

## EL MOVIMIENTO BROWNIANO

DAVID MÁRQUEZ-CARRERAS

RESUMEN. El objetivo de este trabajo es introducir el movimiento Browniano a estudiantes que han finalizado los estudios de matemáticas, estadística o ciertas ingenierías. El motivo de estudiar el movimiento Browniano es porque es un proceso muy importante dentro de las matemáticas, y del cálculo estocástico en particular. El estudio abarca la definición matemática del movimiento, su construcción y sus propiedades más importantes. Además, se darán algunas de las aplicaciones más comunes en las matemáticas y también una aplicación a la física y otra a la economía.

El artículo consta en primer lugar de una introducción histórica. Una segunda sección está dedicada a introducir los conceptos fundamentales de la teoría de la probabilidad necesarios para comprender el artículo. Las secciones siguientes tratan sobre el propio movimiento Browniano, sus propiedades trayectoriales y algunas aplicaciones.

**A Josep Márquez Vanrell, un pare molt especial.** *Dedico este trabajo a mi padre, por su bondad y generosidad, por su amor, por sus valores, por muchísimas otras razones que siempre estarán en mi corazón, y una muy importante; por el interés que tenía en aprender y que me transmitió.*

### 1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

El movimiento Browniano es una herramienta muy importante para distintas ciencias como la matemática, la física, la economía y la ingeniería, entre otras. En este artículo me centraré en el punto de vista particular del cálculo estocástico y en algunas aplicaciones que tiene el movimiento Browniano en este campo.

La historia empieza alrededor de 1820, cuando el médico, biólogo y botánico Robert Brown realizó una serie de observaciones con el microscopio del movimiento de pequeñas partículas contenidas en el polen de ciertas plantas cuando éstas estaban en suspensión en agua. Observó que el movimiento era muy irregular y lo describió en un artículo en 1828 [5]. Después de hacer muchas más observaciones creyó haber descubierto la presencia de moléculas *activas* en cuerpos orgánicos e inorgánicos. Muchos científicos intentaron posteriormente interpretar este extraño fenómeno. Se estableció empíricamente que el movimiento era más rápido si: las partículas eran más pequeñas, se aumentaba la temperatura o se disminuía la viscosidad del líquido. No fue hasta finales del siglo XIX que se descubrió el verdadero motivo que causaba este movimiento: el gran número de choques de las partículas en suspensión con las moléculas del líquido.

Aunque otros científicos han pasado a la posteridad como descubridores del movimiento Browniano, creo que es justo comentar a T.N. Thiele quien describió este movimiento a finales del siglo XIX y, sobretodo, a Louis Bachelier quien en 1900 también lo describe y lo aplica a las finanzas en su tesis doctoral *Théorie de la Spéculation* [2].

De manera aparentemente independiente, Albert Einstein [9] en 1905 plasmó una teoría y unos resultados cuantitativos sobre el movimiento Browniano. Aun dando un marco matemático poco riguroso, Einstein resolvió básicamente el problema físico del

---

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 60J65; Secondary 60H05, 60H07, 60H10.

*Palabras clave*. Movimiento Browniano. Historia, construcción y propiedades. Integral de Itô. Fórmula de Itô. Ecuaciones diferenciales estocásticas. Movimiento de partículas en un fluido. Modelo de Black y Sholes.

movimiento. El marco físico-matemático propuesto por Einstein es el siguiente. Sea  $u(t, x)$ , para  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \geq 0$ , la densidad de granos de polen por unidad de volumen en el instante  $t$  y en el punto  $x$ . Entonces,  $u(t, x)$  también podría interpretarse como la probabilidad que una partícula se encuentre en el punto  $x$  en el instante  $t$ . Asumiendo ciertas hipótesis, Einstein dedujo la ecuación diferencial (aproximada) siguiente para la función  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u, \quad t > 0,$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace y  $D$  es una constante positiva llamada el coeficiente de difusión. Esta ecuación es precisamente la *ecuación del calor* que satisface la temperatura. Este resultado fue obtenido también por Bachelier pero su trabajo pasó desapercibido en aquella época. Si suponemos que en el momento inicial la partícula se encuentra en un punto  $y \in \mathbb{R}^3$ , es decir,  $u(\cdot, 0) = \delta_y$ , la solución de la ecuación será la densidad de una ley Gaussiana

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi Dt)^3}} \exp \left\{ -\frac{\|y - x\|^2}{4Dt} \right\}.$$

Por otro lado, Einstein demostró mediante razonamientos físicos que  $D = \frac{RT}{NF}$ , donde  $R$  es una constante universal que depende del material donde está suspendida la partícula,  $T$  es la temperatura absoluta,  $N$  es el número de Avogrado y  $F$  el coeficiente de viscosidad del líquido. Ello sirvió para solucionar el problema físico que planteaba la aparición de este movimiento, e incluso para confirmar la existencia de moléculas y átomos.

Sería injusto olvidarnos del científico Marian Von Smoluchowski que en el mismo periodo de tiempo consiguió resultados similares a los de Einstein describiendo también el movimiento Browniano (véase [29]), trabajando tanto desde el punto de vista teórico como experimental. Por esta razón a la modelación del movimiento Browniano como proceso se le llama modelo de Einstein-Smoluchowski. Poco después Jean Perrin lo verificó y corroboró experimentalmente, utilizando esta fórmula, junto con una serie de experimentos, para determinar una aproximación del número de Avogadro.

No obstante, los trabajos de Einstein-Smoluchowski no proporcionan una teoría dinámica del movimiento, solamente determinan la naturaleza del movimiento y el valor del coeficiente de difusión, todo ello aceptando ciertas hipótesis físicas no muy rigurosas. Las primeras formulaciones dinámicas son debidas a los físicos Paul Langerin por un lado y a Leonard Ornstein y George Uhlenbeck por otro.

El marco teórico adecuado y riguroso para describir un modelo matemático que describa el movimiento Browniano fue realizado por Norbert Wiener en los años veinte del siglo pasado. Wiener demostró la existencia de una probabilidad en el espacio de las funciones continuas  $\mathcal{C}([0, +\infty))$  que correspondía a la ley de probabilidad del movimiento Browniano. En las siguientes secciones presentaré estos conceptos del proceso también llamado proceso de Wiener en honor a este filósofo y matemático. Posteriormente, Paul Lévy llevó a término un análisis profundo y exhaustivo de las propiedades de las trayectorias del movimiento.

Entre esas propiedades, se muestra que el movimiento Browniano no es derivable en ningún punto, por lo que parecía tarea complicada tratar de definir una integral con respecto a este movimiento. Kiyosi Itô tiene el mérito de haberlo conseguido en uno de los hitos más importantes dentro del cálculo estocástico, de ahí que también sea conocido con el cálculo de Itô (véase [11]).

## 2. PROBABILIDADES

Esta sección pretende dar una introducción a la teoría de la probabilidad para entender este artículo. Si el lector tiene buenos conocimientos de esta teoría, puede pasar directamente a la siguiente sección. En caso contrario aquí se expone un resumen de lo necesario para seguir este artículo de divulgación. No se da demostración alguna

porque no es el propósito de este trabajo. Si el lector está interesado en más información puede consultar los libros [4], [7], [20] o [31], entre otros.

Un *espacio de probabilidad* es una terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  donde  $\Omega$  es un conjunto no vacío,  $\mathcal{F}$  es una familia de subconjuntos de  $\Omega$  con estructura de  $\sigma$ -álgebra y  $P$  una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{F}$ . Para dos eventos  $A, B \in \mathcal{F}$  diremos que son independientes si se cumple

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Una aplicación  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un vector aleatorio si es una aplicación medible, es decir, si  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , donde  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  es el conjunto de Borelianos de  $\mathbb{R}^n$ . Cuando  $n = 1$ , en lugar de vector se habla habitualmente de variable aleatoria. Esta aplicación medible entre  $(\Omega, \mathcal{F})$  y  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  induce una probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  denotada por

$$P_X(B) = (P \circ X^{-1})(B) = P(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

A la probabilidad  $P \circ X^{-1}$  se le llama, en el análisis matemático, medida imagen de  $P$  para  $X$  y en la teoría de la probabilidad, *ley del vector*  $X$ . Cumple el resultado siguiente:

**PROPOSICIÓN 2.1.** (Teorema de la medida imagen) *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible. Entonces,  $f$  es integrable en el espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P \circ X^{-1})$  si y solo si  $f \circ X$  es integrable en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , y en este caso*

$$\int_{\Omega} (f \circ X) dP = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d(P \circ X^{-1})(dx).$$

La integral con respecto a una probabilidad puede ser construida con los mismos pasos que se construye la integral de Lebesgue. La definiríamos inicialmente para funciones medibles elementales, la extenderíamos a funciones medibles positivas como límite de elementales y terminaríamos dando la integral de una función medible integrable. Dos conceptos muy ligados a lo que acabamos de introducir son la función de distribución y la esperanza de un vector aleatorio. La *función de distribución* de  $X$  es la función de distribución de su ley, es decir,

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si una variable aleatoria  $X$  es integrable con respecto a  $P$  definimos la *esperanza matemática* de  $X$  como

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x (P \circ X^{-1})(dx).$$

Más generalmente, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible tal que  $f \circ X$  es integrable con respecto a  $P$ , la esperanza de  $f(X)$  es

$$\mathbf{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X) dP = \int_{\mathbb{R}} f(x) (P \circ X^{-1})(dx).$$

Para cada natural  $k \geq 1$ , la esperanza de  $\mathbf{E}(X^k)$  (si existe) se denomina *momento de orden  $k$*  de la variable  $X$ . Si el momento de orden dos existe, definimos la *varianza* de la variable  $X$  como

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2] = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2.$$

**2.1. Convergencias.** Consideremos una sucesión  $\{A_n, n \geq 1\}$  de conjuntos de un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Definimos

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Los *Lemas de Borel-Cantelli* son dos resultados muy importantes dentro de la teoría de la probabilidad. Para una sucesión de conjuntos  $\{A_n, n \geq 1\}$  de  $\mathcal{F}$ :

- *Primer lema.* Si  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ , entonces  $P(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 0$ .
- *Segundo lema.* Si además de  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ , la sucesión es de conjuntos independientes, tenemos  $P(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 1$ .

A continuación daremos distintos tipos de convergencia de sucesión de variables aleatorias  $\{X_n, n \geq 1\}$  a una variable  $X$ . La sucesión converge *casi seguramente* si existe un conjunto  $N \in \mathcal{F}$  de probabilidad cero tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \forall \omega \notin N.$$

La sucesión de variables converge *en probabilidad* si para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

La sucesión converge *en media de orden  $p$*  si la sucesión y el límite pertenecen a  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

Las convergencias casi segura y en media de orden  $p$  implican la convergencia en probabilidad. En cambio si tenemos convergencia en probabilidad, existe una subsucesión que converge casi seguramente pero no podemos asegurar la convergencia de la sucesión. Finalmente, si la sucesión converge casi seguramente y  $|X_n| \leq Y$  con  $Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , entonces tenemos convergencia en media de orden  $p$ .

Uno de los resultados más importantes de la teoría de la probabilidad es *la ley fuerte de los grandes números*.

**TEOREMA 2.2.** *Sea  $\{X_n, n \geq 1\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.*

- (i) *Si  $\mathbf{E}(|X_1|) < +\infty$ , entonces  $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} X_n = \mathbf{E}(X_1)$ , casi seguramente.*
- (ii) *Si  $\mathbf{E}(|X_1|) = +\infty$ , entonces  $\limsup_n \frac{1}{n} |\sum_{n=1}^{\infty} X_n| = +\infty$ , casi seguramente.*

Una sucesión de probabilidades  $\{P_n, n \geq 1\}$  converge *débilmente* hacia una probabilidad  $P$  y escribiremos  $\omega - \lim_n P_n = P$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f dP_n = \int_{\mathbb{R}} f dP,$$

para toda función continua y acotada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**TEOREMA 2.3.** *Una sucesión de probabilidades  $\{P_n, n \geq 1\}$  converge débilmente hacia una probabilidad  $P$  si y solo si  $\lim_n F_n(x) = F(x)$  para todo punto de continuidad de  $F$ , y donde  $F_n$  y  $F$  son las funciones de distribución de  $P_n$  y  $P$ , respectivamente.*

Si tenemos una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n, n \geq 1\}$  definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Diremos que esta sucesión converge *en ley* hacia una variable  $X$  y lo escribiremos  $\mathcal{L} - \lim_n X_n = X$ , si

$$\omega - \lim_{n \rightarrow +\infty} P \circ X_n^{-1} = P \circ X^{-1},$$

o equivalentemente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}[f(X_n)] = \mathbf{E}[f(X)],$$

para toda función continua y acotada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

La convergencia en probabilidad implica la convergencia en ley y recíprocamente, si la convergencia en ley es hacia una constante también implica la convergencia en probabilidad.

**2.2. Funciones características.** Definimos la función característica de una probabilidad  $P$  en  $\mathbb{R}^n$  como la aplicación  $\varphi_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\varphi_P(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\langle t, x \rangle} P(dx) = \int_{\mathbb{R}} \cos\langle t, x \rangle P(dx) + i \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}\langle t, x \rangle P(dx),$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  significa el producto interior de  $\mathbb{R}^n$ . La función está bien definida porque el seno y el coseno son funciones continuas y acotadas. Si  $X = (X_1, \dots, X_n)$  es un vector aleatorio en cierto espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , la función característica de  $X$  es la función característica de su ley, es decir,

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\langle t, x \rangle} P_X(dx) = \mathbf{E} \left( e^{i\langle t, X \rangle} \right).$$

Esta función tiene muchas propiedades muy útiles y no muy complicadas de demostrar (ver, por ejemplo, el libro de Nualart y Sanz [20] para la demostración de estas propiedades):

1.  $\varphi_P(0) = 1$  y  $|\varphi_P(t)| \leq 1$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^n$ . Además,  $\varphi_P(-t) = \overline{\varphi_P(t)}$ .
2. Es una función uniformemente continua.
3. Si  $A$  es una matriz  $m \times n$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ , entonces

$$\varphi_{AX+b}(t) = e^{i\langle t, b \rangle} \varphi_X(A^T t),$$

donde  $A^T$  significa la matriz transpuesta

4. Tiene la propiedad fundamental de inyectividad. Si tenemos dos medidas de probabilidad  $P_1$  y  $P_2$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , satisfaciendo que  $\varphi_{P_1} = \varphi_{P_2}$ , entonces  $P_1 = P_2$ . La implicación contraria es trivial.
5. Sea  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un vector aleatorio. Las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  son independientes si y solo si

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t_1) \times \dots \times \varphi_{X_n}(t_n), \quad \text{siendo } t = (t_1, \dots, t_n).$$

6. Si  $X_1, \dots, X_n$  son independientes, entonces

$$\varphi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \times \dots \times \varphi_{X_n}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entre otros resultados existen teoremas que relacionan la función característica con la existencia de momentos de una probabilidad (o de una variable aleatoria) y la derivabilidad de la función característica. Además, la función característica se llama así porque caracteriza la ley de una variable aleatoria, ya que mediante las llamadas fórmulas de inversión podemos conocer la función de distribución asociada a una probabilidad e incluso su densidad cuando la probabilidad es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Uno de los resultados más importantes asociados a las funciones características es el llamado *teorema de continuidad de Paul Lévy*.

**TEOREMA 2.4.** *Consideremos una sucesión  $\{P_n, n \geq 1\}$  de probabilidades en  $\mathbb{R}$  y sean  $\{\varphi_n, n \geq 1\}$  las funciones características asociadas. Entonces,*

- Si  $P_n$  converge débilmente hacia una probabilidad  $P$  cuando  $n$  tiende a infinito, entonces  $\lim_n \varphi_n(t) = \varphi_P(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- Si  $\lim_n \varphi_n(t) = \varphi(t)$ , donde  $\varphi$  es una función continua en el cero, entonces  $\varphi$  es la función característica de una probabilidad  $P$  y tenemos  $\omega - \lim_n P_n = P$ .

**2.3. Ley normal multidimensional.** Antes de hablar del teorema central del límite debemos conocer detalladamente la ley normal o Gaussiana. También es natural estudiarla por la importancia que tiene en la definición del movimiento Browniano. Es sobradamente conocida cual es la densidad de una variable aleatoria Gaussiana  $N(\mu, \sigma^2)$  para  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2 > 0$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 \right\}.$$

En cambio la ley de una Gaussiana multidimensional ya no lo es tanto, y menos el caso más general que se define mediante un teorema y cuya demostración podemos encontrar en [20] (ver también [4]).

**TEOREMA 2.5.** *Sean  $\mu \in \mathbb{R}^n$  y  $\Lambda$  una matriz simétrica de orden  $n$  definida no negativa. Entonces, existe una probabilidad en  $\mathbb{R}^n$ , que designaremos por  $N(\mu, \Lambda)$  y denominaremos normal  $n$ -dimensional (o Gaussiana  $n$ -dimensional), que tiene por función característica*

$$\varphi(t) = \exp\left(it^T\mu - \frac{1}{2}t^T\Lambda t\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $t^T\mu = \langle t, \mu \rangle$ .

Las funciones características de las variables Gaussianas unidimensionales  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  y  $Z \sim N(0, 1)$  son, respectivamente:

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} \quad \text{y} \quad \varphi_Z(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}.$$

A continuación daremos algunas de las propiedades más usuales de los vectores normales multidimensionales (si el lector está interesado en las demostraciones consultar, por ejemplo, el libro de Nualart y Sanz [20] o también [4]).

1. Sea  $X$  un vector aleatorio con ley  $N(\mu, \Lambda)$ . Si  $M$  es una matriz ortogonal tal que  $\Lambda = M^T D M$ , siendo  $D$  una matriz diagonal con sus elementos designados por  $d_1, \dots, d_n$ . Entonces el vector aleatorio  $Y = M(X - \mu)$  tiene todas las componentes independientes con ley  $N(0, d_i)$  si  $d_i \neq 0$  o bien cero si  $d_i = 0$ .
2. Si  $X$  es un vector aleatorio con ley  $N(\mu, \Lambda)$ , entonces  $\mu \in \mathbb{R}^n$  y  $\Lambda$  representan el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas, respectivamente. Efectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= M^T \mathbf{E}(Y) + \mu = \mu, \\ \mathbf{E}((X - \mu)(X - \mu)^T) &= \mathbf{E}(M^T Y Y^T M) = M^T D M = \Lambda, \end{aligned}$$

donde  $Y$  es el vector aleatorio del punto 1.

3. Si  $X$  es un vector aleatorio con ley  $N(\mu, \Lambda)$  y  $A$  una matriz de orden  $r \times n$ , el vector aleatorio  $AX$  tiene ley  $N(A\mu, A\Lambda A^T)$ . Ello implica que todo vector aleatorio de la forma  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$ , con  $m \leq n$ , tiene ley normal, y toda combinación lineal  $\sum_{i=1}^n a_i X_i$  también. Recíprocamente, si  $(X_1, \dots, X_n)$  es un vector aleatorio tal que toda combinación lineal es normal, entonces  $X$  tiene ley normal multidimensional (algunos autores utilizan este concepto para definir la ley normal multidimensional).
4. Sea  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un vector aleatorio con ley  $N(\mu, \Lambda)$ . La independencia de las variables  $X_1, \dots, X_n$  es equivalente a que la matriz  $\Lambda$  sea diagonal, es decir, que las variables sean incorrelacionadas.
5. Si la matriz  $\Lambda$  es regular ( $\det \Lambda > 0$ ), decimos que la ley normal  $N(\mu, \Lambda)$  es no degenerada, y en este caso la ley es absolutamente continua con densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Lambda}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Lambda^{-1}(x - \mu)\right\}.$$

**2.4. Teorema central del límite.** En primer lugar daremos la versión unidimensional del teorema central del límite, también llamado *teorema central del límite de Lévy-Lindeberg* o teorema fundamental de la teoría de la probabilidad.

**TEOREMA 2.6.** *Sea  $\{X_n, n \geq 1\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas y cuadrado integrable, con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2 > 0$ . Entonces, si  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , tenemos que*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

La versión multidimensional del teorema es la siguiente.

**TEOREMA 2.7.** *Sea  $\{X_n, n \geq 1\}$  una sucesión de vectores aleatorios  $k$ -dimensionales independientes e idénticamente distribuidos. Supongamos que las componentes de  $X_1$  son cuadrado integrable. Utilizando la notación  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $\mathbf{E}(X_1) = \mu$  y  $\mathbf{E}[(X_1 - \mu)(X_1 - \mu)^T] = \Lambda$ , tenemos que*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} N(0, \Lambda).$$

### 3. EL MOVIMIENTO BROWNIANO

Un *proceso estocástico* es una colección de variables aleatorias  $\{X_t, t \in T\}$  definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , indexadas por un espacio de parámetros  $T$  y a valores en un espacio medible  $(S, \mathcal{S})$ . Este espacio medible  $(S, \mathcal{S})$  se denomina *espacio de estados* del proceso y en general será  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  o un conjunto finito o numerable. El parámetro  $t \in T$  representa el tiempo y el conjunto  $T$  será habitualmente  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  ó un intervalo de  $\mathbb{R}$ .

Para todo conjunto  $v = \{t_1 < \dots < t_n\} \subset T$  podemos considerar la aplicación medible  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  que induce una probabilidad  $P_v = P \circ (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}$  en el espacio producto  $(S^v, \mathcal{S}^v)$ . A la familia de probabilidades  $\{P_v, v \subset T, v \text{ finito}\}$  la denominaremos *distribución en dimensión finita del proceso*  $\{X_t, t \in T\}$ .

Diremos que un proceso  $\{X_t, t \in T\}$  es un *proceso estocástico Gaussiano* si todas sus distribuciones en dimensión finita son leyes Gaussianas multidimensionales, es decir, si para cualquier conjunto de tiempos  $\{t_1 < \dots < t_n\} \subset T$ , el vector  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  tiene ley Gaussiana multidimensional.

**Definición 3.1.** Un movimiento Browniano unidimensional  $\{B_t, t \geq 0\}$  es un proceso estocástico Gaussiano con esperanza cero y función de covarianza dada por

$$\mathbf{E}(B_t B_s) = t \wedge s = \min(s, t).$$

**3.1. Existencia de este movimiento y algunas propiedades.** Una primera pregunta que uno debe hacerse es si este objeto realmente existe. Para obtener una respuesta afirmativa, en primer lugar, necesitamos un resultado que nos permita extender una probabilidad sobre conjuntos finitos a conjuntos más generales. Considero este resultado de Kolmogorov una herramienta y su demostración se escapa al objetivo de este trabajo. Si el lector está interesado puede consultar su demostración en los teoremas 3.5 y 3.7 del libro de Tudor [32] (mirar también [12]).

**TEOREMA 3.2.** (Teorema de consistencia de Kolmogorov) *Sea  $T$  un conjunto arbitrario y consideremos una familia de probabilidades  $\{P_v, v \subset T, v \text{ finito}\}$ , donde  $P_v$  está definida sobre  $(\mathbb{R}^v, \mathcal{B}(\mathbb{R}^v))$  y la familia cumple la condición siguiente de compatibilidad:*

*Si  $u \subset v$  son dos conjuntos finitos y  $\Pi_{u,v} : \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^u$  es la proyección canónica, entonces se cumple que*

$$P_v \circ \Pi_{u,v}^{-1} = P_u.$$

*Bajo estas suposiciones, existe una única probabilidad  $Q$  en el espacio  $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$  tal que*

$$Q \circ \Pi_v^{-1} = P_v,$$

*para todo conjunto finito  $v$ .*

Mediante este teorema de Kolmogorov podemos demostrar un resultado sobre la existencia de procesos Gaussianos que nos ayudará a comprobar la existencia del movimiento Browniano.

**PROPOSICIÓN 3.3.** *Sea  $K : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  una función simétrica y definida no negativa. Entonces, existe un proceso Gaussiano  $\{X_t, t \in T\}$  satisfaciendo  $\mathbf{E}(X_t) = 0, \forall t \in T$ , y  $\text{Cov}(X_s, X_t) = K(s, t), \forall s, t \in T$ .*

*Demostración.* Consideremos, para  $t_1, \dots, t_n \in T$ ,

$\mu_{t_1, \dots, t_n} = (0, \dots, 0)$ ,  $\Lambda_{t_1, \dots, t_n} = (K(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ , y  $P_{t_1, \dots, t_n} \sim N(\mu_{t_1, \dots, t_n}, \Lambda_{t_1, \dots, t_n})$ , es decir,  $P_{t_1, \dots, t_n}$  es una ley Gaussiana  $n$ -dimensional con esperanza cero y matriz de covarianzas  $(K(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ . Denotemos por  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  un vector aleatorio con ley  $P_{t_1, \dots, t_n}$ . Para cualquier subconjunto  $\{t_{i_1}, \dots, t_{i_m}\}$  de  $\{t_1, \dots, t_n\}$ , tenemos que

$$A(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = (X_{t_{i_1}}, \dots, X_{t_{i_m}}),$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{t_1, t_{i_1}} & \cdots & \delta_{t_n, t_{i_1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{t_1, t_{i_m}} & \cdots & \delta_{t_n, t_{i_m}} \end{pmatrix},$$

donde  $\delta_{s,t}$  es la función delta de Kronecker. Utilizando que la transformación lineal de una ley Gaussiana sigue siendo Gaussiana obtenemos que el vector aleatorio  $(X_{t_{i_1}}, \dots, X_{t_{i_m}})$  tiene una distribución normal  $m$ -dimensional con esperanza cero y matriz de covarianzas  $\Lambda_{t_{i_1}, \dots, t_{i_m}} A^T = (K(t_{i_k}, t_{i_l}))_{1 \leq k, l \leq m}$ . Así, finalmente, aplicando el teorema 3.2 obtenemos el resultado deseado.  $\square$

Esta proposición nos asegurará la existencia de un proceso  $\{B_t, t \geq 0\}$  satisfaciendo la definición del movimiento Browniano. En efecto, si escribimos  $K(s, t) = s \wedge t$ , podemos demostrar que, para cualesquiera  $t_i \geq 0$  y  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n x_i K(t_i, t_j) x_j &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j (t_i \wedge t_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0, t_i]}(r) \mathbb{1}_{[0, t_j]}(r) dr \\ &= \int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{[0, t_i]}(r) \right)^2 dr \geq 0, \end{aligned}$$

en donde  $\mathbb{1}_{[0, t_i]}(r)$  es la función cuyo valor es 0 si  $r > t_i$  ó  $r < 0$  y 1 si  $0 \leq r \leq t_i$ . Por tanto,  $K(s, t) = s \wedge t$  es una función simétrica y definida no negativa y podemos aplicar la proposición 3.3.

Ahora daremos una definición equivalente de movimiento Browniano.

**PROPOSICIÓN 3.4.** *Un proceso estocástico  $\{B_t, t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano si y solo si  $B_0 = 0$  c.s., y para cualesquiera  $0 \leq s < t$ , la variable aleatoria  $B_t - B_s$  es independiente de  $B_r$ ,  $0 \leq r \leq s$ , y  $B_t - B_s$  sigue una distribución  $N(0, t - s)$ .*

*Demostración.* Tenemos que demostrar las dos implicaciones.

$\Rightarrow$ ) Asumimos en primer lugar que  $\{B_t, t \geq 0\}$  satisface la definición de movimiento Browniano (véase definición 3.1). Como  $\mathbf{E}(B_0^2) = 0$ , tenemos que  $B_0 = 0$  c.s. Sea  $0 \leq r \leq s \leq t$ . Usando la covarianza del movimiento Browniano deducimos que

$$\mathbf{E}[B_r(B_t - B_s)] = (r \wedge t) - (r \wedge s) = r - r = 0.$$

Por lo tanto, como  $B$  tiene esperanza cero, obtenemos

$$\mathbf{E}[B_r(B_t - B_s)] = \mathbf{E}(B_r) \mathbf{E}(B_t - B_s).$$

Ya que  $(B_r, B_s, B_t)$  es un vector aleatorio Gaussiano, esta igualdad implica la independencia entre  $B_r$  y  $B_t - B_s$ .

Gracias a que la combinación lineal de variables aleatorias Gaussianas vuelve a ser Gaussiana,  $B_t - B_s$  es una normal que cumple  $\mathbf{E}(B_t - B_s) = 0$  y utilizando la covarianza del movimiento Browniano

$$\mathbf{E}[(B_t - B_s)^2] = \mathbf{E}(B_t^2) - 2\mathbf{E}(B_s B_t) + \mathbf{E}(B_s^2) = t - 2s + s = t - s,$$

que prueba la última condición.

⇐) Si tomamos  $n \geq 1$  y  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , el siguiente vector  $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$  está formado por componentes Gaussianas independientes. Entonces, existe una matriz  $A$  tal que

$$X = (B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = A(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}),$$

y por lo tanto,  $X$  es Gaussiano. Como todas sus distribuciones en dimensión finita son leyes Gaussianas, tenemos que  $\{B_t, t \geq 0\}$  es un proceso Gaussiano. Finalmente, como  $B_t - B_0 \sim N(0, t)$ , tenemos que

$$\mathbf{E}(B_t) = \mathbf{E}(B_t - B_0) = 0;$$

y, para  $0 \leq s \leq t$ , usando la independencia

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(B_s B_t) &= \mathbf{E}[B_s(B_t - B_s + B_s)] = \mathbf{E}[B_s(B_t - B_s)] + \mathbf{E}(B_s^2) \\ &= \mathbf{E}(B_s)\mathbf{E}(B_t - B_s) + \mathbf{E}(B_s^2) = \mathbf{E}(B_s^2) = s = s \wedge t. \end{aligned}$$

Lo que concluye la otra implicación. □

No resulta difícil demostrar la proposición siguiente calculando la varianza de los distintos procesos que aparecen en ella.

**PROPOSICIÓN 3.5.** *Sea  $\{B_t, t \geq 0\}$  un movimiento Browniano. Entonces, los siguientes procesos también son movimientos Brownianos:*

- $\{-B_t, t \geq 0\}$ .
- $\{B_{t+s} - B_s, t \geq 0\}$ , para cualquier  $s > 0$ .
- $\{\lambda B_{t/\lambda^2}, t \geq 0\}$ , para cualquier  $\lambda > 0$ .
- $\{Y_t = tB_{1/t}, t > 0\}$  y  $Y_0 = 0$ .

**3.2. Construcción del movimiento Browniano.** En la sección anterior hemos comprobado que existe este movimiento pero no lo hemos descrito. Hay diversas formas de construir un movimiento Browniano. Una opción sería escribir cómo tienen que ser las distribuciones marginales en dimensión finita y construir una medida de probabilidad en un espacio medible adecuado para obtener estas marginales (teoremas de Daniell-Kolmogorov y Kolmogorov-Čentsov, ver por ejemplo [6]). Otra forma sería demostrar su existencia como límite de una secuencia de caminos o paseos aleatorios (teorema de Donsker, ver por ejemplo [30]).

Aquí construiremos el movimiento Browniano utilizando una tercera vía. Las ideas que usaremos son la de la construcción de Paul Lévy en los años 40 del siglo pasado y la posterior simplificación de Zbigniew Ciesielski en los años 60 del mismo siglo. Por este motivo la construcción que daremos es conocida como de *Lévy-Ciesielski*. La construcción es larga y densa, solo se pretende dar un esquema amplio para comprenderla ya que consideramos que es una herramienta importante dentro de la investigación del cálculo estocástico. Vamos a construirlo sobre el intervalo  $[0, 1]$ , como un elemento aleatorio del espacio de funciones  $\mathcal{C}([0, 1])$  para después extenderlo a todo  $\mathbb{R}_+$ . La idea básica es definirlo paso a paso en el conjunto finito de los puntos diádicos para luego interpolar linealmente los valores obtenidos y demostrar que el límite uniforme de estas funciones es justamente un movimiento Browniano. Para una demostración completa se puede consultar, por ejemplo, el teorema 1.12 en [32] o la sección 3.2 de [22].

Consideremos el espacio de Hilbert  $L^2([0, 1])$  de las funciones medibles  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\int_0^1 f(s)^2 ds < \infty$ , y dotado del producto escalar

$$\langle f, g \rangle := \langle f, g \rangle_{L^2([0,1])} = \int_0^1 f(s)g(s)ds.$$

Definimos las funciones de Haar como  $f_{0,1}(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$  y para  $n \geq 1$ ,  $1 \leq k \leq 2^n$ ,  $k$  impar,

$$f_{n,k}(t) = 2^{\frac{n-1}{2}} \mathbb{1}_{[(k-1)2^{-n}, k2^{-n})}(t) - 2^{\frac{n-1}{2}} \mathbb{1}_{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})}(t).$$

No resulta complicado demostrar que la familia  $\{f_{n,k}, n \geq 0, 1 \leq k \leq 2^n, k \text{ impar}\}$  es una base ortonormal completa de  $L^2([0, 1])$ . De este modo, para cualquiera  $h \in L^2([0, 1])$ , tenemos que

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I_n} \langle h, f_{n,k} \rangle f_{n,k}(t),$$

con  $I_n = \{k \in \{1, \dots, 2^n\}, k \text{ impar}\}$ , y para  $g \in L^2([0, 1])$ , obtenemos también la identidad de Parseval

$$\langle h, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I_n} \langle h, f_{n,k} \rangle \langle g, f_{n,k} \rangle.$$

Con ello en mente definimos las funciones de Schauder como  $S_{0,1}(t) = \int_0^t f_{0,1}(s) ds = t$ , y para  $n \geq 1, 1 \leq k \leq 2^n, k \text{ impar}$ ,

$$\begin{aligned} S_{n,k}(t) &= \int_0^t f_{n,k}(s) ds \\ &= 2^{\frac{n-1}{2}} \left[ \left( t - \frac{k-1}{2^n} \right) \mathbb{1}_{[(k-1)2^{-n}, k2^{-n})}(t) + \left( \frac{k+1}{2^n} - t \right) \mathbb{1}_{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})}(t) \right], \end{aligned}$$

que satisfacen

$$(3.1) \quad \max_{0 \leq t \leq 1} |S_{n,k}(t)| \leq \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}},$$

y utilizando la identidad de Parseval para  $h = \mathbb{1}_{[0,s]}$  y  $g = \mathbb{1}_{[0,t]}$  obtenemos

$$s \wedge t = \langle h, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I_n} \langle h, f_{n,k} \rangle \langle g, f_{n,k} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I_n} S_{n,k}(s) S_{n,k}(t).$$

Ahora estamos en condiciones de definir la sucesión que convergirá a un movimiento Browniano. Sea  $\{\xi_{n,k}, k \in I_n, n \geq 0\}$  una colección de variables aleatorias Gaussianas independientes  $N(0, 1)$ . Consideremos entonces las funciones  $\{B_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$  definidas como

$$B_n(t, \omega) = \sum_{m=0}^n \sum_{k \in I_m} \xi_{m,k}(\omega) S_{m,k}(t), \quad \forall t \in [0, 1], n \geq 0,$$

que son procesos Gaussianos, centrados y con trayectorias continuas.

Utilizando (3.1) podemos obtener

$$\|B_n(t) - B_{n-1}(t)\|_{\infty} := \sup_{0 \leq t \leq 1} |B_n(t) - B_{n-1}(t)| \leq 2^{-\frac{n+1}{2}} \max_{k \in I_n} |\xi_{n,k}|.$$

Así tomando  $A_n = \{\omega \in \Omega; \|B_n(t) - B_{n-1}(t)\|_{\infty} > \sqrt{2^{-n+1} \ln 2^n}\}$ , podemos comprobar que  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ . En efecto, la cota de  $\|B_n(t) - B_{n-1}(t)\|_{\infty}$  y el hecho que  $\int_a^{\infty} e^{-u^2/2} du \leq \frac{1}{a} e^{-a^2/2}$  implican

$$P(A_n) \leq P\left(\max_{k \in I_n} |\xi_{n,k}| > 2\sqrt{n \ln 2}\right) \leq 2^{n-1} P\left(|\xi_{n,1}| > 2\sqrt{n \ln 2}\right) \leq \frac{2^{-n-1}}{\sqrt{2\pi n \ln 2}},$$

y esta cantidad es sumable. Entonces, si  $N := \limsup_n A_n$ , el lema de Borel-Cantelli nos dice que la sucesión  $\{B_n(t, \omega), n \geq 0\}$  es convergente en  $\mathcal{C}([0, 1])$  si  $\omega \notin N$ . Definamos

$$B_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} B_n(t, \omega), & \text{si } \omega \notin N, \\ 0, & \text{si } \omega \in N. \end{cases}$$

El proceso  $\{B_t, 0 \leq t \leq 1\}$  tiene trayectorias continuas porque el límite uniforme de funciones continuas es continuo. Además, es un proceso Gaussiano porque pertenece a la envoltura lineal cerrada de la familia Gaussiana  $\{\xi_{n,k}, k \in I_n, n \geq 0\}$ . Por otro lado, tenemos

$$(3.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[B_n(t)] = 0, \quad \forall t \in [0, 1],$$

y

$$(3.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[B_n(t)B_n(t)] = s \wedge t, \quad \forall s, t \in [0, 1].$$

Usando las propiedades de la función característica, las propiedades (3.2) y (3.3) implican que para todo número finito de instantes  $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$  los vectores aleatorios  $(B_n(t_1), \dots, B_n(t_k))$  convergen en ley hacia una distribución normal  $k$ -dimensional, centrada y con matriz de covarianzas  $\{(t_i \wedge t_j)\}_{1 \leq i, j \leq k}$ . Pero como esta sucesión converge casi seguramente a  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$  deducimos que  $\{B_t, 0 \leq t \leq 1\}$  es un proceso Gaussiano y tiene esperanza cero y función de covarianza  $s \wedge t$ , y por lo tanto, es un movimiento Browniano.

Finalmente, para extenderlo a  $[0, +\infty)$ , tomaremos una sucesión  $\{B_t^m, t \in [0, 1], m \geq 0\}$  de movimientos Brownianos independientes con trayectorias continuas y definiremos

$$B_t = \sum_{i=0}^{m-1} B_1^i + B_{t-m+1}^m, \quad \text{si } t \in [m-1, m), m \geq 1.$$

No es complicado comprobar que este nuevo proceso es un movimiento Browniano en  $[0, +\infty)$ .

#### 4. PROPIEDADES TRAYECTORIALES DEL MOVIMIENTO BROWNIANO

En esta sección observaremos algunas de las propiedades más importantes de sus trayectorias.

**4.1. Variación cuadrática del movimiento.** La noción de variación de orden  $j$  nos indica el tipo de regularidad de cierta función y la existencia de diferentes órdenes son importantes para las expansiones de Taylor y el desarrollo del cálculo infinitesimal. El movimiento Browniano tiene variación cuadrática finita y variación total infinita, en todo intervalo finito, casi seguramente.

Fijemos un intervalo finito  $[0, T]$  y consideremos una sucesión de particiones  $\Pi_n = \{t_0^n = 0 \leq t_i^n \leq \dots \leq t_{\tau_n}^n = T\}$  de este intervalo cumpliendo  $|\Pi_n| = \sup_j |t_{j+1}^n - t_j^n| \rightarrow 0$ , cuando  $n$  tiende a infinito. Con estas premisas y utilizando la notación  $\Delta_j B = B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}$ , puede probarse

$$(4.1) \quad \sum_{j=1}^{\tau_n} (\Delta_j B)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega)} T.$$

Veámoslo. Observemos que gracias a la definición del movimiento Browniano tenemos que  $\Delta_j B \sim N(0, t_j^n - t_{j-1}^n)$  y las variables  $(\Delta_j B)^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , son independientes y centradas. Entonces, utilizando además los momentos de orden 2 y 4 de una Gaussiana, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \left( \sum_{j=1}^{\tau_n} (\Delta_j B)^2 - T \right)^2 \right] &= \mathbf{E} \left[ \left( \sum_{j=1}^{\tau_n} [(\Delta_j B)^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)] \right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\tau_n} \mathbf{E} \left( [(\Delta_j B)^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)]^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\tau_n} \left( \mathbf{E} [(\Delta_j B)^4] - 2(t_j^n - t_{j-1}^n) \mathbf{E} [(\Delta_j B)^2] + (t_j^n - t_{j-1}^n)^2 \right) \\ &= 2 \sum_{j=1}^{\tau_n} (t_j^n - t_{j-1}^n)^2 \leq 2T |\Pi_n|, \end{aligned}$$

lo cual implica (4.1). Si a las hipótesis le añadiéramos  $\Pi_{n-1} \subset \Pi_n$ , podríamos demostrar (4.1) pero con la convergencia casi segura.

Como consecuencia de (4.1), la variación total de las trayectorias del Browniano es infinita en cualquier intervalo  $[0, T]$ . Efectivamente,

$$\sum_{j=1}^{\tau_n} (\Delta_j B)^2 \leq \sup_{1 \leq j \leq \tau_n} |\Delta_j B| \sum_{j=1}^{\tau_n} |\Delta_j B|,$$

y teniendo en cuenta (4.1) y que  $\sup_j |\Delta_j B| \rightarrow 0$  casi seguramente cuando  $n$  tiende a infinito, se obtiene que la variación total debe ser infinita.

**4.2. Continuidad en el sentido de Hölder.** Recordemos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente continua en el sentido de Hölder con exponente  $\gamma \in (0, 1]$ , si para cualquier conjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}$ , el coeficiente de Hölder

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\gamma(A)} := \sup_{x, y \in A, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma}$$

es finito. En el caso  $\gamma = 1$  la función es localmente Lipschitz continua.

En el caso del movimiento Browniano puede mostrarse que las trayectorias son continuas en el sentido de Hölder para cualquier exponente  $\gamma \in (0, 1/2)$ . Para probarlo se utiliza el siguiente criterio (ver teorema 2.1 [25] para su demostración):

**TEOREMA 4.1.** (Criterio de continuidad de Kolmogorov) *Consideremos un proceso estocástico  $\{X_t, t \geq 0\}$  satisfaciendo que para cualquier conjunto acotado de subíndices  $A \subset [0, +\infty)$ , existen tres constantes estrictamente positivas  $\alpha, C, \varepsilon$  tal que*

$$(4.2) \quad \mathbf{E} [|X_t - X_s|^\alpha] \leq C |t - s|^{1+\varepsilon}, \quad \forall s, t \in A.$$

*Entonces, casi seguramente, las trayectorias del proceso  $X$  son continuas en el sentido de Hölder con exponente  $\gamma \in (0, \varepsilon/\alpha)$ .*

Ahora, si tomamos un movimiento Browniano  $\{B_t, t \geq 0\}$ , recordando que, para cualesquiera  $0 \leq s < t$ ,  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ , y utilizando cuánto vale el momento de orden  $n$  de una Gaussiana tenemos que

$$\mathbf{E} [|B_t - B_s|^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} (t - s)^n.$$

Esto es válido para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, mediante el criterio de continuidad de Kolmogorov podemos concluir que el movimiento Browniano tiene, casi seguramente, trayectorias continuas con exponente  $\gamma \in (0, \frac{n-1}{2n})$  y haciendo tender  $n$  a infinito se obtiene el resultado.

**4.3. No diferenciabilidad del movimiento Browniano.** El teorema sobre la no derivabilidad de las trayectorias del movimiento Browniano fue demostrado por Paley, Wiener y Zigmund [21] en 1933 y actualmente se usa una adaptación hecha en 1961 por Dvoretzki, Erdős y Kakutani [8].

La demostración se basa en demostrar que el conjunto

$$N = \left\{ \omega \in \Omega, \exists t \in [0, 1], M, k \in \mathbb{N}; \text{ tal que } \forall s \in \left[ t, t + \frac{1}{k} \right], |B_s(\omega) - B_t(\omega)| \leq M |s - t| \right\}$$

tiene probabilidad cero (se puede encontrar una demostración en la sección 2.9 de [12]).

Esta demostración no es muy complicada pero sí algo larga y técnica. Sin embargo, usando que la variación cuadrática es finita casi seguramente puede probarse otro resultado que implica la no diferenciabilidad del movimiento Browniano.

**PROPOSICIÓN 4.2.** *Las trayectorias del movimiento Browniano no son localmente continuas en el sentido de Hölder casi seguramente en ningún punto para exponentes  $\gamma > 1/2$ .*

*Demostración.* Gracias a la sección 4.1, existe un conjunto  $\Omega_0 \subset \Omega$  tal que  $P(\Omega_0) = 1$  y para cualesquiera  $p < q$  racionales, existe una sucesión  $\Pi_n$  de subparticiones de  $[p, q]$  con  $|\Pi_n| \rightarrow 0$  y

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{t_i^n \in \Pi_n} (B_{t_{i+1}^n}(\omega) - B_{t_i^n}(\omega))^2 = q - p,$$

para todo  $\omega \in \Omega_0$ . Si suponemos que  $|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq C|t - s|^\gamma$  para  $p \leq s, t \leq q$  y  $\gamma > 1/2$ , entonces

$$\sum_i (B_{t_{i+1}^n}(\omega) - B_{t_i^n}(\omega))^2 \leq C^2(q - p) \sup_i |t_{i+1}^n - t_i^n|^{2\gamma-1},$$

y ello contradice (4.3). □

Fíjense que este resultado nos da la no diferenciabilidad en cualquier punto porque para ser diferenciable necesitaríamos que sea localmente continuo en el sentido de Hölder para un exponente de grado  $\gamma = 1$  y eso contradice la proposición anterior.

Sabemos qué sucede para  $\gamma \in (0, 1/2)$  y  $\gamma > 1/2$ . Una pregunta interesante sería qué ocurre con  $\gamma = 1/2$ . Este problema lo resolvió Paul Lévy en 1937 con el llamado *teorema del modulo de continuidad*. Puede encontrarse una versión de la demostración en [25] (teorema 2.7).

PROPOSICIÓN 4.3. *Sea  $\{B_t, t \geq 0\}$  un movimiento Browniano. Entonces,*

$$P \left( \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\sup_{0 \leq t \leq 1-h} |B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{2h|\ln h|}} = 1 \right) = 1.$$

Consecuentemente, las trayectorias del movimiento Browniano no son continuas en el sentido de Hölder para  $\gamma = 1/2$ . En efecto,

$$\frac{\sup_{0 \leq t \leq 1-h} |B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{h}} = \frac{\sup_{0 \leq t \leq 1-h} |B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{2h|\ln h|}} \sqrt{2|\ln h|},$$

que tiende a infinito cuando  $h \rightarrow 0$ .

## 5. APLICACIONES O HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS DEL MOVIMIENTO BROWNIANO

El movimiento Browniano tiene muchísimas aplicaciones en distintas ramas de las ciencias pero algunos conceptos son ya muy importantes para las propias matemáticas. En esta sección comentaremos algunas de ellas como la integral estocástica, la fórmula de Itô o las ecuaciones diferenciales estocásticas. Solo daremos unas pinceladas porque cualquiera de estos conceptos daría por sí solo para un artículo completo. Si el lector esta interesado existe un artículo precioso de León [14] donde pueden encontrar más extensamente y de manera comprensible y accesible todos estos conceptos.

**5.1. La integral de Itô.** El movimiento Browniano representa fenómenos que cambian rápidamente en el tiempo y por este motivo no tiene trayectorias de variación acotada. Ello provoca un problema a la hora de definir una integral con respecto a este movimiento.

En efecto, si para un proceso estocástico con trayectorias continuas  $\{u(t), t \geq 0\}$  queremos definir la integral  $\int_0^T u(t)dB_t$  trayectoria a trayectoria ( $\omega$  por  $\omega$ ) como una integral de Lebesgue-Stieltjes aparecen disitintos problemas. Concretemos estas dificultades. Para cada  $\omega \in \Omega$ , consideraríamos la integral como el límite de las sumas de Riemann-Stieltjes

$$S_n := \sum_{i=1}^n u(\xi_i)(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}),$$

con  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$  una partición de  $[0, T]$  y  $\xi_i$  un punto intermedio entre  $t_{i-1}$  y  $t_i$ . No resulta complicado comprobar que en general  $S_n$  no converge en

probabilidad porque  $u(t)$  depende de los eventos que ocurren después de  $t$  (ver la observación 3.2 [14]) y que incluso tomando el caso particular  $u(t) = B_t$  el límite en probabilidad depende del punto intermedio  $\xi_i$  tomado (ver la observación 3.4 [14]).

K. Itô resolvió este problema en los años 40 construyendo la integral para una clase particular de procesos (ver [11]). Definamos en primer lugar algunos conceptos necesarios para entender sus ideas. Una familia de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  se llama filtración si  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ ,  $t \geq 0$ , y si  $s \leq t$  implica que  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ . Tomaremos una filtración satisfaciendo:

1.  $B$  es adaptado a  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ , ello significa, que para todo  $t \geq 0$ ,  $B_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.
2. Para cualesquieras  $0 \leq s \leq t$ , la variable aleatoria  $B_t - B_s$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$ .

Por ejemplo, si tomamos  $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_s, s \in [0, t]\}$ , la filtración generada por  $B$ , cumple estas propiedades.

Itô construyó la integral para procesos adaptados a una filtración resolviendo así los problemas que antes hemos mencionado. Consideró procesos  $\{u(t), t \geq 0\}$  que son adaptados a una filtración  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ , que como función

$$\begin{aligned} u : [0, T] \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\longrightarrow u(t, \omega) \end{aligned}$$

son medibles con respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ , y además cumplen

$$(5.4) \quad \mathbf{E} \int_0^T u(t)^2 dt < \infty.$$

A estos procesos los llamaremos  $L_{a,T}^2$ . Entonces, siguiendo los pasos habituales en la teoría de la integración, Itô definió la integral para procesos elementales de  $L_{a,T}^2$ ,

$$u(t) = \sum_{j=1}^n u_j \mathbb{1}_{[t_{j-1}, t_j)}(t),$$

con  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ , como la variable aleatoria centrada

$$\int_0^T u(t) dB_t = \sum_{j=1}^n u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).$$

Esta integral estocástica cumple los requisitos de linealidad y una propiedad muy importante que es la isometría

$$\mathbf{E} \left[ \left( \int_0^T u(t) dB_t \right)^2 \right] = \mathbf{E} \left( \int_0^T u(t)^2 dt \right).$$

A partir de aquí puede demostrarse que para cualquier  $u \in L_{a,T}^2$ , existe una sucesión  $\{u_n(t), n \geq 0\}$  de procesos simples tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \mathbf{E} (u_n(t) - u(t))^2 dt = 0,$$

y puede definirse la integral estocástica de Itô como

$$\int_0^T u(t) dB_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T u_n(t) dB_t,$$

donde el límite es en  $L^2(\Omega)$ . Incluso puede generalizarse a procesos adaptados y conjuntamente medibles satisfaciendo

$$P \left\{ \int_0^T u_t^2 dt < \infty \right\} = 1.$$

Más adelante, se definieron otras integrales como la de Stratonovich, la de Skorohod, etc. Si el lector está interesado en una amplia exposición de la integral de Itô puede

consultar el artículo didáctico de León [14] o bien los libros de Arnold [1], Karatzas-Shreve [12] o Revuz-Yor [25].

**5.2. Ejemplo.** Daremos un ejemplo donde aplicamos lo dicho en la sección anterior y que nos servirá para introducir el siguiente apartado. Vamos a comprobar que

$$\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2}(B_T^2 - T),$$

en lugar de  $\frac{1}{2}B_T^2$  que sería lo esperado con las reglas del cálculo determinista.

Consideremos un proceso simple definido como sigue:

$$u^n(t) = \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} \mathbb{1}_{[t_{j-1}, t_j)}(t),$$

con  $t_j = \frac{jT}{n}$ ,  $j = 0, \dots, n$ . Es obvio que  $u^n \in L_{a,T}^2$  y fácilmente tenemos

$$\int_0^T \mathbf{E} (u_n(t) - B_t)^2 dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{E} (B_{t_{j-1}} - B_t)^2 dt \leq \frac{T}{n} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt = \frac{T^2}{n}.$$

Por tanto,  $\{u^n, n \geq 0\}$  es una sucesión que aproxima al movimiento Browniano  $B$  en la norma  $L^2(\Omega \times [0, T])$ . Ahora, de acuerdo con la definición de integral de Itô, debemos calcular en  $L^2(\Omega)$

$$\int_0^T B_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).$$

Fijando  $\omega \in \Omega$ , podemos obtener

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{t_j}^2 - B_{t_{j-1}}^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 \\ &= \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2, \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos utilizado el desarrollo de  $(a - b)^2$  y en la segunda que la serie es telescópica. El resultado se obtiene usando la variación cuadrática del movimiento Browniano.

**5.3. La fórmula de Itô.** Esta fórmula la podríamos introducir de diversas maneras, vamos a dar dos de ellas. En primer lugar podríamos introducirla como una generalización del ejemplo anterior. Tenemos que

$$B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + t, \quad t \geq 0.$$

La fórmula de Itô es una generalización de esta fórmula para funciones más generales que  $f(x) = x^2$  y procesos también más generales en el papel de integrando que el movimiento Browniano. La otra posibilidad es decir que la fórmula de Itô para la integral estocástica es la equivalente a la fórmula de integración por partes del cálculo determinista.

Sea un proceso estocástico definido como

$$(5.5) \quad X_t = X_0 + \int_0^t h_s dB_s + \int_0^t g_s ds,$$

con  $X_0$  una variable aleatoria  $\mathcal{F}_0$ -medible,  $g$  un proceso estocástico adaptado satisfaciendo  $\int_0^T |g_s| ds < \infty$  c.s., y  $h$  un proceso estocástico adaptado, medible con respecto a  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$  y cumpliendo que

$$P \left\{ \int_0^T h_s^2 ds < \infty \right\} = 1.$$

A este proceso lo denominaremos *proceso de Itô*. Entonces, para toda función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que pertenece a  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  (función con segunda derivada continua), tenemos

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) (dX_s)^2 \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) g_s ds + \int_0^t f'(X_s) h_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) ds, \quad \text{c.s.} \end{aligned}$$

La idea de la demostración no es muy complicada. Daremos un esquema de ella en un caso particular. Tomando  $g \equiv 0$  y  $h \equiv 1$ , eso significa  $X_t = B_t$ , la fórmula de Itô es:

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds, \quad \text{c.s.}$$

Consideremos  $\{0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t\}$  una partición de  $[0, t]$ . El desarrollo de Taylor hasta orden dos implica

$$\begin{aligned} f(B_t) &= f(B_0) + \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}} + \lambda_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}))(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2, \end{aligned}$$

con  $\lambda_i \in (0, 1)$ ,  $i = 0, \dots, n$ . En el primer sumando aplicando la construcción de la integral de Itô se puede demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \int_0^t f'(B_s) dB_s.$$

Para el segundo sumando, la clave es la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}} + \lambda_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}))(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - \int_0^t f''(B_s) ds \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}} + \lambda_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}))(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}}) [(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})] \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) - \int_0^t f''(B_s) ds \right|. \end{aligned}$$

El primer término podemos comprobar que tiende a cero por la continuidad de  $f''$ , el tercer término converge por el clásico resultado de la aproximación de la integral de Riemann por las sumas de Riemann y en cuanto al segundo, se puede demostrar sin mucha dificultad que tiende a cero en probabilidad.

Si el lector está interesado en la demostración o en versiones más generales de esta fórmula puede consultar los libros de Karatzas-Shreve [12], Protter [23] o Revuz-Yor [25] o el artículo de Moret y Nualart [16].

**5.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas.** Ahora nuestro propósito es estudiar la ecuación diferencial estocástica

$$(5.6) \quad \begin{aligned} dX_t &= \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt, \quad t \in [0, T], \\ X_0 &= \xi, \end{aligned}$$

donde  $b$  y  $\sigma$  son funciones  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -medibles y  $\xi$  es una variable aleatoria  $\mathcal{F}_0$ -medible. Una solución fuerte de (5.6) es un proceso  $\{X_t, t \in [0, T]\}$  adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$  con trayectorias continuas tal que:

- $P(X_0 = \xi) = 1$ .

- Los procesos  $\{\sigma(t, X_t), t \in [0, T]\}$  y  $\{b(t, X_t), t \in [0, T]\}$  son conjuntamente medibles, adaptados y cumplen  $\int_0^T \mathbf{E}(\sigma(t, X_t)^2)dt < \infty$  y  $\int_0^T \mathbf{E}(|b(t, X_t)|)dt < \infty$ , respectivamente.
- Para cada  $t \in [0, T]$ , con probabilidad 1, se satisface

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

**TEOREMA 5.4.** *Asumimos además de las condiciones de adaptabilidad y medibilidad recién mencionadas las hipótesis:*

1. *Crecimiento lineal. Existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. *Condición de Lipschitz. Existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$|b(t, y) - b(t, x)| + |\sigma(t, y) - \sigma(t, x)| \leq C|y - x|, \quad \forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Entonces, si  $\xi \in L^2(\Omega)$ , existe una única solución fuerte a (5.6) en  $L^2(\Omega \times [0, T])$ .

*Demostración.* Veamos primero la unicidad. Supongamos que tenemos dos soluciones  $\{X_t, t \geq 0\}$  y  $\{Y_t, t \geq 0\}$  satisfaciendo (5.6). Entonces, utilizando la condición de Lipschitz y la isometría de la integral estocástica, obtenemos

$$\mathbf{E} [|X_t - Y_t|] \leq KC^2 \int_0^t \mathbf{E} [|X_s - Y_s|] ds, \quad t \in [0, T],$$

para cierta constante  $K > 0$ . Finalmente, mediante el lema de Gronwall, se tiene que  $X \equiv Y$  en  $L^2(\Omega \times [0, T])$ .

Estudiemos ahora la existencia. Resulta interesante hacer un resumen de la demostración porque recurre a un procedimiento muy utilizado tanto en el caso estocástico como en el determinista. Definimos, para  $t \geq 0$ , la siguiente iteración llamada de Picard:

$$\begin{aligned} X_t^0 &= \xi \\ X_t^n &= \xi + \int_0^t b(s, X_s^{n-1})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dB_s, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

No es complicado ver que  $\{X_n; n \geq 0\}$  es una sucesión convergente en  $L^2(\Omega \times [0, T])$  cuyo límite es una solución fuerte de (5.6). La existencia se divide en distintos pasos.

**Paso 1.** Se demuestra por inducción sobre  $n$  que:

- $\sigma(s, X_s^n) \in L^2_{a,T}$  y  $b(s, X_s^n) \in L^2(\Omega \times [0, T])$ .
- Para todo  $t \in [0, T]$ ,

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^n|^2 \right] < \infty.$$

Para este paso usamos básicamente la hipótesis de crecimiento lineal y las desigualdades de Hölder y Burkholder.

**Paso 2.** Se prueba también por inducción sobre  $n$  que existe una constante  $K > 0$  tal que para todo  $t \in [0, T]$ ,

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] \leq \frac{(Kt)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En este punto se utiliza la hipótesis de Lipschitz en lugar de la de crecimiento lineal.

**Paso 3.** No resulta difícil probar la existencia de una solución fuerte en  $L^2(\Omega \times [0, T])$ . Si quisieramos la existencia trayectorial utilizaríamos la desigualdad de Chebichev y el lema de Borel-Cantelli para así tener que  $\{X_n; n \geq 0\}$  converge uniformemente en  $[0, T]$  casi seguramente.  $\square$

Con estas mismas hipótesis también podemos demostrar la existencia de una única solución trayectorial, es decir, si tenemos dos soluciones fuertes  $X$  y  $Y$ , éstas son indistinguibles

$$P(X_t = Y_t, \text{ para todo } t \geq 0) = 1.$$

A partir de aquí podríamos estudiar ecuaciones con coeficientes más generales o, modificando las hipótesis, encontrar otras propiedades de la solución, como por ejemplo, la existencia de momentos, o regularidad con respecto a la condición inicial o al tiempo.

Fijémonos que la condición de Lipschitz (al menos localmente) es necesaria para la unicidad. Tomando el ejemplo de [14], si consideramos  $\alpha \in (0, 1)$ , la ecuación

$$Z_t = \int_0^t |Z_s|^\alpha ds,$$

tiene las soluciones  $Z \equiv 0$  y  $Z_t = (1 - \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}(t - s)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ ,  $0 \leq s \leq t$ . En esta misma referencia se observa cómo sin la hipótesis de crecimiento lineal podemos dar una ecuación sin solución global.

Si el lector está interesado en resultados más generales puede leerse los libros [12] o [23].

## 6. APLICACIONES A OTROS CAMPOS CIENTÍFICOS

Aparte de las matemáticas, el movimiento Browniano tiene muchas aplicaciones a otros campos de la ciencia, como por ejemplo, la ingeniería, la biología, la geología, etc. Aquí introduciremos dos aplicaciones muy importantes, una dentro del campo de la física y otra dentro de la economía.

**6.1. Movimiento de partículas en un fluido.** Existen numerosas referencias donde el lector puede encontrar la presentación del movimiento de partículas en un fluido (ver, por ejemplo, [10], [15], [18], [22], [26], y la bibliografía que contienen estas referencias).

En el caso que estamos considerando lo más habitual en física sería resolver la ecuación de Fokker-Planck que es una ecuación estocástica con derivadas parciales. No analizaremos esta ecuación porque es demasiado compleja para estudiarla en un artículo divulgativo. En cambio, si podemos analizar el proceso de Ornstein-Uhlenbeck y aplicarlo al problema físico de una partícula en un fluido (de gran tamaño comparándola con las moléculas del fluido).

*6.1.1. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck.* Sea un proceso estocástico  $\{\theta_t, t \geq 0\}$  satisfaciendo la ecuación diferencial

$$(6.7) \quad d\theta_t = \lambda(\mu - \theta_t)dt + \sigma dB_t,$$

con  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\lambda, \sigma \in (0, +\infty)$ . Fijémonos que se trata de un proceso de Itô tal como lo hemos definido en (5.5). Aplicando una versión de la fórmula de Itô biparamétrica a la función  $f(t, x) = xe^{\lambda t}$  con condición inicial  $\theta_0$  obtenemos

$$\begin{aligned} f(t, \theta_t) &= \theta_t e^{\lambda t} = \theta_0 + \int_0^t [\theta_s \lambda e^{\lambda s} + e^{\lambda s} \lambda(\mu - \theta_s)] ds + \int_0^t e^{\lambda s} \sigma dB_s \\ &= \theta_0 + \mu \lambda \int_0^t e^{\lambda s} ds + \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dB_s = \theta_0 + \mu(e^{\lambda t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dB_s, \end{aligned}$$

y aislando  $\theta_t$  encontramos:

$$(6.8) \quad \theta_t = \theta_0 e^{-\lambda t} + \mu(1 - e^{-\lambda t}) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s.$$

Sea  $\Pi_n$  una partición del intervalo  $[0, t]$ , definida como  $\Pi_n = \{t_0^n = 0 \leq t_1^n \leq \dots \leq t_{k_n}^n = t\}$  tal que  $|\Pi_n| \rightarrow 0$  cuando  $n$  tiende a infinito. Entonces, utilizando la integral de Itô podemos escribir

$$\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} e^{-\lambda(t-t_{j-1}^n)} (B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}),$$

y ello es una distribución Gaussiana porque es límite de la suma de variables aleatorias independientes y con distribución Gaussiana. Por lo tanto, el proceso  $\theta_t$  definido en (6.8) tiene distribución Gaussiana. Como la integral de Itô es centrada, el valor de su media es

$$\mathbf{E}(\theta_t) = \theta_0 e^{-\lambda t} + \mu(1 - e^{-\lambda t}) + \sigma \mathbf{E} \left[ \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s \right] = \mu + (\theta_0 - \mu)e^{-\lambda t}$$

y su covarianza, por ejemplo para  $s \leq t$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(\theta_s, \theta_t) &= \mathbf{E}[(\theta_s - \mathbf{E}(\theta_s))(\theta_t - \mathbf{E}(\theta_t))] = \sigma^2 \mathbf{E} \left[ \int_0^s e^{-\lambda(s-r)} dB_r \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} dB_r \right] \\ &= \sigma^2 e^{-\lambda(t+s)} \left( \mathbf{E} \left[ \left( \int_0^s e^{\lambda r} dB_r \right)^2 \right] + \mathbf{E} \left[ \int_0^s e^{\lambda r} dB_r \int_s^t e^{\lambda r} dB_r \right] \right), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la partición de la integral sobre  $[0, t]$  en  $[0, s]$  y  $[s, t]$ . Ahora, la isometría de la integral estocástica nos permite dar su covarianza

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(\theta_s, \theta_t) &= \sigma^2 e^{-\lambda(t+s)} \int_0^s e^{2\lambda r} dr = \frac{\sigma^2}{2\lambda} e^{-\lambda(t+s)} [e^{2\lambda s} - 1] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\lambda} e^{-\lambda(t+s)} [e^{2\lambda(s \wedge t)} - 1]. \end{aligned}$$

Así,

$$\theta_t \sim N \left( \mu + (\theta_0 - \mu)e^{-\lambda t}, \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) \right).$$

Los parámetros de este proceso pueden ser interpretados de la forma siguiente:  $\mu$  es la media asintótica del proceso;  $\lambda$  la tendencia de retornar a la media (propiedad *mean-reverting*), es decir, la intensidad con que el proceso reacciona a las perturbaciones; y  $\sigma$  la intensidad del ruido, similar a la varianza de un movimiento Browniano.

Si observamos un movimiento Browniano  $B_t$ , como su varianza es  $t$ , cuando el tiempo tiende a infinito su varianza también lo hará, en cambio con la del proceso de Ornstein-Uhlenbeck no ocurre lo mismo. En este proceso con el paso del tiempo las trayectorias tienden hacia la media y lo hacen más rápido para valores de  $\lambda$  mayores (de aquí la importancia de la propiedad *mean-reverting*).

**6.1.2. Aplicación a la física de fluidos. Ecuación de Langevin.** Ahora consideraremos el problema que dio lugar a la descripción matemática del movimiento Browniano. Supongamos que tenemos una partícula de masa  $m$  inmersa en un fluido compuesto de moléculas mucho más pequeñas. El movimiento es debido a las colisiones aleatorias con las moléculas del fluido provocadas a la vez por las fluctuaciones de la densidad. Einstein estudió este movimiento en [9] desde un punto de vista probabilístico, obteniendo la ecuación diferencial para la densidad de partículas  $p(t, x)$ :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad t > 0,$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión. Si en el momento inicial la partícula se encuentra en  $y \in \mathbb{R}^3$ , la solución será

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp \left( -\frac{\|x - y\|^2}{2Dt} \right),$$

que es la densidad de una Gaussiana. Einstein [9] y Smoluchowski [29] demostraron que  $D = K_B T / \gamma$ , donde  $K_B$  es la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura y  $\gamma$  el coeficiente de fricción, y por la ley de Stokes  $\gamma = 6\pi\eta r$ , siendo  $\eta$  la viscosidad del líquido y  $r$  el radio de la partícula.

El problema de la teoría de Einstein es que no nos proporciona una teoría dinámica. Estas primeras formulaciones dinámicas son debidas a Langevin y Ornstein y

Uhlenbeck en los años 30 del siglo pasado. La segunda ley de Newton implica que el movimiento de la partícula cumple la siguiente ecuación:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(t),$$

donde  $v(t)$  es la velocidad y  $F(t)$  es la fuerza instantánea ejercida sobre ella. Se observó experimentalmente que la fuerza puede describirse mediante dos contribuciones, una dominada por la fricción que ejerce el fluido,  $-\gamma v(t)$ , y otra que es un término estocástico debido a las fluctuaciones aleatorias,  $\xi(t)$ . Por lo tanto, la ecuación del movimiento, llamada *ecuación de Langevin* es:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -\gamma v(t) + \xi(t).$$

Consideremos que la parte estocástica es un ruido blanco Gaussiano, es decir, que  $\xi(t)$  es una distribución Gaussiana con variables no correlacionadas (por esto se llama blanco) con momentos:

$$\mathbf{E}[\xi(t)] = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{E}[\xi(t_1)\xi(t_2)] = K\delta(t_1 - t_2),$$

donde  $K$  es una medida de la intensidad de la fuerza y

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 0, \\ 0, & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

La delta de Dirac aparece porque no existe correlación entre impactos en distintos instantes de tiempo y ello es debido a que en un intervalo de tiempo pequeño respecto a la escala característica del proceso hay muchísimas colisiones y no puede haber memoria entre ellas. Con todo ello podemos suponer que  $\xi(t)dt = dB_t$  y entonces la ecuación de Langevin queda como

$$dv(t) = -\frac{\gamma}{m}v(t)dt + \frac{1}{m}dB_t.$$

Estamos en un espacio de dimensión 3 pero de hecho tenemos un sistema de tres ecuaciones diferenciales estocásticas unidimensionales desacopladas y podemos considerar cada componente por separado. Así, lo que tenemos es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck (6.7) con  $v(t) = \theta_t$  y  $\mu = 0$ ,  $\lambda = \frac{\gamma}{m}$  y  $\sigma = \frac{1}{m}$ . Finalmente utilizando lo probado para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck podemos dar su expresión (6.8),

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t/m} + \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\frac{\gamma(t-s)}{m}} dB_s,$$

con

$$\mathbf{E}[v(t)] = v_0 e^{-\gamma t/m} \quad \text{y} \quad \mathbf{Cov}(v(s), v(t)) = \frac{C}{2m\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m}(t+s)} \left( e^{2\frac{\gamma}{m}(s \wedge t)} - 1 \right).$$

**6.1.3. Teorema de fluctuación-disipación.** En mecánica estadística clásica, el teorema de equipartición de la energía relaciona la temperatura de un sistema con las energías de las moléculas. En este caso particular, con un único grado de libertad en una dimensión, el equilibrio se expresa como  $\langle E \rangle_{eq} = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle_{eq} = \frac{K_B T}{2}$ , y de esta forma  $\langle v^2 \rangle_{eq} = \frac{K_B T}{m}$ . De aquí podremos deducir la fuerza aleatoria  $\xi(t)$  que actúa sobre la partícula. Calculemos primero  $\langle v^2(t) \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle v^2(t) \rangle &= \mathbf{E}[v(t)^2] = \mathbf{E}[v(t)]^2 + \mathbf{Var}(v(t)) = v_0^2 e^{-2\gamma t/m} + \frac{C}{2m\gamma} \left( 1 - e^{-2\frac{\gamma}{m}t} \right) \\ &= \left( v_0^2 - \frac{C}{2m\gamma} \right) e^{-\frac{2\gamma t}{m}} + \frac{C}{2m\gamma}. \end{aligned}$$

Como consecuencia de que el equilibrio no depende del tiempo, el primer término debe anularse y entonces por el teorema de equipartición obtenemos

$$\langle v_0^2 \rangle_{eq} = \frac{C}{2m\gamma} = \frac{K_B T}{m} \implies C = 2K_B T \gamma.$$

Este resultado se conoce como teorema de fluctuación-disipación. Entonces,

$$\langle \xi(t_1), \xi(t_2) \rangle = \mathbf{E}[\xi(t_1)\xi(t_2)] = 2K_B T \gamma \delta(t_1 - t_2),$$

y, por lo tanto,

$$v(t) \sim N \left( v_0 e^{-\gamma t/m}, \frac{K_B T}{m} \left( 1 - e^{-2\gamma t/m} \right) \right).$$

Si ahora se continuara con el cálculo del desplazamiento cuadrático (una de las magnitudes que más se observa en los experimentos), hallaríamos entonces el coeficiente de difusión tal como hicieron Einstein y Smoluchowski en [9] y [29], respectivamente.

**6.2. Modelo de Black y Scholes.** No resulta fácil explicar este modelo si no ampliamos un poco la introducción de este artículo. El problema tratado por Black y Scholes en [3] es la evaluación y la cobertura de una opción de tipo europeo sobre una acción que no reparte dividendos. Para escribir esta aplicación nos hemos basado en el libro de Lamberton y Lapeyre [13] (lectura muy recomendable para introducirse en las finanzas).

*6.2.1. Descripción del modelo.* El modelo propuesto por Black y Scholes para describir la evolución de los precios es un modelo a tiempo continuo con un activo de riesgo (una acción de precio  $S_t$  al instante  $t$ ) y un activo sin riesgo (de precio  $S_t^0$  al instante  $t$ ). Se asume que la evolución de  $S_t^0$  sigue la siguiente ecuación diferencial:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad r > 0.$$

Ello significa que la tasa de interés sobre el mercado de inversión sin riesgo es constante e igual a  $r$ . Asumiremos también que  $S_0^0 = 1$ . Entonces tenemos que  $S_t^0 = e^{rt}$ ,  $\forall t \geq 0$ . En cambio, la evolución de  $S_t$  asumiremos que está modelizada por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$(6.9) \quad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t),$$

siendo  $\mu$  y  $\sigma$  dos constantes y  $\{B_t, t \geq 0\}$  un movimiento Browniano.

El modelo es estudiado en el intervalo  $[0, T]$  donde  $T$  es la fecha de vencimiento de la opción a tratar. Usando la fórmula de Itô, la ecuación recién introducida puede escribirse explícitamente como

$$(6.10) \quad S_t = S_0 \exp \left\{ \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t \right\},$$

donde  $S_0$  es el precio observado en el instante 0. Tenemos que el proceso  $\{S_t, t \geq 0\}$  satisface la ecuación (6.9) si y solo si el proceso  $\{\ln S_t, t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano. Entonces, el proceso  $\{S_t, t \geq 0\}$  satisface las propiedades siguientes:

- Trayectorias continuas.
- Independencia de los incrementos relativos, es decir,  $(S_t - S_s)/S_s$ , con  $s \leq t$ , es independiente a la  $\sigma$ -álgebra  $\sigma\{S_u, u \leq s\}$ .
- Estacionaridad de los incrementos relativos, es decir, la ley de  $(S_t - S_s)/S_s$ , con  $s \leq t$ , es la misma que la de  $(S_{t-s} - S_0)/S_0$ .

Una *estrategia* es definida por un proceso  $\{\phi_t, t \in [0, T]\}$  con  $\phi_t = (H_t^0, H_t)$  a valores en  $\mathbb{R}^2$  y adaptado a la filtración natural del movimiento Browniano. Las componentes  $H_t^0$  y  $H_t$  son las cantidades de activo sin riesgo y activo con riesgo, respectivamente, que hay en cartera. El valor de la cartera en el instante  $t$  será

$$(6.11) \quad V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

Diremos que una estrategia es *autofinanciada* si la pareja de procesos adaptados  $\{H_t^0, t \in [0, T]\}$  y  $\{H_t, t \in [0, T]\}$  cumplen

$$(6.12) \quad \int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty, \quad \text{casi seguramente}$$

y,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u, \quad \text{casi seguramente.}$$

Utilizaremos la notación  $\hat{S}_t = e^{-rt} S_t$  para el precio actual del activo de riesgo. Un resultado sencillo que podemos obtener en una estrategia autofinanciada es que el valor de la cartera depende solamente de la cantidad de activo en riesgo que tenemos. No daremos la demostración de este resultado pero sí el enunciado (si el lector está interesado en su demostración miren la proposición 1.2 del capítulo 4 en [13]).

**PROPOSICIÓN 6.5.** *Sea  $\{\phi_t, t \in [0, T]\}$  un proceso adaptado a valores en  $\mathbb{R}^2$  satisfaciendo (6.12). Notemos  $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$ , con  $V$  definido en (6.11). Entonces,  $\phi$  define una estrategia autofinanciada si y solo si*

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\hat{S}_u, \quad \text{c.s.,} \quad \forall t \in [0, T].$$

**6.2.2. Algunos resultados de la teoría de la probabilidad.** Para poder abordar la aplicación de nuestro problema necesitamos dar algunos conceptos avanzados de probabilidades.

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Una probabilidad  $Q$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  diremos que es *absolutamente continua con respecto a  $P$*  si:

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad P(A) = 0 \implies Q(A) = 0.$$

El resultado que enunciaremos a continuación es una versión del teorema de Radon-Nikodym (ver, por ejemplo, una demostración en la sección 6.4 del libro de Quesada y Pardo [24] o el teorema 27.3 de [17]).

**TEOREMA 6.6.**  *$Q$  es absolutamente continua con respecto a  $P$  si y solamente si, existe una variable aleatoria  $Y$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  y a valores en  $[0, +\infty)$  cumpliendo que:*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad Q(A) = \int_A Y(\omega) dP(\omega).$$

Habitualmente decimos que  $Y$  es la densidad de  $Q$  con respecto a  $P$  y algunas veces lo escribiremos como  $\frac{dQ}{dP}$ .

Diremos que  $P$  y  $Q$  son *equivalentes* si cada una de ellas es absolutamente continua con respecto a la otra. Fijémonos que si  $Q$  es absolutamente continua con respecto a  $P$ , con densidad  $Y$ , entonces  $P$  y  $Q$  son equivalentes si y solamente si  $P(Y > 0) = 1$ .

Sea  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$  una filtración de un movimiento Browniano estándar  $\{B_t, t \in [0, T]\}$ . El resultado siguiente es conocido como *teorema de Girsanov* o *teorema de Cameron-Martin*.

**TEOREMA 6.7.** *Sea  $\{u_t, t \in [0, T]\}$  un proceso adaptado cumpliendo que  $\int_0^T u_t^2 dt < +\infty$  c.s. y tal que el proceso  $\{L_t, t \in [0, T]\}$  definido por*

$$L_t = \exp \left\{ - \int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 ds \right\}$$

*sea integrable con  $\mathbf{E}(L_t) = 1$ , para todo  $t \in [0, T]$ . Entonces, el proceso*

$$(6.13) \quad W_t = B_t + \int_0^t u_s ds, \quad t \in [0, T],$$

*es un movimiento Browniano con respecto a la probabilidad  $Q$  definida por  $\frac{dQ}{dP} = L_T$ .*

Para el caso  $u \equiv 1$  se puede encontrar una demostración en el teorema 4.7 de [27] y para el caso general consultar el teorema 18.8 en [28].

6.2.3. *Evaluación y cobertura de una opción de tipo europeo.* Volvamos al modelo introducido al inicio de la subsección. En particular, vamos a ver que existe una probabilidad equivalente a la inicial, bajo la cual, el precio actual  $\hat{S}_t = e^{-rt}S_t$  de la acción es integrable y tiene esperanza igual a 1.

Utilizando (6.9), tenemos que

$$(6.14) \quad d\hat{S}_t = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t = \hat{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t),$$

y consecuentemente, si escribimos  $W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$ , obtenemos

$$d\hat{S}_t = \hat{S}_t \sigma dW_t.$$

Gracias al teorema de Girsanov (teorema 6.7 con  $u_t = \frac{\mu - r}{\sigma}$ ) tenemos que existe una probabilidad  $Q$ , equivalente a  $P$ , bajo la cual,  $W$  es un movimiento Browniano.

*Evaluación de la opción.* A continuación evaluaremos opciones europeas. Una opción europea será definida por una variable aleatoria  $\mathcal{F}_T$ -medible y positiva. Habitualmente, tomará la forma  $f(S_T)$ , con  $f(x) = (x - K)_+$  para un *call* y  $f(x) = (K - x)_+$  para un *put*. Trataremos el caso del call (el caso del put es análogo).

**Definición 6.8.** Una estrategia  $\phi = \{(H_t^0, H_t), t \in [0, T]\}$  es admisible si es autofinanciada y si el valor actual  $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t \hat{S}_t$  de la cartera es positivo para todo  $t$  y tal que  $\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t$  es cuadrado integrable bajo  $Q$ .

Una opción puede *replicarse* si es posible definir una estrategia de inversión admisible tal que su valor final coincide con el valor inicial, en el caso del call, para cualquier posible evolución del mercado. Necesitaremos que la variable aleatoria sea cuadrado integrable bajo  $Q$  y en nuestro caso se cumple porque  $\mathbf{E}_Q(S_T^2) < +\infty$ , y ello implica que para un call se satisface.

El teorema que sigue nos da el precio de la opción y puede encontrarse una demostración muy detallada en [13] (ver teorema 3.2).

**TEOREMA 6.9.** *Para el modelo de Black y Scholes, toda opción definida por una variable aleatoria  $h$ , positiva,  $\mathcal{F}_T$ -medible y cuadrado integrable bajo la probabilidad  $Q$ , es replicable y su valor en el instante  $t$  de toda cartera replicable es dado por*

$$V_t = \mathbf{E}_Q \left( e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right).$$

Hemos usado en el enunciado el concepto de esperanza condicional, el cual es el siguiente. Consideremos un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y una sub- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{F}$ . Entonces, para toda variable aleatoria  $X$  integrable, existe c.s. una única variable aleatoria  $Y$  integrable y medible con respecto a  $\mathcal{A}$  tal que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbf{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbf{E}(Y \mathbb{1}_A).$$

A  $Y$  se la denomina esperanza condicional de  $X$  con respecto a  $\mathcal{A}$  y se escribe como  $\mathbf{E}(X | \mathcal{A})$ .

Veamos en un caso particular cómo este teorema nos permite dar explícitamente el valor  $V_t$  de la opción en el instante  $t$ . Supongamos que la variable aleatoria  $h$  es de la forma  $h = f(S_T)$ . Así, utilizando la expresión explícita (6.10) de  $S_T$  y la relación entre  $B$  y  $W$  dada por (6.13), tenemos que

$$V_t = \mathbf{E}_Q \left( e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{E}_Q \left( e^{-r(T-t)} f \left( S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \right) | \mathcal{F}_t \right).$$

Ya que  $S_t$  es una variable aleatoria  $\mathcal{F}_t$ -medible y, bajo  $Q$ ,  $W_T - W_t$  es independiente de  $\mathcal{F}_t$ , existe un resultado de esperanza condicional (ver, por ejemplo, la proposición 2.5 en [13]) que nos permite escribir:

$$V_t = G(t, S_t),$$

con

$$G(t, x) = \mathbf{E}_Q \left( e^{-r(T-t)} f \left( x e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \right) \right).$$

En este caso general,  $W_T - W_t$  es, bajo  $Q$ , una variable aleatoria Gaussiana centrada y de varianza  $T - t$ , y entonces

$$\begin{aligned} G(t, x) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\left(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y}\right) e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\left(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z}\right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos realizado el cambio de variable  $y = z\sqrt{T-t}$ .

Consideremos ahora un call, es decir,  $f(x) = (x - K)_+$ . Entonces, repitiendo el argumento para este caso particular, obtenemos que

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left( e^{-r(T-t)} \left( xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K \right)_+ \right) \\ &= \mathbf{E} \left[ \left( xe^{\sigma\sqrt{\lambda}Z - \frac{\sigma^2\lambda}{2}} - Ke^{-r\lambda} \right)_+ \right], \end{aligned}$$

siendo  $Z \sim N(0, \lambda)$  y  $\lambda = T - t$ . Fijémonos que

$$xe^{\sigma\sqrt{\lambda}Z - \frac{\sigma^2\lambda}{2}} - Ke^{-r\lambda} \geq 0 \implies \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}} + Z \geq 0.$$

Sumando y restando  $\sigma\sqrt{\lambda}$  al último término y usando la notación

$$\theta_1 = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}} \quad \text{y} \quad \theta_2 = \theta_1 - \sigma\sqrt{\lambda},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \mathbf{E} \left[ \left( xe^{\sigma\sqrt{\lambda}Z - \frac{\sigma^2\lambda}{2}} - Ke^{-r\lambda} \right) \mathbb{1}_{\{Z+\theta_2 \geq 0\}} \right] \\ &= \int_{-\theta_2}^{+\infty} \left( xe^{\sigma\sqrt{\lambda}z - \frac{\sigma^2\lambda}{2}} - Ke^{-r\lambda} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\theta_2} \left( xe^{-\sigma\sqrt{\lambda}z - \frac{\sigma^2\lambda}{2}} - Ke^{-r\lambda} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= x \int_{-\infty}^{\theta_2} e^{-\sigma\sqrt{\lambda}z - \frac{\sigma^2\lambda}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - Ke^{-r\lambda} \int_{-\infty}^{\theta_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= x \int_{-\infty}^{\theta_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - Ke^{-r\lambda} \int_{-\infty}^{\theta_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad para la primera integral hemos realizado el cambio de variable  $y = z + \sigma\sqrt{\lambda}$ .

*Cobertura de la opción.* A continuación vamos a mostrar de manera breve y resumida que también puede darse explícitamente el valor de la cartera de cobertura. Asumamos que  $h = f(S_T)$ , entonces una cartera replicable debe tener a cada instante  $t$  un valor actual igual a

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} G(t, S_t),$$

donde  $G$  está definida en el apartado anterior y hemos utilizado además la proposición 6.5. Asumiendo cierta regularidad sobre  $f$ , que se satisfara en el caso de un call, tenemos que

$$\tilde{G}(t, x) = e^{-rt} G(t, xe^{rt}) \implies \tilde{V}_t = \tilde{G}(t, \hat{S}_t),$$

donde  $\hat{S}$  está definida en (6.14). Aplicando la fórmula de Itô para  $t < T$  y realizando algunos cálculos podemos obtener

$$\tilde{G}(t, \hat{S}_t) = \tilde{G}(0, \hat{S}_0) + \int_0^t \sigma \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(u, \hat{S}_u) \hat{S}_u dW_u = \tilde{G}(0, \hat{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(u, \hat{S}_u) d\hat{S}_u.$$

El candidato natural como proceso de cobertura  $H_t$  sería

$$H_t = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(t, \hat{S}_t) = \frac{\partial G}{\partial x}(t, S_t).$$

Asumiendo  $H_t^0 = \tilde{G}(t, \hat{S}_t) - H_t \hat{S}_t$ , entonces la cartera  $(H_t^0, H_t)$  es autofinanciada y su valor actual en el instante  $t$  es  $\tilde{V}_t = \tilde{G}(t, \hat{S}_t)$ . En el caso particular de un call tenemos que

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

lo que nos permite finalmente dar explícitamente la cobertura.

## REFERENCIAS

- [1] Arnold, L., *Stochastic differential equations: theory and applications*, J. Wiley and Sons, Nueva York, 1974.
- [2] Bachelier, L., *Théorie de la spéculation*, Ann. Sci. École Norm. Sup **17** 21-86, París, 1900.
- [3] Black, F., Scholes, M., *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy **81** 635-654, 1973.
- [4] Blanco Castañeda, L., *Probabilidad*, Editorial Universidad Nacional de Colombia, 2a Edición, Bogotá, 2010.
- [5] Brown, R., *A Brief Account of Microscopical Observations Made in the Months of June, July and August 1827, on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies*, Philosophical Magazine **4** 161-173, Londres, 1828.
- [6] Brzeźniak, Z., Zastawniak, T., *Basic stochastic processes. A course through exercises*, Springer-Verlag, Londres, 2005.
- [7] Chung, K.L., *A Course in Probability Theory*, Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [8] Dvoretzky, A., Erdős, P., Kakutani, S., (1961): *Nonincrease everywhere of the Brownian motion process*, Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat & Probability **2** 103-116, 1961.
- [9] Einstein, A., *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, Annalen der Physik **322** (8) 549-560, 1905.
- [10] Hida, T., *Brownian motion*, Springer-Verlag, Nueva York, 1980.
- [11] Itô, K., *Stochastic integral*, Proc. Imperial Acad. Tokyo **20** (8) 519-524. 1944.
- [12] Karatzas, I., Shreve, S.E., *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, Nueva York, 2000.
- [13] Lamberton, D., Lapeyre, B., *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses, París, 1997.
- [14] León, J.A., *Integración estocástica con respecto al movimiento Browniano*. Matemáticas, Enseñanza Universitaria **Vol XIV** (2) 71-109, Escuela Regional de Matemáticas, Cali, 2006.
- [15] Mircea, G., *Stochastic calculus. Applications in Science and Engineering*, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [16] Moret, S., Nualart, D., *Generalization of Itô's formula for smooth non-degenerate martingales*, Stochastic Process. Appl. **91** (1) 115-149, 2001.
- [17] Munroe, M.E., *Measure and integration*, 2nd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
- [18] Nelson, E., *Dynamical theories of Brownian motion*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1967.
- [19] Nualart, D., *The Malliavin calculus and related topics*, 2nd Edition, Springer, 2006.
- [20] Nualart, D., Sanz-Solé, M., *Curs de probabilitats*, Promociones y Publicaciones Universitarias, Universitat de Barcelona, 1990.
- [21] Paley, R.E., Wiener, A.C., Zygmund, A., *Note on random functions*, Math. Z. **37** 647-668, 1933.
- [22] Pi, I., *El movimiento Browniano y su aplicación al cálculo estocástico*, Trabajo final de grado de la Facultat de Matemàtiques e Informàtica de la Universitat de Barcelona, 2019.
- [23] Protter, P., *Stochastic integration and differential equations*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [24] Quesada, V., Pardo, L., *Curso superior de probabilidades*, PPU, Barcelona, 1987.
- [25] Revuz, D., Yor, M., *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer, Berlin, 2005.
- [26] Rojas Bonilla, J.R., *La fórmula d'Itô en la resolución de procesos de difusión con aplicaciones en física*, Trabajo final de grado de la Facultat de Ciències de la Escuela Politécnica Nacional de Quito, 2016.
- [27] Sanz-Solé, M., *An Introduction to stochastic calculus*, Curso de Máster, Universitat de Barcelona, 2021.

- [28] Schilling, R.L., Partzsch, L., *Brownian Motion: an introduction to stochastic processes*, 2nd Edition, De Gruyter, 2014.
- [29] Smoluchowski, M., *Zur kinetischen theorie der Brownschen molekularebewegung und der suspensionen*, Annalen der Physik **21** (**14**) 756-780, 1906.
- [30] Shreve, S.E., *Stochastic calculus for finance II. Continuous-Time models*, Springer-Verlag, Nueva York, 2004.
- [31] Tucker, H.G., *A graduate course in probability*, Dover publications, Nueva York, 1999.
- [32] Tudor, C., *Procesos estocásticos*, Publicación de la Sociedad Matemática Mexicana, México. 2002.

*David Márquez-Carreras*

Facultat de Matemàtiques i Informàtica,

Universitat de Barcelona,

Gran Via 585, 08007-Barcelona.

e-mail: davidmarquez@ub.edu