MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.15, No.1, páginas 73-94.
Recibido 26-12-2023. Aceptado 06-06-2024.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v15n1/eljerm

LA FÓRMULA DE LEIBNIZ Y EL TRUCO FAVORITO DE FEYNMAN

E. ARIZA GARCÍA, L. ARTEAGA, J. DUTA, E. HURTADO, R. MOYA. & M. MUÑOZ

Resumen. En este trabajo exploramos el uso de la, así llamada, Fórmula de Leibniz, para lo cual resolvemos varios ejemplos. El método que consiste en el uso de esta fórmula también es conocido como truco favorito de Feynman. A pesar de su utilidad y potencia, dicho método es poco usado, y ha sido ampliamente olvidado en la actualidad, por lo que este trabajo pretende ayudar a ponerlo en el arsenal que se usa para calcular integrales de distintos tipos. Además, damos el marco teórico para finalmente demostrar formalmente un par de versiones de la fórmula de Leibniz.

1. Introducción

Algunos autores (ver [6, 7]) han llamado **el truco favorito de Feynman** al uso de lo que en matemáticas se conoce como **la fórmula de Leibniz** (ver [3]). Esta fórmula involucra la derivación de una función, dependiente de un parámetro, y definida por medio de una integral en la cual, tanto los límites de integración, como el integrando, pueden depender del parámetro. Por esta razón, también hay autores que se refieren a este método como **derivacion bajo el signo de integral**.

Según el propio Feynman (ver [4]) su profesor de física de la secundaria (el profesor Bader) le prestó un libro de cálculo avanzado (ver [13]) con el cual aprendió a usar este método de forma autodidacta. Años más tarde, Feynman se ganó la reputación de resolver integrales, algunas de las cuales eran (y son) consideradas difíciles de calcular. Al volverse Feynman una figura reconocida en todo el mundo científico, este truco de resolución de integrales se hizo famoso en algunos círculos científicos, y tomó el nombre de *el truco favorito de Feynman*.

Sin embargo, resulta un poco injusto endosar el método a Feynman, cuando este no es más que el uso de un teorema atribuido a Leibniz desde mucho antes de Feynman. Con el fin de darle el crédito adecuado a cada uno de estos grandes de la ciencia, hemos considerado pertinente que el título de este trabajo sea *La Fórmula de Leibniz y el Truco Favorito de Feynman*.

Esta herramienta, a pesar de su gran potencia y utilidad, no es comúnmente enseñada en los cursos de cálculo y, en la mayoría de los casos, ni siquiera es mencionada. Por esta razón se ha convertido en un método desconocido casi por completo, generando una debilidad en la caja de herramientas para el cálculo de integrales tanto de estudiantes como de algunos profesores. Esto es particularmente cierto en español, posiblemente debido a las pocas referencias relacionadas con este tema encontradas en nuestro idioma. De aquí que pretendamos, con esta pequeña contribución, proveer de una buena referencia, en el idioma español, que sirva de punto de partida para su uso.

En este trabajo demostramos formalmente un par de versiones de la fórmula de Leibniz, pero antes de eso, damos varios ejemplos del uso de esta fórmula para ilustrar, en primer lugar, cómo se usa el famoso truco favorito de Feynman y, en segundo lugar, cuan útil y potente es esta herramienta.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 97I40, 97I50, 97I60.
Palabras clave. Fórmula de Leibniz, Truco favorito de Feynman, Derivación bajo el signo de integral.

La estructura de este documento es la siguiente: En la Sección 2 enunciamos las dos versiones de la fórmula de Leibniz, sin dar la demostración ni mayores detalles sobre dicha fórmula, para luego pasar a mostrar cómo se usan estas, ilustrando así lo que se conoce como truco favorito de Feynman; en la Sección 3 introducimos todos los conceptos y la terminología necesaria para mostrar las dos versiones de la fórmula de Leibniz; en la Sección 4 enunciamos y demostramos las dos versiones de la fórmula de Leibniz; en la Sección 5 damos algunas observaciones finales; en la Sección 7 damos algunas conclusiones sobre este trabajo y posibles trabajos futuros; en la Sección 8 mostramos el procedimiento formal para resolver algunos ejemplos. Finalemente, en la Sección 9 dejamos algunos ejercicios que el lector interesado puede usar para practicar y mejorar sus habilidades en el uso de esta herramienta.

2. Ejemplos

Comenzamos enunciando las dos versiones de la fórmula de Leibniz. Las demostraciones de estas fórmulas se encuentran en la Sección 4.

Teorema 1. **(Fórmula de Leibniz: Primera Versión)**

Sea $f : A \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, donde A es un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ y J es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Si $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ es uniformente continua en $A \times J$ y

$$g(t) := \int_A f(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x},$$

entonces

$$\boxed{g'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x}}. \tag{1}$$

Teorema 2. **(Fórmula de Leibniz: Segunda Versión)**

Sea $f : A \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, donde A es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$ y J es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Sean $g, h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en J. Si definimos $\phi : J \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(t) := \int_{g(t)}^{h(t)} f(x, t)\ dx,$$

y $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ es uniformente continua en $A \times J$, entonces

$$\boxed{\phi'(t) = f(h(t), t) \cdot h'(t) - f(g(t), t) \cdot g'(t) + \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\ dx}. \tag{2}$$

El uso de estos resultados para el cálculo de ciertas integrales es lo que se conoce como truco favorito de Feynman. Veamos algunos ejemplos, en los que no ahondaremos en los detalles formales, para ilustrar cuan útil y potente es esta herramienta.

Ejemplo 1. Calculemos la integral

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^2}\ dx. \tag{3}$$

Para ello, recordemos que

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2}\ dx = \lim_{b \to \infty} \left(\int_0^b \frac{1}{x^2 + a^2}\ dx \right) = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \right) = \frac{\pi}{2a}.$$

Derivando con respecto al parámetro a en ambos lados de la igualdad anterior (teniendo en cuenta que la derivación en el lado izquierdo es bajo el signo de integral), tenemos que

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right)\ dx = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\pi}{2a}\right) \quad \Longrightarrow \quad \int_0^\infty \frac{-2a}{(x^2 + a^2)^2}\ dx = -\frac{\pi}{2a^2}.$$

De donde, al despejar la integral requerida, resulta

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4a^3}}. \tag{4}$$

Proceder de esta forma resulta bastante práctico, ¡pero tenga cuidado! Pudiera no ser correcto intercambiar la derivada con la integral (es decir, derivar bajo el signo de integral) ver Observación 12. El procedimiento formal para resolver este ejemplo se muestra en el Ejemplo 10 de las Sección 8.

El Ejemplo 1 es un ejemplo relativamente sencillo en el que el truco de Feynman es aplicable. Para ilustrar más claramente la potencia de este método, consideremos los siguientes ejemplos, algunos de los cuales son bastante famosos.

Ejemplo 2. Calculemos la famosa integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx. \tag{5}$$

Esta integral se suele calcular usando el cambio en coordenadas polares para integrales dobles (ver, por ejemplo, la página 603 de [8]). Nosotros usaremos el truco de Feynman para realizar este cálculo. Con esto en mente, consideremos la función

$$g(t) := \left(\int_0^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2. \tag{6}$$

Está claro que

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \left(\lim_{t\to\infty} g(t)\right)^{1/2}}. \tag{7}$$

De aquí que, para calcular la integral requerida, bastaría con calcular $g(t)$ y tomar la raíz cuadrada del límite indicado en (7). Es claro que se puede hacer uso de la segunda versión de la fórmula de Leibniz (que, en este caso, no es más que el Teorema Fundamental del Cálculo), junto con la regla de la cadena, para obtener

$$\frac{dg}{dt}(t) = 2\left(\int_0^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} = 2\int_0^{t} e^{-\frac{t^2+x^2}{2}}\,dx = 2\int_0^{t} e^{-\frac{1+\left(\frac{x}{t}\right)^2}{2}\cdot t^2}\,dx.$$

Hagamos ahora el cambio de variable $y = \dfrac{x}{t}$, de manera que $dx = t\cdot dy$, y

$$\begin{cases} \text{si} \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0, \\[2ex] \text{si} \quad x = t \quad \Rightarrow \quad y = 1. \end{cases}$$

Luego,

$$\frac{dg}{dt}(t) = 2\int_0^{1} e^{-\frac{1+y^2}{2}\cdot t^2}\; t\cdot dy = \int_0^{1} 2te^{-\frac{1+y^2}{2}\cdot t^2}\,dy. \tag{8}$$

Ahora bien, es fácil ver que

$$\int 2te^{-\frac{1+y^2}{2}\cdot t^2}\,dt = -\frac{2e^{-\frac{1+y^2}{2}\cdot t^2}}{1+y^2} + C.$$

Luego, podemos escribir

$$2te^{-\frac{1+y^2}{2}\cdot t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{2e^{-\frac{1+y^2}{2}\cdot t^2}}{1+y^2}\right). \tag{9}$$

De (8) y (9) resulta, entonces,

$$\frac{dg}{dt}(t) = \int_0^{1} \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{2e^{-\frac{1+y^2}{2}\cdot t^2}}{1+y^2}\right)\,dt = -2\frac{d}{dt}\left(\int_0^{1} \frac{e^{-\frac{1+y^2}{2}\cdot t^2}}{1+y^2}\,dy\right).$$

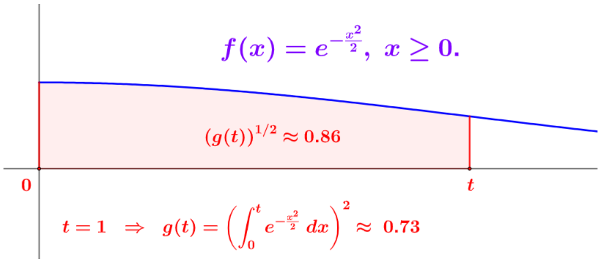

FIGURA 1. Área bajo la curva cuando $t = 1$.

Nótese el intercambio de los símbolos de derivación e integración, esto es, la aplicación del truco favorito de Feynman.

Así, pues, al integrar con respecto a t ambos lados de la igualdad anterior, obtenemos que

$$g(t) = -2\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1+y^2}{2}\cdot t^2}}{1+y^2}\,dy + K. \tag{10}$$

Para terminar, notemos que $g(0) = 0$ debido a (6), y

$$0 = g(0) = -2\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy + K,$$

debido a (10). Como

$$\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

lo anterior implica que

$$K = \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente,

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty}\left(-2\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1+y^2}{2}\cdot t^2}}{1+y^2}\,dy + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}}, \tag{11}$$

puesto que

$$\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1+y^2}{2}\cdot t^2}}{1+y^2}\,dy\right) = \int_0^1 \lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^{-\frac{1+y^2}{2}\cdot t^2}}{1+y^2}\right)dy = 0. \tag{12}$$

Podemos concluir, entonces, gracias a (7) y a (11), que

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \left(\lim_{t\to\infty} g(t)\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}. \tag{13}$$

Observación 1. El intercambio del límite con la integral en (12) es posible gracias a la continuidad uniforme del integrando en el intervalo $[0, 1]$. Vea el argumento dado en el Lema 15 para más detalles.

Observación 2. Es de hacer notar que la integral dada dentro del paréntesis en la definición (6) representa el área bajo la curva $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ en el intervalo $[0, t]$. Ver Figura 1. También puede ver este ejemplo en geogebra, haciendo click aquí.

En este punto, el lector interesado estará pensando en si convino usar el método seguido en el Ejemplo 2 o habría sido preferible realizar este cálculo usando el cambio de variables en coordenadas polares para integrales dobles mencionado. Es posible que sí. Sin embargo, en el siguiente ejemplo resulta bastante complicado usar esto último, mientras que el truco de Feynman sigue vigente.

Ejemplo 3. Calculemos la integral

$$I := \int_0^\infty \cos(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx.$$

Para ello, vamos a proceder con cierta informalidad. En el Ejemplo 11 se formalizan estas ideas. Sea, entonces,

$$I(t) := \int_0^\infty \cos(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx, \tag{14}$$

de manera que $I = I(1)$. Derivando con respecto al parámetro t en ambos lados de la igualdad anterior (teniendo en cuenta que la derivación en el lado derecho es bajo el signo de integral y que, como la derivada es con respecto a t, el valor de x se considera constante), tenemos que

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(\cos(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\ dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\Big(\cos(tx)\Big) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx \\ &= \int_0^\infty -x \operatorname{sen}(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes la última integral, con

$$\boxed{u = \operatorname{sen}(tx)} \quad \text{y} \quad \boxed{dv = -xe^{-\frac{x^2}{2}}\ dx},$$

resulta que

$$\boxed{du = t \cdot \cos(tx)\ dx} \quad \text{y} \quad \boxed{v = e^{-\frac{x^2}{2}}},$$

por lo que

$$I'(t) = \left(\operatorname{sen}(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot t \cdot \cos(tx)\ dx,$$

es decir,

$$I'(t) = -t \int_0^\infty \cos(tx) \cdot e^{-x^2}\ dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{I'(t) = -t \cdot I(t)}, \tag{15}$$

puesto que

$$\left(\operatorname{sen}(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_0^\infty = \lim_{b \to \infty} \left(\operatorname{sen}(tb) \cdot e^{-\frac{b^2}{2}} - \operatorname{sen}(0) \cdot e^0\right) = 0.$$

Ahora bien, la ecuación (15) es una ecuación diferencial de variables separables que se resuelve fácilmente (dejamos los detalles al lector), y cuya solución general es

$$I(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{16}$$

Finalmente, gracias a (13) y (14),

$$\boxed{I(0) = \int_0^\infty \cos(0) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}. \tag{17}$$

Luego, debido a (16) y (17), podemos escribir

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = I(0) = C \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

En conclusión, tenemos que

$$I(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}},$$

esto es,

$$\boxed{\int_0^\infty \cos(tx)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}}. \tag{18}$$

En particular, como la integral que se requería calcular era $I = I(1)$, podemos decir que

$$\boxed{\int_0^\infty \cos(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = I(1) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}}.$$

Ejemplo 4. Calculemos la integral

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{\ln x}\ dx. \tag{19}$$

Para ello, definamos la función

$$g(k) = \int_0^1 \frac{x^k-1}{\ln x}\ dx, \tag{20}$$

dependiente del parámetro $k \geq 0$. Notemos que

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{\ln x}\ dx = g(2) \tag{21}$$

y que

$$g(0) = 0. \tag{22}$$

Derivando (20) bajo el signo de integral, obtenemos

$$\frac{dg}{dk}(k) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{x^k-1}{\ln x}\right)\ dx.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{x^k-1}{\ln x}\right) = \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\partial}{\partial k}\Big(x^k-1\Big) = \frac{1}{\ln x}\cdot\Big(x^k\cdot\ln x\Big) = x^k,$$

entonces

$$\frac{dg}{dk}(k) = \int_0^1 x^k\ dx = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^1 = \frac{1}{k+1}. \tag{23}$$

Esta ecuación (23) es una ecuación diferencial ordinaria de variables separables que, al resolverla, resulta

$$g(k) = \ln|k+1| + C. \tag{24}$$

Para calcular C, notemos que, debido a (22) y a (24),

$$0 = g(0) = \ln|0+1| + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 0}.$$

Luego,

$$\boxed{g(k) = \ln|k+1|}. \tag{25}$$

Finalmente, de (21), tenemos que

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2-1}{\ln x}\ dx = g(2) = \ln(3)}. \tag{26}$$

Ejemplo 5. Calculemos la integral

$$\tilde{I} := \int_0^\pi e^{\cos(x)}\cdot\cos\Big(\operatorname{sen}(x)\Big)\ dx. \tag{27}$$

Esta integral se puede resolver de distintas formas. Una de ellas es escribir el integrando por medio de su representación en series. Nosotros usaremos el truco de Feynman.

Con ello en mente, definamos

$$I(k) = \int_0^\pi e^{k\cos(x)} \cdot \cos\Big(k\,\mathrm{sen}(x)\Big)\, dx.$$

Nótese que $\tilde{I} = I(1)$ y que I es derivable en todo $k \in \mathbb{R}$. De la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta),$$

se tiene que

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\,\mathrm{sen}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}. \tag{28}$$

Sea $\alpha = k\cos(x)$. Usando (28) con $\theta = k\,\mathrm{sen}(x)$, podemos escribir

$$e^{k\cos(x)} \cdot \cos\Big(k\,\mathrm{sen}(x)\Big) = e^{\alpha} \cdot \cos(\theta) = e^{\alpha} \cdot \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{e^{\alpha + i\theta} + e^{\alpha - i\theta}}{2}.$$

Como

$$\boxed{\alpha + i\theta = k\big(\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)\big) = ke^{ix}} \ \text{ y } \ \boxed{\alpha - i\theta = ke^{-ix}},$$

tenemos que

$$e^{k\cos(x)} \cdot \cos\Big(k\,\mathrm{sen}(x)\Big) = \frac{1}{2} e^{ke^{ix}} + \frac{1}{2} e^{ke^{-ix}},$$

con lo cual

$$\boxed{I(k) = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{ke^{ix}}\, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{ke^{-ix}}\, dx}. \tag{29}$$

De (29) se obtiene, derivando bajo el signo de integral con respecto a k, que

$$I'(k) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial k}\left(e^{ke^{ix}}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial k}\left(e^{ke^{-ix}}\right) dx. \tag{30}$$

Ahora bien,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial k}\left(e^{ke^{ix}}\right) = e^{ke^{ix}} \cdot \frac{\partial}{\partial k}\left(ke^{ix}\right) = e^{ke^{ix}} \cdot e^{ix}} \ \text{ y } \ \boxed{\frac{\partial}{\partial k}\left(e^{ke^{-ix}}\right) = e^{ke^{-ix}} \cdot e^{-ix}}.$$

Así, (30) se reduce a

$$I'(k) = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{ke^{ix}} \cdot e^{ix}\, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{ke^{-ix}} \cdot e^{-ix}\, dx.$$

Esto lo podemos escribir como

$$2ikI'(k) = \underbrace{ik \int_0^\pi e^{ke^{ix}} \cdot e^{ix}\, dx}_{I_1} + \underbrace{ik \int_0^\pi e^{ke^{-ix}} \cdot e^{-ix}\, dx}_{I_2}. \tag{31}$$

Para calcular I_1 basta con hacer el cambio de variable $u = ke^{ix}$, lo que resulta en

$$I_1 = e^{ke^{ix}}\Big|_0^\pi = e^{-k} - e^{k},$$

mientras que para el cálculo de I_2 basta con hacer el cambio $v = ke^{-ix}$, lo que lleva a

$$I_2 = -\, e^{ke^{-ix}}\Big|_0^\pi = -\left(e^{-k} - e^{k}\right) = -I_1.$$

Por tanto, (31) se convierte en

$$2ikI'(k) = I_1 + I_2 = I_1 + (-I_1) = 0.$$

Como esto vale para todo $k \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$I'(k) = 0,$$

i.e., $I(k)$ es constante con respecto a k. En particular, tenemos que

$$\tilde{I} = I(1) = I(0) = \int_0^\pi e^0 \cos(0)\, dx = \int_0^\pi dx = \pi,$$

es decir,

$$\boxed{\int_0^{\pi} e^{\cos(x)} \cdot \cos\Big(\operatorname{sen}(x)\Big)\, dx = \pi}.$$

Ejemplo 6. Calculemos la integral

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\, dx. \tag{32}$$

Para hacerlo, definamos

$$I(t) = \int_0^1 \frac{\ln(tx+1)}{x^2+1}\, dx.$$

Notemos que

$$\boxed{I(1) = I} \quad \text{e} \quad \boxed{I(0) = 0}.$$

Si asumimos que podemos derivar bajo el signo de integral, resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\ln(tx+1)}{x^2+1}\right) dx = \int_0^1 \frac{x}{(tx+1)(x^2+1)}\, dx.$$

La última integral se puede calcular usando descomposición en fracciones simples. Esta descomposición es de la siguiente forma:

$$\frac{x}{(tx+1)(x^2+1)} = \frac{A}{tx+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Al realizar los cálculos necesarios para hallar las constantes A, B y C, resulta que

$$A = \frac{-t}{t^2+1} = -C, \quad B = \frac{1}{t^2+1}.$$

Luego,

$$\frac{x}{(tx+1)(x^2+1)} = \frac{1}{t^2+1}\cdot\left(\frac{-t}{tx+1} + \frac{x+t}{x^2+1}\right) = \frac{1}{t^2+1}\cdot\left(-\frac{t}{tx+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{t}{x^2+1}\right).$$

De aquí que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} I(t) &= \frac{1}{t^2+1} \cdot \int_0^1 \left(-\frac{t}{tx+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{t}{x^2+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{t^2+1} \cdot \left(-\ln(tx+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + t\cdot\arctan(x)\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{t^2+1} \cdot \left(-\ln(t+1) + \frac{1}{2}\ln(2) + t\cdot\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\ln(2)}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{t}{t^2+1} - \frac{\ln(t+1)}{t^2+1}.
\end{aligned}$$

Integrando ambos lados en el intervalo $(0, 1)$, y usando el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} I(t)\, dt}_{I(1)-I(0)} = \frac{\ln(2)}{2} \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt}_{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{4} \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\, dt}_{\frac{\ln(2)}{2}} - \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1}\, dt}_{I(1)}.$$

Como $I(0) = 0$, lo anterior implica que

$$I(1) = \frac{\ln(2)}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\ln(2)}{2} - I(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = I(1) = \frac{\pi\ln(2)}{8}}.$$

3. Peliminares Teóricos

Quisimos que la sección de ejemplos estuviera antes de los preliminares teóricos, para mostrar de entrada la potencia y utilidad del uso de la fórmula de Leibniz o truco favorito de Feynman.

Ahora vamos a mostrar las dos versiones de la fórmula de Leibniz enunciadas al principio de la sección anterior, para lo cual iniciamos con esta sección de preliminares, en la que recordamos algunos conceptos y resultados bien conocidos del cálculo diferencial e integral, y del análisis matemático.

3.1. Continuidad.

Definición 3. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en $D \subset \mathrm{Dom}(f)$. Diremos que f es **continua** en $\mathbf{a} \in D$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in D, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon.$$

En otras palabras, si

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})}.$$

Si la función f no es continua en $\mathbf{a}$, diremos que ella es **discontinua** en ese punto. Si f es continua en cada punto $\mathbf{a} \in D$, diremos que f es **continua en** D.

Ejemplo 7. Toda función polinómica es continua en todo su dominio. También lo son las funciones racionales (i.e., cocientes de polinomios) en todo su dominio. Otros ejemplos de funciones continuas son las funciones trigométricas, logarítmicas y exponenciales, en todo su dominio. Finalmente, suma, resta, producto y composición de funciones continuas, es continua. El cociente de funciones continuas es continuo siempre que su denominador no sea cero.

En la definición 3 anterior, suele ocurrir que δ dependa tanto de ε como de $\mathbf{a}$. Si δ depende sólo de ε, entonces diremos que f es uniformemente continua en D. Más precisamente, tenemos la siguiente

Definición 4. $f : D \to \mathbb{R}$ es **uniformemente continua en** D si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Observación 3. Si $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado y $f : D \to \mathbb{R}$ es continua en D, entonces f es uniformemente continua en D.

Observación 4. Si $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado y $f : D \to \mathbb{R}$ es continua en D, entonces f alcanza su máximo y su mínimo valor en D.

3.2. Derivabilidad y Teorema del Valor Medio (T.V.M.).

Definición 5. Sea $h : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $t_0 \in (a,b)$. Diremos que h es **derivable en** t_0 si existe el límite

$$\boxed{\lim_{t\to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}}. \tag{33}$$

Llamaremos a dicho límite **la derivada de** h **en** t_0 y lo denotaremos por

$$h'(t_0) \quad \text{ó} \quad \frac{dh}{dt}(t_0).$$

Diremos que h es **derivable en** (a,b) si ella es derivable en cada punto de (a,b).

Observación 5. Si llamamos $\Delta t := t - t_0$ y $\Delta h := h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)$, podemos escribir

$$h'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t}.$$

Lo anterior equivale a

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}-h'(t_0)\right)=0.$$

De aquí que, si definimos

$$R(t_0;\Delta t):=\Delta h-\Delta t\cdot h'(t_0),$$

entonces h es derivable en t_0 si y sólo si

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R(t_0;\Delta t)}{\Delta t}=0.$$

Finalmente, debemos notar que esto implica que

$$\lim_{\Delta t\to 0}R(t_0;\Delta t)=0,$$

lo que, a su vez, nos lleva a concluir que

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta h=0.$$

Esto es, **si h es derivable en t_0, también es continua ahí**.

Aunque hay mucho que decir sobre la derivada, para lo que buscamos es este trabajo, además de la observación anterior, nos basta con el siguiente resultado, conocido como **Teorema del Valor Medio (T.V.M.) o Teorema de los incrementos finitos de Lagrange**.

TEOREMA 6. *Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), siendo $a<b$. Entonces, existe un punto $c\in(a,b)$ tal que:*

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)}. \tag{34}$$

Una demostración de este hecho se puede ver en cualquier buen libro de cálculo diferencial o uno de análisis matemático. Ver, por ejemplo, [9] o [12].

3.3. La integral de Riemann y el Teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C.). Primero damos la definición de la integral de Riemann de $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, para luego pasar a algunas propiedades de interés, y al Teorema Fundamental del Cálculo.

Definición 7. Una **partición del intervalo cerrado** $[a,b]$ es un conjunto

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_{l-1},x_l\}$$

de puntos de $[a,b]$ tales que

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{l-1}<x_l=b.$$

Definición 8. Dada una función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y una partición P de $[a,b]$, la Observación 4 implica que f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en cada subintervalo de la partición dada. Así, si consideramos el subintervalo $[x_{i-1},x_i]$, para $i=1,\dots,l$, podemos definir los valores

$$m_i:=\text{mín}\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}\ \text{ y }\ M_i:=\text{máx}\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}.$$

Definimos, además, la **suma inferior** y **la suma superior de f en $[a,b]$ con respecto a la partición** P, respectivamente, como

$$L_f(P):=\sum_{i=1}^{l}m_i\cdot(x_i-x_{i-1})\ \text{ y }\ U_f(P):=\sum_{i=1}^{l}M_i\cdot(x_i-x_{i-1}).$$

Observación 6. Si f es continua en $[a,b]$, existe sólo un número real I tal que

$$L_f(P)\le I\le U_f(P)$$

para todas las particiones P de $[a,b]$. Puede ver una demostración de este hecho en [9] o en [12].

Debido a esta observación, podemos dar la siguiente

Definición 9. Sea f continua en $[a, b]$. Al único número I que satisface

$$L_f(P) \leq I \leq U_f(P),$$

para todas las particiones P de $[a, b]$, lo llamaremos **la integral definida de f en** $[a, b]$, y denotaremos este valor por

$$\int_a^b f(x)\ dx.$$

Observación 7. La continuidad de una función es una condición suficiente para que el valor I de la definición anterior exista, pero no es necesaria. Es decir, hay funciones no continuas que cumplen con que existe un único número I que satisface

$$L_f(P) \leq I \leq U_f(P)$$

para todas las particiones P de $[a, b]$. A todas las funciones que satisfacen esto las llamaremos **funciones integrables en** $[a, b]$, y denotaremos al conjunto de funciones integrables en $[a, b]$ por $\mathcal{R}([a, b])$.

Observación 8. Algunas propiedades de esta integral son las siguientes. Sean $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

(i) $\displaystyle\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx.$

(ii) Si $c \in [a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b g(x)\ dx.$

(iii) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$

Observación 9. El concepto de integral se puede extender a funciones escalares de varias variables, es decir, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para $n \geq 2$. En este caso consideramos un conjunto adecuado $A \in \mathbb{R}^n$, llamamos a $f : A \to \mathbb{R}$ integrable en A y denotamos a la integral de f sobre A por

$$\int_A f(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} \quad \text{o} \quad \int_A f.$$

Las propiedades de la observación anterior también se cumplen en este caso, con algunas modificaciones para adaptarlas a $\mathbb{R}^n$. Para ver más detalles sobre este particular, remitimos al lector a [3, 5, 8].

Enunciamos ahora el **Teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C.)**. Una demostración de este puede ser vista en [9, 10, 12].

Teorema 10. **(T.F.C.)** *Sea $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Si f es continua en $t_0 \in (a, b)$, entonces la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(t) = \int_a^t f(x)\ dx$$

es derivable en t_0, y

$$F'(t_0) = f(t_0).$$

Terminamos esta subsección con el siguiente resultado conocido como **Teorema del Valor Medio para integrales**.

Teorema 11. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe al menos un número c en (a, b) para el cual*

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Demostración. Aplique el T.V.M. y el T.F.C. a la función

$$F(t) := \int_a^t f(x)\ dx$$

en el intervalo $[a, b]$.

□

3.4. Convergencia puntual y convergencia uniforme [10, 12].

Definición 12. Una sucesión de funciones $\{h_k\}_k$, siendo $h_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, **converge puntualmente a la función** $h : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **en** D si

$$h(\mathbf{x}) = \lim_{k\to\infty} h_k(\mathbf{x})$$

para cada $\mathbf{x} \in D$.

Ejemplo 8. La sucesión $f_k(x) = \dfrac{x^{2k}}{1+x^{2k}}$ converge puntualmente a

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| < 1, \\ 1/2, & \text{si } |x| = 1, \\ 1, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

en $\mathbb{R}$.

Definición 13. Una sucesión de funciones $\{h_k\}_k$, siendo $h_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, **converge uniformemente a la función** $h : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **en** D si, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ (que sólo depende de ε) tal que

$$|h_k(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})| < \varepsilon \ \text{ para todo } \ k \geq K$$

y para todo $\mathbf{x} \in D$.

Ejemplo 9. La sucesión de funciones $h_k(x) = k^2 x e^{-kx}$ converge puntualmente, pero no uniformemente a $h(x) = 0$ en el intervalo $[0, \infty)$. En intervalos de la forma $[a, \infty)$ para $a > 0$ la convergencia sí es uniforme.

Observación 10. Algunos resultados bien conocidos relacionados con este tipo de convergencia son los enunciados en la siguiente Proposición (ver [12]).

Proposición 14. *Sea $\{h_k\}_k$, con $h_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, una sucesión de funciones.*

(i) *Si $\{h_k\}_k$ converge uniformemente a h en D, entonces $\{h_k(\mathbf{x})\}_k$ converge a $h(\mathbf{x})$ para cada $\mathbf{x} \in D$ (es decir, $\{h_k\}_k$ converge puntualmente a f).*

(ii) *Si $\{h_k\}_k$ converge uniformemente a $h : D \to \mathbb{R}$ en D y cada h_k es continua en D, entonces h también lo es.*

(iii) **(Criterio de Cauchy)** *Si para cada $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|h_k(\mathbf{x}) - h_m(\mathbf{x})| \leq \varepsilon \quad \textit{siempre que} \quad m, k \geq K \quad \textit{y} \quad \mathbf{x} \in D,$$

entonces $\{h_k\}_k$ converge uniformemente a una función $h : D \to \mathbb{R}$.

Para más ejemplos sobre sucesiones de funciones, remitimos al lector a [11].

Ahora mostramos un resultado que involucra el intercambio de un límite uniforme con la integral definida.

Lema 15. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto en $\mathbb{R}^n$ con volumen $V(A) \in [0, \infty)$. Si $\{h_k\}_k$ es una sucesión de funciones integrables en $A \subset \mathbb{R}^n$ que convergen uniformemente a la función integrable $h : A \to \mathbb{R}$ en A. Entonces*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \int_A h_k(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \int_A h(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \int_A \lim_{k\to\infty} h_k(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}}.$$

Demostración. Si $V(A) = 0$, entonces

$$\int_A h_k(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = 0,\ \forall k, \quad \text{y} \quad \int_A h(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = 0,$$

por lo que la conclusión del Lema es evidente. Asumamos, entonces, que $V(A) \neq 0$.

Como $\{h_k\}_k$ converge uniformemente a h en A, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in A$,

$$|h_k(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{V(A)} \text{ siempre que } k \geq K,$$

donde $V(A)$ representa el volumen de A, esto es,

$$V(A) = \int_A d\mathbf{x}.$$

Por otro lado, si $k \geq K$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_A h_k(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} - \int_A h(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}\right| &= \left|\int_A \Big(h_k(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})\Big)\ d\mathbf{x}\right| \\
&\leq \int_A |h_k(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})|\ d\mathbf{x} \\
&\leq \int_A \frac{\varepsilon}{V(A)}\ d\mathbf{x} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto es precisamente lo que queríamos mostrar.

□

4. La Fórmula de Leibniz

En esta Sección mostraremos un par de versiones de la, así llamada, fórmula de Leibniz.

4.1. Fórmula de Leibniz: Primera Versión.

Teorema 16. **(Fórmula de Leibniz: Primera Versión)**

Sea $f : A \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, donde A es un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ y J es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Si $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ es uniformente continua en $A \times J$ y

$$g(t) := \int_A f(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x},$$

entonces

$$\boxed{g'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x}}. \tag{35}$$

Demostración. Notemos, en primer lugar, que, si $\{t_k\}_k \in \mathbb{N}$ es una sucesión de números reales que tiene límite t, entonces

$$g'(t) = \lim_{k\to\infty} \frac{g(t_k) - g(t)}{t_k - t}.$$

Ahora bien,

$$g(t_k) - g(t) = \int_A \big(f(\mathbf{x}, t_k) - f(\mathbf{x}, t)\big)\ dx.$$

Además, si asumimos que $t < t_k$ (el caso $t > t_k$ se trata de manera similar), para cada $\mathbf{x} \in A$ fijo, el T.V.M. implica que existe $\tau_k(\mathbf{x}) \in (t, t_k)$, tal que

$$f(\mathbf{x}, t_k) - f(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau_k(\mathbf{x})) \cdot (t_k - t).$$

Definamos

$$\varphi_k(\mathbf{x}) := \frac{\partial f}{\partial t}\left(\mathbf{x}, \tau_k(\mathbf{x})\right) = \frac{f\left(\mathbf{x}, t_k\right) - f\left(\mathbf{x}, t\right)}{t_k - t}.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ es uniformemente continua en $A \times J$, podemos decir que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que sólo depende de ε, tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, \tilde{t}) - \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |t - \tilde{t}| < \varepsilon.$$

Además, como $t_k \to t$, para este mismo valor de ε, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$|t - t_k| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad k \geq K.$$

Por lo tanto, si $k \geq K$ y $\mathbf{x} \in A$ es arbitrario, se tiene que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}\left(\mathbf{x}, t_k\right) - \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\right| < \varepsilon. \tag{36}$$

Pero esto también es valido si en (36) escribimos $\tau_k(\mathbf{x})$ en lugar de t_k (¡pues $\tau_k(\mathbf{x}) \in (t, t_k)$!), es decir, $\forall \mathbf{x} \in A$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}\left(\mathbf{x}, \tau_k(\mathbf{x})\right) - \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad k \geq K. \tag{37}$$

Como $\varphi_k(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial t}\left(\mathbf{x}, \tau_k(\mathbf{x})\right)$, lo anterior significa que $\varphi_k(\mathbf{x})$ converge uniformemente a $\dfrac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$ en A. Esto es

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$$

uniformemente en A. Debido a esto y al Lema 15 tenemos, finalmente, que

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\, dx &= \int_A \lim_{k \to \infty} \varphi_k(\mathbf{x})\, dx \\
&= \lim_{k \to \infty} \int_A \varphi_k(\mathbf{x})\, dx \\
&= \lim_{k \to \infty} \int_A \left(\frac{f\left(\mathbf{x}, t_k\right) - f(\mathbf{x}, t)}{t_k - t}\right) dx \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{g\left(t_k\right) - g(t)}{t_k - t} \\
&= g'(t).
\end{aligned}$$

□

4.2. Fórmula de Leibniz: Segunda Versión o versión general. El siguiente Lema bien podría ser presentado como lo que más adelante llamaremos la versión general de la fórmula de Leibniz, porque es equivalente a esta. Sin embargo, preferimos presentarlo como un resultado previo.

Lema 17. *Sea $f : A \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, donde A es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$ y J es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Sea $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en J. Si definimos $\varphi : J \to \mathbb{R}$ por*

$$\varphi(t) := \int_a^{h(t)} f(x, t)\, dx,$$

y $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *es uniformemente continua en* $A \times J$*, entonces*

$$\boxed{\varphi'(t) = f(h(t), t) \cdot h'(t) + \int_a^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ dx}. \tag{38}$$

Demostración. Consideremos la diferencia

$$\Delta\varphi := \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t),$$

que, por definición, es

$$\Delta\varphi = \int_0^{h(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t)\ dx - \int_0^{h(t)} f(x,t)\ dx.$$

De la Observación 5 podemos escribir $h(t + \Delta t) = h(t) + \Delta h$, por lo cual

$$\begin{aligned} \int_0^{h(t+\Delta t)} f(x, t+\Delta t) dx &= \int_0^{h(t)+\Delta h} f(x, t+\Delta t) dx \\ &= \int_0^{h(t)} f(x, t+\Delta t)\ dx + \int_{h(t)}^{h(t)+\Delta h} f(x, t+\Delta t) dx. \end{aligned}$$

Luego,

$$\Delta\varphi = \int_0^{h(t)} \Big(f(x, t+\Delta t) - f(x,t)\Big)\ dx + \int_{h(t)}^{h(t)+\Delta h} f(x, t+\Delta t)\ dx.$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \int_0^{h(t)} \left(\frac{f(x, t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t}\right)\ dx + \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{h(t)}^{h(t)+\Delta h} f(x, t+\Delta t)\ dx.$$

Por un lado, la continuidad uniforme de $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ en $A \times J$ nos permite usar un argumento similar al dado en la demostración del Teorema 16 para escribir

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{h(t)} \left(\frac{f(x, t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t}\right)\ dx &= \int_0^{h(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{f(x, t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t}\right)\ dx \\ &= \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, el Teorema del Valor Medio para integrales (Teorema 11) implica que existe $\xi \in \big(h(t), h(t) + \Delta h\big)$ tal que

$$\int_{h(t)}^{h(t)+\Delta h} f(x, t+\Delta t)\ dx = f(\xi, t+\Delta t) \cdot \Delta h,$$

así que

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{h(t)}^{h(t)+\Delta h} f(x, t+\Delta t)\ dx = f(\xi, t+\Delta t) \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t}.$$

Finalmente, como $\Delta h \to 0$ cuando $\Delta t \to 0$, entonces

$$\lim_{\Delta t \to 0} \xi = h(t).$$

Por lo tanto, debido a lo anterior y a la continuidad de f, tenemos que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{h(t)}^{h(t)+\Delta h} f(x, t+\Delta t)\ dx = \lim_{\Delta t \to 0} \left(f(\xi, t+\Delta t) \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t}\right) = f(h(t), t) \cdot h'(t).$$

En conclusión,

$$\varphi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ dx + f(h(t), t) \cdot h'(t),$$

tal como requeríamos. □

El Lema recién demostrado implica la segunda versión de la fórmula de Leibniz, que corresponde a la generalización de la primera versión.

Teorema 18. **(Fórmula de Leibniz: Segunda Versión)**

Sea $f : A \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, donde A es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$ y J es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Sean $g, h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en J. Si definimos $\phi : J \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(t) := \int_{g(t)}^{h(t)} f(x,t)\ dx,$$

y $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ es uniformemente continua en $A \times J$, entonces

$$\boxed{\phi'(t) = f(h(t),t) \cdot h'(t) - f(g(t),t) \cdot g'(t) + \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ dx}. \tag{39}$$

Demostración. Basta con notar que

$$\phi(t) = \int_a^{h(t)} f(x,t)\ dx - \int_a^{g(t)} f(x,t)\ dx$$

y con usar la fórmula (38) del Lema 17.

□

5. Algunas observaciones finales

Habiendo considerado ejemplos prácticos y la base teórica que respalda la aplicación del método en todos estos ejemplos, siempre surge la pregunta **¿cuándo conviene o no aplicar el método?**

Con el fin de tratar de responder a esta cuestión, damos algunas observaciones que son importantes al momento de considerar este método.

Observación 11. En primer lugar debemos decir que, si la integral considerada puede resolverse por los métodos tradicionales (cambio de variable, integración por partes, etc), suele ser conveniente usar dichos métodos. Por ejemplo, la integral

$$I(k) := \int_0^1 (2x + k^3)^2\ dx$$

puede calcularse usando el método de derivación bajo el signo de integral. Sin embargo, es bastante claro que la misma puede calcularse por medio de un cálculo directo. Dejamos al lector los cálculos usando ambas vías.

Observación 12. La primera dificultad que suele encontrarse en el uso de este método es decidir dónde introducir el parámetro con respecto al cual vamos a derivar. El no decidir adecuadamente sobre este tema es una de las principales limitantes del método.

Otra limitante se encuentra en las condiciones de los teoremas 16 y 18. El no tener cuidado en la verificación de estas condiciones, puede llevar a resultados incorrectos. Como ejemplo, si consideramos

$$f(x,t) := \begin{cases} \dfrac{2t^3 x}{(t^2 + x^2)^2}, & \text{si } x \neq 0 \ \text{ o } \ t \neq 0, \\ \\ 0, & \text{si } (x,t) = (0,0). \end{cases}$$

No es difícil ver que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) := \begin{cases} 2t^2 x \cdot \dfrac{3x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^3}, & \text{si } x \neq 0, \\ \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

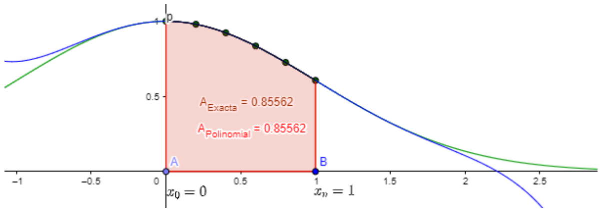

FIGURA 2. Área bajo la curva y aproximación usando Newton-Côtes.

por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0$$

sin importar el valor de x. Luego,

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ dx\bigg|_{t=0} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,0)\ dx = 0.$$

Por otro lado,

$$\int_0^1 f(x,t)\ dx = \frac{t}{t^2+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^1 f(x,t)\ dx\right) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^1 f(x,t)\ dx\right)\bigg|_{t=0} = 1.$$

Es decir, **la igualdad**

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^1 f(x,t)\ dx\right)$$

no es cierta en $t = 0$. De manera que el método no es válido acá. El problema está en el hecho de que f no satisface la propiedad de continuidad uniforme en ningún entorno del origen y, si usamos el método acá, estaríamos asumiendo (erróneamente) que sí lo hace.

Observación 13. Aunque no es el tema a tratar en este artículo, es importante mencionar que existen métodos numéricos que permiten realizar aproximaciones de este tipo de integrales. En la Figura 2 se puede ver el área bajo la curva en el intervalo $[0,1]$ y una aproximación dada por el método de Newton-Côtes con $n = 5$, correspondiente al Ejemplo 2. Este n representa la cantidad de subintervalos iguales en los que se divide el intervalo en el que se está integrando, así como el grado del polinomio interpolador que aproxima a la función dada. Para más detalles con respecto a este y otros métodos numéricos, referimos al lector a [1, 2].

Haciendo click aquí puede ver una implementación del método de Newton-Côtes en geogebra, con el cual el lector puede jugar un poco, cambiando los intervalos, el valor de n, y la función considerada, de manera que esta implementación puede ser usada para este y algunos de los otros ejemplos. Además, se tiene una representación geométrica de la situación presentada en cada caso. Animamos al lector a usarlo.

6. Ideas de implementación en clases

Esta Sección va dirigida a los docentes interesados en enseñar esta herramienta en sus clases.

Algunas de las formas en que se puede implementar la enseñanza del truco favorito de Feynman, pueden ser las siguientes:

(1) En primer lugar, sugerimos que, sea cual fuere la manera en que se vaya a desarrollar el método, y a manera de motivación, este sea introducido por medio de un pequeño recuento histórico, presentando algunas integrales que resulten complicadas de calcular por otras vías.

(2) Se puede aprovechar esta introducción para retar a los estudiantes para que resuelvan alguno de los ejemplos exhibidos usando las herramientas que manejan, de manera que entiendan de primera mano la limitación de dichas herramientas.

(3) Una motivación adicional para el uso del truco favorito de Feynman es la implementación de competencias de resolución de intregrales con participantes de la escuela, de la facultad, o de toda la universidad que estén interesados en participar en este tipo de eventos. Para ello se sugiere dividir la competencia en varias etapas. Para avanzar a la siguiente etapa se debe alcanzar un puntaje mínimo. La etapa subsiguiente debe ser más compleja que la anterior, y en la o las últimas etapas se deberían incluir integrales que se resuelvan usando el truco favorito de Feynman. Finalmente, los mejores participantes deberían ser premiados con certificados u otros premios, mientras que todos los participantes deberían recibir un certificado de participación. Esto último con el fin de fomentar la mayor participación posible.

El punto (3) anterior puede servir como un proyecto de vinculación con la sociedad, en el que participen varios docentes y estudiantes avanzados, para poder cumplir con el requesito de participación en proyectos vinculados con la comunidad que se tiene en algunos países para culminar sus estudios.

7. Conclusiones

En este trabajo exhibimos el, así llamado, truco favorito de Feynman. Este es un método que consiste en el uso de la fórmula de Leibniz, fórmula que permite realizar derivación bajo el signo de integral.

También mostramos algunos ejemplos que ilustran cómo se usa esta herramienta y su versatilidad. En estos ejemplos queda en evidencia la necesidad de manejar algunos temas básicos del cálculo diferencial e integral, así como de ecuaciones diferenciales ordinarias. De aquí que derivar bajo el signo de integral, aunque útil, no es suficiente por sí solo.

Esperamos que con esta contribución se tenga una referencia de calidad, en el idioma español, que sirva de ayuda a los lectores interesados en usar esta herramienta.

Pretendemos que este sea el punto de partida de una colección de trabajos divulgativos que busquen rescatar herramientas útiles, pero ampliamente desconocidas y hasta olvidadas, del cálculo avanzado.

Agradecimientos. Queremos agradecer las muy acertadas observaciones del árbitro. Su trabajo fue muy valioso para mejorar en muchos aspectos este manuscrito y, en particular, fue de gran ayuda en la detección de los errores presentados a lo largo del documento. Todo ello permitió darle una dimensión distinta a esta contribución.

8. APÉNDICE: Solución formal de algunos ejemplos

Ejemplo 10. Calculemos la integral

$$I(a) := \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\, dx. \tag{40}$$

Para calcular esta integral, bien pudierámos usar el truco de Feynman de derivación bajo el signo de integral de forma directa, esto es, usando la integral impropia. Sin embargo, estaríamos considerando el conjunto $[0, \infty)$, que no es acotado, lo que no cumple con la condición de acotamiento requerida para este conjunto en las versiones enunciadas de la fórmula de Leibniz. Así que vamos a considerar la integral

$$I(a,b) := \int_0^{b} \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\, dx,$$

siendo b un número real positivo, lo cual hace que el conjunto $A = [0, b]$ sí sea acotado, y después usaremos el hecho de que

$$I(a) = \lim_{b\to\infty} I(a, b)$$

para así obtener $I(a)$. Además de cumplir con la condición de acotamiento recién mencionada, es claro que tanto $f(x, a) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$ es continua y $\dfrac{\partial f}{\partial a}$ es uniformemente continua en $A \times J$, para J cerrado y acotado (vea la Observación 3). Por lo que es posible usar cualquiera de las versiones de la fórmula de Leibniz, esto es, derivar bajo el signo de integral.

Para resolver este ejemplo, comencemos definiendo

$$F(a) := \int_0^b \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx \tag{41}$$

y recordando que

$$F(a) = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{b}{a}\right). \tag{42}$$

Así, al derivar (41) bajo el signo de integral, tenemos que

$$\frac{dF}{da}(a) = \int_0^b \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right) dx = \int_0^b \frac{-2a}{(x^2 + a^2)^2}\, dx. \tag{43}$$

Por otro lado, de (42), resulta que

$$\frac{dF}{da}(a) = \frac{d}{da}\left(\frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \frac{-1}{a^2} \cdot \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{a} \cdot \frac{-b/a^2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

i.e.,

$$\frac{dF}{da}(a) = \frac{-1}{a^2} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{a^2 + b^2}. \tag{44}$$

Igualando (43) y (44), tenemos

$$\int_0^b \frac{-2a}{(x^2 + a^2)^2}\, dx = \frac{-1}{a^2} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{a^2 + b^2},$$

de donde

$$\boxed{I(a, b) = \int_0^b \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}\, dx = \frac{1}{2a^3} \cdot \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{b}{a^2 + b^2}}. \tag{45}$$

Finalmente, tenemos que

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} I(a, b) = \frac{1}{2a^3} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2a^2} \cdot 0 = \frac{\pi}{4a^3}}, \tag{46}$$

puesto que

$$\lim_{b\to\infty}\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right) = 0.$$

La fórmula (46) es precisamente lo que queríamos calcular.

Notemos que, al no proceder directamente con la integral impropia, ganamos dos cosas: Primero, hubo más formalidad en el cálculo (lo cual evita cometer algún error por no garantizar que se cumplan las condiciones para derivar bajo el signo de integral) y, segundo, obtuvimos la fórmula (45), una fórmula más general que puede usarse para otros fines.

Como comentario final sobre este ejemplo, queremos decir que, aparentemente, el método de fracciones simples puede ayudarnos a realizar este mismo cálculo, sin embargo, no es así. Animamos al lector a que trate de usar fracciones simples y se convenza de que dicho método no funciona en el presente ejemplo.

Ejemplo 11. Si queremos formalizar el cálculo del Ejemplo 3, podemos preceder como sigue: Sea

$$I(t,b) := \int_0^b \cos(tx)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx, \quad b>0, \tag{47}$$

y notemos que

$$\boxed{I = \lim_{b\to\infty} I(1,b) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx}. \tag{48}$$

Notemos, además, que

$$I(0,b) = \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \implies \boxed{\lim_{b\to\infty} I(0,b) = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}. \tag{49}$$

Derivando (47) bajo el signo de integral, tenemos que

$$\frac{dI}{dt}(t,b) = \int_0^b \frac{\partial}{\partial t}\Big(\cos(tx)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\Big)\,dx = \int_0^b -x\,\mathrm{sen}(tx)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Integrando por partes, con

$$\boxed{u = \mathrm{sen}(tx)} \quad \text{y} \quad \boxed{dv = -xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx},$$

se tiene que

$$\boxed{du = t\cos(tx)\,dx} \quad \text{y} \quad \boxed{v = e^{-\frac{x^2}{2}}},$$

por lo que

$$\frac{dI}{dt}(t,b) = \Big(\mathrm{sen}(tx)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\Big)\Big|_0^b - \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot t\cos(tx)\,dx,$$

es decir,

$$\frac{dI}{dt}(t,b) = \mathrm{sen}(tb)\cdot e^{-\frac{b^2}{2}} - t\cdot\int_0^b \cos(tx)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \mathrm{sen}(tb)\cdot e^{-\frac{b^2}{2}} - t\cdot I(t,b).$$

Si fijamos b, y llamamos $F(t) := I(t,b)$, lo anterior se puede reescribir como

$$F'(t) + t\cdot F(t) = \mathrm{sen}(tb)\cdot e^{-\frac{b^2}{2}}. \tag{50}$$

Esto no es más que una ecuación diferencial lineal de primer orden, que se puede resolver fácilmente introduciendo un factor integrante (a saber, el factor integrante $\mu(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$). Teniendo en cuenta que se cumple la condición inicial

$$F(0) = I(0,b) = \int_0^b e^{-x^2}dx,$$

la solución de (50) es, entonces,

$$\boxed{I(t,b) = F(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\left(\int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + e^{-\frac{b^2}{2}}\cdot\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{sen}(bx)\,dx\right)}. \tag{51}$$

Teniendo en cuenta que (ver el ítem **(iii)** de la Observación 8)

$$\left|\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{sen}(bx)\,dx\right| \le \int_0^t \left|e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{sen}(bx)\right|\,dx \le \int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}\,dx < \infty,$$

y que

$$\lim_{b\to\infty} e^{-\frac{b^2}{2}} = 0,$$

si ahora tomamos $b \to \infty$ en (51), resulta que

$$I(t) = \int_0^\infty \cos(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \lim_{b\to\infty} I(t,b) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Esto es,

$$\boxed{\int_0^\infty \cos(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \tag{52}$$

que es exactamente lo mismo que obtuvimos en (18).

9. Ejercicios

Ejercicio 1. *Muestre el resultado obtenido en el Ejemplo 1 usando un cambio de variable trigonométrico adecuado.*

Ejercicio 2. *Muestre que*

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^3}\, dx = \frac{3\pi}{16a^5} \tag{53}$$

derivando bajo el signo de integral en la fórmula (4) *obtenida en el Ejemplo 1. Calcule también la integral*

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^4}\, dx. \tag{54}$$

¿Reconoce algún patrón? Si es así, ¡escríbalo!

Ejercicio 3. *Escriba los detalles formales de los demás ejemplos considerados en la Sección 2.*

Ejercicio 4. *Calcule las integrales siguientes, usando la herraminta presentada en este documento:*

a) $I(a) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\, dx.$

b) $I(b) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cdot \operatorname{sen} bx}{x}\, dx,\ a \geq 0.$

c) $I(a) := \displaystyle\int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\, dx.$

d) $I(a) := \displaystyle\int_0^\infty \ln\left(\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}\right) dx.$

e) $I(a) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\, dx.$

f) $I(a) := \displaystyle\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)\ln x\, dx.$

g) $I(a) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x^2e^x}\, dx.$

h) $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\, dx.$

Referencias

[1] Burden, R., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2011). Análisis numérico, Cengage Learning.

[2] del Río, J. A. I., & Cabezas, J. M. R. (2022). Métodos numéricos: teoría, problemas y prácticas con MATLAB. Comercial Grupo ANAYA, SA.

[3] Edwards, C. H. (2012). Advanced calculus of several variables. Courier Corporation.

[4] Feynman, R. P., & Sackett, P. D. (1985). "Surely You're Joking Mr. Feynman!" Adventures of a Curious Character. American Journal of Physics, 53(12), 1214-1216.

[5] Marsden, J. E., Tromba, A. J., & Mateos, M. L. (1991). Cálculo vectorial (Vol. 69). México: Addison-Wesley Iberoamericana.

[6] Muñoz, J. M. S., & Valdés, P. S. (2022). La técnica de Feynman de derivación bajo el signo integral. *Lecturas matemáticas*, 43(1), 5-22.

[7] Nahin, P. J. (2020). Inside Interesting Integrals: *A Collection of Sneaky Tricks, Sly Substitutions, and Numerous Other Stupendously Clever, Awesomely Wicked, and Devilishly Seductive Maneuvers for Computing Hundreds of Perplexing Definite Integrals From Physics, Engineering, and Mathematics (Plus Numerous Challenge Problems with Complete, Detailed Solutions).* Springer Nature.

[8] Ruiz, C. P., & de Jesús, C. (1995). Cálculo vectorial. Prentice-Hall Hispanoamericana.

[9] Salas, S. L., Etgen, G. J., & Hille, E. (1999). Salas and Hille's calculus: One and several variables. Wiley.
[10] Stromberg, K. R. (2015). An introduction to classical real analysis (Vol. 376). American Mathematical Soc.
[11] Takeuchi, Y. (1976). Sucesiones y series (No. 515.24 515.24 T136s). Limusa.
[12] Tineo, A. & Uzcátegui, C. Introducción al análisis real. http://www.ciencias.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/libro_analisis1_marzo2006.pdf
[13] Woods, F. S. (1934). Advanced calculus.

Eusebio Ariza García
Universidad Yachay Tech,
Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales,
Departamento de Matemáticas.
Urcuquí, Imbabura, Ecuador.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7754-2666
e-mail: eariza@yachaytech.edu.ec

Luis Arteaga
Universidad Yachay Tech,
Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales,
Departamento de Matemáticas.
Urcuquí, Imbabura, Ecuador.
e-mail: luis.arteaga@yachaytech.edu.ec

Jhon Duta
Universidad Yachay Tech,
Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales,
Departamento de Matemáticas.
Urcuquí, Imbabura, Ecuador.
e-mail: jhon.duta@yachaytech.edu.ec

Edwin Hurtado
Universidad Yachay Tech,
Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales,
Departamento de Matemáticas.
Urcuquí, Imbabura, Ecuador.
e-mail: edwin.hurtado@yachaytech.edu.ec

Ray Moya
Universidad Yachay Tech,
Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales,
Departamento de Matemáticas.
Urcuquí, Imbabura, Ecuador.
e-mail: ray.moya@yachaytech.edu.ec

Manuel Muñoz
Universidad Yachay Tech,
Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales,
Departamento de Matemáticas.
Urcuquí, Imbabura, Ecuador.
e-mail: manuel.munoz@yachaytech.edu.ec