MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol. 15, No.1, páginas 125-138.
Recibido 04-04-2024. Aceptado 01-09-2024.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v15n1/galoga

LAS MATEMÁTICAS BABILÓNICAS DE 4000 AÑOS

GABRIEL LÓPEZ GARZA

RESUMEN. El presente artículo es una introducción a la aritmética del periodo "viejo babilonio" de la antigua Mesopotamia. Se estudia el sistema numérico sexagesimal babilonio y las operaciones básicas en este sistema. Finalmente, se describe y analiza la tableta Plimpton 322, la cual contiene ternas pitagóricas no triviales.

1. INTRODUCCIÓN

El periodo conocido como viejo babilonio se ubica entre 2000 y 1600 años antes de nuestra era, es decir, hace aproximadamente 4000 años. Para situarnos históricamente, baste recordar que el rey Hammurabi vivió entre 1810 y 1750 a. n. e.

Como se sabe, la escritura babilónica fue registrada en tabletas de barro. Si bien es difícil establecer exactamente cuándo fueron hechas, los especialistas están más o menos de acuerdo de que las tabletas que se citarán en el presente artículo corresponden a la época mencionada, sin embargo provienen, en su conjunto, de varios lugares situados en una extensa zona geográfica, mayormente del actual Irak.

No menos fascinante que las tabletas mismas y su contenido, es la forma en la que han llegado a nosotros. En la actualidad existen cientos de miles de tabletas (algunos miles en el Museo Británico), muchas de ellas fueron vendidas por toda Europa y Estados Unidos por aventureros y comerciantes que las sustrajeron o compraron, nadie sabe cómo ni a quién. Por ejemplo, muchos objetos de la colección de Plimpton, quien fue un millonario norteamericano cuya colección donó póstumamente a la Universidad de Columbia, cuenta entre sus objetos más afamados la tableta que contiene ternas pitagóricas no triviales, denominada Plimpton 322, la cual, entre otras tabletas, fue comprada a un aventurero de quien se dice que la serie de películas de *Indiana Jones* está basada en el mismo personaje.

En realidad es difícil saber la procedencia de muchos textos, al respecto afirma Friberg [1]:

En un mundo ideal, no existirían textos de "procedencia desconocida" que vinieran del mercado de antigüedades. En el mundo real, donde tales textos existen, algunas personas afirman con entereza que los académicos serios no deberían tener nada que ver con ellos, por diversas razones idealizadas. Sin embargo, hay que tener en cuenta que gran parte de la mayoría de las colecciones del patrimonio cultural no europeo, incluso los de los mayores museos de Europa y Estados Unidos, son textos de "procedencia desconocida" del mercado de antigüedades. Así, por ejemplo, las obras clásicas sobre matemáticas cuneiformes, los "Textos matemáticos de Keilschrift" por Neugebauer, 1935-1937, y "Textos Cuneiformes matemáticos" de Neugebauer y Sachs, 1945, nunca habrían aparecido si sus autores se hubieran negado a trabajar con textos sin procedencia conocida.

En cuanto a la bibliografía mencionada en la cita anterior, quizá el libro más destacado sobre matemática en textos cuneiformes es el mencionado de Neugebauer y Sachs [3]. Afortunadamente la digitalización de tal ejemplar ha sido donada a la fabulosa biblioteca digital *Internet Archive* por lo que me ha sido posible escribir este

2010 *Mathematics Subject Classification.* 01A17.
Palabras clave. Historia de las matemáticas babilónicas, Aritmética.

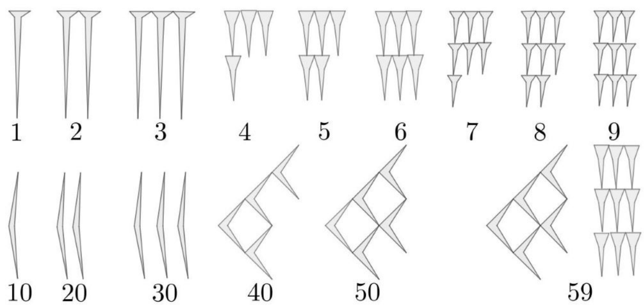

Figura 1. Representación de los numerales 1 a 9, $10, 20, 30, 40, 50$ y 59 en escritura cuneiforme.

artículo y por lo cual recomiendo urgentemente al lector que acceda a tal sitio si no lo conoce[1].

La matemática descrita en el libro de Neugebauer y Sachs requeriría de varios artículos para ser solamente resumida, pero además de este libro, hay algunos textos más modernos, baste mencionar como ejemplo los libros de Gonçalves [2] y el libro de Friberg [1], ya mencionado. Algunos datos e información de tales libros será incluida en el presente artículo como será mencionado oportunamente.

La sección 2 trata someramente de las operaciones básicas que conocían los antiguos babilonios y algunas aplicaciones que sorprendentemente para la época eran conocidas, por ejemplo una aproximación de la fórmula para el tiempo que se requiere para duplicar el capital inicial con interés compuesto, así es, ¡hace 4000 años! La sección 3 está dedicada al estudio de las ternas pitagóricas grabadas en la famosa tableta Plimpton 322. En esta sección se describe el contenido de la tableta y se analiza la posible manera en que fueron construidas las ternas pitágoricas así como se estudian los llamados “errores” contenidos en ella. La sección 4 trata someramente de la importancia histórica de la aritmética babilonia.

2. Aritmética cuneiforme

El sistema de numeración babilónico utiliza solamente dos signos, uno para las decenas que se denotará “$\langle$” y otro para las unidades que se denotará “$|$”. Utilizaban menos signos que el sistema maya,[2] ya que los babilonios del periodo viejo babilonio, no utilizaban ningún signo para el “cero”. El no contar con un signo para el cero, a pesar[3] de que su sistema también es posicional, acarreaba ciertos problemas, como se verá, aunque a veces para denotar el cero se dejaba un espacio en blanco, digamos “para comodidad del lector”. Con los signos se agrupaban hasta nueve unidades y hasta cinco decenas, es decir, con los signos se representaban los números de 1 a 59, por ejemplo: $59 = \langle\langle\langle\langle\langle|||||||||$ aunque existían patrones de representación para que los números fueran fáciles de leer como se muestra en la figura 1.

A partir de 60 se usaba el sistema posicional es decir $1 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 = |\textvisiblespace$ donde con “$\textvisiblespace$” se enfatiza, cuando se requiere, un espacio en blanco, uso que se hará a lo largo del presente artículo[4]. Para nuestros propósitos se empleará la siguiente convención ya que es la mayormente aceptada por los especialistas: los números a_n, a_{-n} representan

[1]El libro de Neugebauer y Sachs puede ser encontrado en el sitio *Internet Archive*: https://archive.org/details/mathematicalcune0000neug/page/n5/mode/2up

[2]El sistema maya. como se sabe, usa tres símbolos: puntos para las unidades, rayas para grupos de cinco unidades y el cero.

[3]Un símbolo para el cero en Babilonia aparece hasta los textos del periodo seleucida 312 a 63 a. n. e.

[4]Una página donde hay un convertidor del sistema babilonio (del periodo seleucida) a nuestro sistema decimal puede encontrarse en: https://www.dcode.fr/babylonian-numbers

el equivalente a nuestros dígitos y que para los babilonios son los números de 1 a 60, el número

$$a_n \cdot 60^n + a_{n-1} \cdot 60^{n-1} + \cdots + a_0 \cdot 60^0 + a_{-1} \cdot \frac{1}{60^1} + a_{-2} \cdot \frac{1}{60^2} + \cdots + a_{-n} \cdot \frac{1}{60^n} + \cdots$$

se representará como

$$a_n\, a_{n-1} \ldots a_0\, ; a_{-1}\, a_{-2}\, \ldots$$

cuando se requiera brevedad, aunque a veces las fracciones se representarán como

$$\frac{a_{-1}}{60^1}\, \frac{a_{-2}}{60^2} \cdots \frac{a_{-n}}{60^n} \cdots$$

y la parte entera como

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$$

para mantener la claridad. El cero posicional se representa con el signo para el espacio visible, como ya se mencionó $0 \stackrel{def}{=} ␣$. Además, el punto y coma ";", se usará para separar los enteros de los números fraccionarios sexagesimales. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
360 &= 6 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 = 6,\ ␣ \\
365 &= 6 \cdot 60^1 + 5 \cdot 60^0 = 6,\ 5 \\
2024 &= 33 \cdot 60^1 + 44 \cdot 60^0 = 33,\ 44 \\
\frac{1}{2} &= 30 \cdot \frac{1}{60} = ␣;\ 30
\end{aligned}$$

2.1. Adición y multiplicación. Los babilonios, aún antes del periodo viejo babilonio eran excelentes aritméticos y por supuesto sabían sumar, multiplicar y dividir[5].

En general, de acuerdo con Friberg *op. cit.* p. 6 no existen muchos textos del viejo babilonio donde se muestren paso a paso los algoritmos usados dado lo limitado del tamaño de las tabletas, por lo que cualquier afirmación de los algoritmos usados es puramente conjetural, desde mi punto de vista. Por ejemplo de la tableta de la colección de Martin Schøyen (MS): MS 2792 # 2, donde entre otras operaciones se requiere la suma de $4,\ 30 + 8\ ␣ + 6,\ 40 + 7,\ 30$ y donde solo aparece el resultado: 26, 40.

Sin embargo no es difícil concluir que para la suma y la resta, dado que se trata de un sistema posicional, debían proceder exactamente como nosotros, es decir agrupando las unidades y reagrupando cuando la suma excede 60:

$$\begin{aligned}
4,\ 30 + 8,\ ␣\ + 6,\ 40 + 7,\ 30 &= (4 + 8 + 6 + 7) \cdot 60^1 + (30 + 0 + 40 + 30) \cdot 60^0 \\
&= 25 \cdot 60^1 + (1 \cdot 60^1 + 40 \cdot 60^0) \cdot 60^0 \\
&= (25 + 1) \cdot 60^1 + 40 \cdot 60^0 \\
&= 26,\ 40
\end{aligned}$$

Como ejemplos de ejercicios de multiplicación para niños en edad escolar, Friberg *op. cit.* menciona los textos de la colección de Martin Schøyen en las tabletas MS 2728, 2729 y 3944, por ejemplo en la tableta MS 2729 donde se presentan las multiplicaciones $30 \times 35 = 17,\ 30$, $40 \times 35 = 23,\ 20$ y $45 \times 40 = 30,\ ␣$. Por ejemplo, la multiplicación 45×40 podría haber sido realizada como sigue:

$$\begin{aligned}
45 \cdot 40 &= (40 \cdot 40) + (5 \cdot 40) \\
&= (26 \cdot 60^1 + 40) + (3 \cdot 60^1 + 20) \\
&= (26 + 3) \cdot 60^1 + (40 + 20) \\
&= 29 \cdot 60^1 + 1 \cdot 60^1 \\
&= 30 \cdot 60^1 = 30,\ ␣
\end{aligned}$$

[5]Desde tiempos anteriores al viejo babilonio existen objetos de 3350-3200 a.n.e., con elaborados cálculos matemáticos vea por ejemplo [1, p. 243].

Pero otro desconcertante procedimiento que parece haber sido usado (vea Friber [1, p. 7]), fue aprovechar las ventajas del punto flotante y por ejemplo, dado que 40 es 2/3 de 60 pudieron haber realizado el siguiente truco:

$$\begin{aligned} 45 \cdot 40 &\stackrel{?}{=} 45 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{45 \cdot 2}{3} \\ &= \frac{90}{3} = 30 \end{aligned}$$

para llegar al resultado correcto, se debe recordar que se usó un truco y en lugar de 30 se debe escribir $30, \llcorner\!\lrcorner = 30 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0$, y así, se habrían aprovechado las facilidades que otorga del punto flotante para las multiplicaciones. Curiosamente, en innumerables ocasiones no usaban ninguna notación, lo que podría acarrear confusiones.

Observe que dado que 30 es 1/2 de 60, la multiplicación $35 \cdot 30$ pudo haberse realizado como

$$\begin{aligned} 35 \cdot 30 &\stackrel{?}{=} 35 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 17 + \frac{1}{2} \\ &= 17\,;30 \\ &\stackrel{!}{=} 17,\ 30 \end{aligned}$$

se debe recordar que es necesario mover el punto flotante (en nuestra notación: mover el punto y coma) para obtener el resultado correcto

$$35 \cdot 30 = 17 \cdot 60^1 + 30 \cdot 60^0 = 17,\ 30.$$

En realidad, en el viejo babilonio no usaba ningún signo para separar fracciones de enteros, por lo que el significado real de la operación debía establecerse a partir del contexto.

Esta técnica de multiplicación puede sorprendernos un poco ya que no la usamos en la actualidad, en el sistema decimal solo sirve con potencias de 5 y de 2 (dado que la base 10, puede escribirse como $10 = 2 \cdot 5$). Por ejemplo, si alguien quisiera multiplicar 35 por 5 puede hacer el siguiente truco:

$$\begin{aligned} 35 \cdot 5 &\stackrel{?}{=} 35 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 17 + \frac{1}{2} = 17.5 \\ &\stackrel{!}{=} 175 \\ 35 \cdot 5 &= 175 \end{aligned}$$

Así es, estimado lector, en el sistema decimal en *términos algorítmicos* es lo mismo multiplicar por 5 que dividir por 2 y viceversa, multiplicar por 2 es lo mismo que dividir por 5 moviendo el punto flotante a conveniencia. Dada esta reciprocidad que existe en los sistemas posicionales, las tablas de multiplicar del periodo viejo babilonio incluyen recíprocos de una gran cantidad de números, por ejemplo ¡puede encontrarse la tabla de multiplicar de 44, 26, 40! Algunos ejemplos tomados del original se encuentran en el cuadro 1. El carácter del número 44 26 40 que así aparece en las tablas sin ninguna indicación, queda revelado si escribimos con nuestra notación explícitamente el espacio y el punto y coma que requiere:

$$;\llcorner\!\lrcorner,\ 44,\ 26,\ 40 = \frac{44}{60^2} + \frac{26}{60^3} + \frac{40}{60^4} = \frac{1}{3^4}.$$

Para los babilonios nuestro sistema decimal les habría parecido extremadamente impreciso y aburrido dada nuestra incapacidad de localizar exactamente números tan básicos como $1/3^4 = 1/81$, ya que nosotros representamos tal número como

44 26 40	
$\times 1$	44 26 40
$\times 2$	1 28 53 20
$\times 3$	2 13 20
$\times 4$	2 57 46 40
$\times 5$	3 42 13 20
$\times 6$	4 26 40
$\times 7$	5 11 06 40
$\vdots$	$\vdots$
$\times 50$	37 02 13 20
$\times 44$ 26 40	32 55 18 31 06 40

Cuadro 1. Parte de la tabla de multiplicar de $1/81$ o bien de $44 \cdot 60^2 + 26 \cdot 60 + 40 = 160\,000$ incluida en la tableta MS 3974. La tableta completa incluye todos los productos de 1 a 20 y después los productos por 30 y de 10 en 10 hasta 50. Precaución: si escribe la transliteración de la tabla babilónica, no olvide colocar ceros, comas y punto y coma, en donde haga falta.

$0.\overline{0123456789}$, es decir, con un desarrollo decimal que no termina nunca. Números con desarrollos infinitos en base sesenta eran evitados en lo posible.

Las tablas de multiplicar que se conocen de los antiguos babilonios son muy interesantes. Si usted alguna vez se había preguntado cuál será la tabla de multiplicar de 44, 26, 40 aquí se incluye parte de ella por cortesía de los viejos babilonios en el cuadro 1, la cual es parte de una tabla más completa de multiplicaciones [1, p. 362] la cual corresponde a la tableta MS 3974.

Tablas del viejo babilonio con los cuadrados de todos los números de 1 a 60 pueden verse[6] en [1, p. 45]. Aunque también tablas de multiplicaciones estándar son conocidas y un largo catálogo puede encontrarse en [3, p. 20 a 23] y en el apéndice 2, p. 362 del libro de Friberg *op. cit.*, donde puede encontrarse treinta y un fracciones de 60 y después en el orden que se presentarán, las tablas de multiplicar de 18, 16 40, 16, 15, 12 30, 12, 10, 9, 8 20, 8, 7 30, 7 12, 7, 6 40, 6, 5, 4, 3 45, 3 20, 3, 2 30, 2 24, 2 15, 2, 1 40, 1 30, 1 20, 1 15, 1 12. La notoria falta de la tabla de números tales como 19 y 17, es debido a que, obviamente, tales números no pueden escribirse de la forma $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, al ser primos, y por lo tanto, $1/19$ no tiene expansión sexagesimal finita. Recuerde que la tabla es la representación en punto flotante del número y por lo tanto, si aparece la tabla de x puede verse también como la tabla de $;x$ o $;\llcorner x$, etcétera.

También es necesario aclarar que no aparece la tabla de 20 ya que este número es un tercio de 60 y por lo tanto su tabla ¡puede ser sustituida por la tabla de $1/3 =; 20$ sin mucho problema!, con el debido cuidado.

[6]Claro, $60 \cdot 60 = 1\llcorner$ lo cual aparece en las tablas babilónicas después de $59 \cdot 59$, simplemente como $1 \cdot 1 = 1$.

Así, en la aritmética babilonia antigua se diferencia entre tres tipos de números: a) los números llamados *regulares* que son de la forma $2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$; b) los números *semiregulares* en donde aparece algun factor primo distinto de $2, 3, 5$ pero incluyen potencias de alguno de estos números; c) los números *irregulares* que o bien son primos diferentes de $2, 3, 5$ o solo tienen entre sus factores números distintos de estos.

Por supuesto, además de tablas de multiplicar de números regulares existen tablas de recíprocos, ya que, como puede deducirse de sus sistema de punto flotante, para dividir a/b multiplicaban a por el recíproco de b, es decir, multiplicaban a por la expansión sexagesimal de $1/b$, por lo que elaboraron tablas de recíprocos de números regulares, pero también incluían números semiregulares e irregulares (vea Friberg p. 8 y 9 *op. cit.*).

En la página 20 del libro de Neugenbauer *op. cit.* aparece un cuadro con la información de las tablas de multiplicación simple (*i. e.* un solo producto por línea) conocidas hasta 1945, donde da cuenta de las colecciones a las que pertenecían en ese tiempo, además del estado físico en que se encontraban. Tal cuadro, muestra 85 tablas de la colección MKT, además de 77 tablas más de otras colecciones. También se conocen tablas de recíprocos (*v. gr.* p. 4 Nuegenbauer *op. cit.*) mayormente de números regulares, pero existen también de números irregulares (tableta YBC 10529). Finalmente, se conocen tablas de cuadrados y raíces cuadradas y cubos, Neugenbauer (p. 33) menciona y describe algunas de las tabletas conocidas en su época: 16 tabletas con cuadrados y 17 con raíces y 6 tablas con raíces cúbicas. Termino esta enumeración refiriendo a Neugenbauer quien documenta tablas de potencias a^n, donde $2 \leq n \leq 10$ y a toma los valores 9, 16,1 40,3 45, lo que el citado autor llama logaritmos, aunque en realidad los babilonios si utilizaban de alguna forma aproximaciones para logaritmos para algunos problemas de interés compuesto (probablemente inventado por los antiguos babilonios), ya que ellos fueron notablemente usuarios de prestamos y tasas de interés en esas épocas tan remotas como el antiguo babilonio. Lo que nos lleva a la siguiente pregunta: ¿cuáles eran las aplicaciones de la formidable aritmética babilonia? Por supuesto, la aritmética la utilizaban en el comercio ya para su época bastante complejo: contabilidad e impuestos; también para dividir herencias, contratos y terrenos, realizar pagos de salarios, cálculos de volúmenes para almacenamiento, en general la aritmética relacionada con pesos y medidas y un largo etcétera. Existen innumerables tabletas que contienen problemas relacionados con lo mencionado y mucho más, incluyendo algunos que parecen ser hechos por el mero placer de calcular o como una prueba de fuerza o bien meramente parecen acertijos. Como ejemplo de esta última instancia se encuentra la tableta de la división de $1,\ 01,\ 01,\ 01 = 46\,668\,963\,601$ por 13, note que ambos números son irregulares, sin embargo 13 también es divisor de ambos números (vea Friberg apéndice p. 156 y 410). El desarrollo posterior de las habilidades aritméticas se encuentra años después, en el periodo seleucida (aproximadamente 569 a. n. e.), en la tableta BM 46301 donde se muestra explícitamente[7] el cálculo del cuadrado de 4, 04, 17, 40, 45, 13, 17, 45, 52, 14, 42, 12, 09 el cual es

$$3^{92} = 16,\ 34,\ 39,\ 52,\ 40,\ 21,\ 26,\ 52,\ 57,\ 35,\ 56,\ 49,\ 50,\ 37,\ 38,\ 58,\ 13,\ 38,\ 04,\ 44,\ 57,\ 15,\ 03,\ 37,\ 21$$

al parecer, tal cálculo no proviene de ninguna aplicación al comercio, sino que se trata solo de una notable prueba de fuerza.

Regresando al periodo viejo babilonio, el número de tablas de cálculos de cuadrados de números es tan notoria que se ha llegado a especular que en este periodo las multiplicaciones se realizaban no con las tablas normales, sino con las tablas de cuadrados mediante el algoritmo (vea Strom [7], p. 54 y referencias al interior) siguiente:

$$a \cdot b = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2),$$

[7]En el periodo seleucida si existen ejempos de cálculos explícitos, Friberg *op. cit.* p. 458, 459.

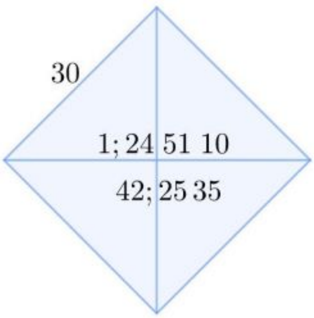

FIGURA 2. Se muestra un diagrama de lo que se representa en la tableta YBC 7289. Se trata de un cuadrado donde en un lado exterior aparece el número 30. En la diagonal hay dos números, el primero $1;24\,51\,10$ es la aproximación a $\sqrt{2}$ en sexagesimal; el segundo número, bajo la diagonal, representa en sexagesimal $30 \cdot (1;24\,51\,10 = 42;25\,35)$.

aunque cabe mencionar que no hay evidencia directa del uso de tales algoritmos en el viejo babilonio, ya que, como se mencionó, en ese periodo temprano solo se escribían los resultados finales, no los pasos seguidos para llegar al resultado.

2.2. Raíces cuadradas. El cálculo de $\sqrt{2}$, para mí, es el más exasperante ejemplo de cálculos que sorprenden por su antigüedad y que no muestran el algoritmo utilizado paso a paso; el indicio del cálculo se encuentra en la tableta YBC 7289 cuya representación se presenta en la figura 2 (en el original escriben "=" en lugar de "≈" a diferencia de este artículo; el símbolo "$=_{10}$", debe leerse: *igual en base diez a*):

$$\sqrt{2} \approx 1;\ 24\ 51\ 10 =_{10} 1.41421\overline{296}$$

Tal cálculo también constituye una prueba de que el teorema de Pitágoras se conocía entre 1800 y 1600 a. C., de la tableta YBC 7289 se muestra una representación en la figura 2. La figura representa un cuadrado con sus dos diagonales y en ella parecen tres números en base 60, el primer número que llamaremos $l = 30$, el segundo número $m = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ y el tercer número $n = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$. El segundo número $m \approx \sqrt{2}$, corresponde a la hipotenusa de un triangulo rectángulo cuyos catetos miden 1 ambos, lo cual se cumple por el teorema de Pitágoras. Claramente el triángulo con catetos de medida 1 es semejante al triángulo con catetos de medida 30 por lo que sus hipotenusas son proporcionales, es decir, la diagonal n se obtiene multiplicando por $l = 30$, es decir, $n = 30 \cdot m$, que como se ha dicho, es el segundo número escrito en la tableta sobre la diagonal. Por cierto, la aproximación para $\sqrt{2}$ es la misma que usa Ptolomeo en el Almagesto, obra escrita más de 2000 años después.

El hecho de que el teorema de Pitágoras (o algunos ejemplos de aplicaciones del teorema) fueran conocido centenares de años antes de Pitágoras a llevado a proponer a Strom (*op. cit.*) que se llame a tal teorema "el teorema babilonio". Dado que no hay ninguna prueba documental de que Pitágoras haya descubierto tal teorema, quizá sería correcto, pero creo que más bien debemos llamarlo teorema de Euclides, ya que en su obra "Elementos", es el primer documento donde aparece enunciado como teorema y además, demostrado con su recíproco, como es bien sabido. No considero que debe llamarse teorema babilonio ya que no se conoce ninguna demostración por parte de los babilonios ni que haya sido siquiera enunciado como teorema. De los antiguos babilonios solo se conocen sorprendentes e inesperadas aplicaciones para tan temprana época.

3. Conocimiento del teorema de Pitágoras en la antigua babilonia

Una de las más impactantes muestras de conocimiento del teorema de Pitágoras en la antigua babilonia se encuentra en la tableta Plimpton 322 donde ocurren tripletas (a, b, c) tales que $a^2 + b^2 = c^2$ que van más allá de cualquier balbuceo de aficionados a la aritmética y que muestra el trabajo de verdaderos profesionales en acción, como se verá.

En el cuadro 2 se muestra la transliteración[8] de la tableta original. En rojo se presenta la reconstrucción de texto ilegible en el original aceptada por asiriólogos como Friberg *op. cit.* En azul se muestran números que los asiriologos consideran que son erróneos porque no siguen el patrón general.

3.1. Descripción de la tableta Plimpton 322. Si se designan los lados de un triángulo rectángulo mediante a, b, c, siendo a el cateto adyacente, b el cateto opuesto, c la hipotenusa del triángulo y siendo α, el ángulo formado por el cateto adyacente y la hipotenusa del triángulo. El orden en el que aparecen los números corresponde al orden de magnitud de los números de la primera columna de la tabla 2 escritos de mayor a menor. En la primera columna, se puede identificar la secante al cuadrado, $\sec^2\alpha$ o bien $1 + \tan^2\alpha$, en la segunda columna el cateto opuesto b y en la tercera columna la hipotenusa c del triángulo. De esta forma, en la tableta no se encuentra el cateto adyacente, sino implícito en la primera columna. Obviamente, conocidos el cateto opuesto y la hipotenusa, se requiere conocer el cateto adyacente para obtener la primera columna, lo cual, claro, puede hacerse mediante el teorema de Pitágoras. En la tabla 3 se ha agregado la columna del cateto adyacente, también se expresan los números en base diez, para mayor claridad. La transliteración de los encabezados de la tabla, indica el carácter geométrico pero también aritmético de la misma. Por ejemplo: "el lado del cuadrado de enfrente", puede interpretarse como el cateto opuesto y que es posible construir un cuadrado sobre ese lado. De la misma manera, "diagonal" corresponde a la hipotenusa ya que, presumiblemente, sería la diagonal de un paralelogramo cuyos lados son el cateto opuesto y el cateto adyacente del triángulo.

De acuerdo con Nuegenbauer (p. 40 *op. cit.*) las ternas pitagóricas pudieron haber sido construidas mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} b &= 2pq \\ a &= p^2 - q^2 \\ c &= p^2 + q^2, \end{aligned}$$

donde p, q son primos relativos y $p > q$. En la tabla 3 se ha reescrito la tableta Plimpton 322, agregando una cuarta columna donde aparece el cateto adyacente b factorizado para evidenciar su carácter de número regular babilónico. Observe que efectivamente todos los números b de la cuarta columna son de la forma $2pq$ con p, q primos relativos, salvo el renglón 11, para el cual ocurre que no pueden escribirse p y q como enteros para obtener a y c dados en la tableta Plimpton 322 original, sino que debe escribirse $p = 2\sqrt{3 \cdot 5}$ y $q = \sqrt{3 \cdot 5}$ para obtener $a = p^2 - q^2$ y $c = p^2 + q^2$ (recuerde que a y c son dados), lo cual es por lo menos algo que debe llamar la atención, aunque al escribir p y q como irracionales, mantiene el orden descendente de la división p/q, mostrado en la primera columna del cuadro 3, columna que no aparece en el original, pero que resulta curiosa. De hecho otra curiosidad de este renglón es que es un múltiplo de la terna $(3, 4, 5)$, la más conocida de las ternas pitagóricas, efectivamente $15(3, 4, 5) = (45, 60, 75)$ y, de hecho, este onceavo renglón es el único con esta característica de ser múltiplo de otra terna.

De acuerdo a lo que se muestra en la primera columna del cuadro 3 y al observar la primera columna del cuadro 3, esta pudo haberse construido dividiendo por el número

[8] Se usa el término *transliteración* y no *traducción* debido a que hay cierta ambiguedad inevitable debida a la antiguedad de los textos.

La $\cdots$ de la diagonal de la que 1 se quita y aparece el frente	El lado del cuadrado de enfrente	El lado del cuadrado de la diagonal	Su posición
1; $\frac{59}{60}\ \frac{0}{60^2}\ \frac{15}{60^3}$	$1,59$	$2,49$	lugar 1
1; $\frac{56}{60}\ \frac{56}{60^2}\ \frac{58}{60^3}\ \frac{14}{60^4}\ \frac{50}{60^5}\ \frac{6}{60^6}\ \frac{15}{60^7}$	$56,7$	$3,12,1$	lugar 2
1; $\frac{55}{60}\ \frac{7}{60^2}\ \frac{41}{60^3}\ \frac{15}{60^4}\ \frac{33}{60^5}\ \frac{45}{60^6}$	$1,16,41$	$1,50,49$	lugar 3
1; $\frac{53}{60}\ \frac{10}{60^2}\ \frac{29}{60^3}\ \frac{32}{60^4}\ \frac{52}{60^5}\ \frac{16}{60^6}$	$3,31,49$	$5,9,1$	lugar 4
1; $\frac{48}{60}\ \frac{54}{60^2}\ \frac{1}{60^3}\ \frac{40}{60^4}$	$1,5$	$1,37$	lugar 5
1; $\frac{47}{60}\ \frac{6}{60^2}\ \frac{41}{60^3}\ \frac{40}{60^4}$	$5,19$	$8,1$	lugar 6
1; $\frac{43}{60}\ \frac{11}{60^2}\ \frac{56}{60^3}\ \frac{28}{60^4}\ \frac{26}{60^5}\ \frac{40}{60^6}$	$38,11$	$59,1$	lugar 7
1; $\frac{41}{60}\ \frac{33}{60^2}\ \frac{45}{60^3}\ \frac{14}{60^4}\ \frac{3}{60^5}\ \frac{45}{60^6}$	$13,19$	$20,49$	lugar 8
1; $\frac{38}{60}\ \frac{33}{60^2}\ \frac{36}{60^3}\ \frac{36}{60^4}$	$9,1$	$12,49$	lugar 9
1; $\frac{35}{60}\ \frac{10}{60^2}\ \frac{2}{60^3}\ \frac{28}{60^4}\ \frac{27}{60^5}\ \frac{24}{60^6}\ \frac{26}{60^7}\ \frac{40}{60^8}$	$1,22,41$	$2,16,1$	lugar 10
1; $\frac{33}{60}\ \frac{45}{60^2}$	45	$1,15$	lugar 11
1; $\frac{29}{60}\ \frac{21}{60^2}\ \frac{54}{60^3}\ \frac{2}{60^4}\ \frac{15}{60^5}$	$27,59$	$48,49$	lugar 12
1; $\frac{27}{60}\ \frac{0}{60^2}\ \frac{3}{60^3}\ \frac{45}{60^4}$	$7,12,1$	$4,49$	lugar 13
1; $\frac{25}{60}\ \frac{48}{60^2}\ \frac{51}{60^3}\ \frac{35}{60^4}\ \frac{6}{60^5}\ \frac{40}{60^6}$	$29,31$	$53,49$	lugar 14
1; $\frac{23}{60}\ \frac{13}{60^2}\ \frac{46}{60^3}\ \frac{40}{60^4}$	56	53	lugar 15

Cuadro 2. Transliteración del contenido del original Plimpton 322. En rojo se muestra lo que es ilegible en el original, pero que han añadido expertos, salvo donde aparecen puntos suspensivos, allí no ha sido posible añadir nada. En azul, se muestran números que no siguen el patrón general de la tabla.

regular b en nuestra notación, ya sea el número a o el número b y después elevar al cuadrado. Es decir, la identidad trigonométrica $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$, les debió parecer mágica (ya que no conocían la trigonometría), al ser obtenida por medios puramente aritméticos, ya que si a $(a/b)^2$ se le quita 1 puede obtenerse de $(c/b)^2$, que es lo que aparentemente dice el encabezado de la primera columna del original, si pensamos en el triángulo de la figura 3, donde es claro que del triángulo con catetos $1, \tan\alpha$ e hipotenusa $\sec\alpha$, aparece el frente $\tan\alpha$ si se construye un cuadrado sobre la secante y se le quita 1 (y se saca raíz cuadrada).

3.2. "Errores". Seguidamente se presentan los presuntos errores en la tableta Plimpton 322 (vea el cuadro 2).

$\sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha$ (en notación moderna)	cateto opuesto (frente)	hipotenusa (diagonal)	cateto adyacente (base)	lugar
$\left(\frac{169}{120}\right)^2 = 1+\left(\frac{119}{120}\right)^2$	$119 = 7\cdot 17$	$169 = 13^2$	$120 = 2^3\cdot 3\cdot 5$	1
$\left(\frac{4825}{3456}\right)^2 = 1+\left(\frac{3367}{3456}\right)^2$	$3367 = 7\cdot 13\cdot 37$	$4825 = 5^2\cdot 193$	$3456 = 2^7\cdot 3^3$	2
$\left(\frac{6649}{4800}\right)^2 = 1+\left(\frac{4601}{4800}\right)^2$	$4601 = 43\cdot 107$	$6649 = 61\cdot 109$	$4800 = 2^6\cdot 3\cdot 5^2$	3
$\left(\frac{18541}{13500}\right)^2 = 1+\left(\frac{12709}{13500}\right)^2$	$12709 = 71\cdot 179$	18541 primo	$13500 = 2^2\cdot 3^3\cdot 5^3$	4
$\left(\frac{97}{72}\right)^2 = 1+\left(\frac{65}{72}\right)^2$	$65 = 5\cdot 13$	97 primo	$72 = 2^3\cdot 3^2$	5
$\left(\frac{481}{360}\right)^2 = 1+\left(\frac{319}{360}\right)^2$	$319 = 11\cdot 29$	$481 = 13\cdot 37$	$360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$	6
$\left(\frac{3541}{2700}\right)^2 = 1+\left(\frac{2291}{2700}\right)^2$	$2291 = 29\cdot 79$	3541 primo	$2700 = 2^2\cdot 3^3\cdot 5^2$	7
$\left(\frac{1249}{960}\right)^2 = 1+\left(\frac{799}{960}\right)^2$	$799 = 17\cdot 47$	1249 primo	$960 = 2^6\cdot 3\cdot 5$	8
$\left(\frac{769}{600}\right)^2 = 1+\left(\frac{481}{600}\right)^2$	$481 = 13\cdot 37$	769 primo	$600 = 2^3\cdot 3\cdot 5^2$	9
$\left(\frac{8161}{6480}\right)^2 = 1+\left(\frac{4961}{6480}\right)^2$	$4961 = 11^2\cdot 41$	8161 primo	$6480 = 2^4\cdot 3^4\cdot 5$	10
$\left(\frac{75}{60}\right)^2 = 1+\left(\frac{45}{60}\right)^2$	$45 = 3^2\cdot 5$	$75 = 3\cdot 5^2$	$60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$	11
$\left(\frac{2929}{2400}\right)^2 = 1+\left(\frac{1679}{2400}\right)^2$	$1679 = 23\cdot 73$	$2929 = 29\cdot 101$	$2400 = 2^5\cdot 3\cdot 5^2$	12
$\left(\frac{289}{240}\right)^2 = 1+\left(\frac{161}{240}\right)^2$	$161 = 7\cdot 23$	$289 = 17^2$	$240 = 2^4\cdot 3\cdot 5$	13
$\left(\frac{3229}{2700}\right)^2 = 1+\left(\frac{1771}{2700}\right)^2$	$1771 = 7\cdot 11\cdot 23$	3229 primo	$2700 = 2^2\cdot 3^3\cdot 5^2$	14
$\left(\frac{106}{90}\right)^2 = 1+\left(\frac{56}{60}\right)^2$	$56 = 2^3\cdot 7$	$106 = 2\cdot 53$	$90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$	15

CUADRO 3. Aquí los números de la tableta Plimpton 322 han sido trasladados a base diez. Se ha agregado una cuarta columna (en color gris) con el cateto adyacente. También se han corregido los presuntos errores. Se pone en paréntesis la transliteración de las palabras con la que los babilonios designaban el cateto opuesto, la hipotenusa y el cateto adyacente.

1. Error en el 2o renglón, 3a columna, $1\cdot 60^2 + 20\cdot 60 + 25 = 4\,825$, está escrito en el original $3, 12, 1 = 11\,521$, el cual es demasiado grande. Pudo ser obvio para un experto en ternas pitagóricas.
2. Error en la 2a columna , renglón 9, dice $9, 1 = 9\cdot 60 + 1 = 541$, es primo, el único en esa columna, debe decir: $8, 1 = 8\cdot 60 + 1 = 481$ y $481 = 13\cdot 37$.
3. Renglón 13, columna 2, dice $7, 12, 1 = 7\cdot 60^2 + 12\cdot 60 + 1 = 25921 = 161^2$. Sucede que el número correcto es $161 = 2\cdot 60 + 41$, es decir, el mismo número, pero sin estar elevado al cuadrado. También debió ser obvio para alguien con experiencia, no parece ser un error de copia, ni menos de cálculo.
4. Renglón 15, 3a columna, está escrito 53 en lugar de $1\cdot 60 + 44 = 106/2$, es decir la mitad del valor correcto. Tampoco parece ser un error de copia ni de cálculo, a mi parecer.

$\frac{p}{q}$	p	q	$b = 2\,p \cdot q$	$a = p^2 - q^2$	$c = p^2 + q^2$	lugar
2.4	$2^2 \cdot 3$	5	$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$	119	169	1
2.37	2^6	3^3	$3456 = 2^7 \cdot 3^3$	3367	4825	2
2.34	$3 \cdot 5^2$	2^5	$4800 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$	4601	6649	3
2.31	5^3	$2 \cdot 3^3$	$13500 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$	12709	18541	4
2.25	3^2	2^2	$72 = 2^3 \cdot 3^2$	65	97	5
2.22	$2^2 \cdot 5$	3^2	$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	481	360	6
2.16	$2 \cdot 3^3$	5^2	$2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	2291	3541	7
2.13	2^5	$3 \cdot 5$	$960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5$	799	1249	8
2.08	5^2	$2^2 \cdot 3$	$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	481	769	9
2.025	3^4	$2^3 \cdot 5$	$6480 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$	4961	8161	10
2	$2\sqrt{3 \cdot 5}$	$\sqrt{3 \cdot 5}$	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$	45	75	11
1.92	$2^4 \cdot 3$	5^2	$2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$	1679	2929	12
1.87	$3 \cdot 5$	2^3	$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$	161	289	13
1.85	$2 \cdot 5^2$	3^3	$2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	1771	3229	14
1.8	3^2	5	$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$	56	106	15

CUADRO 4. $p > q$, $a = p^2 - q^q$, $b = 2\,p \cdot q$, $c = p^2 + q^2$ con lo que se cumple se cumple $a^2 + b^2 = c^2$.

3.3. Explicación alternativa de los "errores". Quien piense que el gremio de los matemáticos es uno de los más feroces respecto a la crítica entre colegas, debe asomarse al gremio de los asiriólogos. En particular, la tableta Plimpton 322 ha despertado enconadas discusiones y descalificaciones entre expertos. Por ejemplo, en Friberg *op. cit.* p. 434:

"El pretencioso y polémico intento de Robson en [5] *de encontrar una explicación alternativa de la tableta Plimpton 322 es tan confuso y engañoso que debe ser completamente ignorado."*

Afortunadamente, en matemáticas en los artículos científicos no hay lugar a la polémica que ocurre entre los asiriólogos quienes, dicho sea de paso, por momentos parecieran saber más de las tabletas que los mismos antiguos babilonios que las escribieron. He mencionado todo la anterior, no para "pasar el chisme" (o no solo para ello), sino por que voy a atreverme a dar una explicación alternativa de los "errores" de la tableta Plimpton 322, sin ninguna pretensión. Explicación que no he encontrado en la literatura que he consultado y a la que he llegado desde la perspectiva de un profesor con larga experiencia evaluando y elaborando exámenes y es la siguiente:

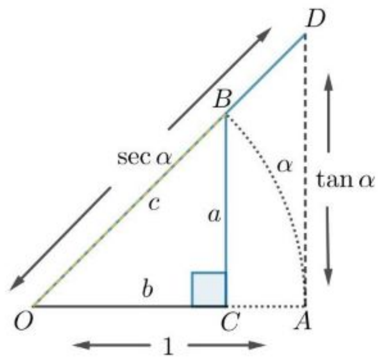

FIGURA 3. Para el caso en que $b < 1$ se muestra un triángulo rectángulo con $a = CB$ como cateto opuesto, $b = OC$ como cateto adyacente y $c = OB$ como hipotenusa. En este caso $a/b = \tan\alpha$, es el cateto opuesto del triángulo con cateto adyacente 1 e hipotenusa $c/b = \sec\alpha$. Esta figura explicaría el contenido de la tableta Plimpton 322.

Quizá los errores de la tableta Plimpton 322 son deliberados y esto es así porque la tableta es un examen.

¿Qué tipo de examen podría ser? Justamente, un examen del tipo: revise los números, diga si tienen errores y, en tal caso, escriba la forma correcta. Si este fuera el caso ¿A quién estaría dirigido?, pues supongo que podría estar dirigido a escribas a punto de obtener un alto puesto de trabajo que requiriera el uso profesional de cálculos. Si este fuera el caso, asiriólogos como Neugenbauer, quien fue el primero en publicarlos, habrían pasado el examen.

Qué puedo argumentar en favor de mi propuesta, pues precisamente mi experiencia, la cual me dice que si alguien comete errores por aburrimiento o por descuido en los cálculos, los errores cometidos estarían distribuidos a lo largo de toda la "talacha". Sin embargo en la tableta Plimpton 322 no hay errores en la primera columna, donde aparecen los cálculos más largos, como el lector puede corroborar por sí mismo. Otro asunto es la naturaleza de los errores analizados en la sección 3.2: El error (1) es tan obvio que saltaría a los ojos de un experto, al ser el número en cuestión demasiado grande cualquier verificación, lo haría inmediatamente evidente. Del error 2, me parece posible que alguien cansado y aburrido de calcular escribiera 8 en lugar de 9, pero en el sistema babilonio se distinguen muy fácilmente el número 8 del 9 a simple vista y es la primera habilidad que debería tener un experto. El tercer error es el que me parece más evidentemente fabricado, ¿por cuál causa alguien se tomaría el tiempo de elevar al cuadrado un resultado que no lo requiere? es decir, el resultado correcto se obtiene sin necesidad de elevar al cuadrado si se siguió el método que se ha sugerido en la sección 3.1. Lo mismo ocurre con el error cuarto ¿por cuál motivo alguien se tomaría el tiempo de dividir por 2 un resultado, cuando en ningún caso anterior se ha requerido tal división? Finalmente pregunto: ¿por cuáles motivos un matemático experto en aritmética conservaría una tableta con errores (tan fue conservada que llegó a nosotros 4000 años después) si no fuera por que era un buen examen para aplicar da vez en cuando y fácil de evaluar sabiendo dónde están los errores?

Lo que he afirmado en los párrafos anteriores puede tomarse un poco en broma, pero no tanto. A fin de cuentas el lector puede realizar sus propios juicios a partir del cuadro 2, el cual es una transcripción del original, si se acepta que la traducción es correcta, lo cual tampoco está libre de polémicas en cuanto al significado de las palabras ni los vacíos cubiertos por los especialistas[9].

4. Conclusiones

El impacto de la matemática de la antigua babilonia en los pueblos cercanos geográfica e históricamente es imposible de medir en su totalidad, pero su influencia es evidente en Grecia en tiempos de Thales de Mileto cuando la astronomía seleucida fue propagada por todos los pueblos cultos de Asia menor hasta llegar a Grecia y, a partir de allí, hasta nosotros. Pero la forma en que se propagó está obscurecida Por ejemplo, ¿de qué manera los esfuerzos para calcular las ternas pitagóricas de la tableta Plimpton 322 culminan en el teorema de Pitágoras como es presentado en los elementos de Euclides? Lo que es palpable, es que la aritmética del comercio originada en la antigua babilonia, cuya máxima expresión es el interés compuesto, está entre nosotros en toda las economías del mundo, para bien o para mal, así como la escritura que también es invento babilonio.

La importancia del sistema numérico sexagesimal babilonio puede apreciarse al comparar con otros sistemas coetáneos que son francamente inapropiados para operar con ellos, como el egipcio y posteriormente el sistema de numeración griego y el romano. Por ejemplo el sistema griego es tan inapropiado para representar números grandes que Arquímedes en famoso texto tuvo que inventar un sistema de representación para números grandes (tan grandes como el número de granos de arena que contendría una esfera del tamaño del universo que imaginaba Arquímedes). Sin embargo, curiosamente, entre los especialistas (por ejemplo Robson *op. cit.*) hay cierta tendencia a desvalorar a los autores de las tabletas: "Ciertamente no siento justificado referirme a los autores y copistas de las matemáticas de la vieja babilonia como "matemáticos", con las connotaciones de creatividad y profesionalismo que esta palabra conlleva; Prefiero el más neutral "escribas".

En mi modesta opinión, solo un matemático podría dedicarse a realizar, por ejemplo, el cálculo exacto en sexagesimal de $(8\,161/6\,480)^2$ con todos los dígitos como se presentan en el renglón 10 de la tableta Plimpton 322. Pero millares de ejemplos de creatividad matemática para resolver problemas se encuentran dispersos por los museos del mundo que poseen colecciones babilónicas. Invito a que el lector juzgue por sí mismo y revise al menos los libros citados de Neugenbauer, Friberg y Gonçalves para hacerse una idea de la matemática babilonia antigua, fuera de opiniones cuestionables y juicios sumarios de "expertos" y no tan expertos.

Agradecimientos. *El autor agradece al Dr. Mario Pineda Ruelas por sus comentarios editoriales siempre en aras de mejorar el artículo.*

Referencias

[1] Friberg, J. *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Text. Manuscripts in the Schøyen Collection.* Springer Science+Business Media, LLC, 233 Spring Street, New York; NY 10013, USA. 2007.

[2] Gonçalves, C., *Mathematical Tables from Tell Harmal.* Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer International Publishing Switzerland. 2015

[3] Neugebauer, O. y Sachs, A., *Mathematical cuneiform texts.* New Haven, Conn., Pub. jointly by the American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research. 1945.

[4] O'Connor, J. J. y Robertson E. F., *An Overview of Babilonial Mathematics.* MacTutor History of Mathematics. 2000.

[5] Robson, E., *Neither Sherlok Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322.* Historia Mathematica 28 (2001), 167–206.

[6] Robson, E., *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322.* En: Anderson M, Katz V, Wilson R, eds. Sherlock Holmes in Babylon: And Other Tales of Mathematical History. Spectrum. Mathematical Association of America; 2003:14-26.

[9]Por ejemplo Neugenbauer *op. cit.* propone que el encabezado de la cuarta columna debe decir: "Su nombre".

[7] Rutman, P., *The Babylonian theorem: the mathematical journey to Pythagoras and Euclid.* Prometheus Books, Amherst, N.Y. 2010.

Gabriel López Garza

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina,

alcaldía Iztapalapa, C. P. 09340, Ciudad de México.

e-mail: gabl@xanum.uam.mx