MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.15, No.1, 2024, páginas 51-66.
Recibido 06-06-2021. Aceptado 27-12-2023.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v15n1/aze

EL PROGRAMA DE LANGLANDS Y SU APLICACIÓN AL PROBLEMA INVERSO DE LA TEORÍA DE GALOIS

ADRIÁN ZENTENO

Resumen. En la ultima década, el estudio de la imagen de representaciones de Galois asociadas a representaciones automorfas, vía la correspondencia de Langlands, ha resultado ser una estrategia muy efectiva para realizar grupos finitos de matrices como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$. El objetivo de este artículo es presentar una panorámica general del problema inverso de la teoría de Galois con énfasis en algunos de los nuevos resultados obtenidos usando dicha estrategia.

1. Introducción

Sea $F/\mathbb{Q}$ una extensión finita del campo de los números racionales. A dicha extensión siempre podemos asociarle un grupo finito G, a saber, el grupo de automorfismos de F que dejan fijos a los elementos de $\mathbb{Q}$. En particular, cuando $F/\mathbb{Q}$ es de Galois, el grupo G es conocido como el grupo de Galois de la extensión $F/\mathbb{Q}$ y se denota por $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$. En un primer curso de Teoría de Galois, es un ejercicio común calcular el grupo de Galois de algunas extensiones finitas de Galois. Sin embargo, también podríamos plantearnos de manera natural la pregunta inversa, es decir, dado un grupo finito G ¿existe una extensión de Galois finita $F/\mathbb{Q}$ tal que su grupo de Galois $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ es isomorfo a G? Esta pregunta es conocida como el problema inverso de la teoría de Galois.

Cuando G es un grupo abeliano la respuesta a esta pregunta es bien conocida y puede obtenerse como consecuencia de la teoría de campos de clases (§ 2). Por otro lado, a pesar de que este problema ha sido resuelto de manera afirmativa para muchas familias de grupos finitos no abelianos, obtener una solución completa al problema inverso de la teoría de Galois continua siendo una importante área de investigación.

Los primeros grupos finitos no abelianos para los cuales el problema inverso de la teoría de Galois fue resuelto, fueron los grupos simétricos S_n y los grupos alternantes A_n. Estos grupos fueron realizados como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$ por Hilbert [35] en 1892, siendo dicha realización una consecuencia de su famoso teorema de irreducibilidad el cual, de hecho, fue demostrado para dicho propósito. En 1937, resolviendo una serie de problema de encaje, Scholtz [65] y Reichardt [59] demostraron que todos los p-grupos finitos ocurren como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$. Usando esta misma estrategia, combinada con un complicado proceso de reducción, Shafarevich [71] logro realizar todos los grupos solubles como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$ en 1954 [57, IX.6]. El último gran avance del siglo pasado en el problema inverso de la teoría de Galois ocurrió en los 80, cuando Matzat, Thompson y varios otros matemáticos demostraron, utilizando el llamado método de rigidez, que todos los grupos simples esporádicos, a excepción del grupo de Mathieu M_{23}, pueden realizarse como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$ [52, §II.9]. Para más detalles sobre la historia y los diferentes métodos utilizados para intentar resolver el problema inverso de la teoría de Galois en los siglos XIX y XX invitamos al lector a consultar las siguientes referencias: [52] [70] [75] [76].

Desafortunadamente, los métodos antes mencionados han resultado ser poco efectivos cuando se aplican a grupos de matrices con coeficientes en campos finitos y solo han tenido éxito en algunos casos muy particulares cuando el campo finito posee

2010 *Mathematics Subject Classification.* 12F12, 11R37, 11F70, 11F80, 20G40, 11–02, 12–02.
Palabras clave. Teoría de Galois inversa, grupos finitos de tipo Lie, teoría de campos de clases, formas modulares, representaciones de Galois.

un número primo (o el cuadrado de un número primo) de elementos [52, §II.10.2]. Sin embargo, en años recientes el estudio de la imagen de representaciones de Galois asociadas a representaciones automorfas (vía la correspondencia de Langlands) con ciertas condiciones locales, ha resultado ser una estrategia efectiva para realizar grupos de matrices como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$, sin restricciones en la cardinalidad de sus campos de coeficientes [1] [2] [3] [4] [27] [40] [41] [79] [80] [81] [82]. El objetivo principal de este artículo es explicar el funcionamiento de dicha estrategia y presentar algunos de los resultados más relevantes obtenidos en lo que va de este siglo, en esta particular linea de investigación.

2. El problema inverso de la teoría de Galois para grupos abelianos

El objetivo principal de la teoría de campos de clases es describir las extensiones de un campo local o global en términos de la aritmética del propio campo. Para extensiones abelianas, esta teoría fue desarrollada a finales del siglo XIX y principios del siglo XX por Artin, Chevalley, Hasse, Hilbert, Kronecker, Takagi, Weber y muchos otros matemáticos [53, Dramatis Personæ]. En esta sección recordaremos brevemente dicha teoría y explicaremos cómo solucionar el problema inverso de la teoría de Galois para grupos abelianos usando esta herramienta.

Sea F un campo global y $\mathcal{O}_F$ su anillo de enteros. Recordemos que el anillo de adeles $\mathbb{A}_F$ de F se define como el producto restringido $\prod_v' F_v$ de todas las completaciones F_v de F en los lugares v de F y el grupo de ideles $\mathbb{I}_F$ de F se define como el producto restringido $\prod_v' F_v^\times$ de todos los grupos multiplicativos $F_v^\times$. Recordemos también, que el grupo multiplicativo $F^\times$ se encaja de manera canónica en $\mathbb{I}_F$ vía el encaje diagonal $x \mapsto (x, x, x, \ldots)$, por lo que podemos definir el grupo de clases de ideles de F como el grupo topológico $C_F := \mathbb{I}_F/F^\times$. En su versión global, la reciprocidad de Artin afirma que existe un único homomorfismo continuo

$$\theta_F : C_F \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$$

conocido como el mapeo global de Artin, tal que para cada extensión E/F contenida en la extensión máxima abeliana F^{ab} de F, el homomorfismo $\theta_{E/F} : C_F \to \mathrm{Gal}(E/F)$ (obtenido al componer θ_F con el mapeo cociente $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F) \to \mathrm{Gal}(E/F)$) es suprayectivo con núcleo el subgrupo norma $N_{E/F}(C_E) \trianglelefteq C_F$ e induce el isomorfismo $C_F/N_{E/F}(C_E) \cong \mathrm{Gal}(E/F)$. Otro resultado importante es el teorema de existencia global, el cual afirma que para cada subgrupo abierto $H \leq C_F$ de índice finito, existe una única extension abeliana finita E/F en F^{ab} tal que $H = N_{E/F}(C_E)$.

Combinando los resultados anteriores y tomando completaciones profinitas, obtenemos el teorema principal de la teoría de campos de clases global, el cual afirma que para cualquier campo global F, el mapeo global de Artin θ_F induce un isomorfismo canónico de grupos profinitos

$$\widehat{\theta}_F : \widehat{C}_F \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$$

que a su vez, induce la siguiente correspondencia:

$$\big\{\text{Subgrupos abiertos de indice finito } H \leq C_F\big\} \longleftrightarrow \big\{\text{Extensiones abelianas fintias } E/F\big\}$$

la cual describe a las extensiones abelianas de F en términos de los subgrupos de C_F. En particular, si $F = \mathbb{Q}$, podemos calcular el grupo de clases de ideles de $\mathbb{Q}$ y sus subgrupos norma (que se corresponden con los campos ciclotómicos) para obtener el teorema de Kronecker-Weber, el cual afirma que cada extension abeliana de $\mathbb{Q}$ esta contenida en una extensión ciclotómica.

Cuando F es un campo local, tenemos el mapeo local de Artin $\theta_F : F^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$ y resultados similares a los del caso global pueden ser obtenidos. Invitamos al lector a consultar las siguientes referencias: [7] [53] [56] para un estudio detallado de la teoría de campos de clases local y global.

Como mencionamos en la introducción, una interesante consecuencia de la teoría de campos de clases, es la solución del problema inverso de la teoría de Galois para grupos abelianos. De manera más precisa, sea G un grupo abeliano finito el cual, por el teorema fundamental de los grupos abelianos finitos, es isomorfo a un producto directo de la forma $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_m\mathbb{Z}$. Por el teorema de Dirichlet sobre progresiones aritméticas, para cada $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$, podemos elegir un primo p_i tal que $p_i \equiv 1 \bmod n_i$. Ahora, consideremos la extension ciclotómica $\mathbb{Q}(\zeta_{p_i})/\mathbb{Q}$, la cual es abeliana con grupo de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p_i})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/(p_i-1)\mathbb{Z}$. Como n_i divide a $p_i - 1$, por el teorema fundamental de la teoría de Galois, existe una extension abeliana F_i con grupo de Galois $\mathrm{Gal}(F_i/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$. Finalmente, por el teorema de Kronecker-Weber, las extensiones F_i están contenidas en diferentes extensiones ciclotómicas $\mathbb{Q}(\zeta_{p_i})$. Luego, las F_i son linealmente disjuntas sobre $\mathbb{Q}$ y el compositum $F = \prod F_i$ es una extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ con grupo de Galois $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ isomorfo a G, lo cual resuelve el problema inverso de la teoría de Galois para grupos abelianos.

Las primeras indicaciones de la forma que debería tener la teoría de campos de clases para extensiones no abelianas aparecieron en una carta de Langlands a Weil en 1967 [48]. Esta teoría es ahora conocida como el programa de Langlands y tendremos oportunidad de hablar de ésta y de sus consecuencias en el problema inverso de la teoría de Galois para grupos no abelianos en las siguientes secciones.

3. Usando representaciones de Galois en el siglo XX

Una manera de agrupar a todas las extensiones finitas de Galois de $\mathbb{Q}$ (contenidas en una cerradura algebraica $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$) es a través del grupo de Galois absoluto de $\mathbb{Q}$, el cual podemos definir como el limite inverso

$$G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \varprojlim_{F/\mathbb{Q}} \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$$

indexado por todas las extensiones finitas de Galois $F/\mathbb{Q}$ contenidas en $\overline{\mathbb{Q}}$. El grupo $G_{\mathbb{Q}}$ puede ser equipado con la topología de Krull, que hace de este un grupo topológico Hausdorff, compacto y totalmente disconexo. Para estudiar este grupo, es usual considerar las representaciones de Galois (morfismos continuos de grupos) de $G_{\mathbb{Q}}$ en el grupo general lineal $\mathrm{GL}_n(E)$ de dimension $n \in \mathbb{N}$, donde E es un campo topológico.

Sea ℓ un número primo. De particular interés para nosotros será el caso cuando $E = \overline{\mathbb{F}}_\ell$, una cerradura algebraica del campo finito $\mathbb{F}_\ell$ con ℓ elementos equipada con la topología discreta. De manera más precisa, sea

$$\overline{\rho}_\ell : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

una representación de Galois. Notemos, que la imagen de $\overline{\rho}_\ell$ esta contenida en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_{\ell^s})$ para algún entero positivo s, pues $G_{\mathbb{Q}}$ es compacto y $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ tiene la topología discreta. Luego, $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_\ell)$ siempre será un grupo finito de matrices. Por otro lado, como $\ker(\overline{\rho}_\ell) \subseteq G_{\mathbb{Q}}$ es un subgrupo abierto, existe una extensión finita de Galois $F/\mathbb{Q}$ tal que $\ker(\overline{\rho}_\ell) = G_F := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$. Luego,

$$\mathrm{Im}(\overline{\rho}_\ell) \simeq G_{\mathbb{Q}}/\ker(\overline{\rho}_\ell) \simeq G_{\mathbb{Q}}/G_F \simeq \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}).$$

Esto muestra, que dada una representación de Galois $\overline{\rho}_\ell$, siempre podemos obtener una realización de la imagen de $\overline{\rho}_\ell$ como grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$. Por lo tanto, si podemos construir representaciones de Galois con imagen controlada, podemos usar éstas para realizar nuevos grupos de matrices como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$.

Con el fin de utilizar esta estrategia para obtener nuevos resultados sobre el problema inverso de la teoría de Galois, necesitamos encontrar una fuente de objetos matemáticos que nos provea de representaciones de Galois con la imagen deseada. Inspirado por los trabajos de Serre [69] y Swinnerton-Dyer [73], el primer matemático que abordó el problema inverso de la teoría de Galois desde esta perspectiva (de manera explicita) fue Ribet [61] en 1975, quien utilizó formas modulares como su fuente proveedora de representaciones de Galois. Grosso modo, las formas modulares son funciones holomorfas definidas en el semiplano superior que presentan un buen comportamiento respecto a la acción de grupo modular $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (o alguno de sus subgrupos de congruencias) y que desde sus inicios, han jugado un papel central en la teoría de números. Invitamos al lector a consultar [25] para un estudio detallado de estos objetos.

En el corazón de la relación que existe entre formas modulares y teoría de números esta el hecho de que podemos asociarles representaciones de Galois. De manera más precisa, sea f una forma modular cuspidal de nivel N, peso $k \geq 2$ y nebentypus ψ (que por brevedad escribiremos $f \in S_k(N, \psi)$) y sea $\sum_{n\geq 1} a_n(f)q^n$ su q-expansión de Fourier, donde $q = q(z) = e^{2\pi iz}$. Definimos el campo de coeficientes de f como $\mathbb{Q}_f := \mathbb{Q}(\{a_n(f) : (n, N) = 1\})$ el cual puede demostrarse, que es un campo de números. Luego, para cada ideal máximo λ del anillo de enteros $\mathcal{O}_f$ de $\mathbb{Q}_f$, denotaremos por $\mathbb{Q}_{f,\lambda}$ la completación de $\mathbb{Q}_f$ en λ y por $\overline{\mathbb{Q}}_{f,\lambda}$ una cerradura algebraica de $\mathbb{Q}_{f,\lambda}$. Cuando $f \in S_k(N, \psi)$ es una forma propia normalizada (es decir, $a_1(f) = 1$ y f es una forma propia bajo la acción de los operadores de Hecke), para cada ideal máximo λ de $\mathcal{O}_f$, existe (gracias al trabajo de Shimura para $k = 2$ y Deligne para $k > 2$ [22]) una representación de Galois

$$\rho_{f,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_{f,\lambda}),$$

tal que para cada primo $p \nmid N\ell$ (donde ℓ denota el número primo abajo de λ) $\rho_{f,\lambda}$ es no ramificada, $\mathrm{Tr}(\rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_p)) = a_p(f)$ y $\det(\rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_p)) = \psi(p)p^{k-1}$ (donde Frob_p denota un elemento de Frobenius en p).

Sean $\mathcal{O}_{f,\lambda}$ el anillo de enteros de $\mathbb{Q}_{f,\lambda}$ y $\overline{\mathcal{O}}_{f,\lambda}$ el anillo de valuación de $\overline{\mathbb{Q}}_{f,\lambda}$, los cuales son anillos locales. Notemos que $\rho_{f,\lambda}$ puede ser conjugada de modo que su imagen esté contenida en $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathcal{O}}_{f,\lambda})$. Luego, podemos componer $\rho_{f,\lambda}$ con la reducción módulo el ideal máximo de $\overline{\mathcal{O}}_{f,\lambda}$ y obtener la representación residual

$$\overline{\rho}_{f,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_{\ell}).$$

Con el fin de enunciar el resultado principal de Ribet sobre la imagen de $\overline{\rho}_{f,\lambda}$, necesitamos introducir un par de condiciones en los coeficientes de Fourier de f. Diremos que f tiene multiplicación compleja, si existe un carácter de Dirichlet χ tal que $a_p(f)\chi(p) = a_p(f)$, para casi todo primo p (es decir, todos salvo un número finito). Por otro lado, diremos que un torcimiento de f por un carácter de Dirichlet χ es interior, si existe un automorfismo de campos $\sigma_\chi : \mathbb{Q}_f \to \mathbb{Q}_f$ tal que $a_p(f)\chi(p) = \sigma_\chi(a_p(f))$, para casi todo primo p. En [61] (para $N = 1$) y [63] (para N arbitrario), Ribet demostró el siguiente resultado acerca de la imagen de $\overline{\rho}_{f,\lambda}$.

TEOREMA 1. *Sea $f \in S_k(N, \psi)$ una forma propia normalizada sin multiplicación compleja y sin torcimientos interiores y $\mathbb{F}_\lambda := \mathcal{O}_{f,\lambda}/\lambda$. Entonces para casi todo ideal máximo λ de $\mathcal{O}_f$ se tiene que*

$$\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{f,\lambda}) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda) : \det(g) \in (\mathbb{F}_\ell^\times)^{k-1}\}.$$

Resultados similares al teorema anterior pueden demostrarse para formas modulares con multiplicación compleja y con torcimientos interiores [62] [63], pero serán omitidos en este texto para simplificar la exposición.

Como consecuencia inmediata del teorema 1, tenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 2. *El grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ ocurre como grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ para casi todo primo ℓ.*

Demostración. Es suficiente demostrar que existe una forma modular f de peso $k = 2$ y campo de coeficientes $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}$ (luego $\mathbb{F}_\lambda = \mathbb{F}_\ell$) que satisfaga las condiciones del teorema de Ribet. Actualmente muchas formas modulares pueden construirse explícitamente y encontrarse en la base de datos LMFDB [83]. En nuestro caso la forma modular 11.2.a.a en LMFDB satisface las condiciones requeridas, por lo que nuestro corolario queda demostrado. □

Observación 1. Este resultado también puede obtenerse usando un resultado clásico de Serre [68, Théorème 2] el cual afirma que las representaciones de Galois $\overline{\rho}_{E,\ell}$:

$G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ asociadas a una curva elíptica $E/\mathbb{Q}$ (usando los puntos de ℓ-torsión de $E(\overline{\mathbb{Q}})$) sin multiplicación compleja son suprayectivas para casi todo ℓ. De hecho, haciendo una búsqueda rápida en la LMFDB, podemos encontrar ejemplos de curvas elípticas tales que sus representaciones de Galois asociadas son suprayectivas para todo ℓ. Por ejemplo, la curva 1001.c1 en [83] con ecuación de Weierstrass $y^2 + y = x^3 - x^2 - 15881x + 778423$. Por lo que podemos concluir, que de hecho, todos los grupos $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ ocurren como grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$. En este artículo, no consideraremos más las representaciones de Galois asociadas a variedades algebraicas pues, hasta donde sabemos, éstas solo nos permiten realizar grupos de matrices con coeficientes en campos con un número primo de elementos como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$.

Un resultado más interesante, sobre todo por la época en la que fue demostrado, es el resultado original de Ribet concerniente al problema inverso de la teoría de Galois. De manera más precisa, sea $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,\lambda}$ la proyectivización de $\overline{\rho}_{f,\lambda}$, la cual se obtiene al componer $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ con la proyección natural $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$. Notemos que si k es impar, $\mathrm{Im}(\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,\lambda}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$, mientras que si k es par, $\mathrm{Im}(\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,\lambda}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$ cuando $[\mathbb{F}_\lambda, \mathbb{F}_\ell]$ es par e $\mathrm{Im}(\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,\lambda}) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$ cuando $[\mathbb{F}_\lambda, \mathbb{F}_\ell]$ es impar. En [61, §8], Ribet construyó una forma modular $f \in S_{24}(1, \psi_{\mathrm{triv}})$, con campo de coeficientes $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(\sqrt{144169})$, satisfaciendo su teorema. Luego, aplicando el teorema 1, tenemos que para casi todo ℓ inerte en $\mathcal{O}_f$ (luego $[\mathbb{F}_\lambda, \mathbb{F}_\ell] = 2$), $\mathrm{Im}(\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,\lambda}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^2})$, mientras que para casi todo ℓ escindido en $\mathcal{O}_f$ (luego $[\mathbb{F}_\lambda, \mathbb{F}_\ell] = 1$), $\mathrm{Im}(\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,\lambda}) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_\ell)$. De donde obtenemos el sigue resultado.

Corolario 3. *El grupo* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^2})$ *ocurre como grupo de Galois sobre* $\mathbb{Q}$ *para casi todo primo* ℓ *tal que* 144169 *no es un cuadrado módulo* ℓ.

Notemos que, usando la forma modular construida por Ribet, también podemos realizar al grupo $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ como grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ para casi todo ℓ tal que 144169 es un cuadrado módulo ℓ. Sin embargo, no incluimos este caso en el corolario 3 porque (como indicamos en la observación 1) se sigue directamente del resultado de Serre para curvas elípticas que es anterior al trabajo de Ribet. A pesar de esto, vale la pena señalar que cada forma modular que satisface el teorema 1, nos permite realizar algún grupo de la forma $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$ o $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$, $s \in \mathbb{N}$, como grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ para casi todo ℓ. En vista de esta observación, dada una forma propia normalizada f, diremos que ℓ es un *primo excepcional* de f, si la imagen de $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{f,\lambda}$ no es un grupo de la forma $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$ o $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$ para algún entero $s > 0$. En particular, cualquier forma modular satisfaciendo el teorema de Ribet solo tiene un número finito de primos excepcionales.

Finalmente, nos gustaría mencionar que usando este método, Reverter y Vila [60] demostraron en 1995 que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^{2r}})$ y $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^{2r-1}})$ ocurren como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$ para infinitos primos ℓ, cuando $2 \leq r \leq 5$.

4. Usando representaciones de Galois en el siglo XXI

Como hemos vistos en los resultados de la sección anterior, el método de Ribet para realizar grupos finitos de matrices de la forma $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$ y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$ como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$ depende de nuestra capacidad de construir formas modulares con coeficientes de Fourier apropiados, por lo que a pesar de los enormes avances a nivel computacional de los últimos años (que pueden observarse, por ejemplo, en la base de datos LMFDB) el mayor obstáculo sigue siendo lograr cubrir los casos en los que s es muy grande. Además, si nuestro objetivo es realizar grupos de matrices como grupos de Galois para todo ℓ, otro obstáculo que puede ser un dolor de cabeza al aplicar el método de Ribet, es lidiar con el conjunto de primos excepcionales el cual nos gustaría poder acotar con precisión. Sin embargo, como puede verse en [12] [58], esto no es una tarea fácil.

En la conferencia "Modular forms on Schiermonnikoog" de 2006, Dieulefait y Wiese [26] [79] observaron que, usando algunas técnicas desarrolladas por Khare y Wintenberger en su trabajo sobre la conjetura de modularidad de Serre [42], es posible construir formas modulares sin primos excepcionales las cuales no dependen de manera directa del conocimiento de sus coeficientes de Fourier. De manera más precisa, sean p y q dos primos racionales distintos y $\mathbb{Q}_{q^2}$ la única extensión cuadrática no ramificada de $\mathbb{Q}_q$. Diremos que una representación de Galois $\rho_q : G_{\mathbb{Q}_q} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ de $G_{\mathbb{Q}_q} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_q/\mathbb{Q}_q)$ es mansamente diedral de orden p, si existe un carácter mansamente ramificado $\chi_q : G_{\mathbb{Q}_{q^2}} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ de $G_{\mathbb{Q}_{q^2}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_q/\mathbb{Q}_{q^2})$, tal que su restricción al grupo de inercia $I_q \leq G_{\mathbb{Q}_{q^2}}$ es de orden p y

$$\rho_q \cong \mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{q^2}}}^{G_{\mathbb{Q}_q}}(\chi_q).$$

Diremos que una forma propia normalizada f es *mansamente diedral* de orden p en el primo q, si para cada λ que no divide ni a p ni a q, la representación local $\rho_{f,\lambda}|_{D_q}$ (la restricción de $\rho_{f,\lambda}$ a un grupo de descomposición $D_q \cong G_{\mathbb{Q}_q}$ en q) es mansamente diedral de orden p. Imponiendo ciertas condiciones de congruencia en los primos p y q, se puede demostrar que, para cada λ que no divide ni a p ni a q, la imagen de $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ no es soluble [42, Lemma 6.3.i]. Luego, por la clasificación de subgrupos finitos máximos de $\mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ de Dickson [79, Proposition 2.1], para todo λ que no divide ni a p ni a q, la imagen de $\overline{\rho}_{f,\lambda}^{\mathrm{proj}}$ es isomorfa a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$ o a $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$ para algún entero positivo s. Además, cabe señalar que usando el teorema de Dirichlet para progresiones aritméticas, se puede demostrar que existen infinitas parejas de primos p y q con las cuales podemos construir representaciones locales mansamente diedrales. Luego, podemos elegir al primo p tan grande como queramos y hacer que la imagen de nuestras representaciones sean tan grandes como deseemos. Por lo tanto, si logramos construir formas propias normalizadas que sean mansamente diedrales en algún primo, obtendremos formas modulares con solo dos primos excepcionales y además la imagen de sus representaciones de Galois asociadas será tan grande como queramos. Mejor aún, en [27], Dieulefait y Wiese demostraron que los dos primos excepcionales de una forma modular mansamente diedral pueden ser eliminados si logramos demostrar que ésta es mansamente diedral en un segundo primo el cual debe estar relacionado de manera apropiada con el primero vía la ley de reciprocidad cuadrática.

Usando un resultado sobre levantamiento de nivel de formas modulares, debido a Diamond y Taylor [24, Theorem A], Dieulefait y Wiese [27] han logrado construir formas modulares con las características antes mencionadas. Groso modo, un teorema de levantamiento de nivel nos permite construir formas modulares de nivel N' a partir de formas modulares de nivel N, donde $N|N'$, respetando cierta compatibilidad entre sus representaciones de Galois asociadas. Luego, la idea de la construcción de Dieulefait y Wiese es la siguiente: Empezamos con una forma modular $f \in S_2(N, \psi_{\mathrm{triv}})$ que satisface las hipótesis del teorema de levantamiento de nivel de Diamond y Taylor. Eligiendo un primo q y aplicando el teorema de levantamiento de nivel obtenemos una forma modular $f' \in S_2(Nq^2, \psi_{\mathrm{triv}})$ que es mansamente diedral en q y que también satisface las hipótesis del teorema de Diamond y Taylor. Por lo tanto, podemos elegir un segundo primo u y aplicar nuevamente el teorema de levantamiento de nivel para obtener una forma modular $f'' \in S_2(Nq^2u^2, \psi_{\mathrm{triv}})$ la cual es mansamente diedral en q y u como queríamos. Aplicando este proceso para infinitas parejas de primos se obtiene el siguiente resultado [27, Theorem 6.2].

TEOREMA 4 (Dieulefait-Wiese). *Existen familias infinitas $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de formas propias normalizadas de peso 2 y nebentypus trivial tales que, para toda n, el conjunto de primos excepcionales de f_n es vació. Además, fijando un primo ℓ y un ideal $\lambda_n|\ell$, el tamaño de la imagen $\overline{\rho}_{f_n,\lambda_n}$ es no acotado cuando n tiende a infinito.*

Como consecuencia de este resultado tenemos el siguiente corolario concerniente al problema inverso de la teoría de Galois.

Corolario 5. *Para cada primo ℓ al menos uno de los grupos:* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$ *o* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$ *ocurre como grupo de Galois sobre* $\mathbb{Q}$ *para infinitos enteros* $s > 0$.

Como podemos observar, este resultado se distingue de los obtenidos en el siglo XX, porque éste no limita el tamaño de s y al mismo tiempo cubre a todos los primos ℓ. En el resto de este trabajo, explicaremos cómo, en la ultima década, estas ideas se han extendido a representaciones de Galois de dimensión arbitraria con el fin de realizar nuevos grupos finitos de matrices como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$.

5. La correspondencia de Langlands global

Un hecho usual en la teoría moderna de formas automorfas, es remplazar formas modulares por representaciones automorfas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Groso modo, dado que el semiplano superior $\mathbb{H}$ puede ser visto como un espacio simétrico para $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ actuando por transformaciones de Möbius, una forma modular cuspidal f definida sobre $\mathbb{H}$ puede levantarse (primero) a una función real en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ y luego a una función adélica en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Este levantamiento, nos permite asociar a cada forma propia normalizada f, una representación automorfa cuspidal π_f de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ y remplazar las herramientas de variable compleja por potentes herramientas de análisis armónico no abeliano. Invitamos al lector a consultar [19, Lecture 2] para más detalles sobre el tema.

A la luz de esta idea, el resultado de Shimura y Deligne [22] (mencionado en la sección 3) sugiere que (en general), a cada representación automorfa cuspidal π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, deberíamos ser capaces de asociarle un campo de números E_π y, para cada ideal máximo λ de $\mathcal{O}_{E_\pi}$, una representación de Galois $\rho_{\pi,\lambda} : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_n(\overline{E}_{\pi,\lambda})$, donde $E_{\pi,\lambda}$ denota la completación de E_π en el ideal λ. Desafortunadamente, es bien sabido por los expertos que hay "más" representaciones automorfas cuspidales de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ que representaciones de Galois de dimensión n. Incluso cuando $n = 1$, por teoría de campos de clases global, lo que tenemos es una biyección entre caracteres continuos de $G_\mathbb{Q}$ y caracteres de orden finito de $C_\mathbb{Q}$. Con el fin de tratar este problema en el caso de dimensión 1 (es decir, para poder considerar a todos los caracteres de $C_\mathbb{Q}$) Weil remplazó a $G_\mathbb{Q}$ por el grupo de Weil $W_\mathbb{Q}$ [77]. Sin embargo, se puede demostrar que las representaciones del grupo de Weil no son suficientes cuando $n \geq 2$, por lo que formular una correspondencia análoga a la del caso 1-dimensional continua siendo muy complicada y misteriosa. A pesar de esto, existen varios enfoques para tratar de formalizar una correspondencia de este tipo para $n > 1$. Por ejemplo, podríamos insistir en trabajar con todas las representaciones automorfas cuspidales π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, e intentar asociarle a todas ellas representaciones $\rho_{\pi,\ell} : \mathcal{L}_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ del conjetural grupo de Langlands $\mathcal{L}_\mathbb{Q}$. El lector puede consultar [5] para más detalles acerca de esta formulación. Alternativamente, Clozel [18], Buzzard y Gee [15] han propuesto una formulación de la (conjetural) correspondencia global de Langlands para GL_n sobre $\mathbb{Q}$ como sigue: Para cada primo ℓ y para cada entero $n \geq 1$, existe una correspondencia

$$\left\{\begin{matrix}\text{Representaciones automorfas cuspidales}\\ L\text{-algebraicas } \pi \text{ de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Representaciones irreducibles}\\ \rho_{\pi,\ell} : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\end{matrix}\right\}$$

Por supuesto, esta correspondencia debe satisfacer ciertas propiedades de compatibilidad, por ejemplo, los parámetros de Satake de π deben estar relacionados con los valores propios de los elementos de Frobenius de $\rho_{\pi,\ell}$. Los detalles de este enfoque pueden consultarse en [15].

Aunque la prueba de una correspondencia tan fuerte está lejos de ser encontrada, muchos resultados parciales han sido demostrados cuando uno empieza con una representación automorfa particular y trata de asociarle una familia de representaciones de Galois. Por ejemplo, cuando Π es una representación automorfa cuspidal L-algebraica regular y esencialmente autodual de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, Clozel, Kotwitz, Harris, Taylor y muchos otros matemáticos [11, § 2.1], demostraron que existe un campo de números E_π y, para cada ideal máximo λ de $\mathcal{O}_{E_\pi}$, una representación de Galois semisimple

$$\rho_{\pi,\lambda} : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{E}_{\pi,\lambda})$$

la cual solo se ramifica en un conjunto finito de primos, y tal que (por autodualidad) su imagen está contenida en un grupo ortogonal o simpléctico de dimension n. Se espera que estas representaciones sean irreducibles, sin embargo este hecho solo es conocido cuando $n \leq 6$ [37]. En particular, las representaciones automorfas asociadas a formas propias normalizadas, son ejemplos de representaciónes automorfas cuspidales L-algebraicas regulares y esencialmente autoduales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ [18, § 1.2]. Luego, este resultado puede ser considerado como una generalización del resultado de Shimura y Deligne [22] mencionado anteriormente. Un resultado más general, en el cual la condición de autodualidad en π ya no es necesaria, fue demostrado en 2015 por Scholze [67] usando sus famosos espacios perfectoides.

De acuerdo a Buzzard y Gee [15], se espera que (salvo ligeras modificaciones) su formulación de la correspondencia de Langlands global funcione para grupos reductivos en general, remplazando a GL_n por un grupo reductivo conexo G definido sobre $\mathbb{Q}$, en el lado automorfo, y remplazando a GL_n por el llamado L-grupo ${}^LG$ de G, en el lado galoisiano. En particular, ellos han conjeturado que dada una representación automorfa cuspidal L-algebraica π de $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ y un primo ℓ, existe una representación de Galois semisimple

$$\rho_{\pi,\ell} : G_\mathbb{Q} \longrightarrow {}^LG(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

que ramifica solo en un número finito de primos. Recientemente, Kret y Shin [44] [45] han demostrado esta conjetura (sujeta a ciertas restricciones técnicas) para representaciones automorfas cuspidales L-algebraicas de $\mathrm{GSp}_{2m}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ and $\mathrm{GO}_{2m}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Cabe señalar que cuando $G = \mathrm{GSp}_4$, una versión sin restricciones del resultado de Kret y Shin se conoce desde hace tiempo gracias al trabajo de Laumon [51], Taylor [74] y Weissauer [78].

6. Representaciones automorfas sin primos excepcionales

Después de todos los resultados y conjeturas enunciados en la sección anterior, podemos plantearnos como objetivo principal, tratar de extender el teorema 4 a las representaciones de Galois asociadas a representaciones automorfas vía los casos conocidos de la correspondencia de Langlands global con el fin de poder realizar grupos finitos de matrices de dimension n como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$. En esta sección explicaremos los avances y estrategias más recientes en esta dirección.

Sea π una representación automorfa cuspidal de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ de peso cohomológico (m_1, m_2) y componente local en infinito π_∞ perteneciente a las series discretas. Estas condiciones técnicas aparecen de manera natural al levantar las formas modulares de Siegel de género dos a funciones adélicas en $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ [8]. Las formas modulares de Siegel de género n pueden pensarse como una generalización de formas modulares clásicas donde estas últimas ocurren como formas modulares de Siegel de género uno [14].

Como señalamos al final de la sección anterior, gracias al trabajo de Laumon, Taylor y Weissauer, podemos asociar a π un campo de números E_π y, para cada ideal máximo λ de $\mathcal{O}_{E_\pi}$, una representación de Galois semisimple

$$\rho_{\pi,\lambda} : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GSpin}_5(\overline{E}_{\pi,\lambda}) = \mathrm{GSp}_4(\overline{E}_{\pi,\lambda}).$$

Como en el caso 2-dimensional, denotaremos por $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}$ la representación residual de $\rho_{\pi,\lambda}$ y por $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{\pi,\lambda}$ la proyectivización de $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}$. Por la clasificación de subgrupos máximos finitos de $\mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ de Mitchel [54], diremos que ℓ es un *primo excepcional* de π, si la imagen de $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{\pi,\lambda}$ no es un grupo de la forma $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$ o $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$ para algún entero positivo s. Siguiendo la construcción de Dieuelefait y Wiese [27], en [29] demostramos el siguiente resultado (el cual puede considerarse como una generalización del teorema 4 para GSp_4).

Teorema 6 (Dieulefait-Zenteno). *Existen infinitas familias* $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de representaciones automorfas cuspidales de* $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ *sin primos excepcionales y tales que para cada* ℓ *y cada* $\lambda_n|\ell$*, el tamaño de la imagen de* $\overline{\rho}_{\pi_n,\lambda_n}$ *es no acotado cuando* n *tiende a infinito.*

La prueba de este resultado consiste esencialmente de dos partes: Por un lado, necesitamos encontrar condiciones en las representaciones de Galois residuales para asegurar que su imagen sea grande (es decir, encontrar el análogo a las representaciones mansamente diedrales) y por otro lado, necesitamos mostrar la existencia de representaciones automorfas que satisfagan las condiciones deseadas (es decir, encontrar el análogo al teorema de levantamiento de nivel de Diamond y Taylor).

6.1. Representaciones máximamente inducidas: en busca de la condición galoisiana. Sean $n = 2m$ un entero par positivo y $p, q > n$ dos primos distintos tales que el orden de p módulo q es n. Sea $\mathbb{Q}_{q^n}$ la única extensión no ramificada de $\mathbb{Q}_q$ de grado n y recordemos que $\mathbb{Q}_{q^n}^\times \simeq \mu_{q^n-1} \times U_1 \times q^\mathbb{Z}$, donde μ_{q^n-1} denota el grupo de (q^n-1)-ésimas raíces del a unidad y U_1 denota el grupo de 1-unidades. Para cada primo ℓ distinto de p y q, un carácter $\chi_q : \mathbb{Q}_{q^n}^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ de orden $2p$ puede ser construido de modo que su restricción a μ_{q^n-1} tenga orden p y $\chi_q(q) = -1$ (resp. $\chi_q(q) = 1$). Por teoría de campos de clases local, podemos mirar a χ_q como un carácter de $G_{\mathbb{Q}_{q^n}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_q/\mathbb{Q}_{q^n})$ y construir una representación de Galois irreducible

$$\mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{q^n}}}^{G_{\mathbb{Q}_q}}(\chi_q) := \rho_q : G_{\mathbb{Q}_q} \longrightarrow \mathrm{Sp}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \ \Big(\text{resp. } \mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{q^n}}}^{G_{\mathbb{Q}_q}}(\chi_q) := \rho_q : G_{\mathbb{Q}_q} \longrightarrow \mathrm{SO}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\Big)$$

A tales representaciones las llamaremos representaciones máximamente inducidas de tipo S (resp. tipo O) y orden p. Diremos que una representación de Galois simpléctica $\rho_\ell : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GSp}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (resp. ortogonal $\rho_\ell : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GO}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$) es *máximamente inducida* de tipo S (resp. tipo O) en q de orden p, si su restricción $\rho_\ell|_{D_q}$ a un grupo de descomposición D_q en q es máximamente inducida de tipo S (resp. tipo O) y orden p. Como en el caso 2-dimensional, dada una pareja apropiada de primos (p, q) y una representación de Galois $\rho_\ell : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GSp}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (resp. $\rho_\ell : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GO}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$) máximamente inducida de tipo S (resp. tipo O) en q de orden p, se puede demostrar que $\overline{\rho}_\ell$ es irreducible [3] [80]. Finalmente, cuando $n = 4$ y ρ_ℓ es de tipo S, usando la clasificación de subgrupos finitos máximos de $\mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ de Mitchel, se puede demostrar que la imagen de $\overline{\rho}_\ell^{\mathrm{proj}}$ es igual a $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$ o $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$ para algún entero $s > 0$ [29].

6.2. Correspondencia de Langlands local y funtorialidad Langlands. Como se evidencia en [2] y [40], debido a la falta de un teorema de levantamiento de nivel en altas dimensiones, la correspondencia de Langlands local y la funtorialidad de Langlands juegan un papel central en la construcción de representaciones automorfas con condiciones locales apropiadas.

Sean G un grupo reductivo conexo definido sobre una completación $\mathbb{Q}_v$ de $\mathbb{Q}$ (es decir, $\mathbb{Q}_v = \mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}_v$ es un campo q-ádico $\mathbb{Q}_q$) y W_v' el grupo de Weil-Deligne de $\mathbb{Q}_v$ [23]. La correspondencia de Langlands local para G sobre $\mathbb{Q}_v$, predice la existencia de un mapeo finito-a-uno

$$\left\{\begin{matrix}\text{Representaciones irreducibles}\\ \text{admisibles } \pi_v \text{ de } G(\mathbb{Q}_v)\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}L\text{-parámetros}\\ \phi_v : W_v' \longrightarrow {}^LG\end{matrix}\right\}$$

que preserva los invariantes naturales (γ-factores, L-factores y ϵ-factores) y es compatible con la correspondencia de Langlands global de acuerdo a la descomposición $\pi = \otimes_v' \pi_v$ de la representación automorfa cuspidal π de $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ en un producto tensorial restringido de representaciones irreducible admisibles π_v de $G(\mathbb{Q}_v)$. Cuando

$G = \mathrm{GL}_n$, la correspondencia de Langlands local es una biyección la cual fue establecida por Harris, Taylor [33], Henniart [34] y Scholze [66] para campos q-ádicos y por Langlands para $\mathbb{Q}_v = \mathbb{R}$ [49] (de hecho, en este artículo, Langlands demuestra la correspondencia de Langlands local para todo grupo conexo reductivo sobre $\mathbb{R}$). Además, la correspondencia de Langlands local sobre campos q-ádicos ha sido establecida para $G = \mathrm{GSp}_4$ (por Gan y Takeda [30]); para $G = \mathrm{SL}_n$ y todas sus formas interiores (por Hiraga y Saito [36]); para grupos clásicos cuasi-escindidos (por Arthur [6]); y para grupos unitarios (por Mok [55], Kaletha, Minguez, Shin, y White [39]).

Asumiendo la correspondencia de Langlands local para grupos reductivos conexos sobre $\mathbb{Q}_v$ no es difícil dar una formulación precisa de la funtorialidad de Langlands entre dos grupos reductivos conexos G y H. Para simplificar nuestra exposición, supongamos que G es alguno de los grupos clásicos escindidos SO_{2m+1}, SO_{2m} o Sp_{2m} y que $H = \mathrm{GL}_n$, donde n es elegido de modo que el mapeo analítico $\xi : {}^L G \to {}^L\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sea el encaje natural de ${}^L G$ en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Recordemos que en estos casos ${}^L\mathrm{SO}_{2m+1} = \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$, ${}^L\mathrm{SO}_{2m} = \mathrm{SO}_{2m}(\mathbb{C})$ y ${}^L\mathrm{Sp}_{2m} = \mathrm{SO}_{2m+1}(\mathbb{C})$. Por la correspondencia de Langlands local para G sobre $\mathbb{Q}_v$, cada representación irreducible admisible π_v de $G(\mathbb{Q}_v)$, es parametrizada por un L-parámetro $\phi_v : W'_v \to {}^L G$. Luego, si componemos ϕ_v con ξ, obtenemos un L-parámetro $\phi'_v = \xi \circ \phi_v : W'_v \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, el cual parametriza (por la correspondencia de Langlands local para GL_n sobre $\mathbb{Q}_v$) una representación admisible Π_v de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_v)$. En este texto nos referiremos a Π_v como el levantamiento funtorial local de π_v.

Ahora, sean G un grupo clásico escindido sobre $\mathbb{Q}$ y $\xi : {}^L G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ el encaje natural de ${}^L G$ en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ como antes. La funtorialidad de Langlands global predice que asociado a ξ debería existir un levantamiento natural de representaciones automorfas de $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ a representaciones automorfas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Una formulación concreta de este principio global puede ser enunciada usando la funtorialidad de Langlands local y el principio local-global como sigue. Sean $\pi = \otimes'_v \pi_v$ una representación automorfa de $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, $\Pi = \otimes'_v \Pi_v$ una representación automorfa de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ y supongamos que la correspondencia de Langlands local es cierta para cada componente π_v de π. Entonces, Π es un levantamiento funtorial global de π si existe un conjunto finito de lugares S de $\mathbb{Q}$ tal que Π_v es el levantamiento funtorial local de π_v para todo $v \notin S$.

Estas versiones de la funtorialidad de Langlands local y global han sido establecidas para representaciones genéricas de G por Cogdell, Kim, Piatetski-Shapiro y Shahidi [20] [21] y (recientemente) para representaciones no genéricas por Cai, Friedberg y Kaplan [16] [17]. Otro caso conocido de la funtorialidad de Langlands, tanto local como global, es cuando G es uno de los grupos reductivos escindidos GSpin_{2m} o GSpin_{2m+1} y $H = \mathrm{GL}_{2m}$, el cual fue establecido por Asgari y Shahidi [9] en el caso genérico y por Cai, Friedberg y Kaplan [16] [17] en el caso no genérico.

6.3. Existencia de representaciones automorfas con condiciones locales prescritas. En [29], nuestra construcción de representaciones automorfas de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, se basa en la siguiente construcción de representaciones automorfas cuspidales L-algebraicas regulares y esencialmente autoduales de $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ debida a Khare, Larsen y Savin [40].

Sea $n = 2m$ un entero positivo par y p, q dos primos distintos como arriba. Sea $\rho_q : G_{\mathbb{Q}_q} \to \mathrm{Sp}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ una representación máximamente inducida de tipo S y orden p, la cual como vimos es irreducible. Es bien sabido por los expertos que asociado a ρ_q, existe un L-parámetro irreducible $\phi_q : W'_{\mathbb{Q}_q} \to \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$. Luego, por la correspondencia de Langlands local para representaciones genéricas de $\mathrm{SO}_{2m+1}(\mathbb{Q}_q)$, la cual fue probada inicialmente por Jiang y Soudry en [38], podemos asociar a ϕ_q una representación automorfa supercuspidal τ_q de $\mathrm{SO}_{2m+1}(\mathbb{Q}_q)$.

Por otro lado, usando series de Poincaré, Khare, Larsen y Savin [40] demostraron el siguiente resultado de globalización para grupos clásicos escindidos sobre $\mathbb{Q}$.

Teorema 7 (Khare-Larsen-Savin). *Sea G un grupo clásico escindido sobre $\mathbb{Q}$. Sean S y D dos conjuntos finitos y ajenos de lugares de $\mathbb{Q}$, tales que D contiene al lugar* *infinito y S es un conjunto de lugares finitos no vació tal que G es no ramificado en todos los lugares que están afuera del conjunto $D \cup S$. Sea π_∞ una representación genérica perteneciente a las series discretas de $G(\mathbb{R})$ y π_q una representación genérica supercuspidal de $G(\mathbb{Q}_q)$ para cada lugar finito $q \in D$. Entonces, existe una representación automorfa cuspidal globalmente genérica π de $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ que no se ramifica fuera de $D \cup S$, y tal que el componente de π en el lugar infinito es π_∞ y los componentes locales de π en cada q son π_q.*

Regresando a nuestra construcción, tenemos que el resultado de Khare, Larsen y Savin implica la existencia de una representación automorfa cuspidal globalmente genérica τ de $\mathrm{SO}_{2m+1}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ tal que su componente local en q es τ_q. Luego, por la funtorialidad de Langlands global de SO_{2m+1} a GL_{2m}, existe una representación automorfa cuspidal L-algebraica regular y esencialmente autodual Π de $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ tal que las representaciones de Galois $\rho_{\Pi,\lambda} : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ asociadas a Π (para cada λ que no divide ni a p ni q) tienen imagen contenida en $\mathrm{GSp}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ y son tales que $\rho_{\Pi,\lambda}|_{D_q} \simeq \rho_q$. En particular, cuando $m = 2$, por el criterio galoisiano de § 6.1, tenemos que la imagen de $\overline{\rho}^{\mathrm{proj}}_{\pi,\lambda}$ es igual a $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$ o a $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$ para algún entero $s > 0$, para cada λ que no divide ni a p ni q [29].

Por otro lado, por un resultado de Jiang y Soudry [38, Theorem E], la representación Π de $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ construida antes, es tal que su función L parcial $L(s, \Pi, \wedge^2)$ tiene un polo simple en $s = 1$. Luego, cuando Π es una representación automorfa cuspidal L-algebraica regular y esencialmente autodual de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, por un resultado de Jacquet, Piatetski-Shapiro y Shalika [43, Theorem 9.1] existe una representación automorfa cuspidal globalmente genérica π de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ tal que Π es el levantamiento funtorial global de π. Finalmente, como el teorema 7 funciona para un conjunto finito D de lugares simultáneamente, podemos construir, para alguna pareja apropiada de primos $\{q, u\}$ (como en el caso 2-dimensional) una representación automorfa cuspidal L-algebraica regular y esencialmente autodual Π de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ la cual desciende a una representación automorfa cuspidal globalmente genérica π de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ sin primos excepcionales. Luego tenemos el siguiente resultado concerniente al problema inverso de la teoría de Galois, que puede verse como una generalización del corolario 5.

Corolario 8. *Para cada primo ℓ, al menos uno de los grupos $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$ o $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$ ocurre como grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ para infinitos enteros $s > 0$.*

6.4. Algunas generalizaciones parciales. En [40], Khare, Larsen y Savin demostraron en 2008 que, para cada entero positivo m y cada primo ℓ, al menos uno de los grupos $\mathrm{PSp}_{2m}(\mathbb{F}_{\ell^s})$ o $\mathrm{PGSp}_{2m}(\mathbb{F}_{\ell^s})$ ocurren como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$ para infinitos enteros $s > 0$. A pesar de usar la noción de representación máximamente inducida y el teorema de globalización 7, su método no proporciona representaciones automorfas sin primos excepcionales. Esto es debido a que, en la parte galoisisana, en lugar de usar la clasificación completa de subgrupos finitos máximos de $\mathrm{GSp}_{2m}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ (como en las pruebas de Dieulefait-Wiese y Dieulefait-Zenteno), ellos usan una caracterización de los subgrupos finitos de $\mathrm{GL}_{2m}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$, debida a Larsen y Pink [50] la cual depende del primo ℓ. Luego, ellos solo pueden garantizar que las representaciones automorfas producidas por su método tienen un primo no excepcional ℓ. La principal razón para no usar la clasificación de los subgrupos finitos máximos de $\mathrm{GSp}_{2m}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$, la cual se conoce y se le atribuye a Aschbacher [10], es que dicha clasificación es mucho más intrincada cuando $m > 2$ por obvias razones de dimensión.

Resultados análogos al resultado de Khare, Larsen y Savin han sido demostrados para grupos ortogonales por Khare, Larsen, Savin [41] y el autor de este artículo [82]. De manera más precisa tenemos el siguiente resultado que resume los casos del problema inverso de la teoría de Galois que se han podido resolver siguiendo esta linea de investigación hasta el momento (noviembre de 2023).

Teorema 9. *Para cada primo ℓ, tenemos que:*

1. (Khare-Larsen-Savin, 2008) *Al menos uno de los grupos:*

$$\mathrm{PSp}_{2m}(\mathbb{F}_{\ell^s}) \text{ o } \mathrm{PGSp}_{2m}(\mathbb{F}_{\ell^s})$$

ocurre como grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ *para infinitos enteros* $s > 0$.

2. (Khare-Larsen-Savin, 2010) *Al menos uno de los grupos:*

$$\mathrm{P}\Omega_{2s+1}(\mathbb{F}_{\ell^s}) \text{ o } \mathrm{PSO}_{2s+1}(\mathbb{F}_{\ell^s})$$

ocurre como grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ *para infinitos enteros* $s > 0$.

3. (Zenteno, 2021) *Al menos uno de los grupos:*

$$\mathrm{P}\Omega^{\pm}_{2m}(\mathbb{F}_{\ell^s}),\ \mathrm{PSO}^{\pm}_{2m}(\mathbb{F}_{\ell^s}),\ \mathrm{PO}^{\pm}_{2m}(\mathbb{F}_{\ell^s}) \text{ o } \mathrm{PGO}^{\pm}_{2m}(\mathbb{F}_{\ell^s})$$

ocurre como grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ *para infinitos enteros* $s > 0$.

Cabe señalar que aunque los métodos de prueba en cada caso son similares, cada grupo pose obstrucciones particulares que hacen que las pruebas no sean un simple ejercicio de copiar y pegar. Por ejemplo, en el caso de grupos ortogonales de dimensión impar [41], no existen representaciones supercuspidales asociadas a representaciones de Galois mansamente ramificadas, luego nuevos componentes locales con ramificación salvaje tienen que ser introducidas. Por otro lado, en el caso ortogonal de dimensión par [82], aunque las representaciones máximamente inducidas (ahora de tipo O) funcionan, el teorema 7 no es suficiente, pues solo funciona para grupos reductivos escindidos y en este caso es necesario lidiar con grupos reductivos cuasi-escindidos. Luego, el teorema 7 tiene que ser remplazado por el trabajo de Arthur [6] acerca de la clasificación endoscópica de representaciones automorfas de grupos simplécticos y ortogonales, y algunos resultados de Binder [13] y Shin [72] sobre equidistribuciones de componentes locales en un primo fijo con respecto a una medida de Plancherel.

Finalmente, nos gustaría señalar que el estudio de la imagen de las representaciones de Galois asociadas a representaciones automorfas cuspidales L-algebraicas regulares no autoduales construidas por Scholze [67] continua siendo terreno no explorado y que lograr demostrar un resultado similar al teorema 9 en este contexto sería interesante porque nos permitiría realizar grupos finitos lineales y unitarios como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$. Hasta ahora, lo único que sabemos es que el principal obstáculo para demostrar tal resultado es que ni el teorema 7 ni el trabajo de Arthur [6] funcionan en este caso, por lo que nuevas técnicas de globalización de representaciones automorfas tendrían que ser descubiertas.

7. El problema inverso de la teoría Galois en otros campos

Como es bien sabido, la teoría de Galois puede ser formulada para extensiones de campos arbitrarios y no solo para extensiones de $\mathbb{Q}$. Guiados por esta idea, es natural preguntarnos por el problema inverso de la teoría de Galois para cualquier campo. De manera más precisa, dado un grupo finito G y un campo F, podemos preguntarnos si ¿existe una extensión de Galois E/F tal que $\mathrm{Gal}(E/F) \cong G$? En esta ultima sección presentamos un breve resumen sobre los principales resultados obtenidos en este contexto.

El primer caso que nos viene a la mente (por su simplicidad) es cuando $F = \mathbb{F}_\ell$. En este caso, el problema es falso, pues como se ve en un primer curso de teoría de Galois, $\mathbb{F}_\ell$ solo tiene una extension de Galois de grado n (a saber $\mathbb{F}_{\ell^n}$) cuyo grupo de Galois es el grupo cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Luego, solo los grupos cíclicos ocurren como grupos de Galois sobre $\mathbb{F}_\ell$. Un caso clásico en el que se sabe que el problema inverso de la teoría de Galois es verdadero, es cuando F es el campo de funciones racionales $\mathbb{C}(t)$ en una variable con coeficientes en $\mathbb{C}$. Este resultado, se sigue esencialmente del teorema de existencia de Riemann y una prueba completa de éste puede leerse en [76]. Siguiendo esta misma idea, en [31], Harbater resolvió el problema inverso de la teoría de Galois para campos de funciones racionales $\mathbb{Q}_\ell(t)$ en una variable con coeficientes en un campo ℓ-ádico $\mathbb{Q}_\ell$.

Un caso muy interesante es cuando $F = \mathbb{Q}_\ell$. En este caso se sabe que el problema inverso de la teoría de Galois es falso, pues el grupo de Galois de cualquier extensión finita de un campo ℓ-ádico es un grupo soluble, pero no se sabe cuáles grupos solubles ocurren como grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}_\ell$ y cuáles no. Invitamos al lector a consultar [64] para informarse de algunos de los avances mas recientes en este caso.

Es bien sabido por los expertos que muchos de los resultados descritos a través de este articulo se extienden de manera casi automática a cualquier campo de números, pero en la mayoría de los casos, los resultados no pueden encontrarse de manera explicita en la literatura y muchas veces su extension en realidad no es tan automática. En esta linea, podemos señalar que la formulación de Buzard y Gee [15] de la correspondencia de Langlands global, funciona para campos de números en general y los resultados de Scholze [67] Shin y Kret [44] [45], han sido demostrados para campos de números totalmente reales en general. Sin embargo, un análogo del teorema 9, no ha sido escrito salvo en el caso 2-dimensional [28], pues su redacción requiere resolver problemas técnicos no triviales relacionados con el número de clase del campo de números en cuestión.

Por otro lado, en teoría de números, es bien conocido el paralelismo que hay entre campos de números y campos de funciones sobre campos finitos. Guiados por este paralelismo, es natural plantearse el problema inverso de la teoría de Galois para campos de funciones sobre campos finitos e intentar usar los métodos descritos en las secciones anteriores para tratar de resolverlo. Sobre todo, porque en este caso la correspondencia de Langlands global para GL_n es un teorema [46] y de hecho, muchos avances se han obtenido recientemente para grupos reductivos en general por V. Lafforgue [47]. Sin embargo, hasta donde sabemos, la falta de lugares arquimedianos en los campos de funciones sobre campos finitos representa un fuerte obstáculo al momento de intentar aplicar los métodos galoisianos desarrollados para campos de números. El mejor resultado conocido para campos de funciones sobre campos finitos, de acuerdo a [32], es un resultado de Fried, Jarden, Pop y Völklein el cual afirma que para cada grupo finito G existe un entero m tal que para todos los primos $\ell > m$, el grupo G ocurre como grupo de Galois sobre $\mathbb{F}_\ell(t)$.

Aunque una solución completa del problema inverso de la teoría de Galois se ve aún lejana. Los recientes avances en el programa de Langlands nos proporcionan una poderosa herramienta que esperamos nos permita continuar avanzando rumbo a una solución de este problema al menos para grupos de matrices. Además, como señalamos a través de todo el texto, muchas de las herramientas utilizadas son, por sí mismas, problemas de gran interés para la comunidad matemática. Dicho esto, creemos que este tema es terreno fértil para muchas futuras lineas de investigación y esperamos que este artículo sirva como una pequeña guía para el lector interesado.

Agradecimientos. El autor expresa su gratitud a Pedro Luis del Ángel por alentarlo a escribir este artículo y al árbitro anónimo por sus sugerencias y observaciones las cuales han ayudado a mejorar considerablemente la presentación de este trabajo.

Referencias

[1] Arias-de-Reyna, S. *Automorphic Galois representations and the inverse Galois problem*, in Trends in Number Theory, Contemporary Mathematics, vol. 649, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1–16, 2015.

[2] Arias-de-Reyna, S., Dieulefait, L., Shin, S.W. & Wiese, G. *Compatible systems of symplectic Galois representations and the inverse Galois problem III. Automorphic construction of compatible systems with suitable local properties*, Math. Ann., 361, no. 3-4, 909–925, 2015.

[3] Arias-de-Reyna, S., Dieulefait, L. & Wiese, G. *Compatible systems of symplectic Galois representations and the inverse Galois problem II. Transvections and huge image*, Pacific J. Math., 281, no. 1, 1–16, 2016.

[4] Arias-de-Reyna, S., Dieulefait, L. & Wiese, G. *Compatible systems of symplectic Galois representations and the inverse Galois problem I. Images of projective representations*, Trans. Amer. Math. Soc., 369, no. 2, 887–908, 2017.

[5] Arthur, J. *A note on the automorphic Langlands group*. Canad. Math. Bull., 45, no. 4, 466–482, 2002.

[6] Arthur, J. The endoscopic classification of representations. Orthogonal and Symplectic Groups. American Mathematical Society Colloquium Publications, 61. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[7] Artin, E. & and Tate, J. Class field theory. Reprinted with corrections from the 1967 original. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009.

[8] Asgari, M. & Schmidt, R. *Siegel modular forms and representations.* Manuscr. Math., 104, No. 2, 173–200, 2001.

[9] Asgari, M. & Shahidi, F. *Generic Transfer for General Spin Groups.* Duke Math. J., 132, no. 1, 137–190, 2006.

[10] Aschbacher, M. *On the maximal subgroups of the finite classical groups.* Invent. Math. 76, 469–514, 1984.

[11] Barnet-Lamb, T., Gee, T., Geraghty, D. & and Taylor, R. *Potential automorphy and change of weight.* Ann. of Math. (2), 179, no. 2, 501–609, 2014 .

[12] Billerey, N. & Dieulefait, L. *Explicit large image theorems for modular forms.* J. Lond. Math. Soc., II., 89, no. 2, 499–523, 2014.

[13] Binder, J. *Fields of rationality of automorphic representations: the case of unitary groups.* J. Number Theory, 203, 32-67, 2019.

[14] Bruinier, J.H., van der Geer, G., Harder, G. & Zagier, D. The 1-2-3 of modular forms. Lectures at a summer school in Nordfjordeid, Norway, June 2004. Universitext. Berlin: Springer, 2008.

[15] Buzzard, K. & Gee, T. *The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations.* In: Automorphic forms and Galois representations. Vol. 1, 135–187, London Mathematical Society Lecture Note Series, 414. Cambridge University. Press, Cambridge, 2014.

[16] Cai, Y., Friedberg, S. & Kaplan, E. *The generalized doubling method: local theory.* Geom. Funct. Anal., 32, no.6, 1233–1333 2022.

[17] Cai, Y., Friedberg, S. & Kaplan, E. Doubling constructions: local and global theory, with an application to global functoriality for non-generic cuspidal representations. ArXiv:1802.02637.

[18] Clozel, L. *Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité.* Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. 1 (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 77–159, 1990.

[19] Cogdell, J. *Lectures on L-functions, converse theorems and functoriality for* GL_n. Lectures on automorphic L-functions. Fields Institute Monographs No. 20, AMS, Providence, 1–96, 2004.

[20] Cogdell, J., Kim, H., Piatetski-Shapiro, I.I. & Shaidi, F. *On lifting from classical groups to* GL_N. Pub. Mat. Ins. Hautes Études Sci., 93, 5–30, 2001.

[21] Cogdell, J., Kim, H., Piatetski-Shapiro, I.I. & Shaidi, F. *Functoriality for the classical groups.* Pub. Mat. Ins. Hautes Études Sci., 99, 163–233, 2004.

[22] Deligne, P. *Formes modulaires et représentations ℓ-adiques.* In: Séminaire Bourbaki. Vol. 1968/69: Exposés 347–363, Exp. No. 355, 139-172, Lecture Notes in Math., 175. Springer, Berlin, 1971.

[23] Deligne, P. *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L.* In Modular functions of one variable, II, Lecture notes in mathematics, 349, Berlin, New York: Springer-Verlag, 501–597, 1973.

[24] Diamond, F. & Taylor, R. *Non-optimal levels of mod ℓ modular representations.* Invent. math., 115, 435–462, 1994.

[25] Diamond, F. & Shurman, J. A first course in modular forms. Graduate Texts in Mathematics, 228. Springer-Verlag, New York, 2005.

[26] Dieulefait, L. *A control theorem for the images of Galois actions on certain infinite families of modular forms*, in Modular Forms on Schiermonnikoog, edited by Gerard van der Geer, Ben Moonen and Bas Edixhoven, Cambridge University Press, 79–84, 2008.

[27] Dieulefait, L. & Wiese, G. *On Modular Forms and the Inverse Galois Problem.* Trans. Amer. Math. Soc., 363, no. 9, 4569–4584, 2011.

[28] Dieulefait, L. & Zenteno, A. *Constructing Hilbert modular forms without exceptional primes.* Math. Z., 288, no. 1-2, 199–215, 2018.

[29] Dieulefait, L. & Zenteno, A. *On the images of the Galois representations attached to generic automorphic representations of* $\mathrm{GSp}(4)$. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5), XX, no. 2, 635–655, 2020.

[30] Gan, T. & Takeda, S. *The local Langlands conjecture for* $\mathrm{GSp}(4)$. Ann. of Math. (2), 173, no. 3, 1841–1882, 2011.

[31] Harbater, D. *Galois coverings of the arithmetic line*, Number Theory: New York, 1984-85, Lecture Notes in Mathematics. 1240, Springer-Verlag, 165–195, 1987.

[32] Harbater, D., Obus, A., Pries, R. & Stevenson, K. *Abhyancar's conjectures in Galois theory: current status and future directions.* Bull. Amer. Math. Soc., 55, no. 2, 239–287, 2018.

[33] Harris, M. & Taylor, R. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties.* Annals of Mathematics Studies 151. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[34] Henniart, G. *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique.* Invent. Math., 139, no. 2, 439–455, 2000.

[35] Hilbert, D. *Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten.* J. Reine Angew. Math., 110, 104–129, 1892.

[36] Hiraga, K. & Saito, H. *On L-Packets for Inner Forms of* SL_n. Mem. Am. Math. Soc., 215, no. 1013, 2012.

[37] Hui, C.Y. *Monodromy of subrepresentations and irreducibility of low degree automorphic Galois representations.* to appear in J. London Math. Soc. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms.12811

[38] Jiang, D. & Soudry, D. *Generic representations and local Langlands reciprocity law for p-adic* SO_{2n+1}. In Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, 457–519, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004.

[39] Kaletha, T., Minguez, A., Shin, S.W. & White, P.-J. Endoscopic classification of representations: Inner forms of unitary groups. arXiv:1409.3731.

[40] Khare, C., Larsen, M., & Savin, G. *Functoriality and the inverse Galois problem.* Compos. Math., 144, no. 3, 541–564, 2008.

[41] Khare, C., Larsen, M., & Savin, G. *Functoriality and the inverse Galois problem. II. Groups of type* B_n *and* G_2. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 19, no. 1, 37–70, 2010.

[42] Khare, C. & Wintenberger, J.-P. *Serre's modularity conjecture, I and II.* Invent. Math., 178, no. 3, 485–586, 2009.

[43] Kim, H. & Shahidi, F. *Functorial products for* $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ *and the symmetric cube for* GL_2. Ann. of Math., 155, 837–893, 2002.

[44] Kret, A. & Shin, S.W. *Galois representations for general symplectic groups.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 25, no. 1, 75–152, 2023.

[45] Kret, A. & Shin, S.W. Galois representations for even general special orthogonal groups. to appear in J. Inst. Math. Jussieu.

[46] Lafforgue, L. *Chtoukas de Drinfeld et correspondence de Langlands.* Invent. Math., 147, no. 1, 1–241, 2002.

[47] Lafforgue, V. *Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrization de Lanlgands globale.* J. Amer. Math. Soc., 31, 719–891, 2018.

[48] Langlands, R.P. Letter to André Weil (1967), disponible en: http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/functoriality.html

[49] Langlands, R.P. On the Classification of Irreducible Representations of Real Algebraic Groups. AMS, Providence, 1973.

[50] Larsen, M. & Pink, R. *Finite subgroups of algebraic groups.* J. Amer. Math. Soc., 24, no. 4, 1105–1158, 2011.

[51] Laumon, G. *Fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension trois.* In Formes automorphes. II. Le cas du groupe GSp(4). Astérisque no. 302, 1–66, 2005.

[52] Malle, G. & Matzat, B.H. Inverse Galois theory. 2nd edition. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer, 2018.

[53] Milne, J. Class field theory. Course notes, https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/

[54] Mitchel, H. *The subgroups of the quaternary abelian linear group.* Trans. Amer. Math. Soc. 15, 379–396, 1914.

[55] Mok, C.P. Endoscopic classification of representation of quasi-split unitary groups. Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 235, no. 1108, 2015.

[56] Neukirch, J. Algebraic number theory. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 322. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[57] Neukirch, J., Schmidt, A., & Wingberg, K. Cohomology of number fields. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 323. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[58] Peaucelle, B. *Explicit Small Image Theorems for Residual Modular Representations.* Int. J. Number Theory, 18, no. 5, 1143–1202, 2022.

[59] Reichardt, H. *Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung.* J. reine angew. Math., 177, 1–5, 1937.

[60] Reverter, A. & Vila, N. *Some projective linear groups over finite fields as Galois groups over* $\mathbb{Q}$. Contemp. Math., 186, 51–63, 1995.

[61] Ribet, K. *On* ℓ*-adic representations attached to modular forms.* Invent. Math., 28, 245–275, 1975.

[62] Ribet, K. *Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus.* In Modular functions of one variable, V (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976), 17–51. Lecture Notes in Math., Vol. 601. Springer, Berlin, 1977.

[63] Ribet, K. *On* ℓ*-adic representations attached to modular forms II.* Glasg. Math. J., 27, 185–194, 1985.

[64] Roe, D. *The Inverse Galois Problem for p-adic fields.* The Open Book Series, Vol. 2, No. 1. MSP, Berkeley CA, 393–409, 2019.

[65] Scholz, A. *Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung I.* Math. Z., 42, 161–188, 1937.

[66] Scholze, P. *The local Langlands Correspondence for* GL(n) *over* p*-adic fields.* Invent. Math., 192, no. 3, 663–715, 2013.
[67] Scholze, P. *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties.* Ann. of Math. (2), 182, no. 3, 945–1066, 2015.
[68] Serre, J.-P. *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques.* Invent. Math., 15, no. 4, 259–331, 1972.
[69] Serre, J.-P. *Congruences et formes modulaires (d'aprés H.P.F. Swinnerton-Dyer).* Séminaire Bourbaki 416, Juin 1972. Lecture Notes in Mathematics, 317, 319–338, 1973.
[70] Serre, J.-P. Topics in Galois theory. Notes written by Henri Darmon. 2nd ed. Research Notes in Mathematics 1. Wellesley, MA: A K Peters, 2007.
[71] Shafarevich, R. *Construction of fields of algebraic numbers with given solvable Galois group* (en ruso). Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 18, 525–578, 1954.
[72] Shin, S.W. *Automorphic Plancherel density theorem.* Israel J. Math., 192, no. 1, 83–120, 2012.
[73] Swinnerton-Dyer, H. P. *On* ℓ*-adic representations and congruences for coefficients of modular forms.* International Summer School on Modular Functions; Antwerp, 1972. Lecture Notes in Mathematics, 350, 1–55, 1973.
[74] Taylor, R. *On the l-adic cohomology of Siegel threefolds.* Invent. Math., 114, 289–310, 1993.
[75] Vila, N. *On the inverse problem of Galois theory.* Publ. Mat., Barc., 36, No. 2B, 1053–1073, 1992.
[76] Völklein, H. Groups as Galois groups: an introduction. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 53. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
[77] Weil, A. *Sur la théorie du corps de classes.* J. Math. Soc. Japan, 3, 1–35, 1951.
[78] Weissauer, R. *Four dimensional Galois representations.* Formes automorphes. II. Le cas du groupe GSp(4). Astérisque No. 302, 67–150, 2005.
[79] Wiese, G. *On projective linear groups over finite fields as Galois groups over the rational numbers*, in Modular Forms on Schiermonnikoog, edited by Gerard van der Geer, Ben Moonen and Bas Edixhoven, Cambridge University Press, 343–350, 2008.
[80] Zenteno, A. *On the images of the Galois representations attached to certain RAESDC automorphic representations of* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Math. Res. Lett., 26, no. 3, 921–947, 2019.
[81] Zenteno, A. *Lübeck's classification of representations of finite simple groups of Lie type and the inverse Galois problem for some orthogonal groups.* J. Number Theory, 206, 182–193, 2020.
[82] Zenteno, A. *Automorphic Galois representations and the inverse Galois problem for certain groups of type* D_m. Proc. Amer. Math. Soc., 149, 89–95, 2021.
[83] *LMFDB - The L-functions and Modular Forms Database.* https://www.lmfdb.org

Adrián Zenteno
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.,
Jalisco s/n. Col. Valenciana,
C.P. 36023, Guanajuato, México.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6379-7294
e-mail: adrian.zenteno@cimat.mx