

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO FRACCIONARIO. UNA APLICACIÓN A LA LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

LOZADA-CORONEL J., GUTIÉRREZ-CORONA J. N., QUEZADA-TÉLLEZ L. A.

RESUMEN. En este artículo, exploramos el fascinante mundo del cálculo fraccionario. Abordamos las definiciones esenciales de derivadas e integrales fraccionarias, desde un enfoque intuitivo hasta las formulaciones modernas. Nos centramos en la aplicación clásica de la ley de enfriamiento de Newton, empleando el cálculo fraccionario para describir con precisión su dinámica. Además, examinamos cómo la derivada fraccionaria modela el enfriamiento en función del tiempo y ofrece una comprensión más profunda de la transferencia de calor, incluso en casos no exponenciales. Exploramos ecuaciones diferenciales fraccionarias y su resolución mediante la transformada de Laplace, ilustrando su versatilidad en este tipo de problemas.

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario es una rama fascinante y poderosa del análisis matemático que extiende los conceptos de diferenciación e integración más allá de los números enteros [32]. Si ya estás familiarizado con el cálculo integral y diferencial, estás a punto de descubrir una nueva dimensión de las matemáticas que puede sorprenderte.

Aunque el cálculo fraccionario ha sido objeto de estudio desde hace más de tres siglos, solo recientemente ha empezado a ganar mayor atención y reconocimiento en la comunidad matemática [16]. Una de las principales diferencias entre el cálculo fraccionario y el cálculo tradicional radica en que las derivadas y las integrales fraccionarias permiten describir el cambio y la acumulación a lo largo de intervalos no enteros [32]. Esto significa que podemos analizar sistemas que exhiben comportamientos intermedios, donde las tasas de cambio o acumulación varían de forma continua.

El cálculo fraccionario ha llevado a avances significativos en la resolución de problemas reales, también ha encontrado aplicaciones en áreas como la teoría del control, la mecánica de medios fractales, el procesamiento de señales, el modelado de fenómenos anómalos y la teoría de la probabilidad, por mencionar solo algunas [35].

A medida que nos adentremos en los aspectos fundamentales del cálculo fraccionario, exploraremos las derivadas y las integrales fraccionarias, sus propiedades básicas y cómo se relacionan con el cálculo tradicional [16]. Además, examinaremos algunas aplicaciones concretas y fascinantes de esta rama de las matemáticas.

2. HISTORIA

Los orígenes del cálculo fraccionario se remontan a los primeros intentos de matemáticos por generalizar los conceptos de diferenciación e integración a valores no enteros. Uno de los primeros indicios del cálculo fraccionario se encuentra en una carta histórica escrita el 30 de septiembre de 1695, en la cual el marqués de L'Hopital plantea a Leibniz una interesante pregunta: ¿qué sucedería si el exponente de la derivada fuera $1/2$? La respuesta intuitiva de Leibniz en esa carta es reveladora, Leibniz responde: “esto conduciría aparentemente a una paradoja de la cual algún día serán extraídas consecuencias muy útiles” [21, 20]. En este mismo contexto, Leibniz proporciona una

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11A51, 11D45, 11R04, 11R11, 11R29.

Palabras clave. Cálculo fraccionario, derivadas fraccionarias, integrales fraccionarias, transformada de Laplace, ecuaciones diferenciales fraccionarias, ley de enfriamiento de Newton.

aproximación a lo que podría ser una derivada fraccionaria, utilizando como ejemplo la derivada $1/2$ de x .

Más tarde, en el siglo XVIII, Euler estudió series infinitas y dio una definición para el factorial de un número no entero. Estas ideas fueron fundamentales para el desarrollo posterior del cálculo fraccionario [10]. En ese mismo siglo L'Hopital realizó contribuciones significativas al cálculo infinitesimal, incluyendo el estudio de las derivadas de órdenes no enteros [22]. Sus trabajos sentarían las bases teóricas para el cálculo fraccionario y allanaron el camino para futuras investigaciones. Es en ese mismo siglo cuando uno de los primeros trabajos relacionados con el cálculo fraccionario ve a luz, el texto de los matemáticos suizos Johann Bernoulli y su sobrino Daniel Bernoulli en el siglo XVIII. Johann Bernoulli examinó la función exponencial generalizada y su derivada fraccionaria [22, 5], mientras que Daniel Bernoulli investigó el problema de la cuerda vibrante con derivadas fraccionarias [5].

En el siglo XIX, el cálculo fraccionario se estableció como un campo de estudio independiente. A inicios de siglo, en 1812, Laplace mencionó la posibilidad de derivadas fraccionarias en su obra "Théorie Analytique des Probabilités" [19]. En 1819, Lacroix estudió integrales definidas y mencionó las integrales de orden fraccionario en su "Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" [18]. En 1822, Fourier mencionó la posibilidad de extender la derivada a órdenes fraccionarios en su obra "Théorie Analytique de la Chaleur" [11].

En 1823, el matemático noruego Niels Henrik Abel hizo una importante contribución al cálculo fraccionario cuando resolvió un problema de la tautócrona utilizando integrales definidas de orden no entero [1]. En el mismo año, publicó otro artículo donde presentó algunas propiedades de las integrales definidas [2].

Fue a finales del siglo XIX cuando otros matemáticos como Fourier, Lacroix y Laplace también hicieron contribuciones al estudio del cálculo fraccionario. El matemático polaco Grünwald presentó una definición de derivada fraccionaria en 1867 [13]. En 1868, Létnikov introdujo la noción de diferenciación de orden arbitrario [25].

Sin embargo, fue hasta el siglo XX cuando el cálculo fraccionario comenzó a recibir mayor atención. El matemático ruso Anatoly N. Kolmogorov introdujo el concepto de derivada fraccionaria como una generalización de la derivada convencional [17]. Sus investigaciones sentaron las bases teóricas para el desarrollo del cálculo fraccionario moderno.

Durante el siglo XXI, el cálculo fraccionario ha ganado popularidad y se ha convertido en un campo de investigación activo. Se han publicado numerosos libros y artículos científicos sobre el tema. Algunos libros importantes en el campo del cálculo fraccionario incluyen "Fractional Differential Equations" de Podlubny [35], "The Analysis of Fractional Differential Equations" de Diethelm [9], "Fractional Calculus for Scientists and Engineers" de Duarte [8], y "Fractional Order Systems and Controls" de Monje et al. [30].

El cálculo fraccionario ha encontrado aplicaciones en diversas áreas, algunas de estas aplicaciones incluyen el modelado de fenómenos de transporte en medios porosos [27], el análisis de sistemas dinámicos no lineales [42], el modelado de materiales viscoelásticos [6], y la descripción de procesos de difusión anómala [39].

Además, el cálculo fraccionario ha sido utilizado para estudiar el movimiento de partículas en medios de resistencia [38], el análisis de sistemas de control de orden fraccionario [30], y la aplicación de la nanotecnología [4].

En las últimas décadas, se han realizado numerosos avances en el campo del cálculo fraccionario. Investigadores como Anatoli A. Kilbas, Hari M. Srivastava, Juan J. Trujillo, Igor Baleanu y otros de talla internacional han contribuido significativamente a la teoría y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales fraccionarias [16, 41, 44, 3].

Además, se han desarrollado métodos numéricos eficientes para resolver ecuaciones fraccionarias, lo que ha permitido una mejor comprensión y aplicación del cálculo fraccionario en problemas del mundo real. Investigadores como Victor Tarasov han

propuesto métodos numéricos novedosos basados en la teoría de operadores fraccionarios para abordar problemas de mecánica clásica y cuántica [43].

La historia y el desarrollo del cálculo fraccionario demuestran su relevancia y aplicabilidad en el mundo científico. Desde los trabajos pioneros de Bernoulli y L'Hopital hasta las contribuciones modernas de Kolmogorov, Kilbas, Srivastava.

Al estudiar el cálculo fraccionario, nos adentramos en un nuevo mundo de posibilidades matemáticas, donde las derivadas e integrales fraccionarias nos permiten analizar y comprender fenómenos que van más allá de los modelos tradicionales basados en números enteros. A medida que exploremos los conceptos fundamentales y las aplicaciones del cálculo fraccionario, nos daremos cuenta de su importancia y utilidad en la resolución de problemas y en la descripción de sistemas dinámicos.

En los siguientes apartados de este artículo, nos centraremos en aplicaciones clásicas del cálculo fraccionario, específicamente en la ley de enfriamiento de Newton. A través de ejemplos y análisis, mostraremos cómo el cálculo fraccionario nos brinda una perspectiva más completa y precisa de estos fenómenos físicos, revelando propiedades y comportamientos que no pueden ser capturados completamente con el cálculo tradicional.

Al finalizar este artículo, esperamos que los lectores hayan adquirido una comprensión básica del cálculo fraccionario y sus aplicaciones. Además, deseamos despertar su curiosidad y motivación para explorar más a fondo este fascinante campo de las matemáticas, que continúa siendo objeto de investigación y desarrollo en la actualidad.

¡Comencemos nuestro viaje en el mundo del cálculo fraccionario y sus aplicaciones!

3. PRIMER ACERCAMIENTO AL CÁLCULO FRACCIONARIO

En esta sección, exploraremos el emocionante mundo del cálculo fraccionario al analizar las fórmulas generalizadas de la derivada n -ésima de funciones comunes, como $\text{sen}(ax)$, $\text{cos}(ax)$, $(x - a)^k$ y e^{ax} . Nos enfocaremos especialmente en el caso en el que el valor de n se encuentra entre 0 y 1, y descubriremos cómo estas fórmulas se aplican en esta situación.

Comenzaremos estudiando la función exponencial e^{ax} . En el cálculo tradicional, la derivada n -ésima de e^{ax} se puede encontrar utilizando la regla de la cadena y la derivada de una función exponencial:

$$(1) \quad \frac{d^n e^{ax}}{dx^n} = a^n e^{ax}.$$

Esta fórmula nos brinda una manera sencilla también de calcular la derivada fraccionaria de e^{ax} cuando n es un número fraccionario entre 0 y 1. La ecuación (1) muestra esta relación.

A continuación, analicemos las funciones trigonométricas $\text{sen}(ax)$ y $\text{cos}(ax)$. En el cálculo tradicional, la derivada n -ésima de estas funciones se puede obtener aplicando la regla de la cadena y la derivada de las funciones seno y coseno con las fórmulas $\text{sen}(x + y)$ y $\text{cos}(x + y)$.

$$(2) \quad \frac{d^n \text{sen}(ax)}{dx^n} = a^n \text{sen}\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$(3) \quad \frac{d^n \text{cos}(ax)}{dx^n} = a^n \text{cos}\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Estas fórmulas también nos permiten calcular la derivada fraccionaria de $\text{sen}(ax)$ y $\text{cos}(ax)$ cuando n es un número fraccionario entre 0 y 1. La ecuación (2) representa la derivada fraccionaria de $\text{sen}(ax)$, mientras que la ecuación (3) muestra la derivada fraccionaria de $\text{cos}(ax)$.

Por último, consideremos la función polinómica $(x - a)^k$. En el cálculo tradicional, la derivada n -ésima de esta función se puede calcular utilizando la regla del producto y la regla de potencias:

$$(4) \quad \frac{d^n(x - a)^k}{dx^n} = \frac{k!}{(k - n)!} (x - a)^{k-n}.$$

Observamos que si n es un número fraccionario entre 0 y 1, la expresión en la ecuación (4) no tiene un significado directo utilizando la notación factorial. Para abordar esta generalización, se recurre a la función $\Gamma(x)$, conocida como función gamma, que está estrechamente relacionada con la notación factorial. La función gamma tiene la propiedad de que $\Gamma(n + 1) = n!$ para números enteros positivos n .

Es importante destacar que la función gamma se define para valores reales positivos y puede extenderse a valores complejos. De esta manera, al utilizar la función gamma, podemos generalizar la expresión en la ecuación (4) para valores fraccionarios de n entre 0 y 1.

Observación 1. La relación entre la función gamma y los números factoriales se puede demostrar mediante la siguiente fórmula:

$$(5) \quad \Gamma(n + 1) = n!.$$

Esta relación establece que la función gamma generaliza la notación factorial y permite extender el concepto de factorial a valores fraccionarios y complejos.

La función gamma se define como:

$$(6) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{para } x > 0.$$

Se puede demostrar que la función gamma satisface la siguiente propiedad de recursividad:

$$(7) \quad \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad \text{para } x > 0.$$

Ahora, utilizando el método de integración por partes, consideremos la integral:

$$(8) \quad J_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt.$$

Realizando la sustitución $u = t^n$ y $dv = e^{-t} dt$, obtenemos $du = nt^{n-1} dt$ y $v = -e^{-t}$. Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$(9) \quad J_n = [-t^n e^{-t}]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt.$$

Observamos que el primer término de la derecha es igual a cero debido a la exponencial decreciente. Por lo tanto, tenemos:

$$(10) \quad J_n = nJ_{n-1}.$$

Aplicando esta relación recursiva sucesivamente, llegamos a:

$$(11) \quad J_n = n! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, sustituyendo J_n por su expresión original, obtenemos:

$$(12) \quad \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Este resultado muestra la relación entre la función gamma y los factoriales, ya que podemos escribir:

$$(13) \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

En resumen, al considerar las fórmulas generalizadas de la derivada n -ésima de funciones comunes como $\sin(ax)$, $\cos(ax)$, $(x-a)^k$ y e^{ax} , podemos obtener resultados interesantes cuando n es un número fraccionario entre 0 y 1. Estas fórmulas básicas nos brindan un primer acercamiento al cálculo fraccionario, permitiéndonos generalizar las operaciones diferenciales y los resultados conocidos en el cálculo tradicional.

En las ecuaciones (1), (2), y (3), presentamos las derivadas fraccionarias de e^{ax} , $\sin(ax)$ y $\cos(ax)$ respectivamente, cuando n es un número fraccionario entre 0 y 1. Además, en la ecuación (4), presentamos la generalización de la regla de potencias para la derivada fraccionaria de $(x-a)^k$. Si consideramos un orden α de derivación siendo $0 \leq \alpha \leq 1$ se obtiene:

$$(14) \quad \frac{d^\alpha e^{ax}}{dx^\alpha} = a^\alpha e^{ax},$$

$$(15) \quad \frac{d^\alpha \sin(ax)}{dx^\alpha} = a^\alpha \sin\left(ax + \frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

$$(16) \quad \frac{d^\alpha \cos(ax)}{dx^\alpha} = a^\alpha \cos\left(ax + \frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

$$(17) \quad \frac{d^\alpha (x-a)^k}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}.$$

Estas fórmulas son solo el comienzo de las posibilidades que ofrece el cálculo fraccionario. A medida que profundizamos en este campo, nos adentraremos en conceptos más avanzados y aplicaciones fascinantes que permiten describir y comprender fenómenos complejos en diversas disciplinas.

4. INTEGRAL FRACCIONARIA DE RIEMANN-LIOUVILLE

La denominada integral fraccionaria de Liouville, también conocida como integral fraccionaria o integral de Riemann-Liouville, lleva el nombre de los matemáticos Bernard Riemann y Joseph Liouville, quienes hicieron importantes contribuciones al estudio de esta forma generalizada de la integral [32, 16, 35]. Esta generalización surgió como una extensión de la noción clásica de integración y permite calcular integrales de funciones en un contexto más amplio, incluyendo casos en los que el orden de la integral es un número fraccionario.

La integral fraccionaria es una generalización de la integral convencional de Riemann que permite extender el concepto de integración a valores no enteros. Una forma común de definir la integral fraccionaria es mediante la integral iterada de Cauchy, la cual se basa en la repetición de la integral convencional.

Consideremos una función $f(x)$ y el operador integral convencional \int_a^x . La integral iterada de Cauchy de orden n de la función $f(x)$ viene dada por la expresión:

$$(18) \quad I_a^n[f(t)] = \int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x f(t) dt^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t) (x-t)^{n-1} dt.$$

La ecuación (18) indica que la integral iterada de Cauchy de orden n de la función $f(t)$ se obtiene aplicando $n-1$ veces el operador integral convencional \int_a^x a la función $f(t)$.

Para el caso en que el orden de integración no sea un entero, Riemann y Liouville introdujeron el concepto de integral fraccionaria, esta integral se puede obtener de extender la integral fraccionaria de Cauchy a los reales.

Definición 1 (Integral fraccionaria de Riemann-Liouville). Si f es una función integrable en el sentido de Lebesgue en (a, b) y $\alpha \geq 0$ es el orden de integración, entonces la integral fraccionaria de Riemann-Liouville se define como:

$$(19) \quad {}_{RL}I_a^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha-1} dt,$$

donde $b > x > a$.

La ecuación (19) establece la relación entre la integral fraccionaria y la integral iterada de Cauchy. La presencia de la función gamma $\Gamma(\alpha)$ en la expresión revela la necesidad de generalizar la noción de factorial en la integral a valores no enteros.

Es importante mencionar que la definición y propiedades de la integral fraccionaria han sido estudiadas por diversos investigadores. Algunas referencias relevantes incluyen los trabajos de Podlubny [35], Miller y Ross [29], y Diethelm [9].

Observación 2. La deducción de la fórmula de la integral iterada de Cauchy se puede realizar utilizando el teorema de Fubini, la fórmula de integración de la potencia e integrando de forma inductiva. La idea es aplicar la fórmula de la potencia e intercambiar el orden de integración para reducir el número de integrales de manera consecutiva.

Comenzaremos con el caso base para $n = 1$:

$$(20) \quad I_a^1[f(x)] = \int_a^x f(t) dt = \frac{1}{0!} \int_a^x f(t) (x-t)^0 dt.$$

Ahora, supongamos que la fórmula es válida para un valor de n :

$$(21) \quad I_a^n[f(x)] = \int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x f(t) dt^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t) (x-t)^{n-1} dt.$$

Queremos demostrar que también es válida para $n+1$, es decir:

$$(22) \quad I_a^{n+1}[f(x)] = \int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x f(t) dt^n = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x f(t) (x-t)^n dt.$$

Aplicando la fórmula de integración por partes sobre la hipótesis de inducción, tenemos:

$$(23) \quad I_a^{n+1}[f(x)] = \int_a^x I_a^n[f(x)] dx = \int_a^x \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_a^t f(u) (t-u)^{n-1} du \right) dt.$$

Intercambiando el orden de integración, obtenemos:

$$(24) \quad I_a^{n+1}[f(x)] = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \int_u^x f(u) (t-u)^{n-1} dt du.$$

Simplificando la notación, tenemos:

$$(25) \quad I_a^{n+1}[f(x)] = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(u) \left(\int_u^x (t-u)^{n-1} dt \right) du.$$

La integral interna se puede resolver utilizando la fórmula de la integral de potencia:

$$(26) \quad \int_u^x (t-u)^{n-1} dt = \frac{1}{n} (x-u)^n.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior, obtenemos:

$$(27) \quad I_a^{n+1}[f(x)] = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(u) \cdot \frac{1}{n} (x-u)^n du = \frac{1}{n!} \int_a^x f(u) (x-u)^n du.$$

Lo cual coincide con la fórmula de la integral iterada de Cauchy para I_a^{n+1} . Por lo tanto, hemos demostrado la fórmula por inducción.

Observación 3. En el contexto de la integral fraccionaria, existe una relación importante entre la derivada y la integral, establecida por el primer teorema fundamental del cálculo. Esta relación nos permite denotar al operador de integral fraccionaria como ${}_R L I_a^\alpha$ y también como ${}_R L D_a^{-\alpha}$.

Esta relación entre la derivada y la integral también puede extenderse al caso de las integrales fraccionarias. Por lo tanto, cuando nos referimos al operador de integral fraccionaria, utilizamos la notación ${}_R L I_a^\alpha$ para indicar su definición y uso. Sin embargo, es común encontrarse también con la notación alternativa ${}_R L D_a^{-\alpha}$ para el operador de integral fraccionaria. Esta notación hace referencia a la relación entre la integral fraccionaria y la derivada, indicando que ${}_R L I_a^\alpha$ es el inverso (o la potencia negativa) del operador de derivada ${}_R L D_a^\alpha$.

Ambas notaciones, ${}_R L I_a^\alpha$ y ${}_R L D_a^{-\alpha}$, son ampliamente utilizadas en la literatura y en el campo de las matemáticas aplicadas para representar el operador de integral fraccionaria. Ambas formas son equivalentes y se utilizan de acuerdo a las preferencias o convenciones de cada autor o comunidad científica.

Es importante tener en cuenta esta relación entre la derivada y la integral, así como las diferentes notaciones utilizadas, ya que nos permiten interpretar y utilizar de manera adecuada el operador de integral fraccionaria en diferentes contextos y aplicaciones matemáticas.

Ejemplo 1. Calcular la integral α de Riemann-Liouville de la función $f(x) = c$, con $0 \leq \alpha \leq 1$, desde a positivo. Para calcularla hacemos uso de la definición de integral fraccionaria de RL:

$$\begin{aligned} {}_R L D_a^{-\alpha} c &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x c(x-t)^{\alpha-1} dt \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{c(x-t)^\alpha}{\alpha} \right) \Big|_a^x \\ &= \frac{c(x-a)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{c(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Calcular la media integral fraccionaria de RL de la función $f(x) = x$, con $a = 0$. Para calcular la integral fraccionaria de x con exponente $1/2$ y límite inferior $a = 0$, procedemos de la siguiente manera:

$${}_R L D_0^{-1/2} x = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x t(x-t)^{\frac{1}{2}-1} dt.$$

Primero, calculamos el valor de $\Gamma(\frac{1}{2})$. En este caso, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Sustituyendo este valor en la integral y reordenando se obtiene:

$${}_R L D_0^{-1/2} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{t}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Hacemos el cambio de variable $u = x - t$, con lo que $du = -dt$, luego la integral se convierte en:

$${}_R L D_0^{-1/2} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u=x}^{u=0} \frac{x-u}{\sqrt{u}} dt.$$

Los pasos para resolver la integral se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}
{}_R L D_0^{-1/2} x &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^{u=x} \frac{x-u}{\sqrt{u}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^{u=x} \frac{x}{\sqrt{u}} - \sqrt{u} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^{u=x} x u^{-1/2} - u^{1/2} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(x \frac{u^{1/2}}{1/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_0^x \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2x^{3/2} - \frac{2x^{3/2}}{3} \right) \\
&= \frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{4x\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3. Calcular la media integral fraccionaria de RL de la función $f(x) = e^{bx}$, con $b \neq 0$, desde $a > 0$. Primero, calculamos el valor de $\Gamma(\frac{1}{2})$. En este caso, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Sustituyendo este valor en la integral y reordenando se obtiene:

$${}_R L D_a^{-1/2} e^{bx} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{e^{bt}}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Luego, se hace el cambio de variable $u = \sqrt{x-t}$ con lo que $du = -\frac{dt}{2\sqrt{x-t}}$. Reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned}
{}_R L D_a^{-1/2} e^{bx} &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{x-a}}^0 2e^{b(x-u^2)} du \\
&= -\frac{2e^{bx}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{x-a}}^0 e^{-bu^2} du \\
&= -e^{bx} \int_{\sqrt{x-a}}^0 \frac{2e^{-bu^2}}{\sqrt{\pi}} du.
\end{aligned}$$

En la última integral, se puede hacer el cambio $w = \sqrt{b}u$ de modo que $du = dw/\sqrt{b}$, que se reescribe:

$$\begin{aligned}
{}_R L D_a^{-1/2} e^{bx} &= -\frac{e^{bx}}{\sqrt{b}} \int_{\sqrt{b}\sqrt{x-a}}^0 \frac{2e^{-w^2}}{\sqrt{\pi}} dw \\
&= -\frac{e^{bx}}{\sqrt{b}} \left(\operatorname{erf}(0) - \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}) \right) \\
&= \frac{e^{bx}}{\sqrt{b}} \left(\operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}) \right) \\
&= \frac{e^{bx} \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a})}{\sqrt{b}}.
\end{aligned}$$

Donde $\operatorname{erf}(x)$ es la función error que se define como:

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Ejemplo 4. Calcula la media integral de $f(x) = \sqrt{x}$ con $a = 0$. Primero, calculamos el valor de $\Gamma(\frac{1}{2})$. En este caso, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Sustituyendo este valor en la integral y reordenando se obtiene:

$${}_{RL}D_0^{-1/2}\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Se hace el cambio de variable $u = \sqrt{x-t}/\sqrt{t}$, con lo que $u^2 = x/t - 1$ y $t = x/(u^2 + 1)$, luego el diferencial du es:

$$\begin{aligned} d(u^2) &= d\left(\frac{x}{t} - 1\right) \\ 2udu &= -\frac{x dt}{t^2} \\ dt &= -\frac{2t^2 u du}{x}. \end{aligned}$$

Reemplazando en la media integral se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_0^{-1/2}\sqrt{x} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{t=x} \frac{1}{u} \left(-\frac{2t^2 u du}{x}\right) \\ &= -2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u=\infty}^{u=0} \frac{1}{u} \left(\frac{x^2}{(u^2 + 1)^2}\right) \left(\frac{udu}{x}\right) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{(u^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{u}{2(u^2 + 1)}\right) \Big|_0^\infty + \left(\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) (\arctan(x)) \Big|_0^\infty \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}x}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5. Calcule la media integral de RL de $\sin(bx)$ y $\cos(bx)$ con $b \neq 0$ para $a \rightarrow -\infty$. Para eso usaremos un resultado previo obtenido del ejemplo 3, el cual dice que ${}_{RL}D_a^{-1/2} e^{bx} = e^{bx} \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a})/\sqrt{b}$, donde si $a \rightarrow -\infty$, se obtiene ¹:

$$(28) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2} e^{bx} = \frac{e^{bx}}{\sqrt{b}}.$$

Si consideramos la media integral desde $a \rightarrow -\infty$ de e^{ibx} , reemplazando en (28) se puede reescribir como:

$$(29) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2} e^{ibx} = \frac{e^{ibx}}{\sqrt{ib}}.$$

Por la identidad de Euler, se sabe que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Aplicando la identidad de Euler en la expresión (29), podemos expresar la media integral de la función exponencial en términos de senos y cosenos de la siguiente forma:

¹Esto es debido a que $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1$.

$$(30) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2}(\cos(bx) + i\text{sen}(bx)) = \frac{(\cos(bx) + i\text{sen}(bx))}{\sqrt{ib}}.$$

Como la integral fraccionaria se define usando una integral, hereda las propiedades de linealidad de la misma, de modo que el primer miembro de (30) se puede separar. Adicionalmente, por la identidad de Euler se puede demostrar que $i = e^{\pi i/2}$, de modo que $\sqrt{i} = \sqrt{e^{\pi i/2}} = e^{\pi i/4} = \cos(\pi/4) + i\text{sen}(\pi/4)$. De modo que (30) se puede escribir como:

$$(31) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2}(\cos(bx)) + iD_{-\infty}^{-1/2}(\text{sen}(bx)) = \frac{(\cos(bx) + i\text{sen}(bx))}{\sqrt{b}(\cos(\pi/4) + i\text{sen}(\pi/4))}.$$

Luego, el segundo miembro de (31) se puede multiplicar y dividir por $\cos(\pi/4) - i\text{sen}(\pi/4)$, para obtener una fracción sin denominador complejo, esto último porque $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, de modo que se obtiene:

$$(32) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2}(\cos(bx)) + iD_{-\infty}^{-1/2}(\text{sen}(bx)) = \frac{(\cos(bx) + i\text{sen}(bx))(\cos(\pi/4) - i\text{sen}(\pi/4))}{\sqrt{b}(\cos^2(\pi/4) + \text{sen}^2(\pi/4))}.$$

Nótese que $\cos^2(\pi/4) + \text{sen}^2(\pi/4) = 1$. Adicionalmente, se puede observar también que $(\cos(bx) + i\text{sen}(bx))(\cos(\pi/4) - i\text{sen}(\pi/4)) = (\cos(bx)\cos(\pi/4) + \text{sen}(bx)\text{sen}(\pi/4)) + i(\text{sen}(bx)\cos(\pi/4) - \cos(bx)\text{sen}(\pi/4)) = \cos(bx - \pi/4) + i\text{sen}(bx - \pi/4)$, de tal manera que la expresión (32) se puede ver también de la siguiente manera:

$$(33) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2}(\cos(bx)) + iD_{-\infty}^{-1/2}(\text{sen}(bx)) = \frac{(\cos(bx - \pi/4) + i\text{sen}(bx - \pi/4))}{\sqrt{b}}.$$

Finalmente, igualando la parte real e imaginaria de (30) se obtiene lo que se quería:

$$(34) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2}\cos(bx) = \frac{\cos(bx - \pi/4)}{\sqrt{b}}.$$

$$(35) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2}\text{sen}(bx) = \frac{\text{sen}(bx - \pi/4)}{\sqrt{b}}.$$

Es importante observar cómo las expresiones (34) y (35) son las mismas que se obtendrían de usar las ecuaciones (16) y (15) para $\alpha = -1/2$.

En resumen, la integral fraccionaria se define utilizando la integral iterada de Cauchy y proporciona una generalización de la integral convencional a valores no enteros. La expresión de la integral fraccionaria está relacionada con la función gamma y su estudio ha sido abordado por varios investigadores en el campo del cálculo fraccionario.

5. DERIVADA FRACCIONARIA DE RIEMANN-LIOUVILLE

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es una herramienta poderosa para el cálculo de derivadas de orden fraccionario de funciones. Esta derivada generalizada se denota como ${}_{RL}D_a^\alpha f(x)$, donde α es un número real y $f(x)$ es una función adecuada. Su definición se basa en la integral fraccionaria de Riemann-Liouville que hemos discutido previamente. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se plantea en la siguiente definición:

Definición 2 (Derivada fraccionaria de RL). Si f es una función definida en (a, b) , entonces la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α viene dada por:

$$(36) \quad {}_{RL}D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

donde $n-1 \leq \alpha \leq n$ para $n = \lceil \alpha \rceil$ y $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma, que generaliza el concepto de factorial [33, 35, 16, 26, 24].

Esta definición establece una conexión entre la derivada fraccionaria y la integral fraccionaria, lo que permite extender la noción de derivada a órdenes fraccionarios.

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville ha encontrado aplicaciones en diversos campos, como el procesamiento de señales, la física matemática, la teoría del control y la mecánica de medios continuos. Por ejemplo, se ha utilizado en modelado de fenómenos anómalos de difusión, la descripción de la dinámica de sistemas complejos y la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Numerosos estudios se han centrado en la teoría y las aplicaciones de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville en los últimos años. Algunas referencias relevantes incluyen a Ortigueira [33], Podlubny [35], Kilbas et al. [16], Tenreiro Machado [26] y Li et al. [24]. Estos trabajos ofrecen una amplia cobertura de la teoría y las aplicaciones de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, y proporcionan recursos adicionales para aquellos interesados en explorar más.

Ejemplo 6. Calcular la media derivada de RL de la función $f(x) = \sqrt{x}$ con $a = 0$. Se reemplaza en (36), primero se calcula $\Gamma(1/2)$ lo que es $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_0^{1/2} \sqrt{x} &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha-1} \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{x-t}} dt \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{x-t}} dt \right). \end{aligned}$$

Nótese que el término a derivar es $D_0^{-1/2} \sqrt{x}$ el cual ya fue calculado en el ejemplo 4, con lo que la expresión queda:

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_0^{1/2} \sqrt{x} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{\pi x}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Es importante destacar que ese resultado coincide con el que se obtendría usando la fórmula (17).

Ejemplo 7. Calcular la media derivada de RL de la función $f(x) = e^{bx}$ para $b \neq 0$ con $a > 0$. Se reemplaza en (36), primero se calcula $\Gamma(1/2)$ lo que es $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_a^{1/2} e^{bx} &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha-1} e^{bt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{bt}}{\sqrt{x-t}} dt \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{e^{bt}}{\sqrt{x-t}} dt \right). \end{aligned}$$

Es notorio que lo que está dentro de la derivada es la expresión de la media integral de Liouville con $a > 0$, la cual se calculó en el ejemplo 3, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}
{}_R L D_a^{1/2} e^{bx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{bx} \operatorname{erf}(\sqrt{bx-ab})}{\sqrt{b}} \right) \\
&= \frac{e^{bx}}{\sqrt{b}} \frac{d}{dx} \left(\operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}) \right) + \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}) \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{bx}}{\sqrt{b}} \right) \\
&= \frac{e^{bx}}{\sqrt{b}} \left(\frac{be^{ab-bx}}{\sqrt{\pi}\sqrt{b}\sqrt{x-a}} \right) + \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}) \left(\frac{be^{bx}}{\sqrt{b}} \right) \\
&= \frac{e^{ab}}{\sqrt{\pi}\sqrt{x-a}} + \sqrt{b}e^{bx} \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}).
\end{aligned}$$

Observe que, para el caso en que $a \rightarrow -\infty$, entonces ${}_R L D_{-\infty}^{1/2} e^{bx} = \sqrt{b}e^{bx}$, lo cual coincide con (14), que es el resultado obtenido de manera intuitiva como un primer acercamiento. De aquí pueden salir varios casos, por ejemplo, cuando $b = 2$, en cuyo caso ${}_R L D_{-\infty}^{1/2} e^{2x} = \sqrt{2}e^{2x}$.

Observación 4. Una propiedad interesante que vale la pena destacar acerca de la derivada fraccionaria de RL, como ya se pudo observar en los ejercicios anteriores, es que esta derivada puede concebirse como la derivada de orden n de la integral de orden $n - \alpha$. Es decir:

$${}_R L D_a^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha)-1} f(t) dt \right) = D^n D_a^{-(n-\alpha)} f(x).$$

Esto nos lleva a concluir que si deseamos calcular la derivada de orden α , donde $0 \leq \alpha \leq 1$ y $\nu = 1 - \alpha$, simplemente podemos elegir $n = 1$, lo que nos conduce a:

$$\begin{aligned}
{}_R L D_a^\alpha f(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(1-\alpha)-1} f(t) dt \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \right) \\
&= D D_a^{-\nu} f(x).
\end{aligned}$$

Particularmente, si se desea la media derivada de RL, entonces:

$${}_R L D_a^{1/2} f(x) = D D_a^{-(1/2)} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \right).$$

Esto comprueba el comportamiento observado en los ejemplos 6 y 7.

Ejemplo 8. Calcular ${}_R L D_{-\infty}^{1/2} \cos(bx)$ y ${}_R L D_{-\infty}^{1/2} \sin(bx)$. De acuerdo con la observación 4, es suficiente con derivar una vez la media integral de las funciones seno y coseno, las cuales ya fueron obtenidas previamente en el ejemplo 5. Es decir, simplemente podemos realizar lo siguiente:²

$${}_R L D_{-\infty}^{1/2} \cos(bx) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos(bx - \pi/4)}{\sqrt{b}} \right) = -\sqrt{b} \sin(bx - \pi/4) = \sqrt{b} \cos(bx + \pi/4).$$

$${}_R L D_{-\infty}^{1/2} \sin(bx) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(bx - \pi/4)}{\sqrt{b}} \right) = \sqrt{b} \cos(bx - \pi/4) = \sqrt{b} \sin(bx + \pi/4).$$

Ejemplo 9. Calcular la media derivada de RL de $f(x) = x$, para $a = 0$. De acuerdo con la observación 4 basta con derivar $D_0^{-1/2} x$, esta última ya se cálculo en el ejemplo 2, es decir:

²En el resultado se utilizaron las identidades de desfase de ángulo entre senos y cosenos, que establecen que $\sin(\theta - \pi/4) = \cos(\theta + \pi/4)$ y $\cos(\theta - \pi/4) = \sin(\theta + \pi/4)$.

$$\begin{aligned}
{}_{RL}D_0^{1/2}x &= \frac{d}{dx}D_0^{-1/2}x \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{4x\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi}}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}\right) \\
&= \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \\
&= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 10. Calcular la derivada de RL de orden α con $0 \leq \alpha \leq 1$ de la función constante $f(x) = c$ desde $a > 0$. Usando el resultado enunciado en la observación 4 y el resultado obtenido del ejemplo 1, se puede obtener la derivada solicitada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
{}_{RL}D_a^\alpha c &= \frac{d}{dx}D_a^{-\alpha}c \\
&= \frac{d}{dx}D_a^{-\alpha}c \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{c(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\
&= \frac{\alpha c(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)(x-a)^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Es importante resaltar que la derivada fraccionaria de orden α de RL con $0 \leq \alpha \leq 1$ de una constante, no es cero.

6. DERIVADA FRACCIONARIA DE CAPUTO

La derivada fraccionaria de Caputo, propuesta por el físico matemático italiano Michele Caputo en 1969, es una extensión del concepto de derivada a orden fraccionario. A diferencia de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, la derivada de Caputo sigue un enfoque distinto. En la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, primero se integra y posteriormente se deriva, por otro lado, en la derivada fraccionaria de Caputo ocurre el proceso inverso: se deriva primero y posteriormente se integra. Esta diferencia en el orden de las operaciones tiene implicaciones significativas en la interpretación y aplicaciones de estas derivadas, permitiendo una mejor comprensión física de las condiciones iniciales en diversos problemas aplicados [6]. La derivada de Caputo de orden α se plantea en la siguiente definición:

Definición 3 (Derivada fraccionaria de Caputo). Si f es una función definida en $[a, b]$, entonces la derivada fraccionaria de Caputo de orden α es:

$$(37) \quad {}_C D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} f(t) dt.$$

Donde $n-1 \leq \alpha \leq n$ para $n = \lceil \alpha \rceil$ [6, 33, 35, 16, 26, 24].

La derivada fraccionaria de Caputo ha sido ampliamente utilizada en diversos campos de la ciencia y la ingeniería, incluyendo la física, la mecánica de medios continuos, la teoría de control, entre otros [9, 35, 27]. Su enfoque inverso en el proceso

de derivación e integración proporciona ventajas prácticas en el modelado y solución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales no locales o históricas.

La diferencia fundamental entre la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la derivada fraccionaria de Caputo radica en el tratamiento de las condiciones iniciales. En el caso de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, las condiciones iniciales se expresan en términos de integrales, lo que puede llevar a dificultades en la interpretación física y la solución de problemas. Por otro lado, la derivada fraccionaria de Caputo utiliza las condiciones iniciales en forma de derivadas de orden entero, lo que facilita su interpretación y manejo [9, 35].

En resumen, la derivada fraccionaria de Caputo, al invertir el orden de la derivación e integración en comparación con la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, ofrece un enfoque alternativo y más conveniente para el modelado y la solución de problemas con condiciones iniciales históricas. Su utilización en diversos campos ha demostrado su capacidad para describir fenómenos complejos y proporcionar una herramienta poderosa para el análisis de sistemas con memoria.

A continuación se muestran algunos ejemplos puntuales de derivadas fraccionarias de tipo Caputo para ilustrar la obtención de las mismas.

Ejemplo 11. Calcula la derivada de orden α con $0 \leq \alpha \leq 1$ tipo Caputo de $f(x) = c$. Basta con tomar la definición de la derivada fraccionaria de tipo Caputo con $n = 1$, y reemplazar, es decir:

$$\begin{aligned} {}_C D_a^\alpha c &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha-1} \frac{d}{dt}(c) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} 0 dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x 0 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se puede apreciar cómo a diferencia de la derivada fraccionaria de RL, en el sentido de Caputo la derivada fraccionaria de una constante, es cero, mientras que en el sentido de RL, no.

Observación 5. La derivada de Caputo, al igual que la derivada de RL, se puede expresar como una combinación de una derivada entera y una integral fraccionaria. Sin embargo, en el caso de la derivada de Caputo, se aplica primero la derivada n y luego la integral de orden $n - \alpha$, donde α representa el orden fraccionario deseado de la derivada. Esta secuencia de operaciones asegura que el operador final tenga el orden fraccionario α , esto es:

$$\begin{aligned} {}_C D_a^\alpha f(x) &= D_a^{-(n-\alpha)} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} f(t) dt. \end{aligned}$$

Esto permite facilitar el cálculo de muchas derivadas fraccionarias, por ejemplo, para la media derivada de Caputo se puede hacer considerando $n = 1$, de forma que se obtiene:

$$(38) \quad {}_C D_a^{1/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_a^x (x-t)^{-1/2} \frac{d}{dt} f(t) dt$$

$$(39) \quad = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Ejemplo 12. Calcular la media derivada de Caputo para la función $f(x) = e^{bx}$, desde un valor a . Se reemplaza $f(x) = e^{bx}$ en (38), con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_C D_a^{1/2} e^{bx} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{b e^{bt}}{\sqrt{x-t}} dt \\ &= b \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{e^{bt}}{\sqrt{x-t}} dt \\ &= b D_a^{-1/2} e^{bx}. \end{aligned}$$

Pero en el segundo miembro sale la media integral de e^{bx} que ya hicimos en el ejemplo 3. De modo que al reemplazarla se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_C D_a^{1/2} e^{bx} &= b \frac{e^{bx} \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a})}{\sqrt{b}} \\ &= \sqrt{b} e^{bx} \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}). \end{aligned}$$

Se puede observar la diferencia con la derivada de RL. Un resultado al menos curioso para la función exponencial es que: ${}_C D_{-\infty}^{1/2} e^{bx} = {}_{RL} D_{-\infty}^{1/2} e^{bx} = \sqrt{b} e^{bx}$, es decir, ambos en el caso que $a \rightarrow -\infty$ coinciden con lo mostrado en (14).

Otras funciones interesantes para poner a prueba con la derivada fraccionaria de Caputo son aquellas que están definidas mediante integrales definidas. Esto se debe a que, al ser un operador en el que primero se deriva y luego se integra, resulta particularmente fácil para funciones como $\operatorname{Si}(x)$ ³ y $\operatorname{erf}(x)$. Estas funciones podrían ser evaluadas y analizadas con facilidad utilizando la derivada fraccionaria de Caputo.

Ejemplo 13. Calcular la media derivada de Caputo de la función error, con $a > 0$. Basta con aplicar (38) sobre la función error.

$$\begin{aligned} {}_C D_a^{1/2} \operatorname{erf}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \left(\frac{1}{\sqrt{x-t}} \cdot \frac{d(\operatorname{erf}(t))}{dt} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \left(\frac{1}{\sqrt{x-t}} \cdot \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_a^x \left(\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{x-t}} \right) dt. \end{aligned}$$

Se puede observar cómo la media derivada de Caputo de la función error también se puede expresar como una integral definida pues no tiene primitiva elemental. En la figura 1 se muestra una gráfica de esta función considerando $a \rightarrow 0$.

Ejemplo 14. Calcular la media integral de Caputo de la función $\operatorname{Si}(x)$ con $a > 0$. Se reemplaza en (38) y se obtiene:

³La función $\operatorname{Si}(x)$ se llama integral seno y se usa en diversas áreas de las matemáticas y la física. Se define como $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$. Esta función aparece en problemas relacionados con la propagación de ondas, la mecánica cuántica, la teoría de control y otros campos de la física y la ingeniería. También es de interés en el estudio de funciones especiales y teoría de funciones complejas.

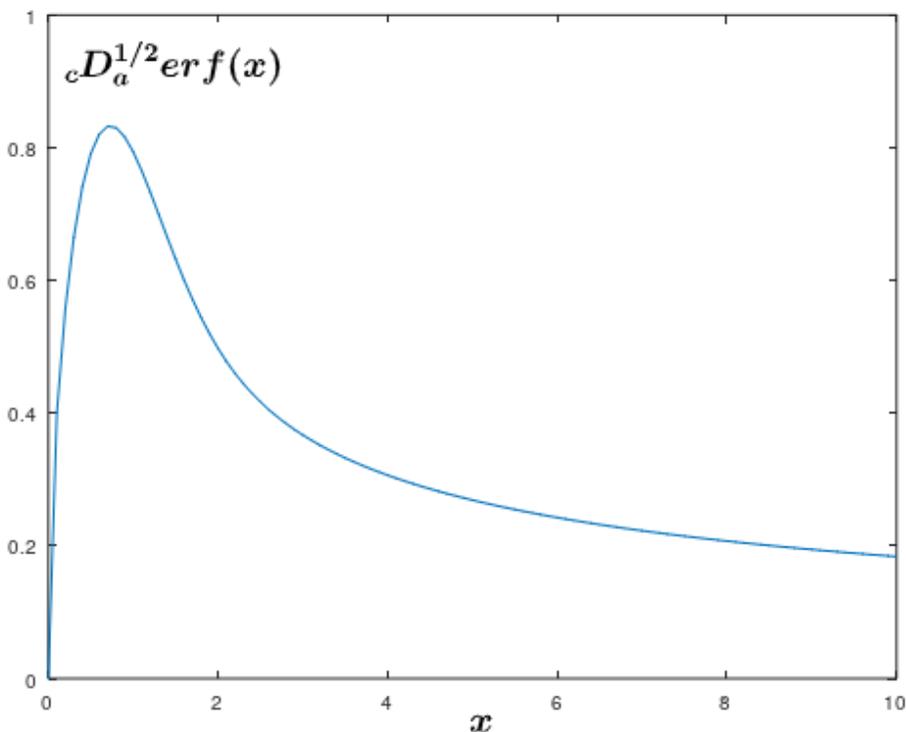


FIGURA 1. Gráfica de la media derivada de Caputo de la función error cuando $a \rightarrow 0$. La imagen es de autoría propia realizada en Julia.

$$\begin{aligned}
 {}_cD_a^{1/2}\text{Si}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \left(\frac{1}{\sqrt{x-t}} \cdot \frac{d(\text{Si}(t))}{dt} \right) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \left(\frac{1}{\sqrt{x-t}} \cdot \frac{\text{sen}(t)}{t} \right) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \left(\frac{\text{sen}(t)}{t\sqrt{x-t}} \right) dt.
 \end{aligned}$$

Es notorio, al igual que en el ejemplo anterior, la media derivada de Caputo de la función $\text{Si}(x)$ también se puede expresar como una integral definida pues no tiene primitiva elemental, una gráfica de esta figura se muestra en la figura 2 para el caso $a \rightarrow 0$.

Ejemplo 15. Calcular la derivada fraccionaria de orden α con $0 \leq \alpha \leq 1$ tipo Caputo de la función $f(x) = x$. Se aplica la definición de la derivada fraccionaria de tipo Caputo sobre x . Como el orden de la derivada está entre 0 y 1 se toma $n = 1$, esto es:

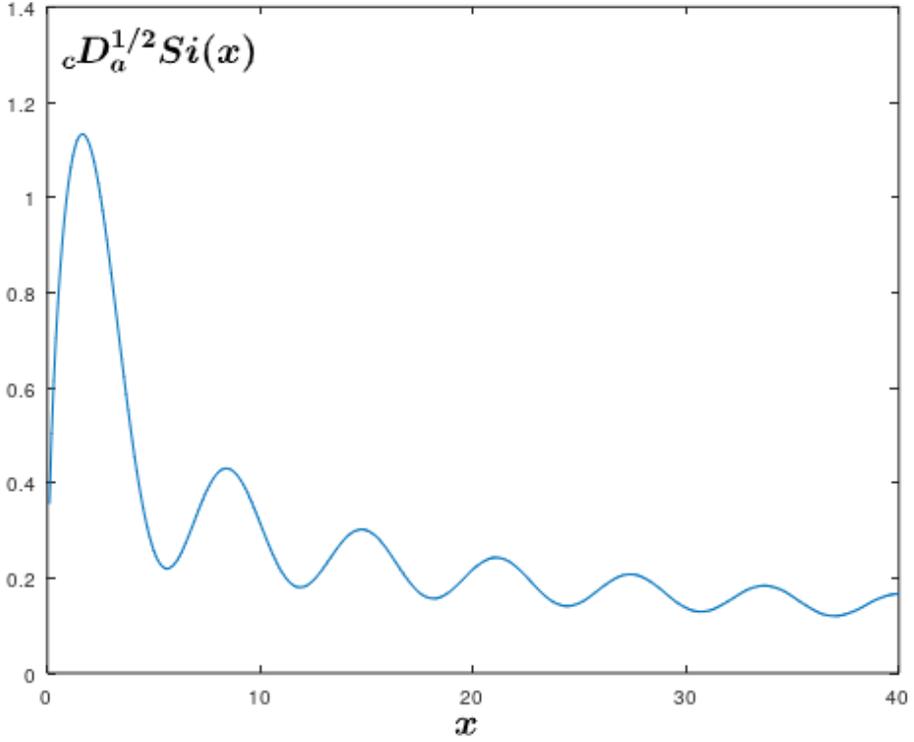


FIGURA 2. Gráfica de la media derivada de Caputo de la función integral del seno cuando $a \rightarrow 0$. La imagen es de autoría propia realizada en Julia.

$$\begin{aligned}
 {}_C D_a^\alpha x &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha-1} \frac{dt}{dt} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \Big|_a^x \\
 &= \left(\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right) \Big|_x^a \\
 &= \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Si se toma $a = 0$, la expresión queda como: ${}_C D_0^\alpha x = \frac{(x-0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$. En la Figura 3 se puede apreciar el comportamiento para distintos valores de α .

7. TRANSFORMADA DE LAPLACE EN DERIVADAS FRACCIONARIAS

La transformada de Laplace es una poderosa herramienta matemática utilizada en el estudio de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos. Hasta ahora, hemos explorado las definiciones y algunos ejemplos puntuales de las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo. En esta sección, abordaremos cómo la transformada de Laplace se relaciona con las derivadas fraccionarias y cómo puede ser aplicada para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias.

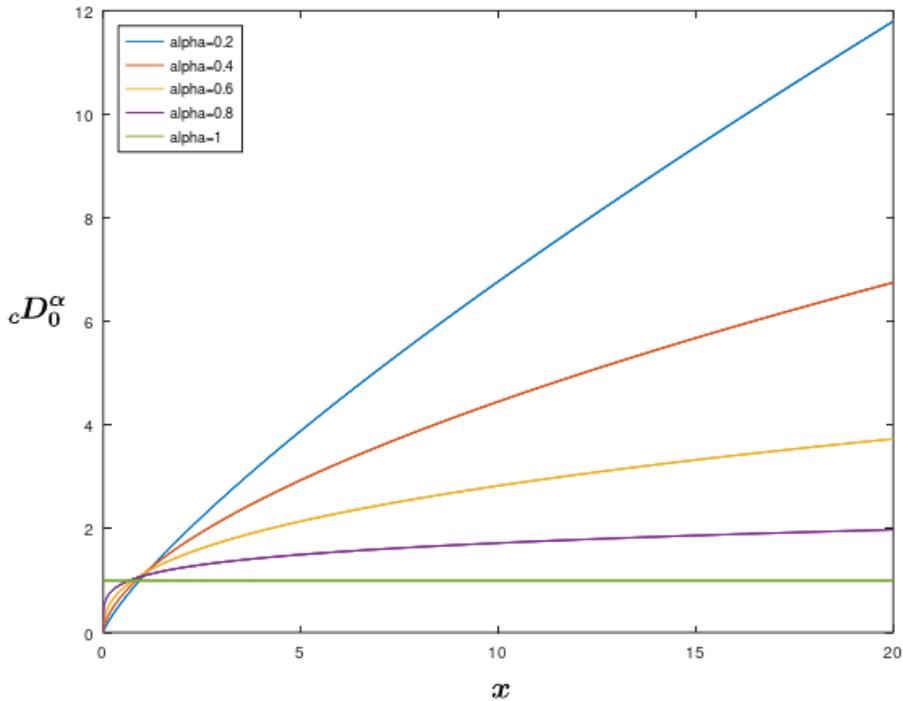


FIGURA 3. Gráfica de la derivada fraccionaria de Caputo de la función x tomando $a = 0$, se puede apreciar el comportamiento de la derivada para algunos valores de α entre 0 y 1. La imagen es de autoría propia realizada en Julia.

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ viene dada por la siguiente definición:

Definición 4 (Transformada de Laplace de f). Si f es una función que está definida para $t \geq 0$, entonces la transformada de Laplace de f es la función F dada por:

$$(40) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

siempre que la integral exista y en donde s es un número complejo para el cual $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-st} f(t) dt$ converge.

La transformada de Laplace nos permite cambiar el dominio de una función t (que normalmente representa el tiempo en problemas de aplicación) al dominio complejo s , lo que simplifica el análisis y resolución de ecuaciones diferenciales.

En el contexto de las derivadas fraccionarias, la transformada de Laplace también se extiende para abarcar estas operaciones. Para comenzar, la transformada de Laplace de la integral fraccionaria de RL se define como muestra la siguiente definición:

Definición 5 (Transformada de Laplace de la integral fraccionaria de RL). Si $f(t)$ es una función definida para $t \geq 0$, entonces la transformada de Laplace integral fraccionaria de RL es:

$$(41) \quad \mathcal{L}\{{}_{RL}I_a^{\alpha} f(t)\} = \mathcal{L}\{{}_{RL}D_a^{-\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} F(s),$$

con $\alpha \in (0, 1)$ siendo el orden de integración.

Este resultado se puede deducir directamente de aplicar la transformada de Laplace sobre la integral fraccionaria.

De igual manera, resulta interesante preguntarse si la transformada de Laplace se puede aplicar sobre las derivadas fraccionarias vistas hasta ahora: la respuesta es sí. Para las transformadas de Laplace de las derivadas fraccionarias de RL y Caputo podemos plantear las siguientes definiciones:

Definición 6 (Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de RL). Si $f(t)$ es una función definida para $t \geq 0$, entonces la transformada de Laplace derivada fraccionaria de orden α de RL es:

$$(42) \quad \mathcal{L}\{ {}_{RL}D_a^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(\alpha-k-1)}(0),$$

donde ${}_{RL}D_a^\alpha$ es la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α para $n-1 \leq \alpha \leq n$ y $f^{(\alpha-k-1)}(0)$ representa las derivadas fraccionarias de $f(t)$ evaluadas en $t = 0$.

Esta ecuación presenta una limitación en cuanto a las condiciones iniciales necesarias, ya que éstas deben ser de orden fraccionario. Sin embargo, a su vez, esto nos conduce a una interesante línea de investigación conocida como ecuaciones diferenciales fraccionarias. Para la derivación fraccionaria de Caputo se tiene la siguiente definición:

Definición 7 (Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo). Si $f(t)$ es una función definida para $t \geq 0$, entonces la transformada de Laplace derivada fraccionaria de orden α de Caputo viene dada por:

$$(43) \quad \mathcal{L}\{ {}_C D_a^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

Donde ${}_C D_a^\alpha$ es la derivada fraccionaria de Caputo de orden α , para $n-1 \leq \alpha \leq n$ con $n = \lceil \alpha \rceil$ y $f^{(k)}(0)$ representa las derivadas de $f(t)$ evaluadas en $t = 0$.

Lo que resulta fascinante y altamente beneficioso de la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo es que las condiciones iniciales utilizadas involucran derivadas elementales de orden entero que tienen interpretaciones físicas conocidas. Este hecho es sumamente relevante en el contexto de las aplicaciones de los operadores fraccionarios.

La transformada de Laplace en derivadas fraccionarias es un tema activo de investigación y tiene aplicaciones en diversos campos, como la física, la ingeniería, la biología y la economía. La capacidad de analizar y resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias utilizando la transformada de Laplace proporciona una herramienta invaluable para comprender sistemas complejos y fenómenos no lineales [35, 16, 29].

Estos avances y descubrimientos recientes siguen enriqueciendo nuestra comprensión de las derivadas fraccionarias y su relación con la transformada de Laplace, y ofrecen nuevas oportunidades para resolver problemas en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. Los siguientes ejemplos ayudarán a ilustrar cómo se utiliza la transformada de Laplace en las derivadas fraccionarias de RL y Caputo:

Ejemplo 16 (Derivada fraccionaria de Caputo). Dada la función $f(t) = t + 1$ y una derivada fraccionaria de RL de orden $\alpha = \frac{1}{2}$, la cual denotamos como ${}_C D_0^{\frac{1}{2}}$, la condición inicial para este ejemplo es $f(0) = 1$. La transformada de Laplace de ${}_C D_0^{\frac{1}{2}} f(t)$ es:

$$\mathcal{L}\{ {}_C D_0^{\frac{1}{2}} f(t) \} = s^{\frac{1}{2}} F(s) - s^{-\frac{1}{2}} f(0).$$

Por el orden de la derivada se toma $n = 1$, sustituyendo $f(t) = t + 1$ y $f(0) = 1$, y dado que $F(s) = \mathcal{L}(t + 1) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{{}_C D_0^{\frac{1}{2}}(t + 1)\} &= s^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right) - s^{-1/2} \cdot (1) \\ &= s^{-3/2} + s^{-1/2} - s^{-1/2} \\ &= \frac{1}{s\sqrt{s}}.\end{aligned}$$

Ejemplo 17 (Derivada fraccionaria de RL). Ahora consideremos la función $g(t) = \sqrt{t}$ y una derivada fraccionaria de RL de orden $\alpha = \frac{1}{2}$, que denotamos como ${}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}$. Las condiciones iniciales son $g(0) = 0$ y ${}_{RL}D_0^{-\frac{1}{2}}g(0) = 0$. La transformada de Laplace de ${}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}g(t)$ se calcula considerando $n = 1$, esto es:

$$\mathcal{L}\{{}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}g(t)\} = s^{\frac{1}{2}}G(s) - s^0 {}_{RL}D_0^{-\frac{1}{2}}g(0).$$

Sustituyendo $g(t) = \sqrt{t}$, $g(0) = 0$, ${}_{RL}D_0^{-\frac{1}{2}}g(0) = 0$ y dado que $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{{}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}\} &= s^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} - 1 \cdot 0 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s}.\end{aligned}$$

Antes de adentrarnos en el estudio de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, es relevante presentar algunas definiciones y proposiciones que resultan fundamentales para comprender este tema. Entre ellas, se destacan la función de Mittag-Leffler de dos parámetros $E_{\alpha,\beta}$ y su transformada de Laplace. Estas herramientas serán de gran utilidad en nuestro análisis y abordaje de las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Definición 8 (Función de Mittag-Leffler). La función de Mittag-Leffler de dos parámetros $E_{\alpha,\beta}$ se define mediante la siguiente serie infinita:

$$(44) \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

en donde z es una variable compleja y α, β son constantes complejas con parte real positiva. Algunos casos particulares de la función de Mittag-Leffler son:

$$\begin{aligned}E_{1,1}(z) &= e^z. \\ E_{0,1}(z) &= \frac{1}{1-z}. \\ E_{2,1}(z) &= \cosh\sqrt{z}.\end{aligned}$$

La función de Mittag-Leffler tiene un papel importante en el análisis y la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias, y sus propiedades especiales en casos particulares la hacen especialmente valiosa en diversas aplicaciones matemáticas y físicas.

PROPOSICIÓN 9. Sean $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces para $t > 0$ y de acuerdo con [34] se cumple que:

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^\alpha)\right\}(s) = \frac{k!s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}},$$

con $[s] > |a|^{1/\alpha}$, donde $[s]$ representa la parte entera de s . En consecuencia,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \right\} (s) = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha).$$

Ejemplo 18. Resuelva la siguiente ecuación diferencial fraccionaria usando la transformada de Laplace: ${}_C D_0^{3/2} y(x) - y(x) = \delta(x)^4$ con $y(0) = y'(0) = 0$. Se aplica la transformada de Laplace a toda la ED, aplicando la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}_C D_0^{3/2} y(x)\} - \mathcal{L}\{y(x)\} &= \mathcal{L}\{\delta(x)\} \\ s^{3/2} Y(s) - Y(s) &= 1 \\ Y(s) \cdot (s^{3/2} - 1) &= 1 \\ Y(s) &= \frac{1}{s^{3/2} - 1}. \end{aligned}$$

Luego, se aplica la transformada inversa de Laplace a $Y(s)$ con lo que se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{3/2} - 1} \right\}.$$

Por la proposición 9 tomando $a = 1, k = 0, \alpha = \beta = 3/2$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{3/2} - 1} \right\} \\ &= x^{3/2 \cdot 0 + 3/2 - 1} E_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(0)} \left(1 \cdot x^{3/2} \right) \\ &= x^{1/2} E_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(0)} \left(x^{3/2} \right) \\ &= \sqrt{x} E_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(0)} \left(x\sqrt{x} \right) \\ &= \sqrt{x} E_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} \left(x\sqrt{x} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, la solución es⁵:

$$y(x) = \sqrt{x} E_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} \left(x\sqrt{x} \right).$$

8. INTERPRETACIÓN FÍSICA Y GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA FRACCIONARIA

La interpretación física de la derivada fraccionaria se relaciona con su aplicación en fenómenos físicos y sistemas dinámicos. Una interpretación común es considerarla como una medida de la memoria o “influencia a largo plazo” que una variable tiene sobre otra. Mientras que la derivada de orden entero se enfoca en la influencia instantánea, la derivada fraccionaria considera la influencia acumulada a lo largo del tiempo [36]. Esto resulta especialmente útil en sistemas no Markovianos, donde las variables pueden tener una dependencia temporal compleja y retener información de su historia pasada. Además, la derivada fraccionaria se utiliza para modelar fenómenos de difusión en medios heterogéneos o no lineales, proporcionando un enfoque más preciso para describir la propagación de partículas en sistemas con comportamientos no lineales o aleatorios [7].

Por otro lado, la interpretación geométrica de la derivada fraccionaria se centra en su capacidad para describir características de curvas y superficies. En este contexto, se considera como una medida de la “rugosidad” o “aspereza” de una curva. Mientras que la derivada de orden entero captura las variaciones locales de una curva, la derivada fraccionaria proporciona información sobre las variaciones a diferentes escalas

⁴Donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac.

⁵En lo sucesivo, escribiremos $E_{\alpha, \beta}^{(0)} = E_{\alpha, \beta}$ para referirnos a la derivada 0 de la función de Mittag-Leffler.

y niveles de detalle, permitiendo caracterizar y cuantificar la complejidad estructural de objetos geométricos. Esta interpretación encuentra aplicaciones en el estudio de fractales y estructuras autosemejantes, donde la derivada fraccionaria se utiliza para medir el grado de autosemejanza y describir la estructura fractal de objetos en diversas disciplinas científicas [42, 28].

En conclusión, la derivada fraccionaria presenta interpretaciones físicas y geométricas fundamentales que tienen importantes implicaciones en la comprensión de varios fenómenos y la descripción de estructuras en diversas áreas científicas. Su capacidad para capturar influencias a largo plazo en sistemas dinámicos, así como su habilidad para caracterizar la rugosidad y autosemejanza en objetos geométricos, la convierten en una herramienta invaluable en campos como la física, la biología, la química y otras disciplinas científicas donde se busca un mayor nivel de precisión y detalle en el análisis de fenómenos y estructuras.

9. LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

La ley del enfriamiento de Newton es un principio fundamental en la física que describe la pérdida de calor de un objeto en contacto con un ambiente más frío con el tiempo, siendo ampliamente estudiado en diversas áreas como la meteorología y la ingeniería. Sin embargo, en las últimas décadas, ha surgido un campo emocionante de investigación que involucra la derivada fraccionaria en la ley del enfriamiento de Newton [31]. La derivada fraccionaria, que extiende el concepto tradicional de derivada a órdenes fraccionarios, permite capturar fenómenos más complejos que no se explican completamente con la derivada clásica. La ley del enfriamiento de Newton fraccionaria proporciona una nueva perspectiva y comprensión más profunda de la disipación de calor en sistemas físicos, modelando situaciones donde la velocidad de enfriamiento presenta comportamientos intermedios y más sofisticados [40]. En esta sección se exploran las aplicaciones y consecuencias de la ley del enfriamiento de Newton fraccionaria, analizando cómo la inclusión de la derivada fraccionaria afecta el comportamiento térmico de objetos en su entorno [40]. Se abordan enfoques matemáticos y físicos para resolver y comprender las ecuaciones diferenciales fraccionarias asociadas con esta ley, y se examinan las diferencias con las soluciones clásicas [14, 12, 37, 23].

Ley de enfriamiento de Newton. En un cuerpo que se está enfriando, la tasa de cambio de la temperatura $T(t)$ con respecto al tiempo t es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo $T(t)$ y la temperatura T_A del entorno en el que se encuentra. Esto es:

$$(45) \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_A),$$

donde $k < 0$ es una constante de proporcionalidad.

Resolvemos la ecuación (45) por el método de resolución de factor integrante para ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= kT - kT_A, \\ \frac{dT}{dt} - kT &= -kT_A. \end{aligned}$$

El factor integrante es $\mu = e^{\int -k dt} = e^{-kt}$, multiplicando ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT}{dt} - kT \right) e^{-kt} &= (-kT_A) e^{-kt}, \\ \frac{d}{dt} T e^{-kt} &= -kT_A e^{-kt}. \end{aligned}$$

Integrando ambos miembros respecto a t :

$$\int \frac{d}{dt} T e^{-kt} dt = \int -k T_A e^{-kt} dt$$

$$T e^{-kt} = T_A e^{-kt} + c_1$$

$$T = \frac{T_A e^{-kt} + c_1}{e^{-kt}}$$

$$T = T_A + c_1 e^{kt}.$$

Ahora, imponemos las siguientes condiciones iniciales $T(0) = T_0, T(t_0) = a$ para encontrar el valor de las constantes c_1 y k . Primero haciendo $T(0) = T_0$:

$$T_0 = T_A + c_1 e^0$$

$$T_0 = T_A + c_1$$

$$c_1 = T_0 - T_A.$$

Por otra parte, ahora aplicando la condición $T(t_0) = a$ se tiene que:

$$a = T_A + c_1 e^{kt_0}$$

$$a = T_A + (T_0 - T_A) e^{kt_0}$$

$$a - T_A = (T_0 - T_A) e^{kt_0}$$

$$e^{kt_0} = \frac{a - T_A}{T_0 - T_A}$$

$$\ln(e^{kt_0}) = \ln\left(\frac{a - T_A}{T_0 - T_A}\right)$$

$$kt_0 = \ln\left(\frac{a - T_A}{T_0 - T_A}\right)$$

$$k = \frac{1}{t_0} \ln\left(\frac{a - T_A}{T_0 - T_A}\right).$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación diferencial ordinaria es:

$$T = T_A + (T_0 - T_A) e^{\frac{1}{t_0} \ln\left(\frac{a - T_A}{T_0 - T_A}\right) t},$$

donde T_A representa la temperatura del medio que rodea al objeto, T_0 la temperatura inicial y a el valor de la temperatura después de haber transcurrido un tiempo t_0 .

Ejemplo 19 (Enfriamiento de una barra metálica). Supongamos que una barra metálica a una temperatura de $50^\circ F$ se pone en un cuarto a una temperatura de $5^\circ F$. Después de 10 minutos la temperatura de la barra es $25^\circ F$. Vamos a calcular el tiempo que tarda la barra en llegar a una temperatura de $10^\circ F$. Por una parte las condiciones iniciales son: $T_0 = 50, T_A = 5, t_0 = 10, a = 25$. Reemplazando en la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$T = 5 + 45 e^{\frac{1}{10} \ln\left(\frac{4t}{9}\right)}.$$

Para saber cuánto tiempo tardará la barra en llegar a una temperatura de $10^\circ F$ igualamos la ecuación anterior a 10:

$$5 + 45 e^{\frac{1}{10} \ln\left(\frac{4t}{9}\right)} = 10.$$

Despejando t tenemos que $t \approx 27$ minutos.

Ahora tratemos el caso fraccionario, por lo cual haremos uso de las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Consideremos el siguiente problema de valor inicial análogo

a la ley de enfriamiento de Newton pero en su versión fraccionaria⁶.

$$\begin{aligned} {}_C D_t^\alpha T(t) - kT(t) &= -kT_A, t > 0, p = [\alpha] + 1 \\ T^n(0) &= T_n, T_n \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2 \dots p-1. \end{aligned}$$

Calculando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial fraccionaria:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}_C D_t^\alpha T(t) - kT(t)\} &= \mathcal{L}\{-kT_A\} \\ \mathcal{L}\{{}_C D_t^\alpha T(t)\} - k\mathcal{L}\{T(t)\} &= -kT_A \mathcal{L}\{1\} \\ s^\alpha T(s) - \sum_{i=0}^{p-1} s^{\alpha-i-1} T^i(0) - kT(s) &= -\frac{kT_A}{s}. \end{aligned}$$

Despejando $T(s)$ y considerando las condiciones iniciales resulta:

$$T(s) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - k} T_i - \frac{kT_A}{s(s^\alpha - k)}.$$

Pero notemos que:

$$T(s) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - k} T_i = \sum_{i=0}^{p-1} \mathcal{L}\{t^i E_{\alpha, i+1}(kt^\alpha)\}(s).$$

Obteniendo la transformada inversa de Laplace de $T(s)$:

$$\begin{aligned} T(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - k} T_i - \frac{kT_A}{s(s^\alpha - k)} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - k} T_i \right\} - kT_A \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^\alpha - k)} \right\}. \end{aligned}$$

Usando las fórmulas para la transformada inversa de Laplace se obtiene:

$$T(t) = \sum_{i=0}^{p-1} T_i t^i E_{\alpha, i+1}(kt^\alpha) - kT_A t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(kt^\alpha).$$

Ahora, supongamos que $T(0) = 50, T_A = 5, k = -0,08$.

Caso $\alpha = \frac{1}{3}$:

$$T(t) = 50E_{\frac{1}{3}, 1}(-0,08t^{\frac{1}{3}}) + 0,4t^{\frac{1}{3}}E_{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}}(-0,08t^{\frac{1}{3}}) = y_1.$$

Caso $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$T(t) = 50E_{\frac{1}{2}, 1}(-0,08t^{\frac{1}{2}}) + 0,4t^{\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(-0,08t^{\frac{1}{2}}) = y_2.$$

Caso $\alpha = \frac{3}{4}$:

$$T(t) = 50E_{\frac{3}{4}, 1}(-0,08t^{\frac{3}{4}}) + 0,4t^{\frac{3}{4}}E_{\frac{3}{4}, \frac{7}{4}}(-0,08t^{\frac{3}{4}}) = y_3.$$

Caso $\alpha = 1$:

$$T(t)E = 5 + 45e^{-0,08t} = y_4.$$

En la figura 4 se representa gráficamente cada una de las soluciones anteriores usando el software Julia [15].

⁶En este caso, el subíndice t en ${}_C D_t^\alpha$ hace referencia a que la derivada fraccionaria es con respecto al tiempo.

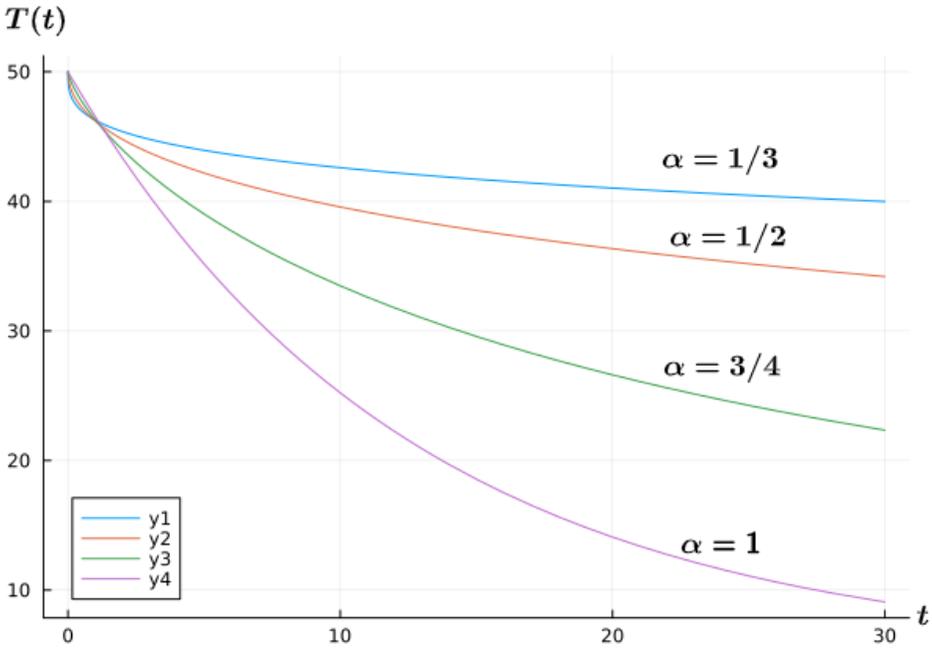


FIGURA 4. Gráfica de cada una de las soluciones obtenidas en el ejemplo 19 para el problema de la ley de enfriamiento de Newton en su versión fraccionaria. La imagen es de autoría propia realizada en Julia.

10. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En esta sección, analizaremos los resultados obtenidos en el ejemplo del enfriamiento de una barra metálica utilizando la ley de enfriamiento de Newton fraccionaria. En la Figura 4, se presentan las gráficas de las soluciones obtenidas para diferentes valores de α .

Se observa que a medida que α se acerca a 1, las soluciones fraccionarias se aproximan a la solución clásica de la ecuación diferencial ordinaria. Esto tiene sentido, ya que cuando α tiende a 1, la derivada fraccionaria se convierte en la derivada ordinaria, y la ley de enfriamiento de Newton fraccionaria se reduce a la forma clásica.

Por otro lado, cuando α toma valores más bajos, las soluciones presentan comportamientos más complejos y sofisticados. Esto es especialmente evidente en la gráfica con $\alpha = \frac{1}{3}$, donde se observa un comportamiento más abrupto y una tasa de enfriamiento más lenta en comparación con las otras soluciones.

Es interesante notar que la inclusión de la derivada fraccionaria en la ley de enfriamiento de Newton permite modelar sistemas con tasas de enfriamiento no lineales y fenómenos de disipación de calor más complejos. Esta capacidad de capturar comportamientos intermedios entre la disipación exponencial y lineal es crucial en aplicaciones donde el enfriamiento sigue patrones no convencionales.

En resumen, la ley de enfriamiento de Newton fraccionaria ofrece una herramienta poderosa y versátil para estudiar y modelar problemas de disipación de calor en diversos sistemas físicos. La combinación de las herramientas del cálculo fraccionario con la ley clásica de enfriamiento de Newton abre nuevas posibilidades para comprender y controlar procesos térmicos en la naturaleza y la tecnología moderna.

11. CONCLUSIONES

En este trabajo, hemos explorado la aplicación de la derivada fraccionaria en la ley del enfriamiento de Newton, un principio fundamental en la física que describe cómo un objeto en contacto con un medio ambiente más frío pierde calor con el tiempo. Además, este trabajo ha ofrecido una introducción al cálculo fraccionario, una extensión del cálculo tradicional que permite capturar fenómenos más complejos que no se explican completamente con la derivada clásica.

Nuestros resultados muestran que la ley de enfriamiento de Newton fraccionaria ofrece una perspectiva novedosa y profunda para entender los procesos de enfriamiento en diversos sistemas físicos. La capacidad de modelar tasas de enfriamiento no lineales y fenómenos más complejos es crucial para aplicaciones en ingeniería, ciencia de materiales y otros campos.

Además, hemos comparado cómo las soluciones fraccionarias se aproximan a las solución clásica de orden entero cuando α tiende a 1, lo que resalta la versatilidad de la ley de enfriamiento de Newton fraccionaria para abarcar tanto casos convencionales como situaciones más especializadas.

En conclusión, la inclusión de la derivada fraccionaria en la ley de enfriamiento de Newton ofrece una perspectiva más amplia y compleja en la modelación y comprensión de procesos de enfriamiento. Este enfoque, junto con la introducción al cálculo fraccionario, representa una herramienta valiosa para estudiar sistemas térmicos en situaciones donde las aproximaciones clásicas no son suficientes.

AGRADECIMIENTOS. Los autores desean expresar su agradecimiento a CONAHCYT, a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, y a la Escuela Superior de Apan (ESAp), donde se escribió el artículo, así como a los árbitros anónimos de la revista. También agradece a la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería.

REFERENCIAS

- [1] Abel, N. H. (1839). *Resolution d'un problème de mécanique*. Oeuvres Complètes, tomo premier, 27-30. Gröndah, Christiana.
- [2] Abel, N. H. (1839). *Sur quelques intégrales définies*. Oeuvres Complètes, tomo second, 93-102. Gröndah, Christiana.
- [3] Baleanu, D. (2012). *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*. World Scientific, 3(2), 1650002. doi: 10.1142/S2010326316500025.
- [4] Baleanu, D., Günevec, Z. B., & Tenreiro Machado, J. A. (2010). *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*. Springer.
- [5] Bernoulli, J., & Bernoulli, D. (1713). *Ars conjectandi*. Thurneysen Brothers. Basel, Switzerland.
- [6] Caputo, M. (1969). *Elasticità e Dissipazione*. Zanichelli.
- [7] Chechkin, A., Gonchar, V., Korabel, N., & Sushko, Y. (2003). *Introduction to the Theory of Random Processes*. Nauka.
- [8] Duarte, O. M. (2011). *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*. Springer.
- [9] Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer.
- [10] Euler, L. (1738). *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*. Commentarii Academiae Scientiarvm Imperialis Petropolitanae, V, 36-57. San Petersburgo.
- [11] Fourier, J. B. J. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur*, 561-562. Chez Firmin Didot, Père et fils, Paris.
- [12] García, A., & Patel, K. (2022). *Advances in Fractional Heat Transfer and Applications*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 190, 1210-1225.
- [13] Grünwald, A. K. (1867). *Ueber, Begrenzte, Derivationen und Deren Anwendung*. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 12, 441-480.
- [14] Johnson, M., & White, B. (2020). *Solving Fractional Heat Equations Using Fourier Transform Methods*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 483(2), 123485.
- [15] Julia Computing. *The Julia Programming Language*. Recuperado de <https://julialang.org/> (Acceso en línea).
- [16] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier.
- [17] Kolmogorov, A. N. (1950). *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsea Publishing Company. Providence, RI.

- [18] Lacroix, S. F. (1819). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, Second edition*, 409-410. Courcier, Paris.
- [19] Laplace, P. S. (1812). *Théorie Analytique des Probabilités*, 1-66, 67-163. M. V. Councier, Libraire pour les Mathématiques, Paris.
- [20] Leibniz, G. W. (1832). *Cuarta carta a Wallis. Oeuvres completes*, III, 105. Paris.
- [21] Leibniz, G. W. (1859). *Mathematische Schriften*. Verlag von A. Asher & Comp. Berlin.
- [22] L'Hôpital, M. de. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Chez Louis Roulland. Paris, France.
- [23] Li, X., & Wang, Y. (2018). *Advances in Fractional Newton's Cooling Law*. Applied Mathematics Letters, 76, 28-33.
- [24] Li, Y., & Wang, Y. (2020). *Recent Advances in Fractional Calculus and Its Applications*. Complexity, 2020, 1-2. doi: 10.1155/2020/8818349.
- [25] Letnikov, A. V. (1868). *Theory of Differentiation of an Arbitrary Order*. Mat. Sb., 3, 1-68.
- [26] Machado, J. A. T. (2020). *Fractional Calculus: Fundamentals, Methods, and Applications*. Entropy, 22(12), 1372.
- [27] Mainardi, F. (2010). *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. Imperial College Press.
- [28] Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman.
- [29] Miller, K. S., & Ross, B. (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley.
- [30] Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., & Feliu-Batlle, V. (2010). *Fractional Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*. Springer-Verlag London Limited.
- [31] Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Royal Society, 1, 1-72.
- [32] Oldham, K. B., & Spanier, J. (2006). *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Elsevier.
- [33] Ortigueira, M. D. (2021). *Fractional Calculus: Fundamentals and Applications*. arXiv preprint arXiv:2103.02221.
- [34] Petráš I. (2011). *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*, Springer Science & Business Media.
- [35] Podlubny, I. (1998). *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Academic Press.
- [36] Podlubny, I. (2002). *Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation*. Fractional Calculus and Applied Analysis, 5(4), 367-386. De Gruyter.
- [37] Rosales García, J., & López, R. (2015). *Fractional Newton's Cooling Law*. Journal of Fractional Calculus and Applied Mathematics, 9(2), 87-92.
- [38] Rosales García, J. J., Guía Calderón, M., Martínez Ortiz, J., & Baleanu, D. (2013). *Motion of a Particle in a Resisting Medium Using Fractional Calculus Approach*. Proceedings of the Romanian Academy, 14(1), 42-47.
- [39] Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers.
- [40] Smith, J., & Brown, A. (2019). *Fractional Heat Transfer: Applications and Perspectives*. Journal of Heat Transfer, 141(8), 081010.
- [41] Srivastava, H. M., Saxena, R. K., & Mathai, A. M. (1989). *Univalent Functions, Fractional Calculus, and Their Applications*. Halsted Press. New York, NY.
- [42] Tarasov, V. E. (2010). *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. Springer.
- [43] Tarasov, V. E. (2015). *Fractional Dynamics of Classical and Quantum Systems*. Nonlinear Dynamics, 79(2), 1843-1862. Springer. doi: 10.1007/s11071-014-1865-8.
- [44] Trujillo, J. J. (2010). *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*. Imperial College Press. London, UK.

Lozada-Coronel J.

Escuela Superior de Apan,
 Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
 Carretera Apan-Calpulalpan Km. 8,
 Colonia Chimalpa Tlalayote, Apan, Hidalgo; C.P. 43900.
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1704-9743>
 e-mail: josue_lozada@uaeh.edu.mx

Gutiérrez-Corona J. N.

Departamento de Física y Matemáticas,
Universidad Iberoamericana, Ciudad de México.
Prolongación Paseo de Reforma 880.
Lomas de Santa Fe, México, C.P. 01219, Ciudad de México.
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1765-3206>
e-mail: A2281332@correo.uia.mx

Quezada-Téllez L. A.

Escuela Superior de Apan,
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
Carretera Apan-Calpulalpan Km. 8,
Colonia Chimalpa Tlalayote, Apan, Hidalgo; C.P. 43900.
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9262-9951>
e-mail: luis_quezada@uaeh.edu.mx