siguiente exhibe una condición necesaria y suficiente para que un conjunto lineal en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ sea la gráfica de un operador lineal.

Proposición 3.2.1. *Un conjunto lineal $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ resulta ser la gráfica de un operador lineal si y solo si*

$$\left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{G} \,:\, f = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} . \tag{50}$$

Demostración. Suponga que (50) se cumple y considere las aplicaciones lineales $\pi, \rho \colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ tales que

$$\pi\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = f \quad ; \quad \rho\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = g\,, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{G}\,.$$

De este modo, $\ker \pi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y se verifica que $T = \rho\pi^{-1}$ es un operador lineal con $\mathcal{D}(T) = \pi\mathcal{G}$. Por lo tanto, $\mathcal{G}(T) = \mathcal{G}$. La prueba inversa es directa. $\square$

Para efectos prácticos, introducimos las aplicaciones $\mathbb{U}, \mathbb{W} \colon \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \to \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ como

$$\mathbb{U}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbb{W}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \tag{51}$$

las cuales son operadores lineales que satisfacen $\mathbb{U}^2 = I = -\mathbb{W}^2$ y $\mathbb{U}\mathbb{W} = -\mathbb{W}\mathbb{U}$.

Mediante contención de conjuntos, lo siguiente se cumple de manera sencilla.

Proposición 3.2.2. *Para dos operadores T, S, se sigue lo siguiente:*
(a) $T \subset S$ si y sólo si $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S)$.
(b) Si T es invertible, entonces $\mathcal{G}(T^{-1}) = \mathbb{U}\mathcal{G}(T)$.

Para un conjunto lineal $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, denote el conjunto lineal

$$-\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{G} \right\} .$$

Proposición 3.2.3. *Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ es un conjunto lineal, entonces:*

(a) $(\mathbb{W}\mathcal{G})^\perp = \mathbb{W}(\mathcal{G}^\perp)$.
(b) $\overline{\mathbb{W}\mathcal{G}} = \mathbb{W}\overline{\mathcal{G}}$.
(c) $(\mathbb{U}\mathcal{G})^\perp = \mathbb{U}(\mathcal{G}^\perp)$.
(d) $\overline{\mathbb{U}\mathcal{G}} = \mathbb{U}\overline{\mathcal{G}}$.
(e) $\mathbb{U}^2\mathcal{G} = \mathbb{W}^2\mathcal{G} = \mathcal{G}$.
(f) $\mathbb{U}\mathbb{W}\mathcal{G} = \mathbb{W}\mathbb{U}\mathcal{G} = -\mathcal{G}$.

Demostración. Note que $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (\mathbb{W}\mathcal{G})^\perp$ si y solo si $\forall \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{W}\mathcal{G}$, $\begin{pmatrix} k \\ -h \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ y

$$\left\langle \begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -h \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = 0\,,$$

si y solo si $\begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix} \in (\mathcal{G})^\perp$, o bien $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathbb{W}(\mathcal{G})^\perp$. Esto prueba el punto (a). Ahora,

$$\overline{\mathbb{W}\mathcal{G}} = \left((\mathbb{W}\mathcal{G})^\perp \right)^\perp = \mathbb{W}\left((\mathcal{G}^\perp)^\perp \right) = \mathbb{W}\overline{\mathcal{G}}\,,$$

es decir, (b). Los puntos (c),(d) se siguen de manera análoga y (e),(f) se siguen directamente de la definición, notando que $\mathcal{G}$ es conjunto lineal. $\square$

Recalcamos que dos conjuntos lineales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son linealmente independientes si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{0\}$. A partir de aquí usaremos la siguiente notación, que será de gran utilidad en resultados posteriores. Para $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ subconjuntos lineales en $\mathcal{H}$, denotamos

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} \dotplus \mathcal{G} := \{f + g \,:\, f \in \mathcal{F},\, g \in \mathcal{G} \text{ y } \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{0\}\}\,. \\ &\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} := \mathcal{F} \dotplus \mathcal{G} \text{ tal que } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}^\perp\,. \\ &\mathcal{F} \ominus \mathcal{G} := \mathcal{F} \cap \mathcal{G}^\perp\,. \end{aligned} \tag{52}$$

Las notaciones $\dotplus$, $\oplus$ y $\ominus$, representan la **suma directa**, **suma ortogonal** y **diferencia ortogonal**, respectivamente.

Observación 3.2.4. En espacios lineales normados, la suma directa es representada por $\oplus$. No obstante, cuando la norma proviene de un producto interno, la suma directa que además es ortogonal se enfatiza con esta misma notación.

Dado cualquier conjunto lineal $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, de (52) se sigue que $\mathcal{F}^{\perp} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{F}$, es decir (compare con observación 1.3.4),

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{F}} \oplus \mathcal{F}\,. \tag{53}$$

La notación (52) en el contexto de operadores lineales nos estaremos refiriendo a su gráfica en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$.

Observación 3.2.5. Para que T y S sean linealmente independientes es necesario y suficiente mostrar que si $f \in \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S)$ tal que $Tf = Sf$, entonces $f = 0$.

La siguiente afirmación es directa.

Corolario 3.2.6. *Para T y S operadores lineales se cumple lo siguiente:*

(1) Si $\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{D}(S)$ son linealmente independientes, entonces también lo son T y S.
(2) Si $\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{D}(S)$ son ortogonales al igual que $\mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{R}(S)$, entonces T y S son ortogonales.

3.3. Operadores cerrados y cerrables. Los operadores cerrados juegan un papel muy importante en la clase de los operadores no acotados. La propiedad de ser cerrado (o más precisamente cerrable) sirve como sustituto de ser acotado. Iniciamos con la noción de operador cerrado.

Definición 3.3.1. Un operador T en $\mathcal{H}$ se dice ser **cerrado** (escribimos $T = \overline{T}$), si para cualquier sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $f_n \to f$ y $Tf_n \to g$, implica que $f \in \mathcal{D}(T)$ y $Tf = g$.

Observación 3.3.2. Decir que un operador T es cerrado es equivalente a decir que su gráfica $\mathcal{G}(T)$ es cerrada en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Esto es claro debido a que una sucesión $\left\{\binom{f_n}{Tf_n}\right\} \subset \mathcal{G}(T)$ converge a $\binom{f}{g}$ si y solo si $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ y $f_n \to f$, $Tf_n \to g$.

Teorema 3.3.3. *Sea T un operador acotado. Entonces T es cerrado si y solo si $\mathcal{D}(T)$ es cerrado.*

Demostración. Suponemos que T cerrado y sea $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$, tal que $f_n \to f$. Dado que T es acotado, se tiene que $\{Tf_n\}$ es de Cauchy y, por lo tanto, convergente, debido a la completez de $\mathcal{H}$. Esto implica que $f \in \mathcal{D}(T)$, es decir, $\mathcal{D}(T)$ es cerrado. Inversamente, para $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $f_n \to f$ y $Tf_n \to g$, como T es acotado con dominio cerrado se tiene que $f \in \mathcal{D}(T)$ y existe $c > 0$ tal que

$$\|Tf - g\| = \lim_{n\to\infty} \|T(f - f_n)\| \leq c \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0\,,$$

de donde se sigue que T es cerrado. □

Debido al teorema 3.3.3, se tiene que cada operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es cerrado. Además, para $\alpha \in \mathbb{C}$, los operadores T y αT son cerrados simultáneamente.

Teorema 3.3.4. *Si T es cerrado y S es cerrado y acotado, entonces $T + S$ y TS son cerrados.*

Demostración. Considere $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T + S)$, tal que $f_n \to f$ y $(T + S)f_n \to g$. Del teorema 3.3.3 se sigue que $f \in \mathcal{D}(S)$ y como S es acotado, entonces es continuo (ver proposición 3.1.1), es decir, $Sf_n \to Sf$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\left\|\binom{f_n}{Tf_n} - \binom{f}{g - Sf}\right\| &= \|f_n - f\| + \|Tf_n + Sf_n - g + Sf - Sf_n\| \\ &\leq \|f_n - f\| + \|(T + S)f_n - g\| + \|Sf_n - Sf\| \to 0\,.\end{aligned}$$

Como T es cerrado, se tiene $\begin{pmatrix} f \\ g - Sf \end{pmatrix} \in \mathcal{G}(T)$, es decir, $f \in \mathcal{D}(T)$ y $Tf = g - Sf$. Por lo tanto, $f \in \mathcal{D}(T+S)$ y $(T+S)f = g$. La implicación TS es cerrado, se deja de ejercicio (ver problema P.1.2.8). □

El teorema anterior es de gran utilidad en la teoría espectral de operadores, ya que en general la suma de dos operadores cerrados no siempre es cerrado.

Observación 3.3.5. Si existe la inversa de un operador T, entonces se puede verificar que $\mathcal{G}\left(T^{-1}\right) = \mathbb{U}\mathcal{G}(T)$. Por consiguiente, de la proposición 3.2.3 se tiene que T y T^{-1} son cerrados simultáneamente.

TEOREMA 3.3.6. *Si T es cerrado, entonces $\mathcal{N}(T)$ es cerrado en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Si $\{f_n\} \in \mathcal{N}(T)$ es tal que $f_n \to f$, entonces es claro que $Tf_n \to 0$. Así, $f \in \mathcal{D}(T)$ y $Tf = 0$, debido a que T es cerrado. Por lo tanto, $f \in \mathcal{N}(T)$. □

El siguiente resultado es de gran interés y es conveniente que su demostración se posponga hasta la sección 3.4.

TEOREMA 3.3.7. *Si T es cerrado con dominio cerrado, entonces T es acotado.*

Observación 3.3.8. Debido a los teoremas 3.3.3 y 3.3.7, basta que un operador T cumpla dos de las siguientes afirmaciones para que cumpla la tercera.

(a) T es cerrado. (b) $\mathcal{D}(T)$ es cerrado. (c) T es acotado.

COROLARIO 3.3.9. *Sea T un operador invertible y cerrado. Entonces $\mathcal{R}(T)$ es cerrado si y solo si T^{-1} es acotado.*

Demostración. Tenemos de la observación 3.3.5 que el operador T^{-1} es cerrado. Por lo tanto, de la observación 3.3.8 se concluye que $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$ es cerrado si y solo si T^{-1} es acotado. □

La siguiente afirmación complementa el corolario 3.3.9.

COROLARIO 3.3.10. *Sea T un operador que satisface*

$$\|Tf\| \geq c\,\|f\| \,, \quad c > 0\,, \forall\, f \in \mathcal{D}(T)\,.$$

Entonces, T es cerrado si y solo si $\mathcal{R}(T)$ es cerrado.

Demostración. Del teorema 3.1.3, el operador T^{-1} existe y es acotado. Entonces, T es cerrado si y solo si T^{-1} es cerrado, que del teorema 3.3.3 equivale a decir que $\mathcal{R}(T) = \mathcal{D}(T^{-1})$ es cerrado. □

Es claro que $\mathcal{G}(T)$ no es cerrado en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ si T no es cerrado. Es natural considerar el conjunto lineal $\overline{\mathcal{G}(T)}$ y surge la cuestión de si $\overline{\mathcal{G}(T)}$ es la gráfica de un operador, es decir, si satisface (50).

Definición 3.3.11. Un operador T en $\mathcal{H}$ se dice **cerrable** si $\overline{\mathcal{G}(T)}$ es la gráfica de un operador, el cual se denota por $\overline{T}$ y representa la cerradura de T.

La cerradura de un operador cerrable es extensión del operador. Además, si $T \subset S$ y S es cerrado, entonces T es cerrable y $T \subset \overline{T} \subset S$. Así, $\overline{T}$ es la mínima extensión cerrada de T. Más aún, se sigue directamente de la definición 3.3.11 que

$$\mathcal{G}(\overline{T}) = \overline{\mathcal{G}(T)} \tag{54}$$

PROPOSICIÓN 3.3.12. *Un operador T es cerrable si y solo si para $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $f_n \to 0$ y $Tf_n \to g$, se tiene que $g = 0$.*

Demostración. Se sigue de la porposición 3.2.1, notando que $\overline{\mathcal{G}(T)}$ es gráfica de un operador si y solo si $\overline{\mathcal{G}(T)} \ni \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, $g = 0$. □

Observación 3.3.13. Todo operador acotado es cerrable. En efecto, si T es acotado entonces para $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $f_n \to 0$ y $Tf_n \to g$, entonces existe $c > 0$ tal que

$$\|g\| = \lim_{n\to\infty} \|Tf_n\| \leq c \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0\,.$$

Por lo tanto, de la proposición 3.3.12 se tiene que T es cerrable.

Es claro que un operador cerrado es cerrable, o bien, no cerrable implica no cerrado.

Ejemplo 3.3.I (Continuación de ejemplo 3.1.I)**.** El operador funcional (43) no es cerrable. En efecto, considerando la sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{M}$ del ejemplo 3.1.I y haciendo $h_n = F(f_n)^{-1} f_n$, uno calcula de manera sencilla que $h_n \to 0$ y

$$T_F h_n = F(h_n)g = F(f_n)^{-1} F(f_n) g = g \neq 0\,,$$

lo cual implica de la proposición 3.3.12 que T_F no es cerrable.

Corolario 3.3.14. *Si T es cerrable y S es acotado, entonces $T + S$ es cerrable y*

$$\overline{T} + \overline{S} = \overline{T + S}\,.$$

Demostración. Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(T + S)$ tal que $f_n \to 0$ y $(T + S)f_n \to g$. Como S es acotado y $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(S)$ entonces $Sf_n \to 0$. Además,

$$\|Tf_n - g\| = \|(T + S)f_n - g - Sf_n\| \leq \|(T + S)f_n - g\| + \|Sf_n\| \to 0\,,$$

es decir, $Tf_n \to g$ y como T es cerrable, de la proposición 3.3.12 se tiene que $g = 0$. Por lo tanto, $T + S$ es cerrable. Ahora bien, como S es acotado entonces es cerrado y del teorema 3.3.4 se tiene que $\overline{T}+\overline{S}$ es cerrado. Además, es claro que $T+S \subset \overline{T}+\overline{S}$, lo que implica $\overline{T + S} \subset \overline{T}+\overline{S}$. La otra contención se logra remplazando a los operadores T por $T + S$ y S por $-S$. □

3.4. El adjunto de un operador. Veremos que la existencia del adjunto de un operador lineal, depende de la densidad de su dominio en el espacio de Hilbert. No obstante, esta condición de densidad se puede relajar a través de los llamados operadores multivaluados [9].

Abordaremos la noción del adjunto de un operador lineal en dos enfoques. El primero es analítico y se basa en su definición directa, mientras que el segundo es geométrico y este está relacionado con el estudio de su gráfica.

Cabe recalcar que un operador T en $\mathcal{H}$ se dice ser densamente definido en $\mathcal{H}$ si $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$. Para $h \in \mathcal{H}$ consideremos el funcional lineal definido sobre $\mathcal{D}(T)$, como $l_h(f) = \langle h, Tf\rangle$. Este funcional puede ser continuo para alguna $h \in \mathcal{H}$ y como consecuencia del teorema de representación de Riesz [14, Sec. 3.8], $l_h(f) = \langle k, f\rangle$, con $k \in \mathcal{H}$. Esta representación es única siempre que $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$.

Definición 3.4.1. Para un operador densamente definido T, el **operador adjunto** T^* es aquel cuyo dominio viene dado por

$$\mathcal{D}(T^*) = \{h \in \mathcal{H} \,:\, \exists k \in \mathcal{H} \text{ tal que } \langle h, Tf\rangle = \langle k, f\rangle\,, \forall f \in \mathcal{D}(T)\}\,, \tag{55}$$

de tal manera que $T^*h = k$ y se satisface la relación $\langle h, Tf\rangle = \langle T^*h, f\rangle$. Al operador T^* usualmente se le conoce como el adjunto de T.

Observación 3.4.2. La condición de T al ser densamente definido no se puede relajar para definir el adjunto de un operador lineal de manera clásica. En efecto, si $\overline{\mathcal{D}(T)} \neq \mathcal{H}$ entonces existe un elemento no trivial $k \perp \mathcal{D}(T)$. Así, $\langle Tf, 0\rangle = 0 = \langle f, k\rangle$, para todo $f \in \mathcal{D}(T)$, es decir $T^*0 = k$, que resulta contradictorio en teoría de operadores.

El enfoque geométrico del operador adjunto se basa en lo siguiente.

Lema 3.4.3. *Para T un operador en $\mathcal{H}$ se tiene que $[\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp$ es la gráfica de un operador si y solo si $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$.*

Demostración. Es sencillo verificar que un elemento $\binom{0}{h}$ es ortogonal a $\mathbb{W}\mathcal{G}(T)$ si y solo si $h \perp \mathcal{D}(T)$. Por lo tanto, $[\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp$ satisface (50) si y solo si $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$. □

En lo que resta de esta sección, suponemos que T es un operador densamente definido y mostraremos algunas propiedades sencillas del operador adjunto.

TEOREMA 3.4.4 (enfoque geométrico del adjunto). *El adjunto de un operador T satisface lo siguiente:*

$$[\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp = \mathcal{G}(T^*)\,. \tag{56}$$

Demostración. Para $h \in \mathcal{D}(T^*)$, $f \in \mathcal{D}(T)$, uno de manera simple verifica que $\binom{h}{T^*h} \in \mathcal{G}(T^*)$ si y solo si $\left\langle \binom{h}{T^*h}, \mathbb{W}\binom{f}{Tf} \right\rangle = 0$, es decir $\binom{h}{T^*h} \in [\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp$. □

El lema 3.4.3 y teorema 3.4.4 implican que T^* es un operador cerrado. Además, si T es cerrable, entonces de la proposición 3.2.3, de (54) y (56), se sigue que

$$\mathcal{G}\left(\overline{T}^*\right) = [\mathbb{W}\mathcal{G}\left(\overline{T}\right)]^\perp = [\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp = \mathcal{G}(T^*)\,,$$

es decir, $\overline{T}^* = T^*$.

El siguiente resultado aborda la cuestión de la existencia del doble adjunto.

TEOREMA 3.4.5. *Una condición necesaria y suficiente para que T^* sea densamente definido es que T sea cerrable. En tal caso, $T^{**} = (T^*)^*$ existe y $T^{**} = \overline{T}$.*

Demostración. Se sigue de las propiedades de la proposición 3.2.3 y de (56) que

$$[\mathbb{W}\mathcal{G}(T^*)]^\perp = \left[\mathbb{W}[\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp\right]^\perp = \left[[\mathcal{G}(T)]^\perp\right]^\perp = \overline{\mathcal{G}(T)}\,. \tag{57}$$

Por lo tanto, se sigue del lema 3.4.3 que T^* es densamente definido si y solo si $[\mathbb{W}\mathcal{G}(T^*)]^\perp = \overline{\mathcal{G}(T)}$ es la gráfica de un operador, es decir, T es cerrable. En tal caso se sigue de (54), (56) y (57) que $T^{**} = \overline{T}$. □

Ejemplo 3.4.I (Continuación de ejemplo 3.1.I)**.** Suponemos que el conjunto lineal $\mathcal{M}$ del ejemplo 3.1.I es denso en $\mathcal{H}$ y mostraremos que el adjunto del operador funcional (43) no es densamente definido y $T_F^* = 0\restriction_{\{g\}^\perp}$.

Como el producto interno es continuo y F es discontinuo, uno tiene que la aplicación

$$f \to \langle h, Tf\rangle = \mathcal{F}(f)\,\langle h, g\rangle$$

es continua si y solo si $h \perp g$. Así, $\langle h, Tf\rangle = 0$, para todo $f \in \mathcal{D}(T_F)$, es decir, $T_F^* h = 0$, para todo $h \in \mathcal{D}(T_F^*) = \{g\}^\perp$. La no densidad del adjunto de T_F se debe a que T_F no es cerrable (ver ejemplo 3.3.I).

Una propiedad simple del adjunto es que saca escalares conjugados. Ciertamente, para $f \in \mathcal{D}(T)$ y $h \in \mathcal{D}(T^*)$, uno calcula que

$$\langle (\alpha T)^* h, f\rangle = \langle h, \alpha T f\rangle = \alpha\,\langle T^* h, f\rangle = \langle \overline{\alpha} T^* h, f\rangle\ , \quad (0 \neq \alpha \in \mathbb{C})$$

Como T es densamente definido, se concluye que $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.

TEOREMA 3.4.6. *Si un operador T es cerrable, entonces $\mathcal{R}(\overline{T})$ es cerrado si y solo si $\mathcal{R}(T^*)$ es cerrado.*

Demostración. Primero suponemos que $\mathcal{R}(\overline{T})$ es cerrado. Consideremos el proyector $P_{\mathcal{R}(\overline{T})}$ sobre $\mathcal{R}(\overline{T})$ y sea $\{h_n\} \subset \mathcal{D}(T^*)$ tal que $T^* h_n \to k$. Entonces, uno tiene para todo $f \in \mathcal{D}(\overline{T})$ que

$$\langle T^* h_n, f\rangle = \left\langle h_n, \overline{T} f\right\rangle = \left\langle h_n, P_{\mathcal{R}(\overline{T})}\overline{T} f\right\rangle = \left\langle P_{\mathcal{R}(\overline{T})} h_n, \overline{T} f\right\rangle\ ,$$

el cual implica que $\{P_{\mathcal{R}(\overline{T})}h_n\}$ converge débilmente en el espacio de Hilbert $\mathcal{R}(\overline{T})$, a un elemento $h \in \mathcal{R}(\overline{T})$. De esta manera,

$$\langle k, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T^* h_n, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle P_{\mathcal{R}(\overline{T})}h_n, \overline{T}f\right\rangle = \left\langle h, \overline{T}f\right\rangle .$$

De esta manera, $h \in \mathcal{D}(T^*)$ y $T^*h = k$. Por lo tanto, $\mathcal{R}(T^*)$ es cerrado. Inversamente, si se cumple que $\mathcal{R}(T^*)$ es cerrado, entonces lo anterior y el teorema 3.4.5 implican que $\mathcal{R}(\overline{T}) = \mathcal{R}(T^{**})$ es cerrado. □

El siguiente resultado muestra una partición del espacio de Hilbert.

TEOREMA 3.4.7. *Los conjuntos $\mathcal{R}(T)$ y $\mathcal{N}(T^*)$ son ortogonales en $\mathcal{H}$ y satisfacen*

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{N}(T^*)\,. \tag{58}$$

Demostración. La inclusión $h \in \mathcal{N}(T^*)$ significa que $\langle h, Tf\rangle = 0$, para todo $f \in \mathcal{D}(T)$, que a su vez $h \perp \mathcal{R}(T)$. □

Ahora procederemos a demostrar el teorema 3.3.7 de la sección 3.3.

Demostración del teorema 3.3.7. Primero suponemos que $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ y mostremos que T^* pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Es claro del teorema 3.4.5 que el operador T^* es densamente definido. Considere la familia de los funcionales lineales sobre $\mathcal{H}$,

$$l_h(f) = \langle h, Tf\rangle = \langle T^*h, f\rangle\ , \quad h \in \mathcal{D}(T^*)\,, \quad \|h\| \le 1\,.$$

Entonces, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|l_h(f)| \le \|Tf\|$, es decir, la familia $\{l_h\}$ es puntualmente acotada y por el principio del acotamiento uniforme [14, Sec. 4.7], existe $c > 0$ tal que $\|l_h\| \le c$, para todo $h \in \mathcal{D}(T^*)$, $\|h\| = 1$. Además, del teorema representación de Riesz [14, Sec. 3.8], $\|T^*h\| = \|l_h\|$, lo que significa que T^* es acotado. Así, del teorema 3.3.3 se concluye que $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$, es decir, $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Esto mismo implica que $T^{**} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y, por lo tanto, del teorema 3.4.5 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ahora bien, para $\mathcal{D}(T) \neq \mathcal{H}$, denotamos $P_{\mathcal{D}(T)}$ como la proyección sobre $\mathcal{D}(T)$ y consideremos el operador $TP_{\mathcal{D}(T)}$ con dominio todo $\mathcal{H}$. Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{H}$ tal que $f_n \to f$ y $TP_{\mathcal{D}(T)}f_n \to g$. Entonces, $P_{\mathcal{D}(T)}f_n \to P_{\mathcal{D}(T)}f$ y $g = P_{\mathcal{D}(T)}f$, debido a que T es cerrado. Así, $TP_{\mathcal{D}(T)}$ es cerrado y, de la primera parte, acotado. Por lo tanto, T es acotado, ya que $T \subset TP_{\mathcal{D}(T)}$. □

Observación 3.4.8. La primera parte de la demostración anterior indica que T y T^* pertenecen a $\in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, simultáneamente.

TEOREMA 3.4.9. *Si la inversa de T existe y está densamente definida, entonces T^* tiene inversa y*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*\,. \tag{59}$$

Demostración. De (58) se sigue que $\mathcal{N}(T^*) = \{0\}$, es decir, $(T^*)^{-1}$ existe. Luego, las propiedades de la proposición 3.2.3, la observación 3.3.5 y (56) muestran que

$$\mathcal{G}((T^*)^{-1}) = \mathbb{U}[\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp = \mathbb{W}[\mathbb{U}\mathcal{G}(T)]^\perp = \mathcal{G}((T^{-1})^*)\,,$$

de donde se sigue que (59). □

Es claro que cualquier extensión S de T tiene dominio denso y se cumple que

$$S^* \subset T^*\,. \tag{60}$$

En efecto, como $\mathbb{W}\mathcal{G}(T) \subset \mathbb{W}\mathcal{G}(S)$, que al tomar complementos ortogonales uno tiene que $[\mathbb{W}\mathcal{G}(S)]^\perp \subset [\mathbb{W}\mathcal{G}(T)]^\perp$, de donde se sigue (60).

Teorema 3.4.10. *Si $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces*

$$(T+S)^* = T^* + S^* . \tag{61}$$

Si además $S^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces

$$(TS)^* = S^*T^* \quad y \quad (ST)^* = T^*S^* . \tag{62}$$

Demostración. Para $h \in \mathcal{D}(T^*)$ y $f \in \mathcal{D}(T)$, uno calcula que

$$\langle h, (T+S)f\rangle = \langle T^*h, f\rangle + \langle S^*h, f\rangle = \langle T^*h + S^*h, f\rangle ,$$

de donde se sigue que $T^* + S^* \subset (T+S)^*$. De la observación 3.4.8, $S^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y de lo anterior $(T+S)^* - S^* \subset T^*$. Por lo tanto, sumando S^* en ambas partes se obtiene la otra inclusión.

Para la composición, solo mostraremos la parte izquierda de (62), la otra se demuestra de manera análoga. Note que $\mathcal{D}(TS) = S^{-1}\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{D}(S^*T^*) = \mathcal{D}(T^*)$. Si $Sf \in \mathcal{D}(T)$ y $h \in \mathcal{D}(T^*)$ entonces $\langle TSf, h\rangle = \langle Sf, T^*h\rangle = \langle f, S^*T^*h\rangle$, de donde se cumple que $S^*T^* \subset (TS)^*$. Para la otra contención, si $h \in \mathcal{D}((TS)^*)$ entonces para cada $f \in \mathcal{D}(T)$,

$$\langle Tf, h\rangle = \left\langle TS(S^{-1}f), h\right\rangle = \left\langle (S^{-1}f), (TS)^*h\right\rangle = \left\langle f, (S^{-1})^*(TS)^*h\right\rangle ,$$

lo que implica que $h \in \mathcal{D}(T^*)$ y $T^*h = (S^{-1})^*(TS)^*h$. Por lo tanto, se sigue de la observación 3.4.8 que $(S^{-1})^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y se cumple de (59) que $S^*T^*h = (TS)^*h$, que implica $(TS)^* \subset S^*T^*$. □

De la descomposición (58) y de (61) se sigue que

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(T-\zeta I)} \oplus \mathcal{N}(T^* - \overline{\zeta} I) , \quad \zeta \in \mathbb{C} . \tag{63}$$

La descomposición (63) será de gran utilidad en la sección 3.5.1.

3.5. Teoría espectral.

3.5.1. El espectro. Iniciamos esta sección con el **espacio de defecto** (o de deficiencia) de un operador T, el cual viene dado por

$$[\mathcal{R}(T)]^\perp = \mathcal{H} \ominus \mathcal{R}(T) . \tag{64}$$

El **índice de defecto** d_T de T es la dimensión de su espacio de defecto, esto es,

$$d_T := \dim[\mathcal{R}(T)]^\perp . \tag{65}$$

Observación 3.5.1. Cuando T es densamente definido, de acuerdo con (58), el subespacio en (64) coincide con $\mathcal{N}(T^*)$ y el índice (65) viene dado por $d_T = \dim \mathcal{N}(T^*)$.

Si T es un operador cerrado con inversa acotada, entonces del teorema 3.1.3 y corolario 3.3.10, se tiene que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado y la igualdad $Tf = h$ es soluble si y solo si h es ortogonal al espacio de defecto de T. De esta manera, d_T indica el número de soluciones ortogonales que aseguran la solución de $Tf = h$.

Definición 3.5.2. El conjunto **cuasi-regular** de un operador T viene dado por

$$\hat{\rho}(T) := \left\{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, (T-\zeta I)^{-1} \text{ existe y es acotado}\right\} .$$

Observación 3.5.3. En virtud del teorema 3.1.3, una condición necesaria y suficiente para que $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ es que exista $C_\zeta > 0$ tal que

$$\|(T-\zeta I)f\| \geq C_\zeta \|f\| , \quad \forall f \in \mathcal{D}(T) . \tag{66}$$

Teorema 3.5.4. *El conjunto cuasi-regular de T es abierto.*

Demostración. Para $\zeta \in \hat{\rho}(T)$, tenemos de la observación 3.5.3 que existe $C_\zeta > 0$ tal que (66) se satisface. Es suficiente mostra que $\mathcal{B}_{C_\zeta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \zeta| < C_\zeta\} \subset \hat{\rho}(T)$. Si $\lambda \in \mathcal{B}_{C_\zeta}$ entonces $C_\zeta - |\lambda - \zeta| > 0$ y para todo $f \in \mathcal{D}(T)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|(T - \lambda I)f\| &= \|(T - \zeta I)f - (\lambda - \zeta)f\| \\ &\geq \|(T - \zeta I)f\| - |\lambda - \zeta| \, \|f\| \geq (C_\zeta - |\lambda - \zeta|) \, \|f\| \, ,\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\lambda \in \hat{\rho}(T)$, como se quería. □

Observación 3.5.5. Para $\zeta \in \hat{\rho}(T)$, se tiene que T es cerrado si y solo si $\mathcal{R}(T - \zeta I)$ es cerrado. Esto se sigue directamente del teorema 3.3.10 y de la observación 3.5.3.

Permítanos usar el índice (65) como una función sobre $\hat{\rho}(T)$ como

$$d_T(\zeta) = \dim[\mathcal{R}(T - \zeta I)]^\perp \, , \quad \zeta \in \hat{\rho}(T) \, .$$

TEOREMA 3.5.6. *Para un operador cerrado T se tiene que el índice $d_T(\zeta)$ es constante en cada componente conexa de $\hat{\rho}(T)$.*

Demostración. Sea $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ y $C_\zeta > 0$ que satisface (66). Debido a que cada par de elementos en una componente conexa de $\hat{\rho}(T)$ se pueden unir con bolas abiertas, solo mostraremos el resultado para la bola abierta $\mathcal{B}_{C_\zeta} \subset \hat{\rho}(T)$ que se uso en la demostración del teorema 3.5.4, es decir, para $\lambda \in \mathcal{B}_{C_\zeta}$ probaremos por contradicción que $d_T(\lambda) = d_T(\zeta)$. Note que $C_\zeta > |\zeta - \lambda|$.

Si $d_T(\zeta) < d_T(\lambda)$ entonces existe $h \in [\mathcal{R}(T - \lambda I)]^\perp$ que es ortogonal a $[\mathcal{R}(T - \zeta I)]^\perp$. De la observación 3.5.5, $h \in \mathcal{R}(T - \zeta I)$, es decir, existe $f \in \mathcal{D}(T)$ tal que $h = (T - \zeta I)f$. Además,

$$\|h\| = \|(T - \zeta I)f\| \geq C_\zeta \, \|f\| \, . \tag{67}$$

Más aún, como $h \perp \mathcal{R}(T - \lambda I)$,

$$0 = \langle h, (T - \lambda I)f \rangle = \langle h, (T - \zeta I)f - (\lambda - \zeta)f \rangle = \|h\|^2 - (\lambda - \zeta) \langle h, f \rangle \, . \tag{68}$$

Así, de (67), (68) y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue que

$$\|h\|^2 \leq |\zeta - \lambda| \, \|f\| \, \|h\| < C_\zeta \, \|f\| \, \|h\| \leq \|h\|^2 \, ,$$

lo cual resulta una contradicción. Para la contradicción de $d_T(\zeta) > d_T(\lambda)$, solo se intercambian los papeles de ζ y λ. □

Para $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, considere

$$\mathcal{A} + \alpha := \{\zeta + \alpha \, : \, \zeta \in \mathcal{A}\} \quad \text{y} \quad \alpha\mathcal{A} := \{\alpha\zeta \, : \, \zeta \in \mathcal{A}\} \, .$$

Es sencillo verificar que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathbb{C}$, entonces $\mathcal{A} + \alpha \subset \mathcal{B} + \alpha$ y $\alpha\mathcal{A} \subset \alpha\mathcal{B}$.

PROPOSICIÓN 3.5.7. *Para $\alpha \in \mathbb{C}$, lo siguiente se cumple:*

(a) $\hat{\rho}(T + \alpha I) = \hat{\rho}(T) + \alpha$
(b) Si $\alpha \neq 0$ *entonces* $\hat{\rho}(\alpha T) = \alpha\hat{\rho}(T)$.

Demostración. Note que $[(T + \alpha I) - \zeta I]^{-1} = [(T - \zeta - \alpha)I]^{-1}$. Así, $\zeta \in \hat{\rho}(T + \alpha I)$ si y solo si $(\zeta - \alpha) \in \hat{\rho}(T)$, o equivalente a $\zeta \in \hat{\rho}(T) + \alpha$, de donde se sigue el punto (a).

Para el punto (b), es directo verificar que $(\alpha T - \zeta I)^{-1} = \alpha^{-1} (T - \zeta/\alpha I)^{-1}$ existe y es acotado si y solo si $(T - \zeta/\alpha I)^{-1}$ existe y es acotado. Entonces $\zeta \in \hat{\rho}(\alpha T)$ si y solo si $\zeta/\alpha \in \hat{\rho}(T)$, es decir, $\zeta \in \alpha\hat{\rho}(T)$. □

Definición 3.5.8. El conjunto **regular** (o también llamado resolvente) de un operador lineal cerrado T viene dado por

$$\rho(T) := \left\{\zeta \in \mathbb{C} \, : \, (T - \zeta I)^{-1} \text{ existe y pertenece a } \mathcal{B}(\mathcal{H})\right\} \, .$$

Para un operador T cerrado y $\zeta \in \hat{\rho}(T)$, se tiene de la observación 3.5.5 que el índice $d_T(\zeta) = 0$ si y solo si

$$\mathcal{D}((T-\zeta)^{-1}) = \mathcal{R}(T-\zeta I) = \mathcal{H}\,. \tag{69}$$

Por otra parte, el teorema 3.3.4 y la observación 3.3.5 implican que $(T-\zeta I)^{-1}$ es cerrado y por lo tanto acotado. Así, de (69) se sigue que $d_T(\zeta) = 0$ si y solo si $(T-\zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, por lo que hemos probado lo siguiente.

Corolario 3.5.9. *Para un operador cerrado T, se cumple que $\zeta \in \rho(T)$ si y solo si $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ y $d_T(\zeta) = 0$.*

El resultado anterior y el teorema 3.5.6 muestran que $\rho(T)$ consiste en todas las componentes conexas de $\rho(T)$, donde el índice de defecto se anula. Esto a su vez implica lo siguiente.

Corolario 3.5.10. *El conjunto regular de un operador cerrado es abierto.*

Observación 3.5.11. La condición de T de ser cerrado en la definición 3.5.8 es conveniente, debido a que si T no es cerrado, entonces de la observación 3.5.5, $\mathcal{D}((T-\zeta I)^{-1})$ no es cerrado para todo $\zeta \in \hat{\rho}(T)$, lo que implicaría que $\rho(T) = \emptyset$.

En lo que resta de la sección, vamos a suponer que T es un operador cerrado. Lo siguiente se sigue de manera análoga a la proposición 3.5.7.

Proposición 3.5.12. *Si $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces $\rho(T+\alpha I) = \rho(T) + \alpha$. Si además $\alpha \neq 0$, entonces $\rho(\alpha T) = \alpha\rho(T)$.*

Introducimos los siguientes conjuntos que son de interés en teoría espectral.

$$\begin{aligned}
\sigma(T) &:= \mathbb{C}\backslash\rho(T) && \textit{(espectro)}\\
\hat{\sigma}(T) &:= \mathbb{C}\backslash\hat{\rho}(T) && \textit{(núcleo espectral)}\\
\sigma_r(T) &:= \sigma(T)\backslash\hat{\sigma}(T) && \textit{(espectro residual)}\\
\sigma_p(T) &:= \{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, \mathcal{N}(T-\zeta I) \neq \{0\}\} && \textit{(espectro puntual)}\\
\sigma_p^\infty(T) &:= \{\zeta \in \sigma_p(T) \,:\, \dim \mathcal{N}(T-\zeta) = \infty\} && \textit{(espectro puntual no discreto)}\\
\sigma_d(T) &:= \left\{\zeta \in \sigma_p(T)\backslash\sigma_p^\infty(T) \,:\, \zeta \text{ es aislado}\right\} && \textit{(espectro discreto)}\\
\sigma_c(T) &:= \left\{\zeta \in \mathbb{C} \,:\, \mathcal{R}(T-\zeta I) \neq \overline{\mathcal{R}(T-\zeta)}\right\} && \textit{(espectro continuo)}
\end{aligned}$$

Es claro que $\hat{\sigma}(T) \subset \sigma(T)$, y ambos son conjuntos cerrados. Además, el espectro puntual consiste en los autovalores de T. Más aún, los espectros puntual y continuo pueden tener intersección no vacía.

Teorema 3.5.13. *La siguiente igualdad se cumple: $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \hat{\sigma}(T)$.*

Demostración. Por contraposición, si $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ entonces $\mathcal{N}(T-\zeta I) = \{0\}$ y como T es cerrado, de la observación 3.5.5 se sigue que $\mathcal{R}(T-\zeta I)$ es cerrado, es decir, $\zeta \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Ahora bien, si $\zeta \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$, entonces $(T-\zeta I)^{-1}$ existe y tiene dominio cerrado. Además, como T es cerrado, el teorema 3.3.4 y la observación 3.3.5 implican que $(T-\zeta I)^{-1}$ es cerrado y ende acotado, i.e., $\zeta \in \hat{\rho}(T)$. □

Observación 3.5.14. Si T es cerrado, entonces para cada $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ se sigue que

$$[\mathcal{N}(T-\zeta I)]^{\perp} = \mathcal{H}\,.$$

De otra manera, $\mathcal{N}(T-\zeta I)$ es cerrado y no trivial. Además, del teorema 3.5.13 se tiene que $\zeta \in \sigma_p(T) \subset \hat{\sigma}(T) = \mathbb{C}\backslash\hat{\rho}(T)$, lo cual resulta contradictorio.

El espectro, núcleo espectral y espectros puntual y continuo, cumplen similarmente las propiedades vistas en las proposiciones 3.5.7 y 3.5.12.

$$\begin{aligned} \sigma(T+\alpha I) &= \sigma(T)+\alpha\,, & \sigma(\alpha T) &= \alpha\sigma(T)\,,\\ \hat\sigma(T+\alpha I) &= \hat\sigma(T)+\alpha\,, & \hat\sigma(\alpha T) &= \alpha\hat\sigma(T)\,,\\ \sigma_p(T+\alpha I) &= \sigma_p(T)+\alpha\,, & \sigma_p(\alpha T) &= \alpha\sigma_p(T)\,,\\ \sigma_c(T+\alpha I) &= \sigma_c(T)+\alpha\,, & \sigma_c(\alpha T) &= \alpha\sigma_c(T)\,. \end{aligned}$$

TEOREMA 3.5.15. *Si T es un operador densamente definido, entonces:*
(1) $\sigma(T^*)$ es el complejo conjugado de $\sigma(T)$.
(2) $\sigma_c(T^*)$ es el complejo conjugado de $\sigma_c(T)$.
(3) Si $\zeta \in \sigma_r(T)$ entonces $\zeta \in \sigma_p(T^*)\backslash\sigma_c(T^*)$.

Demostración. Si $\zeta \in \rho(T)$ entonces $(T-\zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y de la observación 3.4.8, de (59) y (61), se tiene que $(T^* - \overline{\zeta} I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es decir, $\overline{\zeta} \in \rho(T^*)$. Ahora, si $\zeta \in \rho(T^*)$, entonces $\overline{\zeta} \in \rho(T^{**}) = \rho(T)$, de donde se concluye el punto (1). El punto (2) se sigue del teorema 3.4.6 y de (61).

Para el punto (3), si $\zeta \in \sigma_r(T)$ entonces es directo que $\zeta \in \hat\rho(T)\backslash\rho(T)$, i.e., $(T-\zeta I)^{-1}$ existe y es acotado. Como T es cerrado, el teorema 3.3.4 y la observación 3.3.5 implican que $(T-\zeta I)^{-1}$ es cerrado, esto conlleva a que $\mathcal{R}(T-\zeta I) = \mathcal{D}((T-\zeta I)^{-1})$ es cerrado pero no es todo el espacio $\mathcal{H}$, ya que $\zeta \notin \rho(T)$. Por lo tanto, del teorema 3.4.6 y de (61), $\mathcal{R}(T^* - \overline{\zeta} I)$ es cerrado y de la descomposición 63, $\mathcal{N}(T^* - \overline{\zeta} I) \neq \{0\}$, lo que implica $\zeta \in \sigma_p(T^*)\backslash\sigma_c(T^*)$. □

La siguiente propiedad es de gran utilidad en la secuela.

LEMA 3.5.16. *Para T invertible y $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$, se tiene que*

$$\mathcal{R}(T-\zeta I) = \mathcal{R}(T^{-1} - \frac{1}{\zeta} I) \quad y \quad \mathcal{N}(T-\zeta I) = \mathcal{N}(T^{-1} - \frac{1}{\zeta} I)\,. \tag{70}$$

Demostración. Para $f \in \mathcal{D}(T)$, se tiene que $Tf = g \in \mathcal{D}(T^{-1})$ y

$$(T-\zeta I)f = Tf - \zeta f = g - \zeta T^{-1} g = \left(T^{-1} - \frac{1}{\zeta} I\right)(-\zeta g)\,,$$

de donde se tiene que $\mathcal{R}(T-\zeta I) \subset \mathcal{R}(T^{-1} - \zeta^{-1} I)$. La otra inclusión se sigue intercambiando los roles de T y ζ por T^{-1} y ζ^{-1}, respectivamente. Ahora bien, la segunda igualdad de (70) se sigue del hecho de que $Tf = \zeta f$ si y solo si $\zeta^{-1} f = T^{-1} f$, para todo $f \in \mathcal{D}(T)$. □

Bajo ciertas condiciones, mostremos un comportamiento de los espectros de la inversa de un operador.

TEOREMA 3.5.17. *Si T es invertible y $0 \neq \zeta \in \mathbb{C}$. Entonces, $\zeta \in \sigma(T)$ (resp. $\hat\sigma(T)$, $\sigma_p^\infty(T)$, $\sigma_j(T)$, con $j = c, d, p, r$) si y solo si $\zeta^{-1} \in \sigma(T^{-1})$ (resp. $\hat\sigma(T^{-1})$, $\sigma_p^\infty(T^{-1})$, $\sigma_j(T^{-1})$, con $j = c, d, p, r$).*

Demostración. De (70) la afirmación se cumple para el espectro puntual, puntual no discreto, discreto y continuo. Además, del teorema 3.5.13, la afirmación se cumple para el núcleo espectral. Lo anterior implica que $\zeta \in \hat\rho(T)$ si y solo si $\zeta^{-1} \in \hat\rho(T^{-1})$, y en este caso, junto con (70), (69) y corolario 3.5.9, se llega a que $\zeta \in \rho(T)$ si y solo si $\zeta^{-1} \in \rho(T^{-1})$, es decir, la afirmación se cumple para el espectro y por consiguiente, para el espectro residual. □

3.5.2. La resolvente. Permita iniciar directamente con la definición de la resolvente de un operador cerrado.

Definición 3.5.18. La **resolvente** de un operador cerrado T se define como

$$R_\zeta(T) \coloneqq (T-\zeta I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\,, \quad \zeta \in \rho(T)\,. \tag{71}$$

Usualmente en la literatura la resolvente se define como $(\zeta I - T)^{-1}$ en vez de (71).

TEOREMA 3.5.19. *Para operadores cerrados T, S tales que $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$, lo siguiente se cumple:*

$$R_\zeta(T) - R_\eta(T) = (\zeta - \eta) R_\zeta(T) R_\eta(T)\,, \quad \zeta, \eta \in \rho(T)\,. \tag{72}$$

$$R_\zeta(T) - R_\zeta(S) = R_\zeta(T)(S - T) R_\zeta(S)\,, \quad \zeta \in \rho(T) \cap \rho(S)\,. \tag{73}$$

Demostración. Si $\zeta \in \rho(T) \cap \rho(S)$ y $f \in \mathcal{H}$, se sigue que $R_\zeta(S) f \in \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$ y

$$\begin{aligned} R_\zeta(T)(S-T)R_\zeta(S) f &= R_\zeta(T)\left((S - \zeta I) - (T - \zeta I)\right) R_\zeta(S) f \\ &= R_\zeta(T) f - R_\zeta(S) f\,, \end{aligned}$$

de donde se sigue (73). La fórmula (72) se sigue de (73), substituyendo $S = T + (\zeta - \eta) I$ y usando la relación $R_\zeta(S) = R_\eta(T)$. □

A las fórmulas (72) y (73) se les conoce como la primera y segunda identidad de la resolvente, respectivamente. Además, intercambiando los papeles de ζ y η en (72), se tiene que

$$R_\zeta(T) - R_\eta(T) = (\zeta - \eta) R_\eta(T) R_\zeta(T)\,,$$

lo cual implica que $R_\zeta(T)$ y $R_\eta(T)$ conmutan.

Concluimos la sección con la siguiente afirmación que muestra que la resolvente $R_\zeta(T)$ es una función analítica sobre el conjunto $\rho(T)$, con valores en el espacio de Banach $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$.

TEOREMA 3.5.20. *Sea $\zeta \in \rho(T)$, y $\eta \in \mathbb{C}$ tales que $|\eta - \zeta| < \|R_\zeta(T)\|^{-1}$. Entonces, $\eta \in \rho(T)$ y*

$$R_\eta(T) = u\text{-}\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} (\eta - \zeta)^n R_\zeta(T)^{n+1}\,. \tag{74}$$

Particularmente,

$$\lim_{\eta \to \zeta} \|R_\eta(T) - R_\zeta(T)\| = 0\,. \tag{75}$$

Demostración. Tenemos de la observación 3.5.3 que la desigualdad en (66) es valida para $C_\zeta = \|R_\zeta(T)\|^{-1}$. Así, por hipótesis $|\eta - \zeta| < C_\zeta$, lo cual implica que $\eta \in \hat{\rho}(T)$ y del teorema 3.5.6 se tiene que $d_T(\eta) = d_T(\zeta) = 0$. Por lo tanto, del corolario 3.5.9 $\eta \in \rho(T)$. Ahora, como $\|(\eta - \zeta) R_\zeta(T)\| < 1$, existe un número positivo $C_r < 1$ tal que $\|(\eta - \zeta) R_\zeta(T) f\| \le C_r \|f\|$, para todo $f \in \mathcal{H}$. Entonces,

$$\|[I - (\eta - \zeta) R_\zeta(T)] f\| \ge \|f\| - \|(\eta - \zeta) R_\zeta(T) f\| \ge (1 - C_r)\|f\|\,.$$

Del teorema 3.1.3, el operador $I - (\eta - \zeta) R_\zeta(T) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tiene inversa acotada y se cumple que

$$I = [I - (\eta - \zeta) R_\zeta(T)]^{-1} [I - (\eta - \zeta) R_\zeta(T)]$$

es decir, $[I - (\eta - \zeta) R_\zeta(T)]^{-1} = I + (\eta - \zeta)[I - (\eta - \zeta) R_\zeta(T)]^{-1} R_\zeta(T)$ y recursivamente

$$[I - (\eta - \zeta) R_\zeta(T)]^{-1} = u\text{-}\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} (\eta - \zeta)^n R_\zeta(T)^n\,. \tag{76}$$

Por otra parte, la fórmula (72) implica $R_\zeta(T) = [I - (\eta - \zeta) R_\zeta(T)] R_\eta(T)$, el cual produce $R_\eta(T) = [I - (\eta - \zeta) R_\zeta(T)]^{-1} R_\zeta(T)$. Sustituyendo lo anterior en (76) se llega a (74). La operación (75) se sigue de (74), teniendo en cuenta que las funciones analíticas valuadas en operadores son continuas. □

De la fórmula (74), se sigue de manera particular que para $f, g \in \mathcal{H}$, la función compleja $\zeta \mapsto \langle g, R_\zeta(T) f \rangle$ es analítica sobre $\rho(T)$.

3.6. Operadores simétricos e isométricos.

3.6.1. Operadores simétricos y autoadjuntos. Para cualquier operador lineal T en $\mathcal{H}$, la identidad

$$\langle g, Tf\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\langle f + i^k g, T(f + i^k g)\right\rangle , \quad f, g \in \mathcal{D}(T) \tag{77}$$

es bien conocida como la **identidad de polarización** y se demuestra directamente desarrollando la parte derecha de (77).

Definición 3.6.1. Un operador A se dice ser **simétrico** si $\langle f, Af\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $f \in \mathcal{D}(A)$.

El siguiente resultado es una equivalencia de al definición 3.6.1.

LEMA 3.6.2. *Un operador A es simétrico si y solo si*

$$\langle f, Ag\rangle = \langle Af, g\rangle , \quad \textit{para todo } f, g \in \mathcal{D}(A) . \tag{78}$$

Demostración. Si A es simétrico entonces de (77) se sigue (78). El otro sentido es directo haciendo $g = f$. □

Veamos ahora una caracterización de los operadores simétricos respecto a su conjunto cuasi-regular.

TEOREMA 3.6.3. *Un operador A es simétrico si y solo si los semi-planos $\mathbb{C}_+$ y $\mathbb{C}_-$ están contenidos en $\hat{\rho}(A)$, y para todo $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$,*

$$\left\|(A - \zeta I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\zeta|} . \tag{79}$$

Demostración. Suponemos que A es simétrico y sea $\zeta \in \mathbb{C}_+$, entonces para $f \in \mathcal{D}(A)$,

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{Im}\langle Af, f\rangle = \operatorname{Im}\langle (A - \zeta I)f, f\rangle - \operatorname{Im}\zeta \left\|f\right\|^2 \\
&\leq |\langle (A - \zeta I)f, f\rangle| - \operatorname{Im}\zeta \left\|f\right\|^2 \leq \|(A - \zeta I)f\| \left\|f\right\| - \operatorname{Im}\zeta \left\|f\right\|^2 ,
\end{aligned}$$

que para $f \neq 0$ (de otra manera es directo), $\operatorname{Im}\zeta \|f\| \leq \|(A - \zeta I)f\|$. Por lo tanto, se tiene de la observación 3.5.3 que $\zeta \in \hat{\rho}(A)$ y la última desigualdad conlleva a $\left\|(A - \zeta I)^{-1}\right\| \leq 1/\operatorname{Im}\zeta$. Para $\zeta \in \mathbb{C}_-$, se demuestra usando lo anterior, teniendo en cuenta que $-A$ es simétrico y $-\zeta \in \mathbb{C}_+$.

Inversamente, si (79) se cumple bajo las supuestas condiciones, entonces se sigue para todo $f \in \mathcal{D}(A)$ y $\tau > 0$ que $\|f\| \leq \tau^{-1} \|(A - \alpha\tau I)f\|$, donde $\alpha = \pm i$. Entonces,

$$\left\|f\right\|^2 \leq \tau^{-2} \left\|(A - \alpha\tau I)f\right\|^2 = \tau^{-2} \left\|Af\right\|^2 + \left\|f\right\|^2 - 2\tau^{-1} \operatorname{Re}\langle Af, \alpha f\rangle .$$

Así, $(2\tau)^{-1} \left\|Af\right\|^2 \geq \operatorname{Re}\langle Af, \alpha f\rangle$ y haciendo $\tau \to \infty$, se tiene $0 \geq \operatorname{Re}\langle Af, \alpha f\rangle$, i.e., $0 \geq \pm \operatorname{Im}\langle Af, f\rangle$, de donde se sigue que $\langle Af, f\rangle \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, A es simétrica. □

Debido al teorema 3.6.3, los semi-planos $\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ son componentes conexas de conjunto cuasi-regular $\hat{\rho}(A)$ de un operador simétrico A. De esto se cumple que $\hat{\sigma}(A) \subset \mathbb{R}$. Además, como consecuencia del teorema 3.5.6, el índice de defecto de un operador simétrico cerrado A permanece constante tanto en $\mathbb{C}_+$ como en $\mathbb{C}_-$. Entonces podemos definir lo siguiente.

Definición 3.6.4. Los **índices de defecto superior e inferior** de un operador simétrico cerrado A vienen dados respectivamente por

$$\eta_+(A) \coloneqq d_A(\zeta) \quad \text{y} \quad \eta_-(A) \coloneqq d_A(\overline{\zeta}) , \quad \zeta \in \mathbb{C}_+ . \tag{80}$$

COROLARIO 3.6.5. *Si un operador simétrico cerrado A tiene al menos un punto cuasi-regular λ_0 en $\mathbb{R}$, entonces $\eta_+(A) = \eta_-(A) = d_A(\lambda_0)$.*

Demostración. Se sigue directamente debido a que $d_A(\lambda)$ es constante dentro de un disco de centro λ_0. □

En lo siguiente abordamos operadores simétricos que son densamente definidos.

LEMA 3.6.6. *Un operador densamente definido A es simétrico si y solo si $A \subset A^*$.*

Demostración. Un cálculo simple muestra que $A \subset A^*$ si y solo si $\langle g, Af\rangle = \langle Ag, f\rangle$, para todo $f, g \in \mathcal{D}(A)$. Por lo tanto, de lema 3.6.2 se concluye la afirmación. $\square$

Un operador simétrico cerrado densamente definido A es necesariamente cerrable y su cerradura también es simétrica, debido a que A^* es cerrado y $(\overline{A})^* = A^*$. Además, si S es una extensión simétrica de A entonces de (60) se tiene que $S^* \subset A^*$ y se cumple la siguiente cadena:

$$A \subset S \subset S^* \subset A^* \,. \tag{81}$$

Se sigue de (81) que cualquier extensión simétrica de A es restricción de A^*. Un operador simétrico que no tiene extensiones simétricas se le conoce como **maximal** y por consiguiente es cerrado.

Definición 3.6.7. Un operador densamente definido A es **autoadjunto** si $A = A^*$.

Es claro que un operador autoadjunto es simétrico y cerrado. Sin embargo, en general lo contrario no es cierto. De esta manera, la noción de ser simétrico resulta ser más extensa en comparación con la de ser autoadjunto. Para $A = A^*$ todas las inclusiones en (81) se convierten en igualdades. Esto significa que un operador autoadjunto es simétrico maximal, pero existen operadores simétricos maximales que no son autoadjuntos.

El problema de investigar y describir todas las posibles extensiones simétricas (especialmente autoadjuntas) de operadores simétricos es importante en las aplicaciones y constituyen el contenido de la teoría de extensión de operadores simétricos [19, 4].

Un operador cerrable no cerrado A, tal que $\overline{A}$ es autoadjunto, se dice ser **esencialmente autoadjunto**. Estos operadores son simétricos, debido a que $A \subset \overline{A} = A^*$. El término esencialmente autoadjunto expresa que uno puede obtener una extensión autoadjunta por el simple procedimiento de tomar la cerradura.

Observación 3.6.8. El adjunto de un operador simétrico densamente definido A, es simétrico si y solo si A es esencialmente autoadjunto. En efecto, A^* es simétrico si y solo si $A^* \subset A^{**} = \overline{A} \subset (\overline{A})^* = A^*$, de donde se sigue que $\overline{A} = A^*$.

COROLARIO 3.6.9. *Un operador simétrico con dominio todo el espacio es autoadjunto y acotado.*

Demostración. Como A es simétrico con $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ entonces se tiene del lema 3.6.6 que $A \subset A^*$. Ahora, si $f \in \mathcal{D}(A^*)$, entonces $f \in \mathcal{D}(A)$ y $A^* f = Af$, esto implica que $A^* \subset A$. Por lo tanto A es autoadjunto. Luego, A es cerrado con dominio cerrado y por consiguiente acotado. $\square$

Con base en la descomposición (63) y de (80), los índices de defecto de un operador simétrico cerrado densamente definido A, vienen dados por

$$\eta_+(A) = \dim \mathcal{N}(A^* - \overline{\zeta} I) \quad \text{y} \quad \eta_-(A) = \dim \mathcal{N}(A^* - \zeta I)\,, \quad \zeta \in \mathbb{C}_+\,.$$

Lo siguiente muestra una caracterización de operadores autoadjuntos.

TEOREMA 3.6.10. *Si A es simétrico, cerrado y densamente definido, entonces los siguientes son equivalentes:*

(a) A *es autoadjunto.*
(b) $\eta_\pm(A) = 0$.
(c) $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$.
(d) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Para $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \hat{\rho}(A)$ se tiene que $A^* - \zeta I = A - \zeta I$ es invertible, es decir, $\mathcal{N}(A^* - \zeta I) = \{0\}$. Por lo tanto, $\eta_\pm(A) = 0$. (b) $\Rightarrow$ (c): Uno calcula de los corolarios 3.5.9 y 3.6.5 que $\hat{\rho}(A) \subset \rho(A)$ y por consiguiente son iguales.

(c) $\Rightarrow$ (d): Es simple que $\sigma(A) = \hat{\sigma}(A) \subset \mathbb{R}$. (d) $\Rightarrow$ (a): Note que $\pm i \in \rho(A)$, es decir, $(A \pm iI)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces, se sigue de (63) que

$$\mathcal{R}(A - iI) = \mathcal{H} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(A^* - i) = \{0\}\,. \tag{82}$$

De esta manera, para $f \in \mathcal{D}(A)^*$, existe $h \in \mathcal{D}(A)$ tal que $(A - iI)h = (A^* - iI)f$. Como $A \subset A^*$, se tiene que $(A^* - iI)(h - f) = 0$ y de (82), $h = f$, es decir, $A^* \subset A$. Por lo tanto $A = A^*$. □

Uno frecuentemente se encuentra en aplicaciones con operadores simétricos semi-acotados, los cuales son caracterizados de la siguiente manera.

Definición 3.6.11. Un operador A simétrico es **semi-acotado inferiormente** si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, Af\rangle \geq m\,\|f\|^2\ , \quad \text{para todo } f \in \mathcal{D}(A)\,. \tag{83}$$

Además, A es **semi-acotado superiormente** si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, Af\rangle \leq M\,\|f\|^2\ , \quad \text{para todo } f \in \mathcal{D}(A)\,. \tag{84}$$

Al máximo posible valor de $m = m_A$ en (83) y al mínimo posible valor de $M = M_A$ en (84) se les conoce como la mayor cota inferior y la menor cota superior y están determinadas por

$$m_A = \inf_{\substack{f \in \mathcal{D}(A)\,,\\ \|f\| = 1}} \langle f, Af\rangle \quad ; \quad M_A = \sup_{\substack{f \in \mathcal{D}(A)\,,\\ \|f\| = 1}} \langle f, Af\rangle\ , \tag{85}$$

respectivamente.

Proposición 3.6.12. *Sea A un operador simétrico:*

(1) Si A es semi-acotado inferiormente entonces $(-\infty, m_A) \subset \hat{\rho}(A)$.
(2) Si A es semi-acotado superiormente entonces $(M_A, \infty) \subset \hat{\rho}(A)$.

En cualquier caso se tiene que $\eta_+(A) = \eta_-(A)$.

Demostración. Si A es semi-acotado inferiormente entonces para $\lambda \in (-\infty, m_A)$,

$$\|f\|\,\|(A - \lambda I)f\| \geq \langle f, (A - \lambda I)f\rangle \geq (m_A - \lambda)\,\|f\|^2\ , \quad f \in \mathcal{D}(A)\,,$$

lo cual cumple la condición (3.1.3) de la observación 3.5.3, es decir, $\lambda \in \hat{\rho}(A)$, de donde se sigue el punto (1). Ahora, si A es semi-acotado superiormente, entonces $-A$ es semi-acotado inferiormente con menor cota inferior $-M_A$. Así, del punto (1), $(-\infty, -M_A) \subset \hat{\rho}(-A)$, que implica (2). El corolario 3.6.5 indica que los índices de defecto de A son iguales. □

Observación 3.6.13. Como un operador simétrico A cumple que $\mathbb{C}\backslash\hat{\rho}(A)$, la proposición 3.6.12 indica que si A es semi-acotado inferiormente, entonces $\hat{\sigma}(A) \subset [m_A, \infty)$. Por otra parte, si A es semi-acotado superiormente, entonces $\hat{\sigma}(A) \subset (-\infty, M_A]$.

Cuando un operador simétrico A es semi-acotado inferiormente, con $m_A = 0$, se le conoce como **operador positivo** (o no negativo para algunos autores), se denotan como $A \geq 0$ y de la observación 3.6.13, el núcleo espectral de A cumple $\hat{\sigma}(A) \subset [0, \infty)$. Cuando A es semi-acotado superiormente, con $M_A = 0$ se le conoce como **operador negativo** (o no positivo), se denotan como $A \leq 0$ y $\hat{\sigma}(A) \subset (-\infty, 0]$. Es claro que si $A \geq 0$ entonces $-A \leq 0$.

Lema 3.6.14. *Si un operador autoadjunto A pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces*

$$\|A\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{H}\,,\\ \|f\| = 1}} |\langle f, Af\rangle|\ . \tag{86}$$

Demostración. Haciendo β el lado derecho de la igualdad (86), se tiene de (44) que $\beta \leq \|A\|$. Basta demostrar que $a = \|Af\| \leq \beta$, para $f \in \mathcal{H}$ con $\|f\| = 1$. Suponemos $a \neq 0$ (de otra manera es directo) y definamos $u_\pm = a^{\frac{1}{2}} f \pm a^{-\frac{1}{2}} Af$. Como $A = A^*$, es directo calcular que

$$\langle u_+, Au_+\rangle - \langle u_-, Au_-\rangle = 4a \quad \text{y} \quad \|u_\pm\|^2 = 2a \pm 2\langle f, Af\rangle$$

De esta manera,

$$a^2 = \frac{1}{4}\left(\langle u_+, Au_+\rangle - \langle u_-, Au_-\rangle\right) \leq \frac{1}{4}\beta\left(\|u_+\|^2 + \|u_-\|^2\right) = a\beta\,,$$

de donde se concluye la afirmación. □

Uno puede verificar directamente de la observación 3.3.8 que un operador autoadjunto y acotado pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Teorema 3.6.15. *Un operador autoadjunto A pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ si y solo si es semi-acotado superiormente e inferiormente. En este caso*

$$\|A\| = \text{máx}\left\{|m_A|\,, |M_A|\right\}\,. \tag{87}$$

Demostración. Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces se tiene de (86) que

$$-\|A\| \leq \langle f, Af\rangle \leq \|A\|\,, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{H}\,,$$

es decir, A es semi-acotado tanto superiormente como inferiormente. Inversamente, haciendo $\alpha = \text{máx}\left\{|m_A|\,, |M_A|\right\}$, se tiene que $|\langle h, Ah\rangle| \leq \alpha\|h\|^2$, para todo $h \in \mathcal{D}(A)$. Entonces, para $f, g \in \mathcal{D}(A)$ de norma uno, se cumple de (77) que

$$|\langle g, Af\rangle| \leq \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\left|\left\langle f + i^k g, A(f + i^k g)\right\rangle\right| \leq \frac{1}{4}\alpha\sum_{k=0}^{3}\left\|f + i^k g\right\|^2 = 2\alpha\,.$$

de donde se sigue que A es acotado y, por lo tanto, pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. La igualdad (87) se sigue de (85), teniendo en cuenta que $-\inf\langle f, Tf\rangle = \sup -\langle f, Tf\rangle$. □

La observación 3.6.13 y los teoremas 3.6.10, 3.6.15, implican que el espectro de un operador autoadjunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es acotado y satisface

$$\sigma(A) \subset [m_A, M_A]\,.$$

3.6.2. Operadores isométricos y unitarios. Aparte de la clase de los operadores simétricos, la clase de los operadores isométricos son de gran importancia en la física-matemática que merece su investigación. Las propiedades de los operadores isométricos son análogas en muchos aspectos a las de los operadores simétricos, aunque existen distinciones esenciales. La noción de un operador isométrico está estrechamente relacionada con la de un isomorfismo isométrico en espacios de Hilbert.

Definición 3.6.16. Un operador V es **isométrico** si $\|Vf\| = \|f\|$, para todo $f \in \mathcal{D}(V)$.

Del teorema 3.1.3, un operador isométrico tiene inversa, la cual es también un operador isométrico. Además, es simple ver que el dominio y el rango de un operador isométrico cerrado, resultan ser subespacios cerrados que tienen la misma dimensión.

Lema 3.6.17. *Un operador V es isométrico si y solo si*

$$\langle Vf, Vg\rangle = \langle f, g\rangle\,, \quad \textit{para todo } f, g \in \mathcal{D}(V)\,. \tag{88}$$

Demostración. Si V es isométrico, entonces de la identidad de polarización (77), con $T = I$, se sigue (88). El inverso es directo haciendo $f = g$. □

Permita denotar el disco unitario en $\mathbb{C}$ como

$$\mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}\,,$$

cuya frontera viene dada por $\partial\mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$.

TEOREMA 3.6.18. *Un operador V es isométrico si y solo si existe su inversa, $\mathbb{C}\backslash\partial\mathbb{D} \subset \hat{\rho}(V), \hat{\rho}(V^{-1})$ y*

$$\left\|(V - \zeta I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|1 - |\zeta||}, \quad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\partial\mathbb{D} \tag{89}$$

donde V^{-1} también cumple (89).

Demostración. Si V es isométrico entonces para $\zeta_1 \in \mathbb{D}$, $\zeta_2 \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ y $f \in \mathcal{D}(V)$,

$$\begin{aligned} \|(V - \zeta_1 I)f\| &\geq \|Vf\| - |\zeta_1| \|f\| = (1 - |\zeta_1|) \|f\| \,; \\ \|(V - \zeta_2 I)f\| &\geq |\zeta_2| \|f\| - \|Vf\| = (|\zeta_2| - 1) \|f\| \,, \end{aligned} \tag{90}$$

Por lo tanto, se sigue de la observación 3.5.3 que $\zeta_1, \zeta_2 \in \hat{\rho}(V)$. Además, (90) implica (89). Como V es isométrico, V^{-1} también lo es y satisface lo anterior. Inversamente, si V, V^{-1} satisfacen (89), entonces para todo $f \in \mathcal{D}(V)$ y $g \in \mathcal{D}(V^{-1})$, $\|Vf\| \geq \|f\|$ y $\left\|V^{-1}g\right\| \geq \|g\|$. Por lo tanto, haciendo $g = Vf$, se llega a que V es isométrico. ☐

El teorema 3.6.18 indica que $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ y $\mathbb{D}$ son componentes conexas de conjunto cuasi-regular $\hat{\rho}(V)$ de un operador isométrico V, es decir, $\hat{\sigma}(V) \subset \partial\mathbb{D}$. De esta manera, como una consecuencia del teorema 3.5.6, podemos definir lo siguiente.

Definición 3.6.19. Los **índices de defecto exterior e interior** de un operador isométrico cerrado V, vienen dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \eta_e(V) &:= d_V(\zeta)\,, \quad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}} \\ \eta_i(V) &:= d_V(\zeta)\,, \quad \zeta \in \mathbb{D}\,. \end{aligned} \tag{91}$$

El siguiente resultado se sigue de manera directa.

COROLARIO 3.6.20. *Si un operador isométrico cerrado V tiene al menos un punto cuasi-regular λ_0 en $\partial\mathbb{D}$, entonces $\eta_e(V) = \eta_i(V) = d_V(\lambda_0)$.*

Para efectos prácticos, conviene dar la siguiente caracterización de los índices (91).

TEOREMA 3.6.21. *Los índices de defecto de un operador isométrico cerrado V cumplen lo siguiente:*

$$\eta_e(V) = \dim[\mathcal{D}(V)]^\perp\,, \quad \eta_i(V) = \dim[\mathcal{R}(V)]^\perp\,. \tag{92}$$

Demostración. Note de (91) que $\eta_i(V) = d_V(0) = \dim[\mathcal{R}(V)]^\perp$. Para la primera igualdad de (92), mostraremos por contradicción que $\dim[\mathcal{R}(V - \zeta I)]^\perp = \dim[\mathcal{D}(V)]^\perp$, con $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$.

Si $\dim[\mathcal{R}(V - \zeta I)]^\perp < \dim[\mathcal{D}(V)]^\perp$ entonces exitse $0 \neq h \in [\mathcal{D}(V)]^\perp$, tal que es ortogonal a $[\mathcal{R}(V - \zeta I)]^\perp$. Se sigue de la observación 3.5.5 que $h \in \mathcal{R}(V - \zeta I)$, es decir, existe $0 \neq f \in \mathcal{D}(V)$, tal que $(V - \zeta I)f = h$ y $h \perp f$. Como V es isométrico,

$$\|f\|^2 = \|Vf\|^2 = \|h + \zeta f\|^2 = \|h\|^2 + |\zeta|^2 \|f\|^2 > \|f\|^2 \,,$$

que resulta una contradicción. Ahora bien, si $\dim[\mathcal{R}(V - \zeta I)]^\perp > \dim[\mathcal{D}(V)]^\perp$ entonces existe $h \in [\mathcal{R}(V - \zeta I)]^\perp$, tal que $h \perp [\mathcal{D}(V)]^\perp$, es decir, $h \in \mathcal{D}(V)$ y

$$0 = \langle (V - \zeta I)h, h\rangle = \langle Vh, h\rangle - \zeta \|h\|^2 \,.$$

Así, $\|h\|^2 < |\zeta| \|h\|^2 = |\langle Vh, h\rangle| \leq \|h\|^2$, que resulta contradictorio. ☐

Lo siguiente da una caracterización de operadores isométricos que son densamente definidos. Note que un operador simétrico, cerrado y densamente definido V, automáticamente pertenece a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ver observación 3.3.8).

LEMA 3.6.22. *Sea V invertible y densamente definido. Entonces V es isométrico si y solo si $V^{-1} \subset V^*$.*

Demostración. Es sencillo verificar que $V^{-1} \subset V^*$ si y solo si $\langle Vg, Vf\rangle = \langle g, f\rangle$, para todo $f, g \in \mathcal{D}(V)$. Por lo tanto, en virtud del lema 3.6.17, se sigue la afirmación. ☐

Definición 3.6.23. Un operador invertible y densamente definido V es **unitario** si satisface que $V^{-1} = V^*$.

Un operador unitario es un operador isométrico en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, pero en general lo contrario no es cierto, es decir, la noción de ser isométrico es más amplia a la de ser unitario. Lo siguiente da una caracterización de operadores unitarios.

TEOREMA 3.6.24. *Si V es isométrico cerrado densamente definido, entonces los siguientes son equivalentes:*
(a) V es unitario.
(b) $V, V^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
(c) $\eta_e(V) = \eta_i(V) = 0$.
(d) $\hat{\rho}(V) = \rho(V)$.
(e) $\sigma(V) \subset \partial\mathbb{D}$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Se sigue de la observación 3.4.8. (b) $\Rightarrow$ (c): Es directo del teorema 3.6.21. (c) $\Rightarrow$ (d): Los corolarios 3.5.9 y 3.6.20 conllevan a que $\hat{\rho}(V) \subset \rho(V)$. Lo que implica que sean iguales. (d) $\Rightarrow$ (e): Es simple ver que $\sigma(V) = \hat{\sigma}(V) \subset \partial\mathbb{D}$. (e) $\Rightarrow$ (a): Note que $0 \in \rho(V)$, es decir, $V^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Además, la observación 3.4.8 implica que $V^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por lo tanto, se sigue del lema 3.6.22 que $V^{-1} = V^*$, debido a que ambos pertenecen a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. $\square$

3.7. Operadores de posición y momento. Dedicamos esta sección a dos operadores lineales no acotados que desempeñan un papel importante en la mecánica cuántica y áreas afines. Particularmente, son de relevancia en la sección 4.

3.7.1. Operador de posición. Consideramos $L_2(\mathbb{R})$ como el espacio de las funciones cuadrado integrable en $\mathbb{R}$, cuyo producto interno es $\langle f, g\rangle = \int \overline{f(t)}g(t)dt$.

Definición 3.7.1. El **operador de posición** $Q\colon \mathcal{D}(Q) \to L_2(\mathbb{R})$ viene dado por $Qf(t) = tf(t)$, donde

$$\mathcal{D}(Q) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) \ : \ \int (1+t^2)\,|f(t)|^2\, dt < \infty \right\} \subset L_2(\mathbb{R})\,.$$

El dominio de Q contiene al espacio $C_0^\infty(\mathbb{R})$ (las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en $\mathbb{R}$), el cual es un conjunto denso en $L_2(\mathbb{R})$ y esto conlleva a que Q sea densamente definido. Sin embargo, $\mathcal{D}(Q)$ está contenido propiamente en $L_2(\mathbb{R})$, pues la función

$$f(t) = \begin{cases} t^{-1}\,, & t \geq 1 \\ 0\,, & t < 0 \end{cases}$$

pertenece a $L_2(\mathbb{R})$ pero no al dominio de Q.

TEOREMA 3.7.2. *El operador de posición es autoadjunto y no acotado.*

Demostración. Uno calcula de manera directa que

$$\langle Qf, f\rangle = \int \overline{tf(t)}f(t)dt = \int t\,|f(t)|^2\, dt \in \mathbb{R}\,, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{D}(Q)$$

de donde se sigue que Q es simétrico. Como Q es densamente definido, del lema 3.6.6 se tiene $Q \subset Q^*$. Ahora bien, si $g \in \mathcal{D}(Q^*)$, entonces debido a que $\langle Qf, g\rangle = \langle f, Q^*g\rangle$, para todo $f \in \mathcal{D}(Q)$, se tiene que $tg(t) = Q^*g(t) \in L_2(\mathbb{R})$, es decir, $g \in \mathcal{D}(Q)$. Por lo tanto, Q es autoadjunto.

Para mostrar que Q no es acotado, consideremos la sucesión de funciones características $\{\mathbb{1}_{[n,n+1]}\} \subset L_2(\mathbb{R})$. Entonces, un cálculo directo muestra que $\left\|\mathbb{1}_{[n,n+1]}\right\| = 1$ y $\|Qf_n\| > n \to \infty$, de donde se concluye la afirmación. $\square$

El operador de posición, al ser autoadjunto, es también cerrado. Veamos a continuación algunas de sus propiedades espectrales.

TEOREMA 3.7.3. *El operador de posición satisface lo siguiente:*

$$\sigma_p(Q) = \emptyset \quad y \quad \sigma_c(Q) = \sigma(Q) = \mathbb{R}\,.$$

Demostración. Notemos primeramente de los teoremas 3.6.10 y 3.7.2 que $\sigma(Q) \subset \mathbb{R}$. Ahora bien, consideremos cualquier $\zeta \in \mathbb{R}$. Si $Qf = \zeta f$ entonces $(t-\zeta)f(t) = 0$. Así, $f(t) = 0$ casi para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, $f = 0$, de donde se cumple que $\sigma_p(Q) = \emptyset$. Además, los teoremas 3.5.13 y 3.6.10 implican que $\sigma_c(Q) = \hat{\sigma}(Q) = \sigma(Q)$. Solo falta mostrar que $\zeta \in \sigma(Q)$.

Para $C > 0$, considere $n \in \mathbb{N}$ tal que $C > 1/n$ y denote $\Delta_n = (\zeta - 1/n, \zeta + 1/n)$. Entonces, la función característica $\mathbb{1}_{\Delta_n}$ es no cero en $\mathcal{D}(Q)$ y

$$\|(Q - \zeta I)\mathbb{1}_{\Delta_n}\|^2 = \int (t-\zeta)^2\, \mathbb{1}_{\Delta_n}^2 dt \leq \frac{1}{n^2}\, \|\mathbb{1}_{\Delta_n}\|^2 < C^2\, \|\mathbb{1}_{\Delta_n}\|^2\,.$$

De la observación 3.5.3 y del teorema 3.6.10 se tiene que $\zeta \notin \rho(Q)$, i.e., $\zeta \in \sigma(Q)$. □

El teorema anterior implica que $\rho(Q) = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Así para $\eta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$,uno puede verificar que la resolvente de Q viene dada por

$$R_\eta(Q)f(t) = \frac{1}{t-\eta} f(t)\,, \quad f \in L_2(\mathbb{R})\,.$$

3.7.2. Operador de momento. Para $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, decimos que una función f sobre el intervalo $[a,b]$ es **absolutamente continua**, si existe una función $h \in L_1(a,b)$ tal que (c.f. [19, Ap. E])

$$f(t) = f(a) + \int_a^t h(x)dx\,, \quad t \in [a,b]\,.$$

Sea $\mathrm{AC}[a,b]$ el conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en $[a,b]$. Si $f \in \mathrm{AC}[a,b]$ entonces f es continua en $[a,b]$ y es diferenciable casi en todas partes con $f' = h$ casi en todas partes sobre $[a,b]$. Denote,

$$H^1(\mathbb{R}) := \{f \in L_2(\mathbb{R}) \,:\, f \in \mathrm{AC}[a,b] \text{ para todo } [a,b] \in \mathbb{R} \text{ y } f' \in L_2(\mathbb{R})\}\,.$$

El espacio $H^1(\mathbb{R})$ es un conjunto denso en $L_2(\mathbb{R})$ debido a que contiene a $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Además, para $f \in H^1(\mathbb{R})$, se tiene (ver [19, lem. 1.11])

$$\lim_{b\to+\infty} f(b) = \lim_{a\to-\infty} f(a) = 0\,. \tag{93}$$

Definición 3.7.4. El **operador de momento** $P\colon H^1(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ viene dado por $Pf(t) = -if'(t)$.

Generalmente, el operador de momento en la literatura es $Pf(t) = -i\hbar f'(t)$. A efectos de simplificar notación, consideramos la constante de Dirac $\hbar = 1$.

TEOREMA 3.7.5. *El operador de momento es autoadjunto y no acotado.*

Demostración. Para $f, g \in H^1(\mathbb{R})$, de (93) y mediante integración por partes,

$$\langle f, Pg\rangle = -i\int \overline{f(t)}g'(t)dt = -i\,\overline{f(t)}g(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int \overline{-if'(t)}g(t)dt = \langle Pf, g\rangle\,,$$

lo cual implica de los lemas 3.6.2 y 3.6.6 que $P \subset P^*$. Además, $\mathcal{D}(P^*) = H^1(\mathbb{R})$ (c.f. [4, Sec. 4.8] y por consiguiente $P = P^*$.

Para verificar que el operador P no es acotado. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere la función $f_n(t) = (3n)^{1/2}(1-nt)\mathbb{1}_{[0,1/n]}(t)$. Entonces, uno calcula de manera simple que $\|f_n\| = 1$ y $\|Qf_n\| = \sqrt{3}n \to \infty$, de donde se sigue la afirmación. □

TEOREMA 3.7.6. *El operador de momento cumple lo siguiente:*

$$\sigma_p(P) = \emptyset \quad y \quad \sigma_c(P) = \sigma(P) = \mathbb{R}\,.$$

Demostración. Dado que $P = P^*$, el teorema 3.6.10 implica $\sigma(P) \subset \mathbb{R}$. Luego para $\zeta \in \mathbb{R}$, es sencillo verificar que si $Pf = \zeta f$, como $f \in H^1(\mathbb{R})$ y satisface (93), entonces $f = 0$, o bien, $\sigma_p(P) = \emptyset$. Por otra parte, podemos elegir $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ distinto de cero y considerar $h_\varepsilon(t) = \varepsilon^{1/2} e^{i\zeta t} f(\varepsilon t)$, con $\varepsilon > 0$. Entonces, uno calcula de manera sencilla que $\|h_\varepsilon\| = \|f\|$ y $\|(P - \zeta I)h_\varepsilon\| = \varepsilon \|f'\|$, se sigue de la observación 3.5.3 que $\zeta \notin \hat{\rho}(P)$, es decir, $\zeta \in \hat{\sigma}(P)$. Por lo tanto, $\mathbb{R} \subset \hat{\sigma}(P) \subset \sigma(P) \subset \mathbb{R}$, lo cual implica que son iguales. Note del teorema 3.5.13 que $\sigma_c(P) = \sigma(P)$. □

Para $\eta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} = \rho(P)$, la resolvente del operador de momento viene dada por

$$R_\eta(P)f(t) = \begin{cases} i \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{i\eta(t-\tau)f(\tau)d\tau}, & \operatorname{Im}\eta > 0 \\ -i \displaystyle\int_{t}^{-\infty} e^{i\eta(t-\tau)f(\tau)d\tau}, & \operatorname{Im}\eta < 0 \end{cases} \qquad (f \in L_2(\mathbb{R})).$$

Problemas de la sección.

P.3.1 Considere un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle f, Af\rangle > 0$, para todo $f \in \mathcal{H}$. Muestre que la forma sesquilineal

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle_A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\to \mathbb{C} \\ (f,g) &\mapsto \langle f, Ag\rangle \end{aligned}$$

define un producto interno en $\mathcal{H}$.

P.3.2 Sea $l_2(\mathbb{N})$ el espacio Hilbert de las sucesiones cuadrado sumables con base canónica $\{e_n\}$ y para cada $j \in \mathbb{N}$, considere el operador j-desplazamiento

$$S_j = \sum_n |e_{n+j}\rangle\langle e_n| \,. \tag{94}$$

Demuestre que $\{S_j\}$ converge débilmente al operador 0 pero no fuertemente.

P.3.3 Considere el espacio de Hilbert del problema anterior y el proyector

$$P_j = |e_j\rangle\langle e_j| \,, \quad j \in \mathbb{N}\,.$$

Demuestre que P_n converge fuertemente al operador 0 pero no uniformemente.

P.3.4 Muestre que el sentido inverso de la proposición 3.1.2 no siempre se cumple. *Sugerencia: exhiba un operador invertible S y uno no invertible T, tales que $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(S) = \{0\}$.*

P.3.5 Muestre la equivalencia de las siguientes normas:

$$\left\|\binom{f}{g}\right\|_* := \sqrt{\|f\|^2 + \|g\|^2} \quad ; \quad \left\|\binom{f}{g}\right\| := \|f\| + \|g\| \,, \quad \binom{f}{g} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\,.$$

P.3.6 Pruebe que dado un operador T en un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, el espacio lineal $(\mathcal{D}(T), \langle\cdot,\cdot\rangle_T)$, donde

$$\langle f, g\rangle_T := \left\langle \binom{f}{Tf}, \binom{g}{Tg} \right\rangle, \quad f, g \in \mathcal{D}(T)$$

es un espacio de Hilbert si y solo si T es cerrado. *Sugerencia: muestra que la transformación,*

$$\begin{aligned} U\colon \mathcal{D}(T) &\to \mathcal{G}(T) \\ f &\mapsto \binom{f}{Tf}, \end{aligned}$$

es una isometría.

P.3.7 Demuestre que si T es cerrado y $\zeta \in \mathbb{C}$, entonces $\mathcal{N}(T - \zeta I)$ es cerrado.

P.3.8 Demuestre que si T es cerrado y S es cerrado y acotado, entonces TS es cerrado.

P.3.9 Demuestre que si T es cerrable y S es acotado entonces TS es cerrable.

P.3.10 Sea $l_2(\mathbb{N})$ con base canónica $\{e_n\}$ y $j \in \mathbb{N}$. Muestre que el operador j-desplazamiento (94) satisface $\mathcal{D}(S_j) = l_2(\mathbb{N})$ y

$$\langle S_j f, S_j g\rangle = \langle f, g\rangle \ , \quad \forall f, g \in l_2(\mathbb{N}) \, .$$

Además, pruebe que es cerrado y acotado, es decir, $S_j \in \mathcal{B}(l_2(\mathbb{N}))$. Determine $\|S_j\|$.

P.3.11 Sea $\zeta = \{\zeta_n\}$ una sucesión fija de números complejos y $\{e_n\}$ base canónica de $l_2(\mathbb{N})$. Considere los operadores L_ζ, R_ζ y T_ζ en $l_2(\mathbb{N})$ dados por

$$T_\zeta = \sum_n \zeta_n \, |e_n\rangle\!\langle e_n| \ ; \quad L_\zeta = \sum_n \zeta_n \, |e_n\rangle\!\langle e_{n+1}| \ ; \quad R_\zeta = \sum_n \zeta_n \, |e_{n+1}\rangle\!\langle e_n| \ . \tag{95}$$

Muestre que estos operadores son cerrados y densamente definidos en $l_2(\mathbb{N})$.

P.3.12 Pruebe el corolario 3.2.6.

P.3.13 Para $j \in \mathbb{N}$, determine el adjunto del operador j-desplazamiento (94). Además, muestre que $\mathcal{N}(S_j^*) = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_j\}$, donde $\{e_n\}$ es base canónica del espacio $l_2(\mathbb{N})$.

P.3.14 Calcule el adjunto de los operadores T_ζ, L_ζ y R_ζ dados por (95). Además, muestre que si la sucesión ζ es real, entonces $T_\zeta = T_\zeta^*$ y $L_\zeta^* = R_\zeta$.

P.3.15 Dada una sucesión real $\{\alpha_n\}$, construye un operador cerrado T tal que $\{\alpha_n e^{i\alpha_n}\} \subset \sigma(T)$.

P.3.16 Considere un conjunto cerrado no vacío $\mathcal{M}$ de $\mathbb{C}$ y $\{\zeta_n\}$ un conjunto denso numerable de $\mathcal{M}$. Sobre $l_2(\mathbb{N})$ con base canónica $\{e_n\}$, defina al operador $T = \sum_n \zeta_n \, |e_n\rangle\!\langle e_n|$. Demuestre que $\sigma(T) = \mathcal{M}$.

P.3.17 Sea $\zeta = \{\zeta_n\}$ una sucesión fija de números complejos y $\{e_n\}$ base canónica de $l_2(\mathbb{N})$. Calcule el espectro $\sigma(T_\zeta)$ y espectro puntal $\sigma_p(T_\zeta)$ del operador $T_\zeta = \sum_n \zeta_n \, |e_n\rangle\!\langle e_n|$. Además, diga cuándo T_ζ tiene espectro discreto.

P.3.18 Suponga que T_1, T_2 son dos operadores cerrados en $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{D}(T_1) \perp \mathcal{D}(T_2)$ y $\mathcal{R}(T_1) \perp \mathcal{R}(T_2)$. Muestre que $T = T_1 \oplus T_2$ es cerrado y $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$.

P.3.19 Dado un operador cerrado T, use la expresión (74) para mostrar que

$$\frac{d}{d\eta} R_\eta(T) \coloneqq \lim_{h \to 0} \frac{R_{\eta+h}(T) - R_\eta(T)}{h} = R_\eta(T)^2 \, , \qquad \eta \in \rho(T)$$

en la norma operador sobre $\mathcal{H}$.

P.3.20 Sean T, S operadores simétricos en $\mathcal{H}$.

a) Muestra que $\alpha T + \beta S$ es simétrico, para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Muestra que si $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, entonces T^{-1} es simétrico.

P.3.21 Muestra que si T, S son operadores isométricos en $\mathcal{H}$, entonces ζTS es isométrico, para cualquier $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

P.3.22 Suponga que T_1, T_2 son dos operadores en $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{D}(T_1) \perp \mathcal{D}(T_2)$ y $\mathcal{R}(T_1) \perp \mathcal{R}(T_2)$.

a) Muestre que si T_1, T_2 son simétricos entonces $T_1 \oplus T_2$ es simétrico.

b) Muestre que si T_1, T_2 son isométricos entonces $T_1 \oplus T_2$ es isométrico.

P.3.23 *(Principio de incertidumbre)*

Sean A, B operadores simétricos en $\mathcal{H}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para $f \in \mathcal{D}(AB) \cap \mathcal{D}(BA)$, considera el conmutador $[A, B]f = (AB - BA)f$.

a) Muestra que

$$|\langle [A, B]f, f\rangle| \leq 2 \, \|(A - \alpha I)f\| \, \|(B - \beta I)f\| \ . \tag{96}$$

b) Muestra que la igualdad en (96) se cumple si y solo si existe $\varphi \in [0, \pi)$ tal que $\sin\varphi(A - \alpha I)f = i\cos\varphi(B - \beta I)f$.

Sugerencia: verifica primero que $\langle [A, B]f, f\rangle = 2i \operatorname{Im} \langle (A - \alpha I)f, (B - \beta I)f\rangle$ *y después, aplica la desigualdad de Cauchy?Schwarz. Ten en cuenta que la igualdad ocurre si y solo si los vectores* $(A - \alpha I)f$ *y* $(B - \beta I)f$ *son linealmente dependientes.*

P.3.24 Muestra que $Q + P$ es densamente definido en $L_2(\mathbb{R})$.

P.3.25 Prueba que sobre $\mathcal{D}(Q) \cap \mathcal{D}(P)$, el conmutador de los operadores posición y momento satisface $[Q, P] = iI$.

P.3.26 *(Principio de incertidumbre sobre posición y momento)*

Para α, β y $f \in \mathcal{D}(Q) \cap \mathcal{D}(P)$, prueba que

$$\|f\| \leq 2 \|(Q - \alpha I)f\| \|(P - \beta I)f\| , \tag{97}$$

con igualdad si $f(t) = ce^{i\beta t - a(t-\alpha)^2}$, para algún $a > 0$ y $c \in \mathbb{C}$.

Sugerencia: para (97)*, usa el problema p.3.23a y para la igualdad aplica p.3.23b, denota* $a = \tan \varphi$ *y resuelve la correspondiente ecuación diferencial de primer orden.*

4. Principios Básicos de la Mecánica Cuántica

4.1. Postulados. La mecánica cuántica es un marco matemático de utilidad para el desarrollo de las teorías físicas. Debemos de hacer una distinción entre la mecánica cuántica que se usa en física, la cual es una aplicación a fenómenos y a sistemas físicos haciendo uso de la teoría desarrollada en un entorno matemático. Esta teoría permite el desarrollo de dicho campo en física y de aquí su gran importancia en el contexto matemático. Por razones didácticas desarrollaremos aquí una introducción axiomática de la mecánica cuántica, aunque a la fecha no existe un sistema completo de postulados que cuenten con el consenso de la comunidad física. Estos postulados se han derivado después de un largo proceso de prueba y error y sobre todo de mucha intuición.

El primer postulado nos indica el universo en donde se desarrolla la Mecánica Cuántica. Este universo es un espacio de Hilbert complejo, noción motivada entre otros por las de series de Fourier. El concepto de espacio de Hilbert fue introducido por John von Neumann en honor a David Hilbert (quien ya lo había utilizado en el estudio de ecuaciones integrales), definiéndolo de manera intrínseca e independiente de sus representaciones.

4.1.1. Postulado uno (estados). Cualquier sistema cuántico aislado tiene asociado un espacio de Hilbert complejo. El sistema se describe totalmente por un estado (o **matriz de densidad**) que es un operador positivo con traza unitaria actuando sobre el espacio de Hilbert del sistema. Un estado lo podemos interpretar como una descripción completa de un sistema físico.

Hay dos tipo de estados cuánticos que son: los llamados **estados puros** y **estados mezclados**. En particular, los estados puros se pueden identificar con los vectores unitarios del espacio de Hilbert.

Este primer postulado no indica cuál es el espacio de Hilbert asociado con un sistema cuántico en particular. Por ejemplo los estados puros de un sistema cuántico fundamental, el oscilador armónico cuántico, son vectores unitarios en el espacio de Hilbert de dimensión infinita $l_2(\mathbb{N})$ y sus estados mezclados son operadores positivos de traza uno sobre este espacio.

La notación usual es la **bra** y la **ket** mencionada anteriormente, se usa ampliamente en la literatura de física. Si $|u\rangle = \binom{\alpha}{\beta}$ denota a un vector columna en $\mathbb{C}^2$ denotaremos por $\langle u| = (\overline{\alpha} \;\; \overline{\beta})$ a su transpuesto conjugado (adjunto), entonces escribimos el producto interno de dos vectores $|u\rangle$,$\langle v|$ como:

$$\langle v, u\rangle = \langle v||u\rangle = (\overline{\alpha} \;\; \overline{\beta})\begin{pmatrix}\gamma \\ \delta\end{pmatrix} = \overline{\alpha}\gamma + \overline{\beta}\delta\,.$$

Si invertimos el orden de v y u se obtiene la matriz asociada con el operador $|u\rangle\langle v|$,

$$|u\rangle\langle v| = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}(\overline{\gamma} \;\; \overline{\delta}) = \begin{pmatrix}\alpha\overline{\gamma} & \alpha\overline{\delta} \\ \beta\overline{\gamma} & \beta\overline{\delta}\,.\end{pmatrix}$$

Denotamos por $|0\rangle = \binom{1}{0}$ y $|1\rangle = \binom{0}{1}$ a la base canónica de $\mathbb{C}^2$, entonces cualquier vector tiene la forma

$$|v\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Si consideramos que $v = u$ entonces

$$|v\rangle\langle v| = \begin{pmatrix}|\alpha|^2 & \alpha\overline{\beta}\\ \overline{\alpha}\beta & |\beta|^2\end{pmatrix}.$$

Los operadores anteriores son positivos si su traza es unitaria. Además, $\operatorname{tr}(|v\rangle\langle v|) = 1$ si y sólo si $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Los elementos en la diagonal se interpretan como las probabilidades de medir 0 y 1, mientras que los elementos fuera de la diagonal se interpretan como correlaciones cuánticas.

4.1.2. Postulado dos (ley dinámica). La evolución de un sistema cuántico aislado se describe mediante un operador unitario, éste se especifica indicando cómo cambian los estados del sistema en el transcurso del tiempo. Es decir, el estado p_{t_1} del sistema en el tiempo t_1, se relaciona con el estado p_{t_2} en el tiempo t_2 a través de un operador unitario $U(t_1, t_2)$, que depende sólo de los tiempos t_1 y t_2:

$$p_{t_2} = U(t_1, t_2)p_{t_1}U(t_1, t_2)^*.$$

El movimiento de los estados se realiza mediante una familia de transformaciones unitarias que están generadas por un operador autoadjunto H también llamado **Hamiltoniano del sistema**.

Este postulado no indica qué operadores unitarios corresponden con la dinámica física real del sistema, sólo asegura que la evolución se describe de esa manera e indica cómo se relacionan los estados de un sistema en dos tiempos diferentes. Una forma equivalente de este postulado describe la evolución de un sistema cuántico en tiempo continuo, haciendo uso del aparato de ecuaciones diferenciales, que es una de las maneras más usadas en la literatura Física.

La evolución temporal de los estados de un sistema cuántico aislado se describe mediante la **ecuación de Schrödinger**,

$$i\frac{dp_t}{dt} = Hp_t - p_tH,$$

donde H es el Hamiltoniano del sistema. Hemos tomado las unidades de tal manera que la constante de Planck $\hbar = 1$.

La solución de la ecuación de Schrödinger con condición inicial p_{t_1}, está dada por la exponencial

$$p_t = e^{-i(t-t_1)H}p_{t_1}e^{i(t-t_1)H}.$$

Entonces el estado del sistema en un tiempo t_2 será

$$p_{t_2} = e^{-i(t_2-t_1)H}p_{t_1}e^{i(t_2-t_1)H},$$

es decir, está descrita por el operador unitario

$$U(t_2, t_1) = e^{i(t_2-t_1)H}.$$

Si conocemos el Hamiltoniano del sistema, entonces tendremos, al menos en principio, completamente determinada su dinámica. Consideremos la familia de operadores $(e^{itH})_{t\in\mathbb{R}}$ que describe la dinámica de un sistema cuántico cerrado, éste es un grupo de operadores unitarios sobre el espacio de Hilbert del sistema, es decir, es un conjunto de estados puros, y la correspondencia $H \mapsto e^{itH}$ es una biyección. La propiedad de grupo corresponde con la reversibilidad de la evolución.

Dado que el Hamiltoniano es un operador autoadjunto, entonces tiene una descomposición espectral

$$H = \sum_{\lambda} |\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|,$$

donde λ denota los valores propios de H y ψ_λ son los correspondientes vectores propios normalizados. Los estados ψ_λ del sistema son comúnmente llamados **estados propios de la energía** o **estados estacionarios** y λ se llama la **energía del estado**. De manera que el espectro de H formado por todos los valores de λ, son los posibles valores de la energía del sistema cuántico.
El tercer postulado de la mecánica cuántica se refiere a las mediciones sobre un sistema cuántico. Las cantidades observables son propiedades que se pueden medir como la energía, la posición o el momento.

4.1.3. Postulado tres (mediciones cuánticas). Las observables de un sistema cuántico se representan por operadores autoadjuntos y el valor esperado de una observable A cuando el sistema se encuentra en el estado ρ está dada por la regla de Born:

$$\mathrm{tr}\,(\rho A)$$

Recordemos que los operadores autoadjuntos tienen un una descomposición espectral

$$A = \sum_k a_k |v_k\rangle\langle v_k|\,.$$

Si la observable A del sistema se mide en el estado puro $|u\rangle\langle u|$, entonces

1. Los posibles resultados son los valores propios a_k de A.
2. La medición del sistema se encontrará el algún estado propio $|v_k\rangle\langle v_k|$ de a_k.
3. La probabilidad de este resultado es

$$|\langle u, v_k\rangle|^2 = \mathrm{tr}\,(|u\rangle\langle u||v_k\rangle\langle v_k|)\ .$$

Si se realizan muchas mediciones de A con el sistema en el mismo estado $|u\rangle\langle u|$, entonces el valor esperado de la observable A es

$$\sum_k a_k |\langle u, v_k\rangle|^2 = \langle u, Au\rangle = \mathrm{tr}\,(A|u\rangle\langle u|)\ .$$

Ejemplo 4.1.I. El valor esperado del Hamiltoniano H de un sistema en el estado puro correspondiente a uno de sus vectores propios $|\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|$ es

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(H|\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|) &= \sum_{\lambda'} \langle\psi_{\lambda'}, |H\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|\psi_{\lambda'}\rangle \\ &= \sum_{\lambda'} \delta_{\lambda,\lambda'}\langle\psi_{\lambda'}, H\psi_\lambda\rangle = \langle\psi_\lambda, \lambda\psi_\lambda\rangle = \lambda\,,\end{aligned}$$

donde λ es la energía del estado ψ_λ.

El proceso de medición es muy peculiar, esto debido a que un sistema en un estado puro $|u\rangle\langle u|$ es enviado de manera repentina e irreversible en otro estado $|v_k\rangle\langle v_k|$, perdiéndose toda la información sobre el estado inicial; sólo se conoce el estado del sistema después de la medición.

Si para cada valor de un observable existe un único posible estado del sistema, en ese caso los estados de dicho sistema se llaman no degenerados. Por simplicidad hemos explicado el proceso de medición suponiendo que los valores propios de la observable son no-degenerados. Cuando las multiplicidades pueden ser diferentes de uno, se usa la expresión $\sum_k a_k E_k$, con valores propios distintos a_k y las proyecciones E_k sobre los correspondientes subespacios propios de dimensión igual a la multiplicidad de a_k. Entonces, una medición puede identificarse con un conjunto de proyecciones ortogonales, es decir, $\{E_k\}$ que satisfacen $E_i E_k = \delta_{i,k} E_k$ y la relación de completez $\sum_k E_k = I$. Estas se le conocen como las mediciones de von Neumann.

Un estado mezclado es una combinación lineal convexa de estados puros, es decir

$$\rho = \sum_k \rho_k |v_k\rangle\langle v_k|\,, \quad \text{con} \quad \rho_k > 0 \quad \text{y} \quad \sum_k \rho_k = 1\,.$$

Cabe mencionar que los estados puros en la representación anterior no son necesariamente ortogonales; sin embargo, si lo son, entonces la representación anterior es la descomposición de ρ. Si se realiza la medición de una observable A sobre un sistema que se encuentra en un estado mezclado ρ, entonces el valor esperado es

$$\sum_k \rho_k \langle v_k, Av_k \rangle = \sum_k \rho_k \mathrm{tr}\,(A|v_k\rangle\langle v_k|) = \mathrm{tr}\,(A\rho) \ .$$

En el siguiente postulado indica cómo se construye el espacio de estados de un sistema compuesto a partir de los espacios de estados de cada componente.

4.1.4. Postulado cuatro (sistemas compuestos). El espacio de estados de un sistema cuántico compuesto es el producto tensorial de los espacios de estados de las componentes del sistema. Si la j-ésima componente del sistema se encuentra en el estado ρ_j, con $1 \leq j \leq n$, entonces el sistema compuesto se encontrará en el estado $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_n$.

4.2. El oscilador armónico cuántico. Antes de introducirnos a la teoría de estados Gaussianos, veamos una parte introductoria aplicable a formas de Schrödinger que podemos encontrar en [8, 11, 10].

4.2.1. Forma diferencial de Schrödinger del oscilador armónico. Consideremos una partícula moviéndose sobre una recta bajo la influencia de la energía potencial correspondiente a un oscilador armónico clásico, es decir $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia de oscilación. De manera física, podemos imaginarnos una caja negra que emite y absorbe energía en "quantum", es decir, en múltiplos de una cantidad fija.

Para conocer la dinámica del sistema debemos de resolver la **ecuación de Schrödinger**, dada por

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_t(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_t(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_t(x)\,, \tag{98}$$

con condición inicial $\psi_{t=0}(x) = \psi(x)$. Al resolver esta ecuación por el método de separación de variables obtendremos soluciones de la forma $\psi_t(x) = f(t)\phi(x)$, del modo que al derivar y substituir en la ecuación (98) obtenemos

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{\phi(x)}\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\phi(x)\right)\,,$$

que se cumple si existen valores constantes E tales que

$$i\hbar\frac{df}{dt} = Ef\,,$$

donde al resolver se obtiene que $f(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$. Así,

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\phi(x) = E\phi(x)\,, \tag{99}$$

donde el Hamiltoniano $H = -\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Entonces, podemos escribir de manera más compacta (99) como $H\phi(x) = E\phi(x)$ el cual es un problema de valores propios para H.

Supondremos que $\hbar$, m y ω son iguales a 1, lo que implica

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\,.$$

Si definimos los operadores $P = -i\frac{d}{dx}$ y Q como el operador de multiplicación inducido por la función identidad, es decir, $I(x) = x$. Entonces

$$P^2\phi(x) = -i\frac{d}{dx}\left(-i\frac{d}{dx}\phi(x)\right) = -\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) \quad \text{y} \quad Q^2\phi(x) = x^2\phi(x)\,.$$

De esta manera, podemos expresar $H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$.

4.2.2. Relaciones canónicas de conmutación (CCR). El **conmutador** de dos operadores A, B, se define como

$$[A, B] = AB - BA\,.$$

Es claro que si los operadores A y B conmutan entonces su conmutador es cero.

Dirac propuso de una factorización de H como $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ)\frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ)$. Si

$$([P, Q]\phi)(x) = -i\frac{d}{dx}(x\phi(x)) - x\left(-i\frac{d}{dx}\phi(x)\right) = -i\phi(x)\,,$$

entonces $[P, Q] = -iI$, es decir, P y Q no conmutan. Esta es la relación canónica de conmutación en términos de P yQ. Siguiendo la idea de Dirac, resulta que

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ)\frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ) = H + \frac{i}{2}[P, Q] = H + \frac{1}{2}I\,,$$

donde $H+\frac{1}{2}I$ corresponde a la factorización propuesta. Con esta idea, podemos obtener resultados útiles.

Definición 4.2.1. Definimos el **operador de creación** y **aniquilación** como

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ) \quad \text{y} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ)\,,$$

respectivamente.

A estos operadores también se les conoce como de ascenso y descenso, por razones que veremos más adelante. Notemos que si calculamos el conmutador

$$\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ)\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ)\frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ)\right) \\
&= H + \frac{1}{2}I - \left(H - \frac{1}{2}I\right) = I\,,
\end{aligned}$$

obtenemos la relación de conmutación canónica, ahora en términos de a y $a^\dagger$. De modo similar podemos calcular de manera sencilla $[H, a] = -a$ y $[H, a^\dagger] = a^\dagger$.

Si existiera una función ϕ_0 tal que $a\phi_0 = 0$, entonces $H\phi_0 = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}I\right) = \frac{1}{2}\phi_0$. Esto quiere decir que ϕ_0 sería un vector propio asociado a $\frac{1}{2}$ de H. Notemos que $a\phi_0$ es equivalente a la ecuación lineal de primer orden $\frac{d}{dx}\phi_0(x) = x\phi_0(x)$ con solución general de la forma $\phi_0(x) = ce^{-x^2/2}$. Supongamos que ϕ_0 es un estado, es decir $\|\phi_0\| = 1$, entonces al resolver

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(ce^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(ce^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx\,,$$

obtenemos que $c = \pi^{-\frac{1}{4}}$ y $\phi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Gráficamente podemos observar que es una distribución Gaussiana, ya que está normalizada y el área de $\phi_0 = 1$ sobre $\mathbb{R}$ es igual a uno. A este estado se le llama el **estado fundamental** o **estado base** del oscilador armónico cuántico, la razón de este nombre es notar que $[H, a^\dagger] = a^\dagger$. Usando varias veces esta relación

$$\begin{aligned}
Ha^{\dagger n}\phi_0 &= Ha^{\dagger n}\phi_0 - a^{\dagger n}H\phi_0 + a^{\dagger n}H\phi_0 = [H, a^{\dagger n}] + a^{\dagger n}H\phi_0 \\
&= \frac{1}{2}a^{\dagger n}\phi_0 + [H, a^\dagger]a^{\dagger(n-1)}\phi_0 + a^\dagger[H, a^{\dagger(n-1)}]\phi_0 \\
&= \cdots = \left(n + \frac{1}{2}\right)a^{\dagger n}\phi_0\,.
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que las funciones $\left\{a^{\dagger n}\phi_0\right\}_{n\geq 0}$ son vectores propios de H, con valores propios $\left\{n + \frac{1}{2}\right\}_{n\geq 0}$. El siguiente resultado se sigue directamente, notando que los vectores propios de un operador autoadjunto son ortogonales y $\|a^\dagger n\phi_0\|^2 = n!$

TEOREMA 4.2.2. *El espectro de H es el subconjunto $\left\{n+\frac{1}{2}\right\}_{n\geq 0}$ y el conjunto de funciones $\left\{\phi_n=(n!)^{-1/2}a^{\dagger n}\phi_0\right\}_{n\geq 0}$, forman una base ortonormal de $L_2(\mathbb{R})$.*

Usando el método de separación de variables, a partir de todo esto podemos concluir que la solución de la ecuación de Schrödinger (98) se puede representar en la forma

$$\psi_t(x)=\sum_{n\geq 0}c_n e^{-(n+\frac{1}{2})t}\phi_n(x)\,,\quad \sum_{n\geq 0}{c_n}^2<\infty\,.$$

Se puede verificar de manera fácil que

$$a^\dagger\phi_n=\sqrt{n+1}\phi_{n+1}\,,\quad a\phi_n=\sqrt{n}\phi_{n-1}\quad \text{y}\quad a^\dagger a\phi_n=n\phi_n\,.$$

El operador $a^\dagger a$ es autoadjunto y el valor esperado del estado ϕ_n viene dado por $\langle\phi_n,a^\dagger a\phi_n\rangle=\langle\phi_n,n\phi_n\rangle=n$. Por esta razón, a ϕ_n se le llama el **estado de** n **partículas**. Las relaciones anteriores podemos interpretarlo para el caso del oscilador armónico cuántico cuando se encuentra en el estado ϕ_n. Entonces,

1. Operador número: es el operador $a^\dagger a$ que indica el número de partículas en el estado ϕ_n.
2. Operador de creación: el operador $a^\dagger$ agrega (o crea) una partícula al estado ϕ_n, incrementando la energía del sistema en en $\hbar\omega$ unidades.
3. Operador de aniquilación: el operador a destruye o aniquila una partícula del estado ϕ_n disminuyendo la energía del sistema en $\hbar\omega$ unidades.
4. Se cumple la relación canónica de conmutación (CCR) $[a,a^\dagger]=I$.

4.3. Estados Gaussianos. Para un espacio de Hilbert real $\mathcal{H}$, una forma bilineal $\sigma\colon\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ es una **forma simpléctica** si $\sigma(u,v)=-\sigma(v,u)$ para todo $u,v\in\mathcal{H}$. El par $(\mathcal{H},\sigma)$ es llamado el **espacio simpléctico**. Una forma simpléctica σ es llamada no degenerada si la condición $\sigma(u,v)=0$ para todo $v\in\mathcal{H}$ implica que $u=0$.

Un espacio simpléctico $(\mathcal{H},\sigma)$ es llamado **estándar** si $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert complejo y $\sigma(u,v)=\operatorname{Im}\langle u,v\rangle$. Se llama **separable** si existe una sucesión $\{u_k\}_{k\geq 0}\subset\mathcal{H}$ tal que $\sigma(u,u_k)=0$, para todo $k\geq 0$ entonces $u=0$. Un espacio simpléctico estándar es no degenerado y separable si $\mathcal{H}$ es separable. En efecto, si $\sigma(u,v)=0$ para todo $v\in\mathcal{H}$, entonces $\langle u,v\rangle=\operatorname{Re}\langle u,v\rangle$ y $0=\sigma(u,iv)=\operatorname{Re}\langle u,v\rangle$, i.e., $\langle u,v\rangle=0$ y, por lo tanto, $u=0$. Un espacio simpléctico estándar es el par $(\mathbb{C},\sigma)$, con $\sigma(u,v)=\operatorname{Im}\overline{u}v$. Lo siguiente es una introducción a estados coherentes que podemos encontrar en [**?**] (véase también [21]).

4.3.1. Representación de estados coherentes. Consideraremos la representación de estados coherentes de las CCR, i.e., el subespacio de Hilbert $\mathcal{E}_2(\mathbb{C})$ de $L_2(\mathbb{C})$ con base ortonormal (b.o.n., para abreviar) $\{\phi_k\}_{k\geq 0}$, donde

$$\phi_k(z)e^{-\frac{|z|^2}{2}}\frac{\overline{z}^k}{\sqrt{\pi k!}}$$

son llamados **estados coherentes canónicos**, y el **operador de Weyl**

$$\int W_z(u,v)\phi(v)dv\,,\quad \phi\in\mathcal{E}_2(\mathbb{C})\,,$$

con el kernel

$$W_z(u,v)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{|z+v-u|^2}{2}+i\sigma(u,z+v)-i\sigma(z,v)}\,.$$

La representación de estados coherentes se obtiene de la siguiente manera: comenzamos con el **espacio toy Fock** (también espacio baby Fock) $\Gamma_s(\mathbb{C})$ y siguiendo Parthasarathy, $\Gamma_s(\mathbb{C})\cong L_2(\mathbb{R})$, a través de la identificación:

$$\varepsilon(z)\mapsto f_z(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{\sqrt{2}zx-\frac{z^2}{2}-\frac{x^2}{2}}\,,$$

que satisface $\langle f_z,f_{z'}\rangle=e^{\overline{z}z'}$, donde $\varepsilon\in\Gamma_s(\mathbb{C})$ son las **funciones exponenciales**.

Sea $Qf(x) = xf(x)$ y $Pf(x) = -i\frac{df(x)}{dx}$ la relación de los operadores de posición y momento en $L_2(\mathbb{R})$ que satisfacen que $[Q, P] = iI$.

Recordemos que los operadores de creación y aniquilación en $L_2(\mathbb{R})$ son

$$a^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP)\,, \quad a := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP)$$

de donde se sigue que $Q = (a^\dagger + a)/\sqrt{2}$, $P = i(a^\dagger - a)/\sqrt{2}$ y $[a, a^\dagger] = I$. El Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico es

$$H = N + \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)\,, \tag{100}$$

donde $N = a^\dagger a$ se le conoce como el **operador de número**.

Definición 4.3.1. Para $z = r + is \in \mathbb{C}$ y $f \in L_2(\mathbb{R})$, el **operador de Weyl** W_z está definido como

$$W_z f(x) = e^{-i\sqrt{2}(rP - sQ)} f(x)\,. \tag{101}$$

Observación 4.3.2. El operador de Weyl satisface

$$W_z f(x) = e^{-is(r - \sqrt{2}x)} f(x - \sqrt{2}r)\,. \tag{102}$$

Ciertamente, de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff $e^{A+B} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A,B]}$, con $A = -irP$, $B = isQ$ y $[A, B] = rs[P, Q] = -irsI$, obtenemos (102).

La representación (102) es llamada **representación de Schrödinger**, la cual es irreducible (es decir, los únicos subespacios invariantes son $\{0\}$ y todo $L_2(\mathbb{R})$) y unitario, con adjunto $W_z^* = W_{-z}$. Además,

$$W_z W_{z'} = e^{-i(rs' - r's)} W_{z+z'} = e^{-i\sigma(z,z')} W_{z+z'}\,.$$

Esta forma (simpléctica) de CCR adquiere significado en cualquier espacio complejo de Hilbert si el producto $\overline{z}z'$ se entiende como el producto interno $\langle z, z'\rangle$. Además, teniendo en cuenta (101),

$$\begin{aligned} W_z &= e^{-i\left(ir(a^\dagger - a) - s(a^\dagger + a)\right)} \\ &= e^{za^\dagger - \overline{z}a} = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^\dagger} e^{-\overline{z}a}\,. \end{aligned} \tag{103}$$

Ahora, sea $\mathbb{1}(x) = (\pi)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ sea el estado fundamental en $L_2(\mathbb{R})$ y denotamos los **vectores coherentes**

$$\psi_z := W_z \mathbb{1} \in L_2(\mathbb{R})\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Es claro que, $a\mathbb{1} = 0$ y por (103),

$$\begin{aligned} \psi_z(x) &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za^\dagger} \mathbb{1}(x) = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \frac{(Q - iP)^k}{\sqrt{2^k}} \mathbb{1}(x) \\ &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{k \geq 0} \frac{\left(z/\sqrt{2}\right)^k}{k!} \mathsf{h}_k(x) \mathbb{1}(x) = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{\sqrt{2}xz - \frac{z^2}{2}} \mathbb{1}(x) = e^{-\frac{|z|^2}{2}} f_z(x)\,, \end{aligned} \tag{104}$$

donde h_k son los llamados **polinomios de Hermite** (ortogonales con respecto a e^{-x^2} y función generadora $e^{2zx - z^2}$)

$$\left\{1,\, 2x,\, 4x^2 - 2,\, 8x^3 - 12x, \ldots\right\}\,.$$

El siguiente conjunto es una base ortonormal para $L_2(\mathbb{R})$,

$$\left\{\varphi_k (2^k k!)^{-\frac{1}{2}} \mathsf{h}_k \mathbb{1}\right\}_{k \geq 0}\,, \tag{105}$$

el cual es llamado el conjunto de *funciones de Hermite* y satisfacen

$$a^\dagger \varphi_k = \sqrt{k+1}\varphi_{k+1}\,; \quad a\varphi_k = \sqrt{k}\varphi_{k-1}\,.$$

Además,

$$Q\varphi_k = \sqrt{\frac{k+1}{2}}\varphi_{k+1} + \sqrt{\frac{k}{2}}\varphi_{k-1}\,; \quad P\varphi_k = i\sqrt{\frac{k+1}{2}}\varphi_{k+1} - i\sqrt{\frac{k}{2}}\varphi_{k-1}\,. \tag{106}$$

De esta manera, con respecto a la base ortonormal (105), uno tiene las siguientes representaciones matriciales

$$\begin{aligned} a^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; \qquad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; \\ Q &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; \qquad P = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{107}$$

Debido a (104), la familia de vectores coherentes ψ_z coincide con los vectores exponenciales normalizados f_z, pero no son ortogonales. De hecho, se calcula que

$$\langle \psi_z, \psi_{z'} \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|z|^2 + |z'|^2 - 2\overline{z}z')}\,.$$

Además,

$$\psi_z = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{\sqrt{k!}}\varphi_k \quad \text{y} \quad W_{z'}\psi_z = e^{-i\sigma(z',z)}\psi_{z'+z}\,. \tag{108}$$

Más aún,

$$a\psi_z = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{\sqrt{k!}} a\varphi_k = e^{-\frac{|z|^2}{2}} z \sum_{k\geq 1} \frac{z^{k-1}}{\sqrt{(k-1)!}}\varphi_{k-1} = z\psi_z\,,$$

esto implica que los vectores coherentes son un continuo de autovectores del operador de aniquilación.

LEMA 4.3.3. *La relación de completitud*

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |W_z f\rangle\langle W_z f|\, dz = I\,, \tag{109}$$

es cierta, para algún vector unitario $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Demostración. Se sigue de [12, Prop. 3.5.1] (reescalado por $(2)^{-1/2}$) que si $\{e_k\}_{k\geq 0}$ es una b.o.n. para $L_2(\mathbb{R})$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\langle e_j, W_z\, e_k\rangle\right\}_{j,k\geq 0} \tag{110}$$

es una base ortonormal para $L_2(\mathbb{R}^2)$ y las relaciones de ortogonalidad se mantienen

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \overline{\langle e_j, W_z\, e_k\rangle}\langle e_l, W_z\, e_m\rangle dz = \delta_{jl}\delta_{km}\,.$$

De esta manera por linealidad,

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \langle h, W_z g\rangle\, \langle W_z f, k\rangle\, dz = \langle f, g\rangle\, \langle h, k\rangle\ , \quad f, g, h, k \in L_2(\mathbb{R})\,. \tag{111}$$

Por lo tanto, como h, k son arbitrarios y poniendo $f = g$ con la norma unitaria, concluimos que (109) es cierta, con la integral definida en sentido débil. □

En virtud de la relación (109), la fórmula $\varphi = \int \langle \psi_z, \varphi\rangle\, \psi_z dz/\pi$ sugiere considerar el mapeo $\varphi \mapsto \langle \psi_z, \varphi\rangle / \sqrt{\pi}$ en $L_2(\mathbb{R})$ con funciones $\phi(z) = \langle \psi_z, \varphi\rangle / \sqrt{\pi}$. Este mapeo a veces es llamado **Isomorfismo de Klauder-Bargman**.

TEOREMA 4.3.4. *El mapeo* $\varphi \mapsto \phi(z) = \langle \psi_z, \varphi \rangle / \sqrt{\pi}$ *de* $L_2(\mathbb{R})$ *en* $L_2(\mathbb{C})$ *es un isomorfismo isométrico y la familia de los* estados coherentes canónicos

$$\left\{\phi_k(z) := \langle \psi_z, \varphi_k \rangle / \sqrt{\pi}\right\}_{k\geq 0}\,, \tag{112}$$

es una base ortonormal de $\mathcal{E}_2(\mathbb{C}) \subset L_2(\mathbb{C})$.

Demostración. Para algún par de elementos $\varphi, \varphi' \in L_2(\mathbb{R})$ se obtiene de (111) que

$$\langle \phi, \phi' \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{\langle \psi_z, \varphi \rangle} \langle \psi_z, \varphi' \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle \varphi, \psi_z \rangle \langle \psi_z, \varphi' \rangle \, dz = \langle \varphi, \varphi' \rangle \tag{113}$$

Como $\{\varphi_k\}_{k\geq 0}$ es b.o.n. para $L_2(\mathbb{R})$, la familia de estados coherentes (112) satisface

$$\int_{\mathbb{C}} \overline{\phi_j(z)} \phi_k(z) dz = \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk}\,,$$

es decir, (112) es una base ortonormal para $L_2(\mathbb{C})$. □

En virtud de (108), los estados coherentes canónicos satisfacen

$$\phi_k(z) = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{\overline{z}^k}{\sqrt{\pi k!}}\,, \quad k \geq 0\,.$$

Observación 4.3.5. Un operador acotado X en $L_2(\mathbb{R})$ corresponde con un operador integral acotado $\hat{X}$ en $\mathcal{E}_2(\mathbb{C})$, con Kernel $\langle \psi_z, X\psi_v \rangle / \pi$ y norma $\left\| \hat{X} \right\| = \|X\|$. Ciertamente, si $\hat{X}$ actúa como $\phi(z) = \langle \psi_z, \varphi \rangle / \sqrt{\pi} \mapsto \langle \psi_z, X\varphi \rangle / \sqrt{\pi}$, entonces de (109),

$$\left\| \hat{X}\phi \right\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle X\varphi, \psi_z \rangle \langle \psi_z, X\varphi \rangle \, dz = \langle X\varphi, X\varphi \rangle = \|X\varphi\|^2\,,$$

lo que implica $\|\hat{X}\| = \|X\|$, debido a que $\|\phi\| = \|\varphi\|$ (ver (113)). Además,

$$\hat{X}\phi(z) = \frac{\langle \psi_z, X\varphi \rangle}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle \psi_z, X\psi_v \rangle \frac{\langle \psi_v, \varphi \rangle}{\sqrt{\pi}} dv = \int_{\mathbb{C}} \phi(v) \frac{\langle \psi_z, X\psi_v \rangle}{\pi} dv\,,$$

En particular de (108), el operador de Weyl en $\mathcal{E}_2(\mathbb{C})$ tiene kernel

$$\frac{\langle \psi_u, W_z\psi_v \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|z+v-u|^2}{2} + i\sigma(u,z+v) - i\sigma(z,v)}\,. \tag{114}$$

4.3.2. Transformada de Fourier no conmutativa. Definimos la **transformada de Fourier (o no conmutativa) cuántica** de un operador de clase de traza ρ en $L_2\left(L_2(\mathbb{R})\right)$, por medio de

$$\mathcal{F}[\rho](z) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{tr}\left(\rho W_z\right), \quad z \in \mathbb{C}\,, \tag{115}$$

que es una función compleja evaluada en $\mathbb{C}$, con las siguientes propiedades:

(a) $|\mathcal{F}[\rho](z)| \leq \|\rho\|_1 / \sqrt{\pi}$.

(b) $\mathcal{F}[\rho^*](z) = \overline{\mathcal{F}[\rho](-z)}$.

(c) $\mathcal{F}[\rho W_u](z) = e^{-i\sigma(u,z)} \mathcal{F}[\rho](z+u)$.

(d) $\mathcal{F}[W_u^* \rho W_u](z) = e^{-2i\sigma(u,z)} \mathcal{F}[\rho](z)$.

TEOREMA 4.3.6 (Identidad de Parseval no conmutativa). *El mapeo* $\rho \mapsto \mathcal{F}[\rho]$ *se extiende únicamente a un mapeo unitario de* $L_2\left(L_2(\mathbb{R})\right)$ *sobre* $L_2(\mathbb{C})$, *tal que*

$$\int \overline{\mathcal{F}[\rho](z)} \mathcal{F}[\eta](z) dz = \operatorname{tr}\left(\rho^* \eta\right)\,, \quad \rho, \eta \in L_2\left(L_2(\mathbb{R})\right)\,. \tag{116}$$

Demostración. Primero consideramos un operador de clase traza autoadjunto ρ en $L_2(\mathbb{R})$, con descomposición espectral $\rho = \sum_{k\geq 0} \rho_k \, |e_k\rangle\langle e_k|$. Entonces, por la propiedad (a) de la transformada de Fourier y como $\{\langle e_k, W_z e_k \rangle / \sqrt{\pi}\}_{k\geq 0}$ es ortonormal en $L_2(\mathbb{C})$ (ver (110)), tenemos que la serie

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\rho_k}{\sqrt{\pi}} \langle e_k, W_z e_k \rangle = \mathcal{F}[\rho](z)$$

converge en $L_2(\mathbb{C})$ y $\|\mathcal{F}[\rho]\|^2 = \sum_{k\geq 0} |\rho_k|^2 = \|\rho\|_2^2$. Debido a la descomposición de partes reales e imaginarias de cualquier operador de clase traza y dado que el conjunto lineal de esta clase es denso en $L_2(L_2(\mathbb{R}))$, se sigue que $\mathcal{F}$ es un operador isométrico de $L_2(L_2(\mathbb{R}))$ a $L_2(\mathbb{C})$. Para concluir,

$$\left\{ \mathcal{F}[|\varphi_j\rangle\langle\varphi_k|] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle\varphi_k, W_z\varphi_j\rangle \right\}_{j,k\geq 0}$$

es una b.o.n. para $L_2(\mathbb{C})$, donde φ_k son las funciones de Hermite (105). Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es unitario. Observemos que (116) es directa de la identidad de polarización. □

Observación 4.3.7. Un estado ρ en $L_2(\mathbb{R})$ es puro si y solo si $\|\mathcal{F}[\rho]\| = 1$. En efecto, Los autovalores $\{\rho_j\}$ de ρ son positivos y satisfacen $\sum_j \rho_j = 1$ y por (116), se tiene $\|\mathcal{F}[\rho]\|^2 = \sum_j \rho_j^2 \leq 1$, y la igualdad se cumple si y solo si ρ tiene un autovalor propio igual a uno, i.e., ρ es un estado puro.

Para un operador de la clase de traza ρ, se sigue de (109) que

$$\operatorname{tr}(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \operatorname{tr}(\rho|\psi_z\rangle\langle\psi_z|)\, dz\,. \tag{117}$$

Además, un operador positivo ρ es una clase de traza si y solo si la integral en el lado derecho de (117) es finita.

Teorema 4.3.8. *La trasformada de Fourier satisface la siguiente representación:*

$$\mathcal{F}[\rho](u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{C}} e^{-i\sigma(u,z)} \frac{\langle\psi_z, \rho\psi_{u+z}\rangle}{\pi} dz\,, \tag{118}$$

donde $\langle\psi_z, \rho\psi_v\rangle/\pi$*, representa el kernel de* ρ*.*

Demostración. Usando (117), uno calcula que

$$\mathcal{F}[\rho](u) = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_{\mathbb{C}} \operatorname{tr}(\rho W_u\, |\psi_z\rangle\langle\psi_z|)\, dz = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_{\mathbb{C}} \langle\psi_z, \rho W_u\psi_z\rangle\, dz\,.$$

Por lo tanto, de (108) se obtiene (118). □

4.3.3. Estados cuánticos Gaussianos. Comenzamos directamente con la definición de un estado cuántico Gaussiano [16].

Definición 4.3.9. Un estado $\rho \in \mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}))$ es **estado Gaussiano** si existe $w \in \mathbb{C}$ y una matriz real simétrica $S \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ tal que

$$\mathcal{F}[\rho](z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i\operatorname{Re}\langle w,z\rangle - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\langle z,Sz\rangle}\,, \quad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

En este caso escribimos $\rho = \rho(w, S)$.

La definición anterior determina un funcional lineal real $z \mapsto \operatorname{Re}\langle w, z\rangle$ y una forma cuadrática real $z \mapsto \operatorname{Re}\langle z, Sz\rangle$ en el espacio de Hilbert real $\mathbb{C}$. Por lo tato el vector de valor medio w y el operador de covarianza S están determinados de forma única. Para $w = \sqrt{2}(l - im)$, con $l, m \in \mathbb{R}$, llamamos l el vector de momento medio y a m el vector de posición media,respectivamente.

Ejemplo 4.3.I (Estados coherentes)**.** Dado $u \in \mathbb{C}$, se tiene que el estado coherente $\rho_u = |\psi_u\rangle\langle\psi_u|$ es un estado Gaussiano. De hecho, siguiendo (114),

$$\mathcal{F}[|\psi_u\rangle\langle\psi_u|](z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle\psi_u, W_z\psi_u\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-2i\operatorname{Im}\overline{z}u - \frac{|z|^2}{2}}\,.$$

Por lo tanto $\rho_u = \rho(w, S) = \rho(-2iu, I)$.

Ejemplo 4.3.II (Estado de Gibbs a temperatura inversa β)**.** El estado dado por $\rho_\beta = (1 - e^{-\beta})e^{-\beta a^\dagger a}$, con $\beta > 0$, está bien definido, debido a que

$$\operatorname{tr}\left(e^{-\beta a^\dagger a}\right) = \sum_{n\geq 0} e^{-n\beta} = \frac{1}{1-e^{-\beta}}\,.$$

Por lo tanto, uno tiene de la representación integral (118) y (104) que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\pi}\mathcal{F}[\rho_\beta](u)}{1-e^{-\beta}} &= \frac{1}{\pi}\int e^{-i\operatorname{Im}(\overline{u}z)}\left\langle \psi_z, e^{-\beta a^\dagger a}\psi_{u+z}\right\rangle dz\\
&= \frac{1}{\pi}\int e^{-\frac{|z|^2}{2}-i\operatorname{Im}(\overline{u}z)-\frac{|u+z|^2}{2}}\left\langle f_z, e^{-\beta a^\dagger a} f_{u+z}\right\rangle dz\\
&= \frac{1}{\pi}\int e^{-|z|^2-\overline{u}z-\frac{|u|^2}{2}}\left\langle f_z, f_{e^{-\beta}(u+z)}\right\rangle dz\\
&= \frac{1}{\pi}\int e^{-\frac{|u|^2}{2}-(1-e^{-\beta})|z|^2+(\overline{z}ue^{-\beta}-z\overline{u})}dz\\
&= e^{-\frac{|u|^2}{2}\left(1+\frac{2e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\right)}\frac{1}{\pi}\iint e^{-(1-e^{-\beta})\left[\left(x-\frac{ue^{-\beta}-\overline{u}}{2(1-e^{-\beta})}\right)^2+\left(y+i\frac{ue^{-\beta}+\overline{u}}{2(1-e^{-\beta})}\right)^2\right]}dxdy\\
&= \frac{1}{1-e^{-\beta}}e^{-\frac{1}{2}\coth(\beta/2)|u|^2}\,,
\end{aligned}$$

de donde se sigue $\mathcal{F}[\rho_\beta](u) = e^{-\frac{1}{2}\coth(\beta/2)|u|^2}/\sqrt{\pi}$. Hemos usado que $e^{-\beta a^\dagger a} f_z = f_{e^{-\beta}z}$. Por lo tanto, con $S_\beta = \coth(\beta/2)I$ y $w_\beta = 0$, se tiene que ρ_β es Gaussiano.

Problemas de la sección.

P.4.1 Muestre que en efecto el operador de Weyl (101) es un operador unitario y que su adjunto satisface $W_z^* = W_{-z}$. *Nota: es suficiente mostrarlo para la familia de vectores coherentes* $\{\psi_z\}$, *debido a que forma un conjunto total en* $L_2(\mathbb{R})$.

P.4.2 Con base en las representaciones matriciales (107), calcula la representación matricial del Hamiltoniano (100) y del operador de número $N = a^\dagger a$.

P.4.3 Verifique las siguientes propiedades de la trasformada de Fourier cuántica $\mathcal{F}[\rho]$:
a) $|\mathcal{F}[\rho](z)| \leq \|\rho\|_1/\sqrt{\pi}$.
b) $\mathcal{F}[\rho^*](z) = \overline{\mathcal{F}[\rho](-z)}$.
c) $\mathcal{F}[\rho W_u](z) = e^{-i\sigma(u,z)}\mathcal{F}[\rho](z+u)$.
d) $\mathcal{F}[W_u^*\rho W_u](z) = e^{-2i\sigma(u,z)}\mathcal{F}[\rho](z)$.

P.4.4 Para $u \in L_2(\mathbb{R})$, demuestra que

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |\langle u, \psi_z\rangle|^2\, dz = \|u\|^2\,.$$

Sugerencia: usa (117) *con* $\rho = |u\rangle\langle u|$.

P.4.5 Muestra que para $z \in \mathbb{C}$ y $\beta > 0$,

$$e^{-\beta N}\psi_z = e^{-|z|^2(1-e^{-\beta})/2}\psi_{e^{-\beta}z}\,.$$

Sugerencia: use el hecho que $e^{-\beta N} f_z = f_{e^{-\beta}z}$ *(ver conclusión del ejemplo 4.3.II) y que* ψ_z *es el vector normalizado de* f_z.

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a los árbitros anónimos cuya revisión y comentarios mejoraron la presentación de este trabajo. También agradecemos a los lectores, y en particular a los estudiantes, que utilizaron versiones preliminares de estas notas y cuyos valiosos comentarios nos ayudaron a mejorar el texto. De igual forma, a la Universidad Autónoma Metropolitana (PEAPDI 2023 “Semigrupos cuánticos de Markov: Operadores de transición de niveles de energía y sus generalizaciones”) y al CONAHCYT (proyecto CF2019-684340).

Referencias

[1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Dover Publications Inc., New York, 1993, Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one. MR 1255973 (94i:47001)

[2] Werner O. Amrein, *Hilbert space methods in quantum mechanics*, Fundamental Sciences, EPFL Press, Lausanne; distributed by CRC Press, Boca Raton, FL, 2009. MR 2571750

[3] Ju. M. Berezanskiĭ, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Translated from the Russian by R. Bolstein, J. M. Danskin, J. Rovnyak and L. Shulman. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968. MR 0222718 (36 #5768)

[4] M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller. MR 1192782 (93g:47001)

[5] Jorge R. Bolaños-Servín, Roberto Quezada and Josué Rios-Cangas, Weyl moments and quantum Gaussian states, Rep. Math. Phys. 90 (2022), no. 3, 357–376. MR 4516426

[6] Charles A. McCarthy, C_p, Israel J. Math. 5 (1967), 249–271. MR 0225140

[7] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2759829

[8] Shiu Ming Cheung and Harry Hochstadt, *An inverse spectral problem*, Linear Algebra and Appl. **12** (1975), no. 3, 215–222. MR 0385625 (52 #6485)

[9] Ronald Cross, *Multivalued linear operators*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 213, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998. MR 1631548

[10] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*, study ed., Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1987. MR 883643

[11] P. Exner, *A duality between Schrödinger operators on graphs and certain Jacobi matrices*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **66** (1997), no. 4, 359–371. MR 1459512

[12] Alexander Holevo, *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, second ed., Quaderni/Monographs, vol. 1, Edizioni della Normale, Pisa, 2011, With a foreword from the second Russian edition by K. A. Valiev. MR 2797301

[13] Tosio Kato, *Perturbation theory for linear operators*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1976, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132. MR 0407617 (53 #11389)

[14] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989. MR 992618

[15] Joseph Muscat, *Functional analysis*, Springer, Cham, 2014, An introduction to metric spaces, Hilbert spaces, and Banach algebras. MR 3308576

[16] K. R. Parthasarathy, *What is a Gaussian state?*, Commun. Stoch. Anal. **4** (2010), no. 2, 143–160. MR 2662722

[17] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 924157 (88k:00002)

[18] ———, *Functional analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. MR 1157815 (92k:46001)

[19] Konrad Schmüdgen, *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 265, Springer, Dordrecht, 2012. MR 2953553

[20] Joachim Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 68, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980, Translated from the German by Joseph Szücs. MR 566954

[21] Pantaleón-Martínez L. y Quezada R., *Una introducción a la teoría cuántica de la información*, en Texto para el primer Simposio del Departamento de Matemáticas (2008).

Nombre del autor: Jorge Ricardo Bolaños Servín
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
ORCID: `https://orcid.org/0000-0003-2856-1902`
e-mail: `jrbs@xanum.uam.mx`

Nombre del autor: Roberto Quezada Batalla
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
ORCID: `https://orcid.org/0000-0001-8039-2574`
e-mail: `roqb@xanum.uam.mx`

Nombre del autor: Josué I. Rios Cangas
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
ORCID: `https://orcid.org/0000-0001-7758-7362`
e-mail: `jottsmok@xanum.uam.mx`