MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.15, No.1, 2024, páginas 67-71.
Recibido 06-03-2024. Aceptado 10-05-2024.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v15n1/bevi

UNA NOTA ACERCA DE LA DERIVADA DE $f(x) = x^\alpha$, CUANDO $\alpha \neq 0$

BELEM GARCÉS Y VÍCTOR C. GARCÍA

RESUMEN. Dado un número real $\alpha \neq 0$, presentamos una demostración elemental de la bien conocida fórmula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

La demostración combina el método asintótico con argumentos y lemas básicos, al alcance de lectores con una formación inicial del concepto de límite.

1. INTRODUCCIÓN

Sea $\alpha \neq 0$ un número real fijo. Consideremos a la función $f(x) = x^\alpha$ cuando $x > 0$. Partiendo de la definición de derivada, para cada $x_0 > 0$ considere al cociente

$$g_{x_0}(x) = \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0}, \tag{1}$$

con el propósito de establecer la existencia del límite, $\lim_{x \to x_0} g_{x_0}(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Primero notamos que es suficiente probar el caso cuando la potencia es positiva. Efectivamente, suponga cierto este hecho y $\alpha < 0$, entonces

$$f(x) = x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}},$$

donde $x^{-\alpha}$, con $-\alpha > 0$, tiene derivada $-\alpha x^{-\alpha-1}$. De esta forma, es posible concluir usando la fórmula de la derivada de un cociente.

Si $\alpha = m$, con m un entero positivo, es fácil ver que $g_{x_0}(x)$ es aritméticamente maleable y equivalente a la función polinomial

$$g_{x_0}(x) = x^{m-1} + x^{m-2}x_0 + \cdots + xx_0^{m-2} + x_0^{m-1}$$

siempre que $x \neq x_0$. Así, es claro que el siguiente límite tiene lugar

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^m - x_0^m}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} g_{x_0}(x) = mx_0^{m-1}.$$

Ahora supongamos que α es un racional, digamos $\alpha = m/n$ para ciertos enteros positivos m, n primos relativos. Entonces $f(x) = (x^{1/n})^m = (f_m \circ f_{1/n})(x)$, donde $f_m(x) = x^m$ y $f_{1/n}(x) = x^{1/n}$. Según a la discusión inmediata, es evidente que f_m es derivable en todos los reales positivos. Más aún, observamos que para todo $x \neq x_0$ se tiene:

$$\frac{x^{1/n} - x_0^{1/n}}{x - x_0} = \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}}x_0^{\frac{1}{n}} + \cdots + x^{\frac{1}{n}}x_0^{\frac{n-2}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}}}.$$

De esta forma, tomando directamente el límite correspondiente, se verifica que $f_{1/n}(x)$ tiene derivada $f'_{1/n}(x) = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$. Entonces, por la regla de la cadena se sigue que

$$f'(x) = mx^{(m-1)/n}f'_n(x) = \frac{m}{n}x^{m/n-1}.$$

El caso cuando α es irracional es de naturaleza más compleja, $g_{x_0}(x)$ no se reduce inmediatamente a una expresión donde se aplique el límite de manera directa ni parece que se pueda reducir al escenario cuando la potencia es racional. Observamos que el

2010 *Mathematics Subject Classification.* 00A06, 26D07, 97I10, 97I40.
Palabras clave. Límite.

uso de la regla de L'Hôpital sería redundante. El ejercicio se facilita si permitimos el uso del logarítmo y sus propiedades. Es cierto que

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \quad \text{para } x > 0.$$

Si además asumimos válida la fórmula $(e^x)' = e^x$, entonces junto con la regla de la cadena se concluye el ejercicio. Por otra parte, el problema es elemental y nos complace presentar una demostración con un uso mínimo de recursos. Nuestro argumento evita el uso de la función logaritmo y también sirve para establecer la derivada de la función exponencial.

PROPOSICIÓN 1. *Sea α un número real dado y distinto de cero. Entonces la siguiente expresión tiene lugar*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \tag{2}$$

para todo $x > 0$.

La demostración es de carácter asintótico, uno de los métodos más prolíficos en el análisis. A grandes rasgos y en la forma más simple, se buscan funciones $u(x)$ y $v(x)$ tales que en una vecindad agujereada de x_0 se cumple $u(x) \leq \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} \leq v(x)$ y $\lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{x\to x_0} v(x)$. El Lema 2 precisa esta idea.

A modo de ejemplo destaquemos la bien conocida demostración del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Observamos que para la función involucrada $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no se conoce una identidad elemental que permita tomar el límite[1]. En su lugar, se busca una estimación suficientemente fina. Por ejemplo, mediante un argumento geométrico, se verifica el siguiente sistema de desigualdades cuando $0 < x < \pi/4$,

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

De esta forma, aplicando el Lema 2 obtenemos que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ si $x \to 0^+$. Haciendo las adecuaciones respectivas, se sigue que el límite lateral izquierdo también coincide con la unidad.

La derivada de la función exponencial es otro ejemplo de interés. Encontrar la derivada de $f(x) = e^x$, en cualquier punto se puede reducir al caso en el origen en virtud de la siguiente observación:

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0},$$

de esta forma, si $x \to x_0$, entonces $x - x_0 \to 0$. En cierta vecindad de cero afirmamos que tiene lugar el sistema de desigualdades $1 + x \leq e^x \leq 1 + x + cx^2$, para alguna constante $c > 0$. Entonces cuando x es suficientemente pequeño y $x > 0$ se tiene

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + cx,$$

así, aplicando el Lema 2 obtenemos

$$1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} (1 + cx).$$

El mismo esquema puede usarse para probar que el límite lateral izquierdo es igual a uno.

A pesar de que la idea asintótica de fondo es la misma, los detalles técnicos están hechos a medida de las funciones dadas. En nuestro caso comenzamos reduciendo el problema al cálculo del límite de una función en cero, ver (5). Con ayuda de las desigualdades de Bernoulli, Lema 4, la función involucrada $\frac{(1+u)^\alpha - 1}{u}$ será acotada

[1]Evitamos el uso del Teorema de Taylor, deseamos argumentos tan elementales como sea posible.

superior e inferiormente de tal forma que podamos aplicar el Lema 2 para finalmente obtener el límite buscado.

Siendo una pregunta natural y con respuesta no trivial, se puede esperar que haya sido un tema de discusión en la comunidad. En este sentido, mencionamos las ideas propuestas por Barry Cipra [3], quien también propone una solución sin el uso de logaritmos y usando los Lemas 2 y 4. En la misma referencia se pueden encontrar otras propuestas interesantes.

2. Lemas auxiliares

El siguiente lema es fundamental y bien conocido, su demostración puede encontrarse, por ejemplo, en el libro de Bartle y Sherbert [1].

Lema 2. *Sean f, u y v funciones definidas en una vecindad de un punto x_0. Suponga que para todo $x \neq x_0$ de dicha vecindad se tiene*

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x).$$

Si $L = \lim_{x\to x_0} u(x) = \lim_{x\to x_0} v(x)$, entonces f tiene límite en x_0 y además

$$L = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Otra de las herramientas es la desigualdad de Bernoulli, que presentamos en la siguiente forma.

Lema 3 (Desigualdad de Bernoulli). *Para todos los reales α real $\alpha \geq 1$, y $u \geq -1$*

$$(1+u)^{\alpha} \geq 1 + \alpha u. \tag{3}$$

En caso que $0 \leq \alpha \leq 1$, y $u \geq -1$ se tiene

$$(1+u)^{\alpha} \leq 1 + \alpha u. \tag{4}$$

Es importante notar que ambas desigualdades se obtienen de forma elemental. Por completitud se incluye una demostración en la Sección 4. También puede consultarse [2] y [4].

3. La demostración

En adelante asumiremos que α no es un entero. Observe que si $x_0 > 0$, entonces estudiar el comportamiento de $g_{x_0}(x)$, ver (1), alrededor de x_0, equivale al estudio de $\frac{(x_0+x)^{\alpha}-x_0^{\alpha}}{x}$ alrededor del origen. Por otra parte,

$$\frac{(x_0+x)^{\alpha} - x_0^{\alpha}}{x} = x_0^{\alpha-1}\frac{(1+(x/x_0))^{\alpha} - 1}{x/x_0}.$$

Además, si $x \to 0$, entonces $x/x_0 \to 0$. Por lo tanto, es suficiente demostrar que

$$\lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^{\alpha} - 1}{u} = \alpha. \tag{5}$$

Dado que calculamos el límite cuando $u \to 0$, en adelante basta suponer que $|u| < 1/2$.

Primero consideramos el caso $0 < \alpha < 1$. De esta forma $1 + \alpha > 1$ y aplicando la desigualdad (3) se sigue que

$$(1+u)^{\alpha} = \frac{(1+u)^{\alpha+1}}{1+u} \geq \frac{1+(\alpha+1)u}{1+u} = 1 + \frac{\alpha u}{1+u}.$$

Recordando que $\alpha < 1$ y mediante (4) obtenemos $(1+u)^{\alpha} \leq 1 + \alpha u$. Combinando con la desigualdad anterior se verifica

$$\frac{\alpha u}{1+u} \leq (1+u)^{\alpha} - 1 \leq \alpha u.$$

Supongamos que $0 < u < 1/2$, entonces dividimos al sistema de desigualdades por $u > 0$ y tenemos

$$\frac{\alpha}{1+u} \leq \frac{(1+u)^{\alpha}-1}{u} \leq \alpha, \qquad \alpha < 1. \tag{6}$$

Usando el Lema 2 se sigue que existe el límite cuando $u \to 0^+$

$$\alpha = \lim_{u\to 0^+} \frac{\alpha}{1+u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{(1+u)^{\alpha}-1}{u}.$$

De manera análoga, se verifica que $\frac{(1+u)^{\alpha}-1}{u} \to \alpha$ cuando $u \to 0^-$.

Ahora, considere el caso $\alpha > 1$. Denotemos por $\{\alpha\}$ y $[\alpha]$ a la parte fraccional y entera de α, respectivamente. Entonces $\alpha = \{\alpha\} + [\alpha]$, con $0 < \{\alpha\} < 1$ y $[\alpha] \geq 1$. Podemos asumir que $|u| < 1/2$, y aplicamos la desigualdad (4) para obtener $(1+u)^{\{\alpha\}} \leq 1 + u\{\alpha\}$. De esta forma

$$(1+u)^{\alpha} = (1+u)^{\{\alpha\}}(1+u)^{[\alpha]} \leq (1+\{\alpha\}u)(1+u)^{[\alpha]}. \tag{7}$$

Haciendo uso de la expansión binomial $(1+u)^{[\alpha]} = 1 + [\alpha]u + \binom{[\alpha]}{2}u^2 + \cdots + u^{[\alpha]}$ se sigue

$$\begin{aligned}
(1+\{\alpha\}u)(1+u)^{[\alpha]} &= (1+\{\alpha\}u)\left(1+[\alpha]u+\binom{[\alpha]}{2}u^2+\cdots+u^{[\alpha]}\right)\\
&= (1+\{\alpha\}u)(1+[\alpha]u) + (1+\{\alpha\}u)\left(\binom{[\alpha]}{2}u^2+\cdots+u^{[\alpha]}\right)\\
&= 1+\alpha u+u^2\left(\{\alpha\}[\alpha]+(1+\{\alpha\}u)\left(\binom{[\alpha]}{2}+\cdots+u^{[\alpha]-2}\right)\right). \qquad (8)
\end{aligned}$$

Recordemos que $|u| < 1/2$, $0 < \{\alpha\} < 1$ y

$$\sum_{k=0}^{[\alpha]} \binom{[\alpha]}{k} u^k \leq \sum_{k=0}^{[\alpha]} \binom{[\alpha]}{k} \leq 2^{[\alpha]}.$$

De esta forma

$$\{\alpha\}[\alpha] + (1+\{\alpha\}u)\left(\binom{[\alpha]}{2}+\cdots+u^{[\alpha]-2}\right) \leq \alpha + 2^{[\alpha]+1}. \tag{9}$$

Retomando la expresión (7) y combinándola con (8) y (9) obtenemos

$$(1+u)^{\alpha} = (1+u)^{\{\alpha\}}(1+u)^{[\alpha]} \leq 1 + \alpha u + (\alpha + 2^{[\alpha]+1})u^2.$$

Por lo tanto, usando la estimación anterior y la desigualdad (3) se sigue que

$$\alpha u \leq (1+u)^{\alpha} - 1 \leq \alpha u + (\alpha + 2^{[\alpha]+1})u^2.$$

Si $0 < u < 1/2$, entonces dividimos por u para obtener

$$\alpha \leq \frac{(1+u)^{\alpha}-1}{u} \leq \alpha + (\alpha + 2^{[\alpha]+1})u, \qquad \alpha > 1. \tag{10}$$

Tomando el límite cuando $u \to 0^+$, usando el Lema 2 obtenemos

$$\alpha = \lim_{u\to 0^+} \frac{(1+u)^{\alpha}-1}{u} = \lim_{u\to 0^+} (\alpha + 2^{[\alpha]+1}u).$$

De manera análoga (5) se obtiene cuando $u \to 0^-$ si $-1/2 < u < 0$.

4. Las desigualdades de Bernoulli, su demostración

Primero estableceremos desigualdades (3) y (4) en el caso cuando la potencia α es un número racional. Primero, para $u \geq -1$ definimos:

$$h(u) = (1+u)^{\alpha} - \alpha u.$$

En virtud de la derivabilidad de $h(u)$, ya que α es racional, se puede verificar que la función tiene un punto extremo cuando $u = 0$. Además, si $0 \leq \alpha < 1$, entonces $u = 0$ es un máximo local y $h(0) = 1 \geq (1+u)^{\alpha} - \alpha u$, es decir, se obtiene la desigualdad (3). Por otra parte, cuando $\alpha > 1$, $u = 0$ es el mínimo local de y se verifica (3). El caso $\alpha = 1$ es inmediato.

Ahora suponga que α es un irracional con $0 < \alpha < 1$. Sea r_k una sucesión de racionales tales que $r_k < \alpha$ y $r_k \to \alpha$ si $k \to \infty$. Entonces para todo $k \geq 1$ se tiene:

$$(1+u)^{\alpha} < (1+u)^{r_k} \leq 1 + r_k u.$$

Finalmente, al tomar el límite cuando $k \to \infty$, se obtiene la desigualdad buscada (3). Cuando $1 < \alpha$, para obtener (4) se procede de manera análoga eligiendo una sucesión de racionales r_k tales que $\alpha < r_k$ y r_k convergiendo a α.

Agradecimientos. Los autores agradecen al Proyecto de Servicio Social de la UAM-A con No. 1069 de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería, por todo el apoyo recibido para la realización de esta investigación. Se agradece también al árbitro anónimo por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Referencias

[1] Bartle, R. G. and Sherbert, D. R., *Introduction to real analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2nd edition, 1992.

[2] Bullen, P. S., *Handbook of means and their inequalities*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.

[3] Cipra, B., What is the derivate of x^n?, `https://math.stackexchange.com/questions/1808332/what-is-the-derivative-of-xn`, 2016.

[4] Kazarinoff, N. D., *Analytic inequalities*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.

Belem Garcés Martínez
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Ciencias Básicas.
Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas
Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200 CDMX, México
e-mail: `al2162004142@azc.uam.mx`

Víctor Cuauhtemoc García Hernández
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Ciencias Básicas.
Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas
Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200 CDMX, México
e-mail: `vcgh@azc.uam.mx`