

## DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD Y REGIONES CONDICIONANTES

LUIS RINCÓN  
EMMANUEL DELGADILLO

RESUMEN. Es evidente que todo número real  $x$  se puede escribir como el cociente  $v/u$ , para ciertos valores no únicos  $u \in (0, 1)$  y  $v \in (-1, 1)$ . Este resultado se puede extender al caso de variables aleatorias cuando se cumplen algunas hipótesis, es decir, toda variable aleatoria  $X$  con una distribución dada que satisface ciertas condiciones se puede escribir como el cociente  $V/U$ , en donde  $U \sim \text{unif}(0, 1)$  y  $V \sim \text{unif}(-1, 1)$ , excepto que la distribución de  $V/U$  se debe condicionar a que el par  $(U, V)$  tome valores en una cierta región  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ . Esta representación permite obtener simulaciones de  $X$  a través de generar valores de  $U$  y  $V$  en los intervalos indicados o en alguna extensión de ellos. Esto último es sencillo pues  $U$  y  $V$  tienen distribución uniforme. Aquellas distribuciones que permiten esta representación pueden ser caracterizadas por su región condicionante  $S$ . De esto trata el método del cociente y en este trabajo se estudian algunos detalles del procedimiento.

### 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas fundamentales en la simulación estocástica es el de obtener valores de una variable aleatoria con una distribución de probabilidad dada y utilizarlos para resolver problemas matemáticos. A estos procedimientos se les conoce con el nombre de *métodos de Monte Carlo*. En el pequeño libro de I. Sóbol [8] se puede encontrar una excelente exposición de divulgación acerca de este tema. Existen distintos métodos para generar valores de una variable aleatoria y, dado que el azar es muy difícil de construir, usualmente se parte de uno o dos valores de la distribución uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ , y mediante alguna transformación se construye un valor de la distribución objetivo.

En los textos de S. Asmussen y P. W. Glynn [1], B. D. Ripley [6], y R. Y. Rubinstein y D. P. Kroese [7], por ejemplo, pueden encontrarse exposiciones muy completas sobre los varios métodos de Monte Carlo y sus aplicaciones.

El procedimiento más sencillo para generar valores de una variable aleatoria es el *método de la función inversa*. Este procedimiento establece que si una función de distribución  $F(x)$  es invertible para valores de  $x$  tales que  $0 < F(x) < 1$ , entonces  $F^{-1}(u)$  es un valor de una variable aleatoria  $X$  con distribución  $F(x)$ , en donde  $u$  es un valor de la distribución  $\text{unif}(0, 1)$ . Como ejemplo particular, podemos tomar a la distribución exponencial,  $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ , para  $x > 0$ , en donde  $\lambda > 0$  es un parámetro. La función inversa de esta función de distribución es

$$(1) \quad F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u), \quad 0 < u < 1.$$

De esta manera si  $u$  es un valor de la distribución  $\text{unif}(0, 1)$ , entonces  $-(1/\lambda) \ln(1 - u)$  es un valor de la distribución  $\exp(\lambda)$ . Las desventajas de este método estriban en que no todas las funciones de distribución son invertibles, y aquellas que lo son podrían no contar con una expresión sencilla para su inversa.

---

2010 *Mathematics Subject Classification*. 00A72; 11K45; 65C05.

*Palabras clave*. Simulación estocástica, método del cociente, regiones condicionantes.

Otro método bastante usado para generar valores de una variable aleatoria es el así llamado *método de aceptación y rechazo*. En una de sus versiones simples, y que nos será de utilidad en este trabajo, se establece que si se desea obtener un punto al azar con distribución uniforme dentro de una cierta región  $S \subseteq (0, 1) \times (0, 1)$  de área positiva, es suficiente tomar un punto  $(u, v)$  dentro del cuadrado unitario (lo cual es sencillo) y si el punto cae dentro de la región  $S$ , se acepta el punto como válido, en caso contrario, se rechaza. De esta manera sencilla es posible obtener valores dentro de  $S$  con distribución uniforme. En la Figura 1 se muestra esta situación y la *eficiencia* del método de muestreo se define como el área de  $S$  entre el área del rectángulo que contiene a  $S$ . En este caso el rectángulo es el cuadrado unitario.

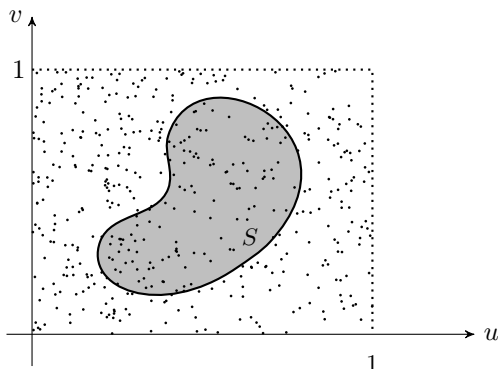


FIGURA 1. Región  $S$  dentro de  $(0, 1) \times (0, 1)$ .

Otro de tales métodos de simulación de variables aleatorias es el llamado *método del cociente* y es el que nos ocupa en el presente trabajo. Este método es válido bajo ciertas condiciones generales y hace uso del hecho interesante de que algunas variables aleatorias pueden expresarse como el cociente  $V/U$  de dos variables aleatorias  $U$  y  $V$  con distribución uniforme. No es difícil convencerse de que tal cociente puede producir cualquier número real cuando, por ejemplo,  $U \sim \text{unif}(0, 1)$  y  $V \sim \text{unif}(-1, 1)$ . Pero, ¿tendrá este cociente una distribución dada particular que uno desee? La respuesta es positiva bajo ciertas condiciones generales, las cuales se especifican en el siguiente enunciado.

TEOREMA 1. (*Método del cociente de uniformes*)

Sea  $h(x) \geq 0$  una función continua, integrable, acotada y que satisface:

- a)  $0 < \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx < \infty$ .  
 b)  $\sup_x |x| \sqrt{h(x)} < \infty$ .

Defina la región

$$(2) \quad S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < \sqrt{h(v/u)}, v/u \in \text{Soporte}(h)\}.$$

Si el vector aleatorio  $(U, V)$  tiene distribución uniforme sobre  $S$ , entonces el cociente  $V/U$  tiene función de densidad

$$(3) \quad f(x) = \frac{h(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx}.$$

Este resultado interesante fue publicado en 1977 por A. J. Kinderman y J. F. Mo-nahan [4]. La demostración no es complicada y hace uso de la fórmula para la función de densidad del cociente entre dos variables aleatorias. Pueden encontrarse los detalles de la demostración en [2], por ejemplo. En la demostración se verifica que la condición

(b) del enunciado garantiza que la región  $S$  es acotada, de modo que  $S$  puede ser encerrada en un rectángulo de área finita. En consecuencia, una distribución uniforme sobre  $S$  puede ser definida.

En resumen, el método del cociente asegura que si se toma  $(u, v) \in S$  con distribución uniforme, entonces  $v/u$  es un valor de  $X$ . Debido a que este teorema es la base de nuestro estudio, mantendremos la notación  $h(x)$  para una función que cumpla las condiciones anteriores, incluyendo el caso cuando  $h(x)$ , de inicio, es una función de densidad. La aplicación del teorema se ilustra mejor con algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.** (Distribución exponencial)

Esta distribución es importante, tanto desde el punto de vista teórico, como práctico. Se ha utilizado para modelar tiempos de espera. La función de densidad de la distribución  $\exp(\lambda)$  es

$$h(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 < x < \infty,$$

en donde  $\lambda > 0$  es un parámetro. En la expresión (1) hemos indicado que el método de la función inversa proporciona una manera muy efectiva para obtener valores de una variable con esta distribución. Sin embargo, a manera de ejemplo ilustrativo, determinaremos la región  $S$  que genera la expresión (2) para el caso exponencial.

No es difícil comprobar que se cumplen las condiciones del Teorema 1 para esta distribución. Tampoco es muy complicado encontrar la especificación de la región  $S$  asociada a la distribución  $\exp(\lambda)$ , para cualquier valor del parámetro  $\lambda > 0$ , sin embargo, para simplificar los cálculos, supondremos por ahora que  $\lambda = 1$ . Después de un análisis cuidadoso, se puede comprobar que la región  $S$  especificada en (2) puede expresarse de la siguiente manera:

$$S = \{(u, v) : 0 < u < 1, \quad 0 < v < -2u \ln u\}.$$

Esta región se encuentra contenida en el cuadrado  $(0, 1) \times (0, 1)$  del plano  $uv$  y se muestra en la Figura 2. Puede comprobarse que su área es  $|S| = 1/2$ . Así, la eficiencia del proceso de muestreo definida como el área de  $S$  entre el área del cuadrado es  $1/2$ , es decir, en promedio uno de cada dos puntos generados será útil. Es evidente que se puede mejorar la eficiencia tomando la coordenada  $v$  en el intervalo  $(0, m)$ , en donde  $m$  es la segunda coordenada del punto máximo en la región  $S$ , véase la Figura 2. En este caso, puede comprobarse que  $m = 2/e$  y la eficiencia se incrementa a  $(1/2)/(2/e) \approx 0.67$ .

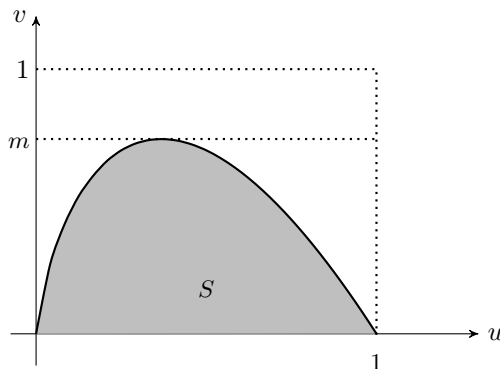


FIGURA 2. Región condicionante  $S$  para la distribución  $\exp(1)$ .

Si  $u$  y  $v$  son dos valores generados de manera independiente de la distribución  $\text{unif}(0, 1)$ , entonces se acepta el valor  $v/u$  como un valor de  $X$  con distribución  $\exp(1)$

sólo cuando  $(u, v) \in S$ . Una vez obtenido un valor aceptado, se puede usar el resultado que establece que si  $X$  tiene distribución  $\exp(1)$ , entonces  $X/\lambda$  tiene distribución  $\exp(\lambda)$ , es decir, multiplicar un valor exitoso de  $X$  por  $1/\lambda$  produce un valor de la distribución  $\exp(\lambda)$ . En la Sección 6 estudiaremos la forma en la que cambia la región  $S$  de una distribución cuando a la variable aleatoria se le aplica una transformación lineal. De esta manera pueden encontrarse las distintas regiones  $S$  de cada elemento de la familia parametral  $\exp(\lambda)$ . Véase la Figura 9 que aparece más adelante.

Usando el procedimiento descrito líneas arriba, pueden generarse múltiples valores  $x_1, \dots, x_n$  de la distribución  $\exp(1)$ , y al elaborar un histograma se encontrará aproximadamente la gráfica conocida de esta función de densidad. Esto sería una comprobación empírica de que el método funciona.

### Ejemplo 2. (Distribución normal)

Esta es, posiblemente, la distribución de probabilidad más importante. La función de densidad de la distribución  $N(\mu, \sigma^2)$  es

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

en donde  $\mu$  y  $\sigma^2 > 0$  son dos parámetros. La curva que dibuja esta función es la famosa campana de Gauss centrada en el parámetro  $\mu$ , que es la media de la distribución, y el contorno de la campana lo determina el segundo parámetro,  $\sigma^2$ , que resulta ser la varianza. Cuando  $\sigma^2$  es grande la campana es amplia, mientras que para  $\sigma^2$  pequeña la campana es delgada. Al caso  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$  se le denomina distribución *normal estándar*.

Dada la importancia y el amplio uso de la distribución normal, se han propuesto varios métodos para generar sus valores. Uno de tales métodos surge, precisamente, del método del cociente. No es difícil comprobar que se cumplen las condiciones del Teorema 1 para esta distribución. Por ahora aplicaremos este teorema al caso  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ , y omitiremos la constante  $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$  que aparece antes de la exponencial en (4), es decir, tomaremos la función simplificada

$$(5) \quad h(x) = e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Esta no es una función de densidad pero nos servirá para aplicar el Teorema 1 y obtener un mecanismo para generar valores de la densidad normal estándar. Después de algunos cálculos sencillos, se puede comprobar que la región  $S$  especificada en (2) para la función  $h(x)$  toma la siguiente forma:

$$S = \{(u, v) : 0 < u < 1, \quad 0 < v^2 < -4u^2 \ln u\}.$$

Esta región se encuentra contenida en el rectángulo  $(0, 1) \times (-1, 1)$  del plano  $uv$  y se muestra en la Figura 3. Puede comprobarse que su área es  $|S| = \sqrt{2\pi}/2 \approx 1.25$ .

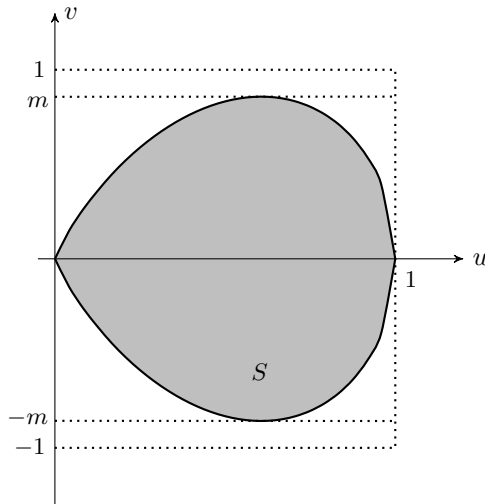


FIGURA 3. Región condicionante  $S$  para la función  $h(x) = e^{-x^2/2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ .

Si  $u$  y  $v$  son dos valores generados de manera independiente de las distribuciones  $\text{unif}(0, 1)$  y  $\text{unif}(-1, 1)$ , respectivamente, entonces se acepta el valor  $v/u$  como un valor de  $X$  con distribución  $N(0, 1)$  sólo cuando  $(u, v) \in S$ . En este caso, la región condicionante  $S$  está contenida en el rectángulo  $(0, 1) \times (-1, 1)$  y la eficiencia del proceso de muestreo es  $|S|/2 = \sqrt{2\pi}/4 \approx 0.62$ . Se puede mejorar la eficiencia tomando la coordenada  $v$  en el intervalo  $(0, m)$ , en donde  $m$  es la segunda coordenada del punto máximo en la región  $S$ , véase la Figura 3. En este caso, puede comprobarse que  $m = \sqrt{2}e^{-1/2} \approx 0.857$  y la eficiencia se incrementa ligeramente a  $(\sqrt{2\pi}/2)/(2m) \approx 0.730$ .

Una vez obtenido un valor aceptado, se puede usar el resultado que establece que si  $X$  tiene distribución  $N(0, 1)$ , entonces  $\mu + \sigma X$  tiene distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ , es decir, esta transformación lineal de un valor exitoso de  $X$  produce un valor de la distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ . Reiteramos que en la Sección 6 estudiaremos la forma en la que cambia la región  $S$  de una distribución cuando a la variable aleatoria se le aplica una transformación lineal como la indicada. De esta manera pueden encontrarse las regiones  $S$  de la familia parametral  $N(\mu, \sigma^2)$ . Véase la Figura 11.

Desde un punto de vista experimental, pueden generarse múltiples valores  $x_1, \dots, x_n$  de la distribución  $N(0, 1)$  usando el procedimiento descrito líneas arriba y al elaborar un histograma se encontrará aproximadamente la gráfica de esta función de densidad. Se puede también aplicar la transformación lineal indicada en el párrafo anterior a cada uno de los datos y el histograma correspondiente será una aproximación de la densidad  $N(\mu, \sigma^2)$ .

En la Figura 4 se muestran las regiones condicionantes de varias distribuciones de probabilidad. El área de cada una de ellas es  $|S| = 1/2$ .

- Distribución  $\text{unif}(a, b)$ . Se muestra el caso  $0 < a < b$ .
- Distribución mezcla de las distribuciones  $\text{unif}(a, b)$  y  $\text{unif}(c, d)$ . Se muestra el caso  $0 < a < b < c < d$ .
- Distribución Cauchy estándar, cuya función de densidad, para  $-\infty < x < \infty$ , es  $h(x) = (1/\pi)(1/(1+x^2))$ .
- Distribución doble exponencial, cuya función de densidad es  $h(x) = (1/2)\lambda e^{-\lambda|x|}$ , para  $-\infty < x < \infty$ . Se muestra el caso  $\lambda = 1$ .

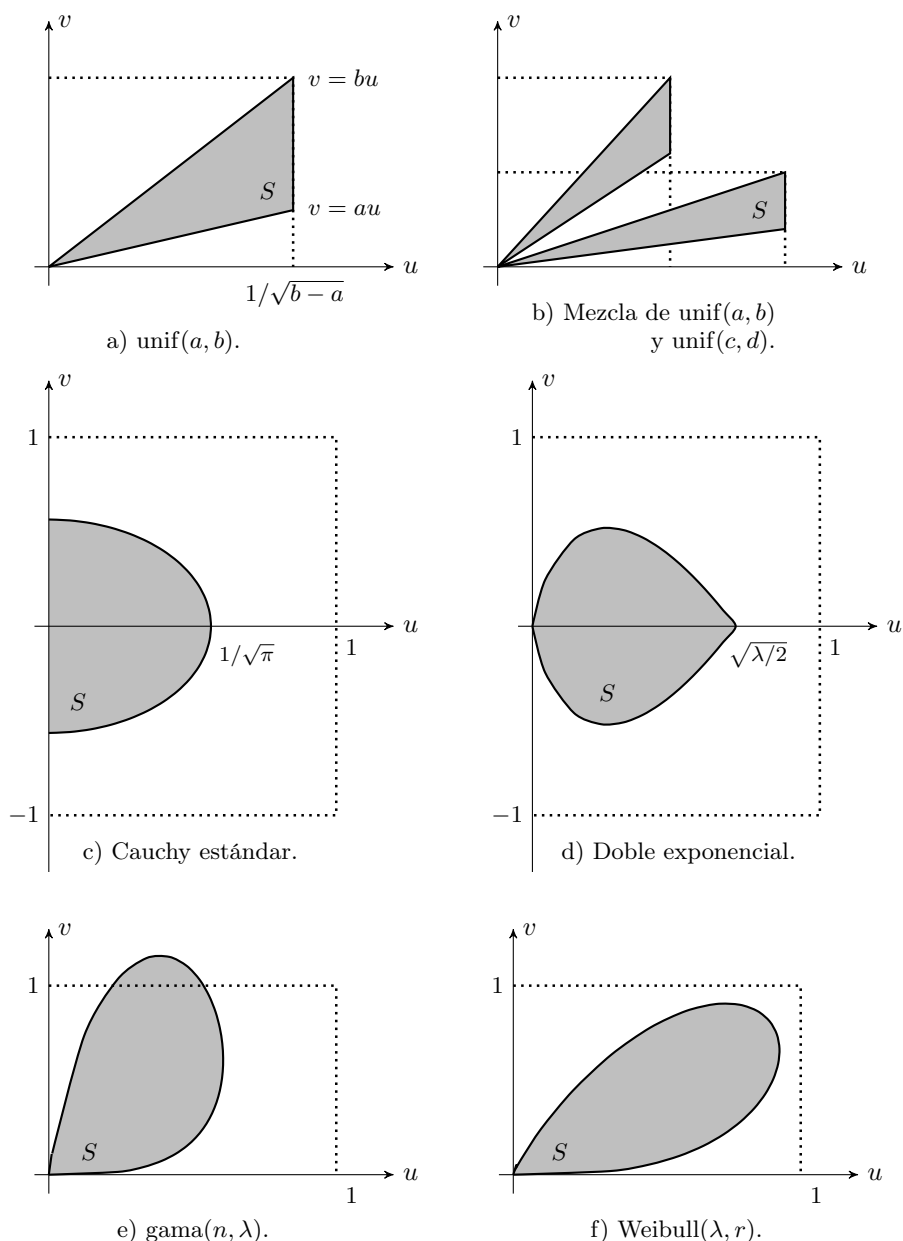


FIGURA 4. Regiones condicionantes de algunas distribuciones.

- e) Distribución  $\text{gama}(n, \lambda)$ , cuya función de densidad es  $h(x) = (\lambda x)^{n-1} / (n-1)! \lambda e^{-\lambda x}$ , para  $0 < x < \infty$ . Se muestra el caso  $n = 2$  y  $\lambda = 1$ .
- f) Distribución  $\text{Weibull}(\lambda, r)$ , cuya función de densidad es  $h(x) = \lambda r x^{r-1} e^{-\lambda x^r}$ , para  $0 < x < \infty$ . Se muestra el caso  $\lambda = 1$  y  $r = 2$ .

## 2. EXPERIMENTACIÓN EN COMPUTADORA

Es claro que surge de inmediato el interés por determinar y mostrar gráficamente la región  $S$  para las distintas distribuciones de probabilidad continuas univariadas que satisfacen las condiciones del Teorema 1. Dada una de tales funciones de densidad, no es muy complicado determinar analíticamente la región  $S$  a partir de su especificación (2) en coordenadas cartesianas, o bien, su representación en coordenadas

polares (11), la cual veremos un poco más adelante.

Alternativamente, puede utilizarse un procedimiento computacional sencillo para mostrar gráficamente una región  $S$ . La idea es crear una malla de puntos  $(u, v)$  dentro del rectángulo  $(0, 1) \times (-1, 1)$ , por ejemplo, la malla puede ser  $\{0.1, \dots, 0.9\} \times \{-0.9, \dots, 0.9\}$ . Para cada uno de estos puntos se verifica si se satisface la condición que aparece en (2). Si la condición se cumple se marca el punto en el plano cartesiano, en caso contrario, se omite. El rectángulo indicado puede ampliarse dependiendo de la función  $h(x)$  considerada. La precisión de la malla también puede incrementarse sin que los cálculos presenten una demanda extrema de procesamiento para una computadora actual.

Hemos hecho este experimento numérico en el paquete estadístico R y se han encontrado regiones como las que se muestran en la Figura 5 para las distribuciones exponencial y normal. Como era de esperarse, estas regiones son una versión discreta de las presentadas antes en las Figuras 2 y 3.

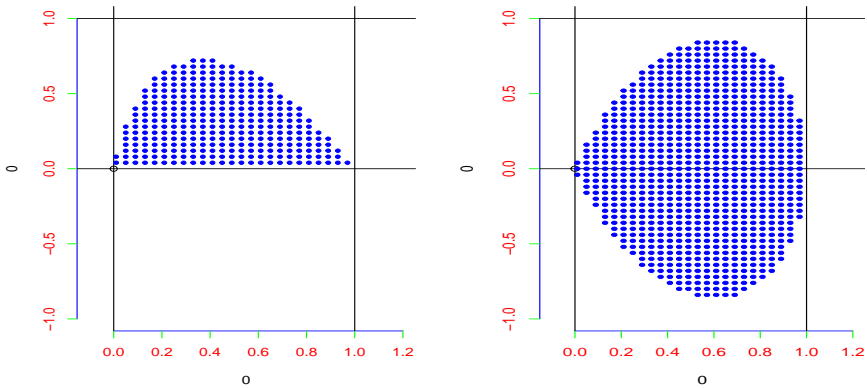


FIGURA 5. Regiones condicionantes  $S$  para la distribución  $\exp(1)$  y la función  $h(x) = e^{-x^2/2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ , obtenidas por experimentación en computadora.

### 3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Supongamos que  $X$  una variable aleatoria con función de densidad  $h(x)/\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx$ , que satisface las condiciones del Teorema 1 y con región asociada  $S$  contenida en un rectángulo  $(0, a) \times (b, c)$  y con área  $|S|$ . Sea  $(U, V)$  un vector con distribución uniforme en  $(0, a) \times (b, c)$ . Entonces, el evento  $((U, V) \in S)$  tiene probabilidad igual al área favorable entre el área total, es decir,

$$(6) \quad P((U, V) \in S) = \frac{|S|}{a(c-b)}.$$

Por otro lado, para cada número real  $x$ , defina el evento  $S_x = (V \leq xU, (U, V) \in S)$ , cuya probabilidad es

$$(7) \quad P((U, V) \in S_x) = \frac{|S_x|}{a(c-b)}.$$

Por el Teorema 1, la variable  $X$  se puede expresar como el cociente  $V/U$  siempre y cuando  $(U, V) \in S$ . Es decir, la distribución de  $X$  coincide con la distribución condicional de  $V/U$  dado el evento  $((U, V) \in S)$ . Por lo tanto, la función de distribución

de  $X$  se puede calcular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= P(X \leq x) \\
 &= P(V/U \leq x \mid (U, V) \in S) \\
 &= P(V \leq xU \mid (U, V) \in S) \\
 &= \frac{P((U, V) \in S_x)}{P((U, V) \in S)} \\
 (8) \qquad &= \frac{|S_x|}{|S|}, \quad -\infty < x < \infty.
 \end{aligned}$$

Esta expresión significa que la función de distribución evaluada en  $x$  es el área relativa de la región que se encuentra bajo el rayo  $v = xu$ , en el plano  $uv$ , respecto del área de la región completa. Claramente, el valor  $x$  (positivo, negativo o cero) representa la pendiente de la recta  $v = xu$ . Al recorrer los valores de la pendiente  $x$ , se obtienen los distintos valores de la función de distribución.

A continuación se muestra la aplicación de la fórmula (8) para los casos de las distribuciones exponencial y normal.

**Ejemplo 3.** Para la distribución  $\exp(1)$ , se ha indicado que  $|S| = 1/2$ , de modo que (8) se reduce a

$$(9) \qquad F(x) = 2|S_x|,$$

Para  $x = 0$  (rayo horizontal o pendiente cero) o para  $x < 0$  (pendiente negativa), el valor del área  $|S_x|$  es cero pues no hay intersección el rayo con la región  $S$ . Véase la Figura 6. Conforme la pendiente  $x$  crece tomando valores positivos, el área se incrementa y sólo cuando  $x \rightarrow \infty$  (rayo vertical o pendiente infinita positiva) se alcanza la probabilidad máxima 1.

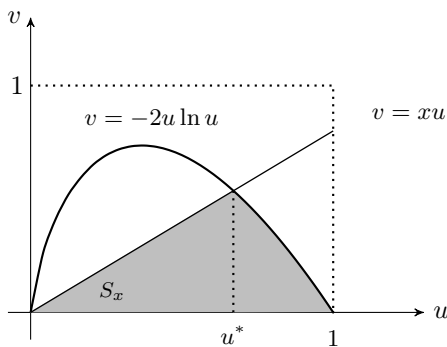


FIGURA 6. Probabilidad  $F(x) = P(X \leq x) = 2|S_x|$  para la distribución  $\exp(1)$ .

El área de la región sombreada en la Figura 6 puede encontrarse observando que la recta y la curva se intersectan cuando  $u^* = e^{-x/2}$ . Después de algunos cálculos se encuentra que la expresión (9) produce la fórmula conocida para la función de distribución  $\exp(1)$ , es decir, para  $x > 0$ ,

$$F(x) = 2 \int_0^{u^*} xu \, du + 2 \int_{u^*}^1 -2u \ln u \, du = 1 - e^{-x}.$$

Todos los valores o pendientes  $x > 0$  son tales que producen una probabilidad positiva en (9). En efecto, puede comprobarse que la pendiente de la curva en  $u = 0$  es infinita, es decir,

$$\lim_{u \searrow 0} \frac{d}{du} -2u \ln u = \infty.$$



Esto comprueba que, como se esperaba, el soporte de la distribución es  $(0, \infty)$ .

**Ejemplo 4.** Para la distribución  $N(0, 1)$  y considerando  $h(x) = e^{-x^2/2}$ , se ha señalado que  $|S| = \sqrt{2\pi}/2$ , de modo que (8) se reduce a

$$(10) \quad F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} |S_x|.$$

La región correspondiente a (10) se muestra en la Figura 7 en el caso  $x > 0$ . El contorno de la región completa está dada por la ecuación  $v^2 = -2u^2 \ln u^2$ , para  $0 < u < 1$ . Para cualquier valor de  $x$ , el rayo  $v = xu$  siempre intersecta a la región  $S$ , de modo que la probabilidad asociada siempre es positiva. Conforme la pendiente  $x$  crece, el área se incrementa y sólo cuando  $x \rightarrow \infty$  (rayo vertical o pendiente infinita positiva) se alcanza la probabilidad máxima 1.

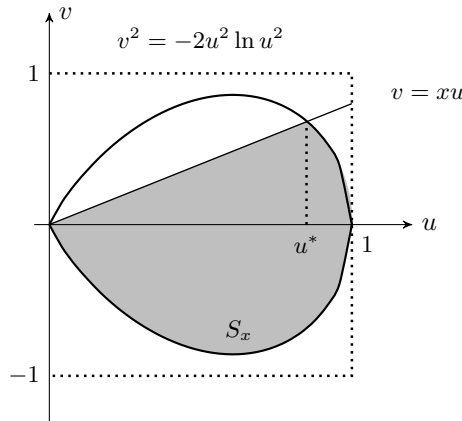


FIGURA 7. Probabilidad  $F(x) = P(X \leq x) = (2/\sqrt{2\pi}) |S_x|$  para la distribución  $N(0, 1)$ .

En la situación que se muestra en la Figura 7, puede comprobarse que la intersección de la recta con pendiente  $x > 0$  y la frontera superior de la región  $S$  ocurre en el punto  $(u^*, v^*) = (e^{-x^2/4}, xe^{-x^2/4})$ . Se puede seccionar la región  $S_x$  en las tres partes sugeridas en la Figura 7. Calculando el área de estas tres partes se encuentra que la función de distribución en  $x$  es

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{u^* \cdot xu^*}{2} + \int_{x^*}^1 \sqrt{-2u^2 \ln u^2} du \right], \quad x > 0.$$

En la integral se aplica el cambio de variable  $v = e^{-u^2/4}$  y después se usa el método de integración por partes para corroborar que

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Se puede comprobar también que la pendiente de la curva en  $u = 0$  es, en valor absoluto, infinita, es decir,

$$\lim_{u \searrow 0} \frac{d}{du} \sqrt{-2u^2 \ln u^2} = \infty.$$

Este resultado no es evidente en la gráfica de la Figura 7, pero ocurre. Indica que el soporte de la distribución es  $(-\infty, \infty)$ .

## 4. FUNCIONES RADIALES Y ÁREAS

En algunas ocasiones puede ser conveniente expresar la región condicionante  $S$  asociada a una función  $h(x)$  en coordenadas polares. Estamos suponiendo que  $h(x)$  satisface las condiciones del Teorema 1. Haciendo el cambio de variable  $(u, v) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  se encuentra que la condición que aparece en la definición de  $S$  se puede escribir como

$$0 < u < \sqrt{h(v/u)} \iff 0 < r \cos \theta < \sqrt{h(\tan \theta)}.$$

Como la región  $S$  se encuentra siempre en el semiplano  $u > 0$ , el ángulo  $\theta$  se restringe al intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ . De esta manera, la región  $S$  del Teorema 1 se puede expresar en coordenadas polares como

$$(11) \quad S = \left\{ (r, \theta) : \theta \in (-\pi/2, \pi/2), 0 < r < \frac{\sqrt{h(\tan \theta)}}{\cos \theta} \right\}.$$

En realidad los posibles valores del ángulo  $\theta$  son aquellos tales que el valor  $x = \tan \theta$  es un elemento del soporte de la función  $h$ . Para tales valores  $\theta$  se tendrá que la función radial o curva polar  $\rho(\theta)$  que se define a continuación es positiva,

$$(12) \quad \rho(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{h(\tan \theta)}, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Esta es otra representación de las regiones condicionantes que surgen en el método del cociente. Es conocido, ver [9], que el área que encierra esta curva está dada por

$$(13) \quad |S| = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2(\theta) d\theta.$$

**PROPOSICIÓN 2.** *Sea  $h(x)$  una función como en el Teorema 1 y sea  $\rho(\theta)$  la función radial de la región condicionante definida en (12). Entonces la siguiente función es de densidad,*

$$\theta \mapsto \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx} \rho^2(\theta), \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

*Demostración.* Sea  $X$  con función de densidad  $f(x) = h(x) / \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx$ . Por el teorema de cambio de variable, la función de densidad de  $Y = \arctan(X)$  es

$$\begin{aligned} f_Y(\theta) &= \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx} h(\tan \theta) \left| \frac{d}{d\theta} \tan \theta \right| \\ &= \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx} \frac{1}{\cos^2 \theta} h(\tan \theta) \\ &= \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx} \rho^2(\theta), \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2. \end{aligned}$$

□

Usando este último resultado y la ecuación (13), se obtiene que

$$(14) \quad |S| = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx.$$

Por supuesto, si  $h(x)$  es de inicio una función de densidad, se concluye que la función radial al cuadrado es una función de densidad sobre el conjunto de ángulos  $(-\pi/2, \pi/2)$  y que  $|S| = 1/2$ . Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 5.** (Distribución exponencial con  $\lambda = 1$ )

El soporte de esta distribución es el conjunto de valores  $x$  (pendientes de las rectas  $v = xu$ ) que son positivos, es decir,  $0 < \tan \theta < \infty$ . Esto significa que  $0 < \theta < \pi/2$  y la función radial que delimita la región  $S$  que se muestra en la Figura 2 es

$$(15) \quad \rho(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \tan \theta \right\}, \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

Si se grafica esta curva polar, se obtiene el contorno de la región condicionante  $S$  de la Figura 2. Usando (13), se corrobora que  $|S| = 1/2$ .

**Ejemplo 6.** (Distribución normal estándar considerando  $h(x) = e^{-x^2/2}$ )

En este caso el soporte de la distribución es el conjunto de todos los valores  $x$  (pendientes de las rectas  $v = xu$ ) sin ninguna restricción, es decir, los ángulos  $\theta$  son tales que  $-\infty < \tan \theta < \infty$ . Esto significa que  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  y la función radial que delimita la región  $S$  que se muestra en la Figura 3, tomando a  $h(x)$  como en (5), es

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \tan^2 \theta \right\}, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Como es de esperarse, la gráfica de esta curva polar es el contorno de la región condicionante  $S$  que se muestra en la Figura 3. Se tiene que  $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = \sqrt{2\pi}$  y, por (14), el área de  $S$  es

$$|S| = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}.$$

Finalmente, a partir de la función radial (12), las coordenadas cartesianas  $(u, v)$  del contorno de la región  $S$  pueden parametrizarse por  $x = \tan \theta$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u &= \rho(\theta) \cos \theta = \sqrt{h(\tan \theta)} = \sqrt{h(x)}, \\ v &= \rho(\theta) \sin \theta = \tan \theta \sqrt{h(\tan \theta)} = x \sqrt{h(x)}, \end{aligned}$$

en donde  $x$  es cualquier valor en el soporte de la función  $h$ .

### 5. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD Y SUS REGIONES CONDICIONANTES

Es evidente que toda función  $h(x)$  que satisfaga las condiciones del Teorema 1 determina de manera única una región acotada  $S$  definida en (2), y cuyo contorno está delimitado por la función radial  $\rho(\theta)$  definida en (12). El siguiente resultado establece condiciones sobre una función radial  $r(\theta)$  de una región de la forma

$$(16) \quad S = \{(r, \theta) : \theta \in (-\pi/2, \pi/2), 0 < r < r(\theta)\},$$

de tal manera que corresponda a la región de una función  $h(x)$  que satisfaga las condiciones del Teorema 1. De esta manera se tiene una correspondencia biunívoca entre las funciones  $h(x)$  y las regiones  $S$  definidas en (2) ó (11).

**PROPOSICIÓN 3.** (*Caracterización de una función radial*)

Sea  $r(\theta) \geq 0$  una función continua, acotada, definida sobre  $A \subseteq (-\pi/2, \pi/2)$ , y tal que su cuadrado integra 1. Entonces la función  $h(x)$  especificada abajo es de densidad, satisface las condiciones del Teorema 1 y su región condicionante  $S$  es de la forma (16),

$$(17) \quad h(x) := \frac{r^2(\arctan x)}{1 + x^2} \mathbb{1}_A(\arctan x), \quad -\infty < x < \infty.$$

*Demostración.* La función  $h(x)$  definida en (17) es no negativa, acotada y es continua en aquellos valores  $x$  en donde  $\arctan(x) \in A$ . Haciendo el cambio de variable  $x = \tan \theta$ , se comprueba que su integral es finita pues

$$\begin{aligned} 0 < \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(\tan(\theta)) (1 + \tan^2(\theta)) \mathbb{1}_A(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2(\theta) \mathbb{1}_A(\theta) d\theta \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Además, esta función es tal que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x| \sqrt{h(x)} &= \sup_{-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2} |\tan \theta| \sqrt{h(\tan \theta)} \\ &= \sup_{-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2} |\sen(\theta)| r(\theta) < \infty. \end{aligned}$$

Esto comprueba que  $h(x)$  satisface las condiciones del Teorema 1. Sea  $\rho(\theta)$  su función radial de acuerdo a la definición que aparece en la ecuación (12). Haciendo el cambio a coordenadas polares, la condición que define a la región condicionante  $S$  asociada a  $h(x)$  es de la forma (16) pues

$$\begin{aligned} 0 < u < \sqrt{h(v/u)} &\iff 0 < r \cos \theta < \sqrt{h(\tan \theta)} \\ &\iff 0 < r < \rho(\theta). \end{aligned}$$

□

De esta manera, cada función radial  $r(\theta)$  que cumpla las condiciones de la proposición anterior, determina el contorno de una región condicionante  $S$  asociada a la función  $h(x)$  definida en (17). Cuando  $r^2(\theta)$  integra 1, la función  $h(x)$  es una función de densidad.

No es difícil darse cuenta que pueden existir otras regiones  $S$  en el plano cartesiano tales que su intersección con los semiplanos  $\{(u, v) : u > 0, v < xu\}$ , para  $-\infty < x < \infty$ , coincidan con los distintos valores de una función de distribución dada  $F(x)$ . Sin embargo la caracterización de los contornos de las regiones condicionantes como curvas polares con las condiciones de la Proposición 3 hacen que dichas representaciones sean únicas.

## 6. TRANSFORMACIONES

Nos interesa descubrir lo que ocurre con la región condicionante  $S$  asociada a una variable aleatoria continua  $X$ , con función de densidad  $h_X(x)$ , cuando se le aplica una transformación que cumple ciertas condiciones. Al conjunto de valores que  $X$  puede tomar lo denotaremos por  $\text{Rango}(X)$ . Si  $\varphi(x) : \text{Rango}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  es una transformación continua, estrictamente creciente o decreciente y con inversa diferenciable, entonces la función de densidad de  $Y = \varphi(X)$  es

$$h_Y(y) = h_X(\varphi^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} \varphi^{-1}(y) \right|, \quad y \in \text{Rango}(\varphi(X)).$$

Este resultado es bien conocido en la teoría de la probabilidad y se puede encontrar, por ejemplo, en el texto de A. Gut [3]. Supondremos que  $\varphi$  es tal que  $h_Y(y)$  también satisface las condiciones del Teorema 1. Usando esta función de densidad se puede escribir la expresión para la región condicionante  $S_Y$  a partir de su especificación (2), sin embargo, no escribiremos tal expresión general pues no nos será de utilidad por ahora. De la misma forma, puede escribirse la función radial  $\rho_Y(\theta)$  a partir de (12), pero tampoco escribiremos tal expresión general. En contraste, en la siguiente subsección estudiaremos el caso simple cuando la transformación  $\varphi(x)$  es lineal.

**Transformación lineal.** Para la transformación  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$ , en donde  $\mathbf{a} \neq 0$  y  $\mathbf{b}$  son dos constantes, puede comprobarse que la función de densidad de  $Y$  es

$$h_Y(y) = \frac{1}{|\mathbf{a}|} h_X((y - \mathbf{b})/\mathbf{a}), \quad -\infty < y < \infty.$$

Si  $h_X(x)$  satisface las condiciones del Teorema 1, entonces también  $h_Y(x)$  cumple las condiciones y la región condicionante  $S_Y$  asociada a  $h_Y(x)$ , según la especificación (2), es

$$(18) \quad S_Y = \{(u, v) : 0 < u < \sqrt{\frac{1}{|\mathbf{a}|} h_X((v/u - \mathbf{b})/\mathbf{a})}, (v/u - \mathbf{b})/\mathbf{a} \in \text{Soporte}(h_X)\}.$$

Debe observarse que  $|S_X| = |S_Y| = 1/2$  para cualesquiera valores de  $\mathbf{a} \neq 0$  y  $\mathbf{b}$ .

En coordenadas polares, si  $\rho_X(\theta)$  es la función radial asociada a la región condicionante  $S$  de una variable aleatoria  $X$ , entonces la función radial de  $Y$  es

$$(19) \quad \rho_Y(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\frac{1}{|\mathbf{a}|} h_X((\tan \theta - \mathbf{b})/\mathbf{a})}.$$

**Ejemplo 7.** (Distribución exponencial)

Sea  $X$  con distribución  $\exp(1)$ , es decir, su función de densidad es  $h(x) = e^{-x}$ ,  $0 < x < \infty$ . Recordemos que la región condicionante asociada es

$$S_X = \{(u, v) : 0 < u < 1, \quad 0 < v < -2u \ln u\},$$

con área  $|S_X| = 1/2$ . Usando la expresión (18) y después de algunos cálculos, puede comprobarse que la región condicionante asociada a la variable  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$ , con  $\mathbf{a} > 0$ , es

$$S_Y = \{(u, v) : 0 < u < 1/\sqrt{|\mathbf{a}|}, \quad 0 < v < ub - 2\mathbf{a}u \ln(\sqrt{|\mathbf{a}|} u)\},$$

cuya área también es  $|S_Y| = 1/2$ . En la Figura 8 se muestran los efectos de la transformación lineal de esta región en dos casos:  $\mathbf{a} = 2, \mathbf{b} = 0$  (gráfica de la izquierda), y  $\mathbf{a} = 1, \mathbf{b} = -1/2$  (gráfica de la derecha). En el primer caso, la región se alarga verticalmente y se reduce su base en el eje horizontal. Si  $\mathbf{a}$  es menor a 1, la región se acorta verticalmente y se amplía su base en el eje horizontal. Véase también la Figura 9. Cuando se toman valores negativos de  $\mathbf{a}$ , la región se refleja respecto del eje horizontal. En el segundo caso mostrado, la región y su base sufren una especie de estiramiento hacia abajo. Este movimiento no es una rotación. Si  $\mathbf{b}$  es positivo, la región y su base sufren un estiramiento hacia arriba. En el caso de una combinación lineal arbitraria ( $\mathbf{a} \neq 0$ ), la región resultante es una combinación de las dos deformaciones anteriores.

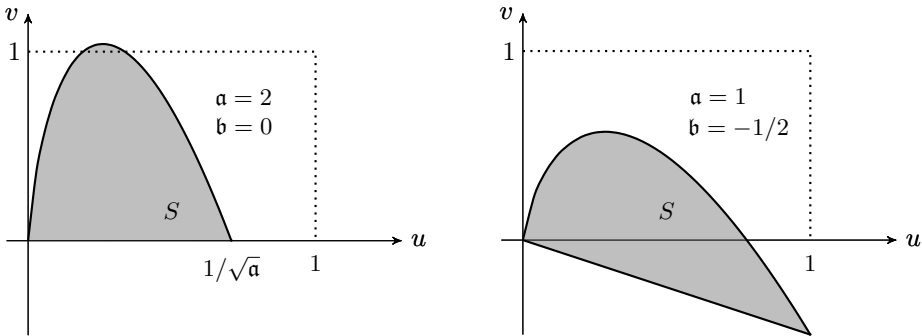


FIGURA 8. Dos regiones condicionantes  $S$  para  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$  con  $X \sim \exp(1)$ .

En particular, tomando  $\mathbf{a} = 1/\lambda > 0$  y  $\mathbf{b} = 0$ , sabemos que la variable  $Y = X/\lambda$  tiene distribución  $\exp(\lambda)$ . La región  $S_Y$  toma la forma

$$S_{X/\lambda} = \{(u, v) : 0 < u < \sqrt{\lambda}, \quad 0 < v < -2 \frac{u}{\lambda} \ln \frac{u}{\sqrt{\lambda}}\}.$$

Esta familia de regiones condicionantes se muestra en la Figura 9 para tres valores de  $\lambda$ . Cada una de estas regiones está asociada a una distribución  $\exp(\lambda)$ . Cuando  $\lambda$  es pequeña, la región es alargada hacia arriba, mientras que, cuando  $\lambda$  es grande, la región se alarga horizontalmente.

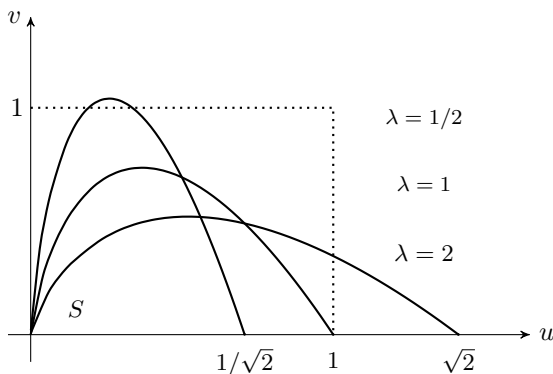


FIGURA 9. Regiones condicionantes  $S$  de la familia parametral  $\exp(\lambda)$ .

Observe que las regiones condicionantes  $S$  de la Figura 8, y las de la Figura 9, pueden no estar contenidas en el cuadrado unitario, de modo que para generar puntos al azar con distribución uniforme sobre ellas, según el método del cociente, es necesario considerar rectángulos adecuados que las contengan. Observe también que el área de las regiones de las Figuras 8 y Figuras 9 es siempre  $1/2$ .

Por otro lado, usando (19) puede comprobarse que la función radial asociada a la variable  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$  es

$$\rho_{\mathbf{a}X+\mathbf{b}}(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{a}|}} \exp\{-(\tan \theta - \mathbf{b})/2\mathbf{a}\}, \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

En particular, para  $\mathbf{a} = 1/\lambda > 0$  y  $\mathbf{b} = 0$ ,

$$\rho_{X/\lambda}(\theta) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\cos \theta} \exp\{-\frac{\lambda}{2} \tan \theta\}, \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

Esta es la función radial de las regiones condicionantes de la familia  $\exp(\lambda)$  que se muestran en la Figura 9. Cuando  $\lambda = 1$  se obtiene (15).

**Ejemplo 8.** (Distribución normal)

Sea  $X$  con distribución  $N(0, 1)$ , es decir, con función de densidad  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ . Esta vez tomaremos a  $h(x)$  como la función de densidad completa, esto es, con la constante  $1/\sqrt{2\pi}$  añadida. Puede comprobarse que la región condicionante asociada es

$$S_X = \{(u, v) : 0 < u < (2\pi)^{-1/4}, \quad 0 < v^2 < -4u^2 \ln(u(2\pi)^{1/4})\},$$

con área  $|S_X| = 1/2$ . Usando la expresión (18) y después de algunos cálculos, se puede demostrar que la región condicionante asociada a la variable  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$  es

$$S_Y = \{(u, v) : 0 < u < \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{a}|}} (2\pi)^{-1/4}, \\ u\mathbf{b} - u\sqrt{-4\mathbf{a}^2 \ln(u\sqrt{|\mathbf{a}|}(2\pi)^{1/4})} < v < u\mathbf{b} + u\sqrt{-4\mathbf{a}^2 \ln(u\sqrt{|\mathbf{a}|}(2\pi)^{1/4})}\},$$

con área  $|S_Y| = 1/2$ . En la Figura 10 se muestran los efectos de la transformación lineal de esta región en dos casos:  $\mathbf{a} = 2$ ,  $\mathbf{b} = -1$  (gráfica de la izquierda), y  $\mathbf{a} = 1$ ,  $\mathbf{b} = 2$  (gráfica de la derecha). Observe que el signo de  $\mathbf{a}$  es irrelevante en la determinación de la región  $S$ .

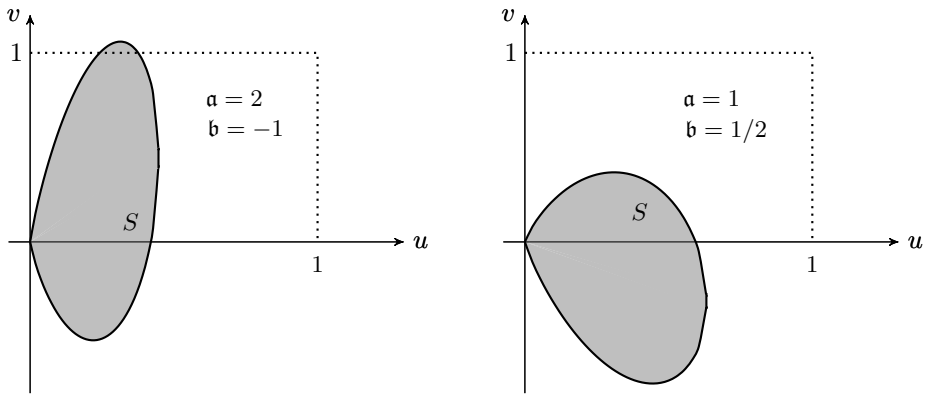


FIGURA 10. Dos regiones condicionantes  $S$  para  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$  con  $X \sim N(0, 1)$ .

En particular, tomando  $\mathbf{a} = \sigma > 0$  y  $\mathbf{b} = \mu$ , sabemos que la variable  $Y = \sigma X + \mu$  tiene distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ . La región  $S_Y$  toma la forma

$$S_{\sigma X + \mu} = \left\{ (u, v) : 0 < u < \frac{1}{\sqrt{\sigma}} (2\pi)^{-1/4}, \right. \\ \left. u\mu - u\sqrt{-4\sigma^2 \ln(u\sqrt{\sigma}(2\pi)^{1/4})} < v < u\mu + u\sqrt{-4\sigma^2 \ln(u\sqrt{\sigma}(2\pi)^{1/4})} \right\}.$$

Esta familia de regiones condicionantes se muestra en la Figura 11 para algunos valores de los parámetros. Cada una de estas regiones está asociada a una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$  y el conjunto de todas ellas caracteriza a la familia parametral  $N(\mu, \sigma^2)$ . El área de cualquiera de estas regiones es  $|S_{\sigma X + \mu}| = 1/2$ .

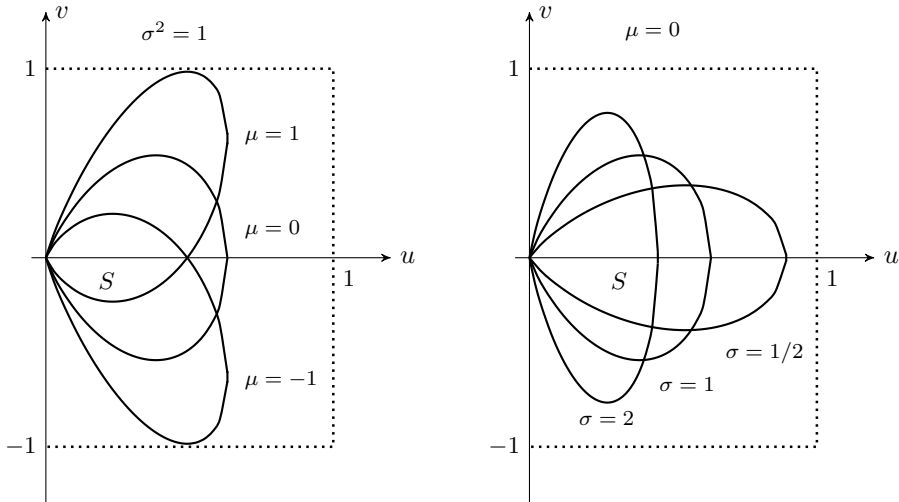


FIGURA 11. Regiones condicionantes  $S$  de la familia parametral  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Por otro lado, recordemos que la función radial de la región condicionante de una variable aleatoria  $X$  con distribución  $N(0, 1)$  es

$$\rho_X(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \tan^2 \theta \right\}, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Usando (19), se encuentra que la función radial de la región condicionante asociada a la variable  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$  es

$$\rho_{\mathbf{a}X + \mathbf{b}}(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{a}|}} \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{1}{4\mathbf{a}^2} (\tan \theta - \mathbf{b})^2 \right\}, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

En particular, para  $\mathbf{a} = \sigma > 0$  y  $\mathbf{b} = \mu$  se obtiene la expresión que aparece abajo y que corresponde a la función radial de las regiones condicionantes de la familia parametral  $N(\mu, \sigma^2)$ , ver Figura 11.

$$\rho_{\mathbf{a}X+\mathbf{b}}(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma^2} (\tan \theta - \mu)^2 \right\}, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

## 7. COMENTARIOS FINALES

Se ha ilustrado en este breve trabajo el método del cociente para generar valores de una variable aleatoria  $X$  con distribución de probabilidad que satisfice ciertas condiciones generales. Tal variable aleatoria se puede expresar como el cociente  $V/U$ , en donde el vector  $(U, V)$  tiene distribución uniforme sobre cierta región  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ , a la que hemos llamado condicionante. Esta representación es la que permite poder generar valores de la variable aleatoria objetivo. Lo que es interesante recalcar es que la región condicionante  $S$  caracteriza de manera única a la distribución de  $X$ , de modo que tales regiones son una manera geométrica de representar a las distribuciones.

Como se ha indicado, el método requiere generar puntos al azar  $(u, v)$  de manera uniforme dentro de la región acotada  $S$ . Para ello se puede encerrar tal región dentro de un rectángulo acotado, generar puntos de manera uniforme dentro de tal rectángulo y validar sólo aquellos puntos que quedan dentro de  $S$ . Esta es una aplicación del método de aceptación y rechazo. Es claro que el procedimiento de validación es más eficiente cuando se toma el rectángulo de área más pequeña que contiene a  $S$ .

Nos interesó en este trabajo mostrar el cambio que tiene una región condicionante  $S$  cuando a la variable aleatoria  $X$  se le aplica una transformación lineal. Se mostraron algunos de estos cambios y se ilustró que tal transformación puede ser útil para obtener la región condicionante de una familia paramétrica de distribuciones a partir de considerar un caso particular de los valores de los parámetros. Nuestra primera motivación en este sentido fue descubrir la región condicionante asociada a la suma de dos variables aleatorias independientes, aunque este problema parece ser más difícil de analizar y queda pendiente de resolver. Por supuesto, nuestro interés es poder demostrar algún teorema límite de la probabilidad usando esta herramienta. Por otro lado, las características numéricas y otras propiedades de las distribuciones deben poder obtenerse a través de las regiones  $S$ , sin embargo, no es claro cómo llevar a cabo tal tarea. Por ejemplo, ¿cómo se calcula  $E(X)$  ó  $\text{Var}(X)$  a partir de  $S$ ? ¿Tienen estas cantidades algún significado geométrico dentro de  $S$ ?

Finalmente, debemos mencionar que el método del cociente se puede extender sin muchas dificultades al caso de vectores aleatorios. Además, se pueden proponer algunas generalizaciones que incorporan ciertas transformaciones, ver por ejemplo, Martino L., Luengo D. y Míguez J. [5] ó Wakefield J. C., Gelfand A. E. y Smith A. F. M. [10]. Esperamos continuar el presente trabajo con otros ensayos en donde se ilustren estas extensiones y algunas mejoras del método del cociente.

**AGRADECIMIENTOS.** Los autores agradecen a los árbitros por sus valiosos comentarios y sugerencias.

## REFERENCIAS

- [1] Asmussen S. y Glynn P. W. *Stochastic simulation: algorithms and analysis*. Springer, 2007.
- [2] Devroye L. *Non-uniform random variate generation*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [3] Gut A. *Probability: a graduate course*. Springer, 2005.
- [4] Kinderman A. J. y Monahan J. F. Computer generation of random variables using the ratio of uniform deviates. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **3**, 257-260, 1977.
- [5] Martino L., Luengo D. y Míguez J. *Independent random sampling methods*. Springer, 2018.
- [6] Ripley B. D. *Stochastic simulation*. John Wiley & Sons, 1987.



- [7] Rubinstein R. Y. y Kroese D. P. *Simulation and the Monte Carlo method*. John Wiley & Sons, 2008. Second edition.
- [8] Sóbol I. M. *Método de Monte Carlo*. Lecturas Populares de Matemáticas. Mir, 1983. Segunda edición.
- [9] Stewart J., Clegg D. K. y Watson S. *Calculus*. Cengage Learning, 2020. Ninth edition.
- [10] Wakefield J. C., Gelfand A. E. y Smith A. F. M. Efficient generation of random variates via the ratio-of-uniforms method. *Stat. Comput.* **1**(2), 129-133, 1991.

*Luis Rincón*

Departamento de Matemáticas,  
Facultad de Ciencias, UNAM,  
Circuito Exterior de CU, 04510 CDMX, México.  
e-mail: [lars@ciencias.unam.mx](mailto:lars@ciencias.unam.mx)

*Emmanuel Delgadillo*

Departamento de Matemáticas,  
Facultad de Ciencias, UNAM,  
Circuito Exterior de CU, 04510 CDMX, México.  
e-mail: [edelgadillo2000@ciencias.unam.mx](mailto:edelgadillo2000@ciencias.unam.mx)