MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.15, No.1, 2024, páginas 37-49.
Recibido 14-09-2023. Aceptado 23-04-2024.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v15n1/tepe

SUBASTAS COMO JUEGOS CON INFORMACIÓN COMPLETA E INCOMPLETA

TERESA PÉREZ MUÑOZ

RESUMEN. Las subastas son una de las principales aplicaciones de la teoría de juegos. En 2020 fue otorgado el Premio Nobel de Economía a Paul Milgron y Robert Wilson por sus contribuciones a las subastas. En este artículo, se presentarán tres ejemplos de subastas con dos jugadores o jugadoras, en los cuales, la valoración que cada participante atribuye al bien subastado podría considerarse pública o privada. Cuando la valoración es pública el juego se considera de información completa y se determinará el equilibrio de Nash o el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Sin embargo, si la valoración es privada, el juego se considera de información incompleta y se obtendrá el equilibrio bayesiano de Nash.

1. Introducción

Una *subasta* es un mecanismo de venta o compra, caracterizado por un conjunto de reglas por el cual se determina la asignación de recursos y su precio en función de las *pujas* (una puja es lo que se está dispuesto a dar, cantidad de dinero, por un producto) de las o los participantes [1], [2], [4], [5], [7], [8], [10]. Los participantes en una subasta son el vendedor o vendedora y el o los compradores, a los cuales denominaremos *jugadores o jugadoras* y a la subasta en cuestión *juego*. La *valoración* de un artículo para un comprador o compradora es el precio más alto que se está dispuesto a pagar por el mismo.
El plan de acción destinado a lograr un objetivo específico se define como *estrategia*. Una *estrategia pura* para un jugador o jugadora es un plan de acción determinista, sin embargo, también se podrían tomar acciones de forma estocástica o aleatoria, lo cual nos conduciría a *estrategias mixtas* [1], [6], [9], [10], [11].

En términos generales podríamos describir una subasta como un juego en el cual los compradores de un bien expresan su disposición a pagar por éste mediante pujas y el resultado del juego queda completamente determinado por la información suministrada en forma de pujas y la valoración que cada jugador o jugadora tienen por el bien. Así, cada resultado del juego determinará la ganancia final para cada participante, la cual dependerá de si recibe o no el bien, y en caso de recibirlo, su beneficio neto dependerá del valor que dicho participante atribuya al bien [2], [5], [8].

La valoración que cada participante atribuye al bien subastado podría considerarse pública o privada. Cuando la información es pública, es decir, es del dominio de todos los jugadores o jugadoras, se podrá determinar el equilibrio de Nash si el juego está en forma normal y el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos si tenemos la representación del juego en forma extensiva [1], [6], [10], [11]. Sin embargo, cuando la información es privada, es decir, no todas las jugadoras o jugadores la conocen, el juego se considera un juego con información incompleta [1], [6], [10], [11]. Los juegos con información incompleta se pueden estudiar mediante técnicas probabilísticas como la fórmula de Bayes [1], [3], [6], [10], [11].

John Harsany desarrolló el análisis de juegos con información incompleta y en 1994 recibió el Premio Nobel por este análisis [3].

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11A51, 11D45,11R04,11R11,11R29.
Palabras clave. Juegos, Equilibrio de Nash, Equilibrio bayesiano de Nash, Subastas.

El concepto más importante en la teoría de juegos es el de equilibrio de Nash o el equilibrio bayesiano de Nash, pues éste permite estabilizar en un sentido apropiado un juego [1], [4], [6], [10], [11]. Por lo que es adecuado, para un buen entendimiento de esta teoría, conocer las condiciones para garantizar la existencia de equilibrios de Nash, así como las técnicas para su determinación y/o aproximación.

En este trabajo abordaremos ejemplos de subastas con dos jugadores o jugadoras; a estos juegos se les llama *bipersonales.*

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2, se estudian juegos con información completa. Se presentan dos aplicaciones a subastas. Posteriormente, en la Sección 3 se analizan juegos con información incompleta mediante un ejemplo aplicado a subastas. Finalmente, la Sección 4 constituye las conclusiones.

2. Juegos con información completa

En esta sección consideraremos una subasta como un juego con información completa, *no cooperativo* [1], [6], [10], [11], y las decisiones que tomen los o las jugadoras serán de manera independiente y simultánea [1], [6], [10], [11]. Además, ambos jugadores o jugadoras conocerán las estrategias que pueden seguir y cada uno tratará de maximizar su utilidad, es decir, se supondrá que las o los jugadores son *racionales* [1], [6], [10] [11].

2.1. Juegos en forma normal. Un juego finito bipersonal en forma normal con información completa se compone de los siguientes elementos:

- Un conjunto de jugadores o jugadoras $J = \{1, 2\}$.
- Un conjunto de acciones o estrategias puras para cada jugador o jugadora i, $i = 1, 2$. Denotaremos a estos conjuntos como: S_i, $i = 1, 2$ y supondremos que son finitos.
- Un conjunto de funciones de pagos, u_i, $i = 1, 2$, donde

$$u_i : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \text{ para cada } i \in J.$$

Definición 1. Un *equilibrio de Nash (EN) para un juego bipersonal en estrategias puras* es una pareja de estrategias $s^* = (s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$ tal que

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \text{ para toda } s_1 \in S_1$$

y

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2) \text{ para toda } s_2 \in S_2.$$

2.1.1. ***Aplicación a subastas.*** Raúl y Pedro son los únicos participantes en una subasta en sobre cerrado por una pintura al óleo. Ambos están dispuestos a realizar una única puja de forma simultánea por 1000 ó 2000 pesos. Se da la pintura al jugador que haya pujado la cantidad mayor, y en caso de empate se decide en un volado quién se la lleva. El ganador paga la puja que ha realizado.

De acuerdo a lo anterior, se puede ver a la subasta como un juego con los siguientes elementos:

- Jugadores: $J_1 \equiv$ Raúl, $J_2 \equiv$ Pedro.
- Estrategias puras:

$$S_1 = S_2 = \{1000, 2000\}.$$

- Valoración del objeto: Los dos jugadores saben que Raúl valora la pintura en 3000 pesos y Pedro en 1500 pesos, entonces:

$$v_1 = 3000 \text{ y } v_2 = 1500.$$

- Utilidad o pago: Los pagos para cada jugador tendrán que ver con la combinación de estrategias y sus valoraciones respectivas. Si un jugador puja más que el otro, es decir, $s_i > s_j$, entonces el jugador i pagará su puja y su ganancia será $v_i - s_i$, en caso contrario su ganancia será 0. Si los jugadores pujan la misma cantidad, $s_i = s_j$, considerando que las valoraciones son independientes se tiene que $p(v_i|v_j) = p(v_i)$; en caso de empate se decide en un volado, por tanto, $p(v_i) = 1/2$. De esta manera, las funciones de pago estarán dadas por las ecuaciones (1) y (2):

$$u_1(s_1, s_2; v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & s_1 < s_2 \\ \dfrac{v_1 - s_1}{2} & s_1 = s_2 \\ v_1 - s_1 & s_1 > s_2 \end{cases} \tag{1}$$

$$u_2(s_1, s_2; v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & s_2 < s_1 \\ \dfrac{v_2 - s_2}{2} & s_2 = s_1 \\ v_2 - s_2 & s_2 > s_1 \end{cases} \tag{2}$$

En el Cuadro 1 se representa el juego en forma normal, el cual se compone de los jugadores, las decisiones (estrategias) y los pagos.
Considerando las estrategias y valoraciones se determinan las utilidades para cada jugador de acuerdo con las ecuaciones (1) y (2). Las primeras entradas del juego en forma normal representan los pagos para Raúl y las segundas entradas los pagos para Pedro.

Por ejemplo, si Raúl puja 2000 y Pedro puja 2000, entonces $s_1 = s_2 = 2000$, de la ecuación (1), como Raúl valora la pintura en 3000 pesos, entonces su ganancia será: $(3000 - 2000)/2 = 500$. Por otro lado, Pedro valora la pintura en 1500 pesos, de la ecuación (2), su pago será: $(1500 - 2000)/2 = -250$.

		Pedro	
		1000	**2000**
	1000	$\underline{1000}$, $\underline{250}$	0 , -500
Raúl	**2000**	$\underline{1000}$, $\underline{0}$	$\underline{500}$, -250

CUADRO 1. Juego en forma normal.

Para determinar la solución del juego, analizaremos la mejor respuesta para cada jugador. Las mejores respuestas se subrayarán en el Cuadro 1. Suponiendo que Pedro decide pujar 1000 (observamos la columna que corresponde a 1000 para Pedro), Raúl podría pujar 1000 ó 2000, en ambos casos su ganancia sería de 1000 pesos. Si Pedro decide pujar 2000, a Raúl le conviene pujar 2000, pues su ganancia sería de 500 pesos, si pujara 1000 su pago sería 0.
Suponiendo que Raúl puja 1000 (observamos la fila que corresponde a 1000 para Raúl), a Pedro le conviene pujar 1000, pues su ganancia sería de 250 pesos, si pujará 2000 perdería 500 pesos. Si Raúl decide pujar 2000 a Pedro le conviene pujar 1000, pues su ganancia sería de 0, sin embargo, si puja 2000 perdería 250 pesos.

El o los equilibrios de Nash serán la combinación de estrategias puras que tengan ambas entradas subrayadas. Por tanto, del Cuadro 1, podemos observar que hay dos equilibrios de Nash.

$$EN = \{(1000, 1000), (2000, 1000)\}$$

De los equilibrios de Nash se puede observar que Raúl puede pujar 1000 ó 2000 pesos, en ambos casos no perderá; sin embargo, Pedro al tener una valoración menor por la pintura le conviene pujar 1000 pesos.

2.2. Juego en forma extensiva. Los *juegos dinámicos* con información completa son aquellos en los que las o los jugadores pueden tomar decisiones en distintos instantes del tiempo y donde cada jugador o jugadora conoce las funciones de pagos de todos los jugadores o jugadoras. Su forma de representación natural es la extensiva [1], [6], [10], [11]. La *forma extensiva* de un juego representa la información con la que cuenta cada jugador o jugadora en el momento de tomar una decisión. Además, cada juego en forma extensiva se puede representar mediante un juego en forma normal, en el cual las o los jugadores eligen de manera sumultánea sus estrategias [10]. A este tipo de juegos les podremos determinar su equilibrio de Nash y su *equilibrio de Nash perfecto en subjuegos* (ENPS), el cual es una adecuación y mejora con respecto al EN [1], [6], [10], [11].

Un *juego en forma extensiva* se compone de los siguientes elementos:

- Un conjunto de jugadoras o jugadores $J = \{1, 2\}$.
- Un conjunto no vacío y finito de nodos X. Un nodo representa una posible situación del juego. Hay un nodo inicial u origen (O), nodos de decisión y nodos terminales $(T(X))$.

  Sea
  $$\begin{array}{rcl} \sigma : X & \to & X \\ x & \mapsto & \sigma(x) \end{array}$$
  $\sigma(O) = O$ y para $x \neq O$, $\sigma(x)$ es el nodo inmediatamente predecesor de x.
- Un conjunto A de todas las posibles acciones para cualquier nodo de decisión (no terminal) distinto del origen.
  $$\begin{array}{rcl} \alpha : X - \{O\} & \to & A \\ x & \mapsto & \alpha(x) \end{array}$$
  La función α hace corresponder a cada nodo aquella acción $\alpha(x)$ que lleva desde el nodo inmediato predecesor $\sigma(x)$ al nodo x.
- Un conjunto de nodos de decisión X_i para cada jugador o jugadora i, en los que el jugador i tienen que elegir una acción.
  $$\bigcup_{i \in J} X_i = D(x)$$
  $$\forall\, i, j \in J, \text{ con } i \neq j, \text{ se verifica que } X_i \cap X_j = \varnothing.$$
- Una familia de conjuntos de información[1] H y una función h que asigna a cada nodo x un conjunto de información $h(x)$ al que pertenece.
  $$\begin{array}{rcl} h : X & \to & H \\ x & \mapsto & h(x). \end{array}$$
- Una función de pagos u, en donde $u_i(x)$ indica el pago o utilidad que recibe el jugador o jugadora i si se ha alcanzado el nodo terminal x.
  $$\begin{array}{rcl} r : T(X) & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & u(x) = (u_1(x), u_2(x)). \end{array}$$

Por tanto, un *juego en forma extensiva* Γ está compuesto de los siguientes elementos:
$$\Gamma = \{J, (X, \sigma), (A, \alpha), \{X_i\}_{i \in J}, (A(h))_{h \in H}, u\}\,.$$

Definición 2. Dado un juego Γ con información completa en forma extensiva, y un nodo de decisión x de Γ, decimos que Γ' es un *subjuego* de Γ con inicio en x si Γ' es una parte de Γ que cumple con lo siguiente:

[1] En general, un conjunto de información es un conjunto de nodos de decisión para el mismo jugador o jugadora. Cuando una jugadora o jugador está en un conjunto de información no sabe en cuál de los nodos pertenecientes a dicho conjunto se encuentra [1], [6], [10], [11].

1. Contiene al nodo x y a todos los nodos que siguen a x, y sólo a ellos.
2. El nodo x es un conjunto de información unitario.
3. No rompe ningún conjunto de información.

El siguiente teorema se puede consultar en el libro [1].

Teorema 3. *Un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) es un equilibrio de Nash en el que el comportamiento especificado en cada subjuego es un equilibrio de Nash para el subjuego. Además, todo juego dinámico finito tiene un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.*

2.2.1. ***Aplicación a subastas.*** Se subasta un billete de 1000 pesos entre Raúl y Pedro. Se juega por turnos, Raúl empezará el juego. Aquél a quien le toca jugar puede pasar (P), o pujar con 300 pesos más que el anterior (suponiendo que los tiene). Si un jugador decide pasar, ya no puede pujar en una jugada posterior. Gana el último en pujar (se lleva el billete). Si ninguno ha pujado se llevan 500 pesos cada uno. Ambos jugadores deberán pagar su última puja y ambos saben que tienen solamente 900 pesos.

Esta subasta la podemos representar como un juego con información completa en forma extensiva mediante un diagrama de árbol (Figura 1).

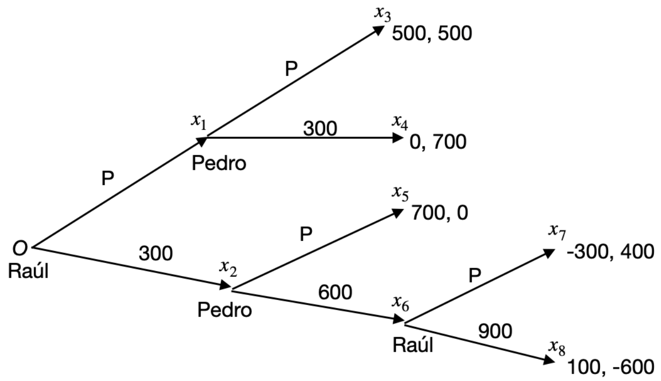

Figura 1. Juego en forma extensiva.

De acuerdo a la descripción de juegos en forma extensiva, se puede ver a la subasta como un juego con los siguientes elementos:

- Jugadores: $J_1 \equiv$ Raúl, $J_2 \equiv$Pedro.
- El conjunto de nodos:

$$X = \{O, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}.$$

  La función σ de predecesores:

$$\begin{aligned} \sigma(O) &= O \\ \sigma(x_1) &= \sigma(x_2) = O, \\ \sigma(x_3) &= \sigma(x_4) = x_1, \\ \sigma(x_5) &= \sigma(x_6) = x_2, \\ \sigma(x_7) &= \sigma(x_8) = x_6. \end{aligned}$$

- El conjunto de acciones A es:

$$A = \{\text{P (pasar)}, 300 \text{ (pujar 300)}, 600 \text{ (pujar 600)}, 900 \text{ (pujar 900)}\}.$$

La función α:

$$\begin{aligned}\alpha(x_1) &= \alpha(x_3) = \alpha(x_5) = \alpha(x_7) = \mathrm{P},\\ \alpha(x_2) &= \alpha(x_4) = 300,\\ \alpha(x_6) &= 600,\\ \alpha(x_8) &= 900.\end{aligned}$$

- El conjunto de nodos de decisión para los jugadores:

$$X_1 = \{O, x_6\}, \tag{3}$$
$$X_2 = \{x_1, x_2\}. \tag{4}$$

- El conjunto de todos los conjuntos de información:

$$\begin{aligned}H_1 &= \{\{O\}, \{x_6\}\},\\ H_2 &= \{\{x_1\}, \{x_2\}\}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$H = \{\{O\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_6\}\}.$$

El conjunto de acciones disponibles en cada conjunto de información:

$$\begin{aligned}A(\{O\}) &= \{\mathrm{P}, 300\},\\ A(\{x_1\}) &= \{\mathrm{P}, 300\},\\ A(\{x_2\}) &= \{\mathrm{P}, 600\},\\ A(\{x_6\}) &= \{\mathrm{P}, 900\}.\end{aligned}$$

- Los nodos terminales y sus pagos:

$$\begin{aligned}r(x_3) &= (500, 500),\\ r(x_4) &= (0, 700),\\ r(x_5) &= (700, 0),\\ r(x_7) &= (-300, 400),\\ r(x_8) &= (100, -600).\end{aligned}$$

Para representar el juego en forma normal se considera que ambos jugadores tienen dos nodos en su conjunto de nodos de decisión (véase las ecuaciones (3) y (4) y la Figura 2), debido a esto, las estrategias para ambos jugadores tienen dos entradas. Raúl tendrá las estrategias $\{(P-P), (P-900), (300-P), (300-900)\}$ y Pedro $\{(P-P), (P-600), (300-P), (300-600)\}$. Nótese, por ejemplo, que la notación 300-900 significa que en su primera elección Raúl elige pujar 300 y en su segunda elección pujar 900.

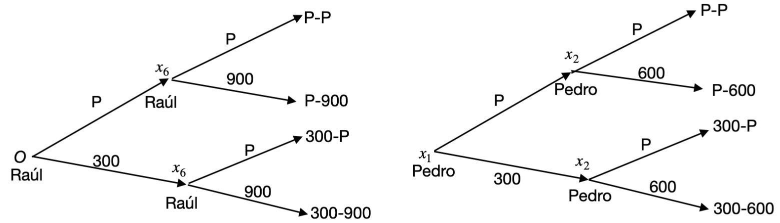

Figura 2. Decisiones para cada jugador.

Si Raúl decide pasar en su primera elección y Pedro decide pasar en su primera elección el pago será 500 pesos cada uno, es decir, la combinación de estrategias (P-P, P-P), (P-P, P-600),(P-900, P-P) y (P-900, P-600) tienen pagos de 500 pesos para cada uno. Por otro lado, si Raúl decide pasar en su primera elección y Pedro decide pujar 300 pesos, Raúl tendrá un pago de 0 pesos y Pedro ganará 700 pesos, es decir, la combinación de estrategias (P-P, 300-P), (P-P, 300-600),(P-900, 300-P) y (P-900, 300-600) hará ganar solamente a Pedro.

Si Raúl decide pujar 300 pesos en su primera elección (nodo O), Pedro podría pujar o pasar. Si Pedro decide pasar Raúl ganará 700 pesos después de pagar su puja, es decir, la combinación de estrategias (300-P, P-P), (300-P, 300-P), (300-900, P-P) y (300-900, 300-P) le hará ganar solamente a Raúl. Si Pedro decide pujar después de que Raúl pujó 300 pesos, Pedro tiene que pujar 300 pesos más, es decir 600 pesos, en este caso Raúl podría decidir pujar o pasar. Si Raúl decide pasar, tendrá que pagar su primera puja y no se llevará el billete, Pedro pagaría su puja y se llevaría 400 pesos. La combinación de estrategias (300-P, P-600) y (300-P, 300-600) hace ganar a Pedro. Sin embargo, si Raúl decide pujar, tendría que pujar 300 pesos más, es decir, 900 pesos. En este caso, Raúl gana 100 pesos después de pagar su puja (pues ganaría el billete) y Pedro tendría que pagar su última puja, es decir, pierde 600 pesos.

De esta manera, el juego en forma normal está representado en el Cuadro 2.

		Pedro			
		P-P	**P-600**	**300-P**	**300-600**
Raúl	**P-P**	500 , 500	$\underline{500}$, 500	0 , $\underline{700}$	0 , $\underline{700}$
	P-900	500 , 500	$\underline{500}$, 500	0 , $\underline{700}$	0 , $\underline{700}$
	300-P	$\underline{700}$, 0	-300 , $\underline{400}$	$\underline{700}$, 0	-300 , $\underline{400}$
	300-900	$\underline{700}$, $\underline{0}$	100 , -600	$\underline{700}$, $\underline{0}$	$\underline{100}$, -600

CUADRO 2. Juego en forma normal.

Para determinar el equilibrio de Nash, subrayamos en el Cuadro 2 las mejores respuestas en el juego en forma normal para cada jugador. Si Pedro decide P-P, a Raúl le conviene elegir 300-P ó 300-900, pues tendrá una ganancia de 700 pesos (primeras entradas por columna del juego en forma normal), mientras que si elige P-P ó P-900 obtendrá una ganancia de 500 pesos. Si Raúl decide P-P, a Pedro le conviene elegir 300-P ó 300-600 (segundas entradas por fila de la matriz de pagos), pues tendrá una ganancia de 700 pesos.

De esta manera, subrayamos las respuestas óptimas para ambos jugadores y los equilibrios de Nash son la combinación de estrategias que tenga ambas respuestas subrayadas. Por tanto, hay dos equilibrios de Nash:

$$EN = \{(300 - 900, P - P), (300 - 900, 300 - P)\}$$

Por otro lado, el algoritmo de inducción hacia atrás o algoritmo de Zermelo [1], [6], [10], [11] permite determinar los ENPS (véase el Teorema 3).

Los subjuegos en la Figura 3, de acuerdo a la Definición 2 son tres. Los nodos que cada subjuego tiene son:

subjuego 1:$\{x_1, x_3, x_4\}$,

subjuego 2:$\{x_6, x_7, x_8\}$,

subjuego 3:$\{x_2, x_5, x_6, x_7, x_8\}$.

De acuerdo al Teorema 3 y al algoritmo de Zermelo, el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos se compone de las mejores respuestas al podar el árbol.

El árbol se poda del final al principio, empezando por los subjuegos más pequeños hasta llegar al origen. En cada vértice se observa el jugador que decide y se elegirá la rama que mayor pago le genere. En la Figura 3, en el nodo x_1 Pedro decidirá; si elige

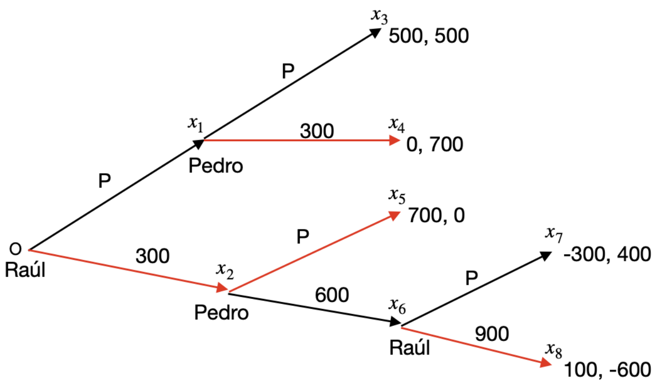

FIGURA 3. ENPS.

P, su pago será de 500 y si elige 300, su pago será de 700, por ello, elegirá 300, esta rama se pinta de rojo y se poda el árbol (Figura 4). En el nodo x_6 Raúl decide; si elige P su pago será -300 y si elige 900 su pago será 100, por tanto, elegirá 900, se pinta la rama de rojo y se poda el árbol. Después de podar los subjuegos 1 y 2 se tiene la Figura 4.

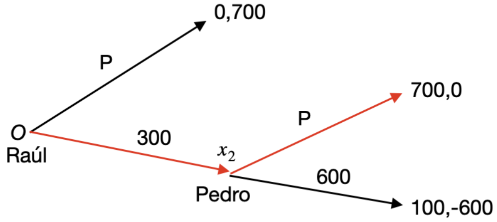

FIGURA 4. Diagrama de árbol podando los subjuegos 1 y 2.

Posteriormente, considerando el nodo x_2 (nodo de elección para Pedro) si Pedro elige P, su pago será de 0 y si elige 600, su pago será de -600, por tanto, elegirá P, se pinta la rama de rojo y se poda el árbol. La Figura 5 representa el árbol después de haber podado los tres subjuegos.

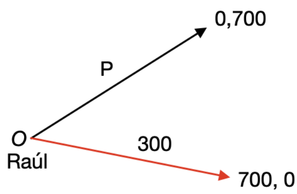

FIGURA 5. Diagrama de árbol podando los subjuegos 1, 2 y 3.

En el nodo inicial, Raúl elige, si puja P su pago será de 0 y si puja 300 su pago será de 700, por tanto, elegirá pujar 300. Se pinta la rama que elegirá de rojo terminando el algoritmo de inducción hacia atrás.

La Figura 3 muestra en color rojo todos los caminos de las mejores respuestas que componen al ENPS:

$$ENPS = \{(300 - 900, 300 - P)\}.$$

Observe que en este ejemplo de subasta, el $ENPS \subseteq EN$, por tanto, como se mencionó, se puede pensar al ENPS como un equilibrio refinado.

3. Juegos con información incompleta

En las secciones anteriores hemos supuesto que la información es completa, es decir, toda la información para describir el juego es de dominio público. En esta sección analizaremos una subasta vista como un juego con información incompleta, por tanto, existirá alguna información que será privada.

Harsanyi notó que cuando se estudian juegos con información incompleta, y se tiene incertidumbre sobre las preferencias de los jugadores o jugadoras, pueden modelarse conjuntamente a base de definir las utilidades de los jugadores o jugadoras directamente en el espacio de estrategias [3].

Los *juegos bayesianos estáticos* se proponen modelizar aquellas situaciones de naturaleza estática en que cada jugador i tiene un conjunto de acciones disponibles A_i, pero además algunos o todos los jugadores o jugadoras disponen de alguna información privada, y las preferencias de cada jugador o jugadora dependen, no sólo de las acciones decididas por todos los jugadores o jugadoras, sino también de la información privada de los jugadores o jugadoras. En estos juegos determinaremos el *equilibrio bayesiano de Nash* (EBN) y seguiremos de cerca el libro de Fujiwara [3]. El EBN será un EN en caso de que la información privada se reduzca a nada [1], [2], [3], [6], [8], [10], [11].

Un *juego bayesiano estático* se compone de los siguientes elementos:

- Un conjunto de jugadoras o jugadores $J = \{1, 2\}$
- Un conjunto de acciones finito y no vacío A_i para cada jugadora o jugador i.
- Un conjunto de estrategias S_i, las cuales dependen de A_i.
- Un conjunto de valoraciones $V_1 = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, y $V_2 = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$, donde v_1 y v_2 son variables aleatorias concentradas en los conjuntos V_1 y V_2 respectivamente, con función de probabilidad conjunta dada por
$$p(b_j, c_k) := p(v_1 = b_j, v_2 = c_k), \ \ j = 1, ..., n \text{ y } k = 1, ..., m.$$
- Los pagos u_i.

Por tanto, un *juego bayesiano bipersonal* G_B queda determinado de la siguiente manera:
$$G_B = \{J; A_1, A_2; S_1, S_2; V_1, V_2; u_1, u_2\}.$$

La siguiente definición es tomada del libro [3] páginas 136-137.

Definición 4. En el juego bayesiano bipersonal, el perfil estratégico $s^* = (s_1^*, s_2^*)$, es un *equilibrio bayesiano de Nash* si
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} u_1(s_1^*(b_j), s_2^*(c_k); b_j, c_k)p(b_j, c_k) \geq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} u_1(s_1(b_j), s_2^*(c_k); b_j, c_k)p(b_j, c_k)$$
$\forall s_1 \in S_1$, y
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} u_2(s_1^*(b_j), s_2^*(c_k); b_j, c_k)p(b_j, c_k) \geq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} u_2(s_1^*(b_j), s_2(c_k), ; b_j, c_k)p(b_j, c_k)$$
$\forall s_2 \in S_2$.

Nota 5. *Se sugiere a la lectora o lector revisar el Lema 6.1, p. 137 del libro de Fujiwara* [3]*. En este Lema se presenta una forma equivalente de establecer las desigualdades de la definición 4. En esta forma equivalente, en lugar de utilizar la probabilidad conjunta $p(b_j, c_k)$, se utilizan las probabilidades condicionales:*
$$p(v_1 = b_j \mid v_2 = c_k)$$
y
$$p(v_2 = c_k \mid v_1 = b_j).$$
Estas probabilidades condicionales se obtienen mediante la regla de Bayes, por lo cual, se justifica el nombre de equilibrio bayesiano de Nash.

3.1. Aplicación a subastas. Raúl y Pedro acuden a comprar una pieza de arte a una subasta que tiene las siguientes reglas:

- Entregarán en sobre cerrado su puja o licitación que puede ser 1000 o 2000 pesos.
- El licitante a quien se adjudique el objeto ha de pagar la puja que hizo.
- Se adjudica el objeto a aquel licitante que escribió la puja más alta. Si las pujas son iguales, se adjudica a uno de ellos, al azar, con probabilidad 1/2.
- Raúl tiene una valoración (cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar por la pieza) de 1500 pesos, que es de dominio público.
- Pedro tiene dos posibles valoraciones privadas, 1500 ó 3000 pesos, que sólo él conoce, pero a las cuales los demás atribuyen probabilidades iguales.

De acuerdo a lo anterior podemos describir a los elementos de la subasta con información incompleta como:

- Jugadores: $J_1 \equiv$ Raúl y $J_2 \equiv$ Pedro.
- Acciones:
$$A_1 = A_2 = \{1000, 2000\}.$$
- Estrategias de Raúl:
$$S_1 = \{1000, 2000\}.$$
- Estrategias de Pedro:
$$S_2 = \{(x_1, x_2), x_1 \in A_2 \text{ y } x_2 \in A_2\}.$$
Pedro puja x_1 si su valoración es 1500 y puja x_2 si su valoración es 3000.
- Valoraciones:
$$V_1 = \{1500\}, \ \ V_2 = \{1500, 3000\}.$$
Probabilidades de acuerdo a V_i:
$$p(v_1 = 1500) = 1,$$
$$p(v_2 = 1500) = p(v_2 = 3000) = \frac{1}{2}.$$
Probabilidad conjunta:
$$p(v_1 = 1500, v_2 = 1500) = \frac{1}{2},$$
$$p(v_1 = 1500, v_2 = 3000) = \frac{1}{2}.$$
- Pagos:

$$u_1(a_1, a_2; v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & a_1 < a_2 \\ \dfrac{v_1 - a_1}{2} & a_1 = a_2 \\ v_1 - a_1 & a_1 > a_2 \end{cases} \tag{5}$$

$$u_2(a_1, a_2; v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & a_2 < a_1 \\ \dfrac{v_2 - a_2}{2} & a_2 = a_1 \\ v_2 - a_2 & a_2 > a_1 \end{cases} \tag{6}$$

La representación del juego en forma normal ante la combinación de estrategias para cada jugador y ante las posibles valoraciones de los jugadores queda representada de la siguiente manera:

- Considerando la valoración de Raúl $v_1 = 1500$, la valoración de Pedro $v_2 = 1500$ y las ecuaciones (5) y (6) tenemos el juego en forma normal para la combinación

de estrategias de cada jugador.
Por ejemplo, si $s_1 = 1000$ y $s_2 = 1000$, entonces los pagos son los siguientes:

$$\text{para Raúl: } u_1 = \frac{1500 - 1000}{2} = 250, \text{ y}$$
$$\text{para Pedro: } u_2 = \frac{3000 - 1000}{2} = 500.$$

		Pedro	
		1000	**2000**
Raúl	**1000**	250, 500	0, 0
	2000	-500, 0	-250, 0

CUADRO 3. Juego en forma normal considerando $v_1 = 1500$ y $v_2 = 1500$.

- Considerando la valoración de Raúl $v_1 = 1500$, la valoración de Pedro $v_2 = 3000$ y las ecuaciones (5) y (6) tenemos el juego en forma normal para la combinación de estrategias de cada jugador.
  Por ejemplo, si $s_1 = 2000$ y $s_2 = 2000$, entonces los pagos son los siguientes:

$$\text{para Raúl: } u_1 = \frac{1500 - 2000}{2} = -250, \text{ y}$$
$$\text{para Pedro: } u_2 = \frac{3000 - 2000}{2} = 500.$$

		Pedro	
		1000	**2000**
Raúl	**1000**	250, 1000	0, 1000
	2000	-500, 0	-250, 500

CUADRO 4. Juego en forma normal considerando $v_1 = 1500$ y $v_2 = 3000$.

Para representar el juego en forma normal considerando las probabilidades de acuerdo a V_i, debemos de recordar que Pedro deberá de pujar si su valoración es 1500 y pujar si su valoración es 3000, por ello, el conjunto de estrategias para Pedro, siguiendo la notación dada en *2.2.1*, es:

$$S_2 = \{1000 - 1000, 1000 - 2000, 2000 - 1000, 2000 - 2000\}.$$

Tomando las representaciones del juego en forma normal (Cuadro 3 y Cuadro 4), considerando el conjunto de estrategias S_2 de Pedro y que cada valoración tiene probabilidad 1/2, los pagos de la subasta en forma normal con información incompleta se determinan de la siguiente manera:

- Considerando $s_1 = 1000$ y $s_2 = 1000 - 2000$, determinaremos los pagos para cada jugador de acuerdo a la Definición 4 (todos los demás casos se determinan de igual manera):

el pago para Raúl: $u_1 = 250\, p(v_1 = 1500, v_2 = 2000) + 0\, p(v_1 = 1500, v_2 = 3000)$

$$u_1 = 250\left(\frac{1}{2}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right) = 125, \text{ y}$$

el pago para Pedro: $u_2 = 500\, p(v_1 = 1500, v_2 = 2000) + 1000\, p(v_1 = 1500, v_2 = 3000)$

$$u_1 = 500\left(\frac{1}{2}\right) + 1000\left(\frac{1}{2}\right) = 750$$

		Pedro	
		1000	**2000**
Raúl	**1000**	250, 500	0, 0
	2000	-500, 0	-250, 0

		Pedro	
		1000	**2000**
Raúl	**1000**	250, 1000	0, 1000
	2000	-500, 0	-250, 500

Azar

$v_2 = 1500$ $(p = \frac{1}{2})$ $\swarrow$ $\searrow$ $v_2 = 3000$ $(1 - p = \frac{1}{2})$

		Pedro			
		1000-1000	**1000-2000**	**2000-1000**	**2000-2000**
Raúl	**1000**	$\underline{250}, \underline{750}$	$\underline{125}, \underline{750}$	$\underline{0}, 500$	$\underline{0}, 500$
	2000	-500, 0	-375, $\underline{250}$	-375, 0	-250, $\underline{250}$

Cuadro 5. Forma normal de la subasta con información incompleta.

En el juego en forma normal Cuadro 5 subrayamos las mejores respuestas para ambos jugadores y obtenemos los equilibrios bayesianos de Nash. Para Raúl comparamos y subrayamos el pago más alto por columnas (primeras entradas del juego en forma normal), mientras que para Pedro comparamos y subrayamos por filas los pagos más altos (segundas entradas del juego en forma normal). Por tanto, tenemos dos equilibrios bayesianos de Nash. A Raúl le conviene pujar siempre 1000 pesos, sin embargo, a Pedro le conviene pujar 1000 ó 2000 pesos si Raúl puja 1000 pesos.

$$\text{EB}=\{(1000, (1000 - 1000)), (1000, (1000 - 2000))\}.$$

4. Conclusiones

Las subastas constituyen una de las principales aplicaciones de los juegos estáticos con información incompleta y se usan para comprar o vender diversos artículos. Su importancia no ha dejado de crecer en las últimas décadas. Existe una gran cantidad de tipos de subastas, sin embargo, en este artículo corto solamente se consideran algunas con dos jugadores o jugadoras, no obstante, se pueden estudiar subastas con más de dos jugadoras o jugadores y con más de dos estrategias [1], [4], [6], [8], [10]. Por ello se invita a la lectora o lector a adentrarse al vasto mundo de subastas estudiadas mediante la Teoría de Juegos.

Agradecimientos. La autora expresa su gratitud a la revisora o revisor anónima (o) que contribuyeron para mejorar y enriquecer el trabajo.

Referencias

[1] Cerdá, E., Jimeno, J. L., and Pérez, J. *Teoría de Juegos*. Madrid, Spain: Pearson Educación, 2014.
[2] Flores-Zarur, K., and Olvera-Lopez, W. *A Bayesian equilibrium for simultaneous first-price auctions for complementary goods and quasi-linear bids*. Journal of Dynamics and Games, 2022.
[3] Fujiwara-Greve, T. *Non-cooperative game theory*. Springer, 2015.
[4] Gardner, R. *Juegos para Empresarios y Economistas*. Antoni Bosch editor, 2022.
[5] Ghosh, G. *Simultaneous auctions with budgets: Equilibrium existence and characterization*. Games and Economic Behavior, 126, 75-93, 2021.
[6] Gibbons, Robert. *Un Primer Curso de Teoría de Juegos*. Antoni Bosch Editor, 1993.
[7] Kolokoltsov, V.N. and Malafeyev, O.A., *Understanding Game Theory: Introduction to the Analysis of Many Agent Systems with Competition and Cooperation*, World Scientific, 2010.
[8] Krishna, V. *Auction Theory*. Academic Press, 2009.
[9] Montes-de-Oca, R. *Muchos juegan... ¡yo también quiero jugar!*, MIXBA'AL, Revista Metropolitana de Matemáticas, Vol.14, No.1, 27-36, 2023.
[10] Tadelis, S. *Game Theory: an Introduction*, Princeton University Press, 2013.
[11] Webb, J.N. *Game Theory: Decisions, Interactions and Evolution*, Springer, 2007.

Teresa Pérez Muñoz
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.
e-mail: `tepm@xanum.uam.mx`