

ONDAS HIPERBÓLICAS, DISPERSIVAS Y NO LINEALES

JESÚS ADRIÁN ESPÍNOLA ROCHA

RESUMEN. En el presente trabajo se describen los elementos básicos de la teoría de la propagación de ondas lineales y no lineales. Se tratan las dos principales clases de ondas, hiperbólicas y dispersivas, y se destaca la importancia de cada una de ellas. Se estudian unos pocos ejemplos y casos de ondas no lineales, dada la gran cantidad de ondas no lineales que existen. En particular, nos enfocamos en ondas no lineales completamente integrables y solitones.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales es un área de las matemáticas la cual tiene muchas vertientes de estudio. De hecho, las ecuaciones diferenciales inicialmente surgen del intento de resolver y describir varios problemas de la física, y en los últimos años para resolver problemas de la química, de la biología, en todas las ramas de la ingeniería, en la economía y muchas otras áreas del conocimiento humano. De igual modo, las ecuaciones diferenciales pueden ser estudiadas desde el punto de vista puro y abstracto de las matemáticas. Aunque los temas que aquí se cubrirán pueden ser estudiados de forma un tanto abstracta, no es el objetivo de estas notas.

Las ecuaciones diferenciales pueden ser lineales o no lineales. Y aunque no todas las ecuaciones diferenciales lineales pueden ser resueltas exactamente, ni tampoco es conocido todo acerca de ellas, casi toda la teoría de ecuaciones diferenciales lineales está bien establecida, puesto que el principio de superposición juega un papel fundamental en ellas. Entonces, el siguiente paso en el estudio de ecuaciones diferenciales es considerar ecuaciones diferenciales no lineales. El estudio de un tipo muy particular de ecuaciones será una buena parte de estas notas: las ecuaciones diferenciales hiperbólicas no lineales y las ecuaciones diferenciales de evolución completamente integrables. “Integrables” desde un punto de vista a ser especificado, pues el concepto de “integrabilidad” no es trivial.

Ahora bien, las ecuaciones diferenciales se dividen en dos principales tipos: ordinarias y parciales. Centraremos nuestra atención principalmente a las ecuaciones diferenciales parciales. Aún cuando las ecuaciones diferenciales ordinarias describen muchos fenómenos en la naturaleza, las ecuaciones diferenciales parciales también surgen en muchas aplicaciones. Las ecuaciones diferenciales parciales es una de las herramientas principales de matemáticos y físicos para el estudio y descripción de la naturaleza. Ellas modelan, por mencionar sólo unos ejemplos, la propagación del calor, la difusión de químicos o contaminantes, el movimiento de membranas, las líneas de fluidos, campos electromagnéticos, ondas electromagnéticas, ondas en el agua, en cables y en el aire.

De igual modo, nos concentraremos específicamente en el estudio de ondas. En cursos de física o elementales de ecuaciones diferenciales parciales, nos enseñan la ecuación de onda, que es una ecuación diferencial parcial en el tiempo y el espacio, de segundo orden, la cual resulta ser *hiperbólica*. Uno puede creer que todos los fenómenos ondulatorios se describen con esta ecuación, pero no es así. Contrario a lo que pueda parecer, la mayoría de los fenómenos ondulatorios en la naturaleza no son descritos por ecuaciones de onda hiperbólicas.

2010 *Mathematics Subject Classification*. 35Q51; 37K10; 37K15; 42A38; 74J05; 76B15.

Palabras clave. Ondas lineales, ondas no lineales, ondas hiperbólicas, ondas dispersivas, transformadas de Fourier, solitones, pares de Lax, método de dispersión inversa.

Resulta que la mayoría de las ecuaciones que describen ondas son *dispersivas*. Uno de los objetivos principales de estas notas es hacer evidente el hecho de que las **ondas dispersivas** juegan un mayor papel en la descripción de ondas, al contrario de las ondas hiperbólicas. Como ejemplo particular veremos que las ecuaciones de Schrödinger y de Dirac de la teoría cuántica describen ondas dispersivas de materia.

Por lo dicho anteriormente, en la primer parte de este trabajo, que constituye las secciones 1 a la 5, se estudiarán ondas hiperbólicas y dispersivas, principalmente dentro de la teoría lineal. Aquí jugará un papel fundamental el análisis de Fourier.

En la segunda parte (secciones 6 a la 9) se considerará el tipo especial de ecuaciones de evolución de ondas *no lineales* que son **completamente integrables**. Insisto que comentaremos en qué sentido son “integrables.” Este tipo de ecuaciones admiten un tipo muy especial de solución, llamadas **solitones**. Así pues en esta segunda parte estudiaremos solamente una porción muy pequeña de la teoría no lineal, y de ésta también una muy pequeña de la teoría de solitones.

Estas notas van dirigidas a estudiantes avanzados de licenciatura o primeros años de posgrado en Matemáticas, Física, Ingeniería y áreas afines.

Para seguir estas notas se requiere principalmente un sólido conocimiento de Cálculo y de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. También el lector necesita Cálculo de Varias Variables y la teoría de Análisis de Fourier. Es recomendable, pero no forzoso, un curso de Ecuaciones Diferenciales Parciales, pues parte de lo que se ve en dicho curso se cubrirá en estas notas. No obstante, el principal ingrediente para seguir estas notas es ¡un gran entusiasmo por aprender nuevas cosas!

Este conjunto de notas surgió de algunos cursos ofrecidos por el autor. Una parte fue desarrollada durante el curso “*Temas Selectos de Ingeniería Física: Matemáticas de la Mecánica Cuántica*”, ofrecido en la UAM-Azcapotzalco el trimestre 21-P; otra fue ofrecida en el *Segundo Simposio Internacional de Análisis y sus Aplicaciones* celebrado en septiembre de 2016 en Metepec, Puebla, México, organizado por la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Iztapalapa; y, finalmente, otra porción fue elaborada para el curso corto de la Escuela Taller de Verano 2022 realizado en la Facultad de Matemáticas de la UAGro en Chilpancingo, Guerrero, México, en septiembre de 2022.

Se agradece el apoyo de CONAHCYT para la escritura de este texto y la retroalimentación por parte de los estudiantes que las han utilizado.

Agradezco enormemente al profesor **Roberto Quesada Batalla** de la UAM-iztapalapa por su gentil invitación a este proyecto.

Agradecimiento especial a *Carlos Iván Ávila Joachin* y *Daniela Yuliana Juárez Estrada*, por su apoyo en la elaboración de los dibujos y gráficas que aparecen en estas notas.

Índice

Introducción	175
1. ¿Qué es una onda?	179
1.1. Consideraciones generales	179
1.2. ¿Qué es una onda?	179
1.2.1. Clasificación	179
1.3. Tarea	180
2. Ondas hiperbólicas	180
2.1. Aplicaciones de ondas hiperbólicas	181
2.1.1. Acústica	181
2.1.2. Electromagnetismo	181
2.2. El caso más simple: ecuación de onda 1-dimensional	181
2.2.1. Ondas no lineales	182
2.3. Notación. Definición de ondas hiperbólicas	183
2.4. Curvas características	184

2.5.	La ecuación de onda	186
2.6.	Sistemas de ecuaciones hiperbólicas	188
2.7.	Una onda hiperbólica y dispersiva	188
2.8.	Tarea	188
3.	Ondas dispersivas y Relaciones de Dispersión	189
3.1.	Conceptos básicos. Relación de dispersión.	189
3.2.	Superposición de modos: Principio de Superposición	191
3.3.	¿Cómo calcular la relación de dispersión?	192
3.4.	Algunas consideraciones importantes	194
3.4.1.	Dispersión vs. hiperbolicidad	194
3.4.2.	Ondas planas	195
3.5.	Trenes de onda. Más relaciones de dispersión	196
3.6.	Principio de superposición. (Continuación.)	196
3.7.	Medios no uniformes	197
3.8.	Dispersión no lineal	198
3.9.	Tarea	200
4.	Ondas Dispersivas y Ecuaciones Diferenciales Parciales	202
4.1.	Relaciones de dispersión. (Continuación.)	202
4.2.	Superposición. Representación en N dimensiones	203
4.2.1.	Superposición.	203
4.2.2.	En más dimensiones	203
4.3.	Clasificación de ondas dispersivas	205
4.4.	Correspondencia entre Ecuaciones Diferenciales Parciales y Relaciones de Dispersión	206
4.5.	Relación de Dispersión y EDPs	207
4.6.	Tarea	209
5.	Ondas dispersivas: Solución por Transformadas de Fourier	209
5.1.	Definición de ondas dispersivas (continuación.)	209
5.2.	Solución de ecuaciones de onda dispersivas por Transformadas de Fourier	210
5.2.1.	Un par de hechos curiosos	216
5.3.	La ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica	217
5.3.1.	Construcción de la ecuación de Schrödinger	217
5.3.2.	Mecánica Clásica	217
5.3.3.	Mecánica cuántica	217
5.3.4.	Solución de la ecuación de Schrödinger libre	218
5.4.	La ecuación de Dirac de la Mecánica Cuántica	220
5.4.1.	Mecánica relativista	220
5.4.2.	Factorización del operador “momentum cuadrado” libre relativista: Construcción de la ecuación de Dirac.	222
5.4.3.	Solución de la ecuación de Dirac libre.	225
5.5.	Tarea	225
6.	Pares de Lax: ejemplos básicos	226
6.1.	Los ejemplos más elementales de pares de Lax: el oscilador armónico	226
6.1.1.	El oscilador armónico	226
6.2.	Ecuación de Lax para EDOs	227
6.3.	Resolución del oscilador armónico: el método de dispersión inversa	228
6.3.1.	El problema de valores iniciales	228
6.3.2.	Los valores propios	228
6.3.3.	Los vectores propios	229
6.4.	Los ejemplos más elementales de pares de Lax: el cuerpo rígido	231

6.4.1. El cuerpo rígido	231
7. Transformaciones isospectrales	237
7.1. Consideraciones generales	237
7.2. Operadores isoespectrales de Lax	238
7.3. Ecuaciones generalizadas de KdV y sus pares de Lax	240
7.4. Ecuaciones Lax: idea intuitiva	241
7.4.1. Preguntas sobre ecuaciones de Lax	242
7.5. Ecuaciones de Lax: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs)	243
7.6. Ecuaciones de Lax: Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs)	251
7.7. Resumen.	260
Referencias	261
7.8. Tarea	261
8. El Método de Dispersión Inversa.	262
8.1. Invarianza de Galileo	262
8.2. La transformación de Miura y la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica	262
8.3. Los Espectros Discretos y Continuos.	264
8.4. La Invarianza del Espectro en el Tiempo.	267
8.5. Evolución de las Funciones de Onda.	268
8.5.1. Panorama del método de dispersión inversa: resolución de la ecuación de KdV	270
8.6. Problemas de Dispersión.	270
8.7. La Expresión Integral para la Función de Onda	271
8.8. Datos de Dispersión.	273
8.9. El Espectro Continuo: el Coeficiente de Reflexión.	274
8.10. El Espectro Discreto: Estados Acotados, Constantes de Normalización y Valores Propios.	277
8.11. La Ecuación de Gel'fand-Levitan.	279
8.12. Evolución Temporal de los Datos de Dispersión.	282
8.13. Esquema del Método de Dispersión Inversa.	284
8.14. Ejemplo.	286
8.14.1. Otra forma de abordar el problema	291
8.15. ¿Qué hace el Espectro Continuo?	294
Apéndice A	295
Apéndice B	296
Apéndice C	297
Apéndice D	298
8.16. Tarea	299
9. Transformaciones de Bäcklund	300
9.1. Comentarios iniciales	300
9.2. Las transformaciones de Bäcklund más elementales	300
9.2.1. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann	300
9.2.2. La ecuación de sine-Gordon	301
9.2.3. La ecuación Liouville	301
9.3. Problemas de valores propios de segundo orden y sistemas de ecuaciones de primer orden	301
9.4. Relación entre sistemas de una y dos componentes y ecuaciones de Ricatti	302
9.5. Propiedades generales de ecuaciones de Ricatti	303
9.6. Ecuaciones asociadas de Sturm-Liouville	304
9.7. La transformación de Bäcklund para la ecuación de KdV	306
9.8. Tarea	308

1. ¿QUÉ ES UNA ONDA?

1.1. Consideraciones generales. La propagación de ondas es uno de los fenómenos más viejos y más estudiados en la naturaleza. Puede ser estudiada desde un punto de vista muy intuitivo y también de una manera muy profunda y técnica también. Junto con el estudio técnico, se puede efectuar también un análisis profundo y abstracto en el estudio de propagación de ondas.

De este modo, el estudio de propagación de ondas es tan vasto que ha sido desarrollado para crear e inventar nuevos conceptos matemáticos abstractos, así como también desarrollar el interés práctico para resolver problemas específicos y desarrollar o encontrar nuevas aplicaciones. Estos conceptos matemáticos ayudan a unificar los problemas que surgen en el estudio de propagación de ondas (aunque no todos.) Usaremos estos conceptos generales para el caso particular de nuestro estudio de propagación de ondas.

El estudio presentado aquí no será abstracto, sino más bien pretende mostrar las ideas generales que están dentro de estos fenómenos. Las dos fuentes principales de esta sección son [11] y [43].

1.2. ¿Qué es una onda?

Definición 1.2.1 (Definición de onda). Una **onda** es una *señal reconocible* que se translada de una parte de su medio de propagación, a otra parte del mismo, con una *“velocidad de propagación” reconocible*.

La señal puede ser cualquier característica o alteración en su forma o propiedades (máximos, mínimos, cambios abruptos, o alguna característica inherente), siempre y cuando pueda ser reconocible, medible y su ubicación puede ser determinada en cualquier momento; *i.e.*, podemos observarla.

La señal puede distorsionar la magnitud o propiedades de la señal, cambiar su velocidad, pero siempre con la condición de que sea aún reconocible y medible.

1.2.1. Clasificación. Hay dos subclases principales:

- a: Ondas hiperbólicas y**
- b: ondas dispersivas.**

Con un poco más de detalle tenemos que:

- a:** La definición de **onda hiperbólica** es matemática y está dada en términos de una **ecuación diferencial parcial (EDP) hiperbólica**. (Ver detalles más adelante.)
- b:** La segunda clase, **ondas dispersivas**, está dada en términos de la forma de la solución (no en términos de la ecuación diferencial que satisface.) No es fácil dar una definición general, pero se comienza de la onda lineal y dispersiva más sencilla para, de ahí, partir y construir tipos más sofisticados y desarrollados de ondas dispersivas. La famosa ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica es un ejemplo de este desarrollo y es una de estas ecuaciones dispersivas, la cual es una generalización de una ecuación de onda lineal dispersiva usual (asociada a una EDP lineal con coeficientes constantes.)

Observación 1.2.2. Estas dos subclases **no** son exclusivas. Algunas ondas satisfacen ambos tipos de comportamiento, mientras que hay ondas que no pertenecen a ninguna de estas clases.

1.3. Tarea.

TAREA 1.1. De tres ejemplos de fenómenos que identifiquemos en la vida cotidiana como “ondas.” Verifique que estos fenómenos son efectivamente ondas de acuerdo a nuestra definición de onda, usando también la información dada en los párrafos anteriores.

2. ONDAS HIPERBÓLICAS

Las dos ondas hiperbólicas estándar son las descritas por las soluciones de la ecuación de onda en una dimensión:

$$(1) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c_o^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi = 0,$$

y en tres dimensiones:

$$(2) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c_o^2 \Delta \varphi = 0,$$

(en donde $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es el operador de Laplace,) así como también la ecuación de onda uni-direccional (también llamada ecuación de *reacción* o de *transporte*):

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi - c_o \frac{\partial}{\partial x} \varphi = 0.$$

La ecuación de onda uni-direccional tiene soluciones de la forma:

$$(4) \quad \varphi = f(x - c_o t).$$

Si $c_o > 0$, el movimiento es hacia la derecha en el eje x , mientras que si $c_o < 0$, el movimiento es hacia la izquierda. Ver figura 1.

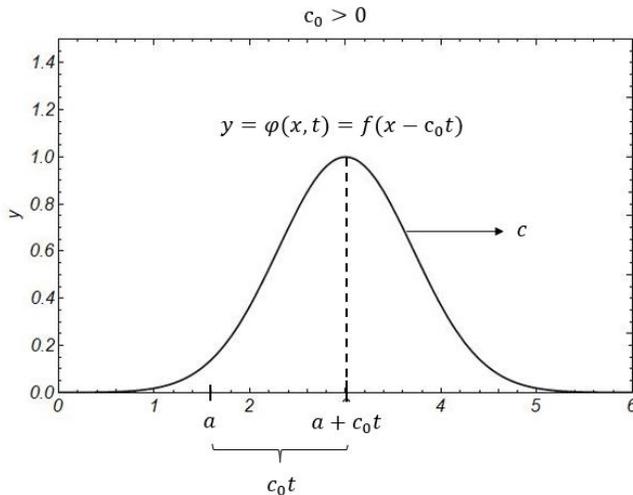


FIGURA 1. Evolución de la solución de la ecuación de onda unidireccional

La ecuación de onda en una dimensión (1-dimensional), ecuación (1), tiene como solución una función de la forma:

$$(5) \quad \varphi = F(x - c_o t) + G(x + c_o t),$$

la cual considera una onda moviéndose a la derecha y otra a la izquierda. (Regresaremos a esto más adelante.)

2.1. Aplicaciones de ondas hiperbólicas. Las aplicaciones de ondas hiperbólicas son muy amplias y aparecen en acústica, elasticidad y electromagnetismo.

2.1.1. Acústica. En acústica tenemos las funciones $\rho(x, t)$, $P(x, t)$ y $v(x, t)$, la densidad y presión del aire, y la velocidad de una partícula de aire en el punto (x, t) . La solución más simple es cuando no hay sonido: $\rho_0(x, t) \equiv \rho_0 = \text{const}$, $P_0(x, t) \equiv P_0 = \text{const}$, $v_0(x, t) \equiv 0$. Definimos el cambio en la densidad del aire por $\Delta\rho(x, t) = \rho(x, t) - \rho_0(x, t)$ y suponiéndola suficientemente pequeña, satisface la ecuación de onda

$$(6) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta\rho - c_o^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta\rho = 0,$$

en donde $c_o = \frac{dP}{d\rho}(\rho_0)$ y se considera la aproximación adiabática (no hay pérdidas de energía por calor) $P(\rho) = \text{const} \cdot \rho^\gamma$, para cierto exponente $\gamma > 0$. La misma ecuación se cumple para $\Delta P(x, t) = P(x, t) - P_0(x, t)$ y $\Delta v(x, t) = v(x, t) - v_0(x, t) = v(x, t)$ pequeños. Para más detalles consulte *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I. [13].

Para ondas provocadas por explosiones y aviones muy veloces, las aproximaciones no pequeñas son necesarias en estos casos. Por lo tanto, la teoría lineal no es suficiente para describir estos fenómenos ondulatorios y la teoría no lineal será requerida.

2.1.2. Electromagnetismo. Las ecuaciones de Maxwell gobiernan todos los fenómenos electromagnéticos a escalas humanas. En el vacío, el campo eléctrico $\vec{E}(x, y, z, t)$ cumple la ecuación de onda 3-dimensional, ecuación (2), que en este caso es vectorial:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(x, y, z, t) - c_o^2 \Delta \vec{E}(x, y, z, t) = 0,$$

en donde $c_o = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ es la velocidad de la luz en el vacío, siendo μ_0, ϵ_0 , la permeabilidad magnética y permitividad eléctrica en el vacío, respectivamente.

Si no se está en el vacío, se puede generar una polarización del material que depende del campo eléctrico y que, inclusive para campos eléctricos altos, depende de la intensidad del mismo,

$$\vec{P} = n_0 \vec{E} + n_2 \|\vec{E}\|^2 \vec{E},$$

siendo n_0, n_2 , los coeficientes de refracción en el material de propagación. Esto da como consecuencia la óptica no lineal y una de sus aplicaciones es la comunicación en sistemas de fibras ópticas.

2.2. El caso más simple: ecuación de onda 1-dimensional. El caso más simple es el estudio de la ecuación de onda 1-dimensional, ecuación (1). Con el cambio de variables (coordenadas características)

$$(7) \quad \begin{aligned} u &= x - c_0 t, \\ v &= x + c_0 t, \end{aligned}$$

se obtiene que φ cumple la ecuación:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \varphi = 0.$$

Después de integrar dos veces

$$\varphi(u, v) = F(u) + G(v),$$

en donde F y G son dos funciones “generales” con segundas derivadas continuas. Regresando a las variables originales

$$(8) \quad \varphi(x, t) = F(x - c_0 t) + G(x + c_0 t).$$

Si sujetamos la ecuación de onda a las condiciones iniciales:

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \end{aligned}$$

obtenemos la solución de D’Alambert:

$$(10) \quad \varphi(x, t) = \frac{f(x - c_0 t) + f(x + c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} g(s) ds.$$

Observemos que la ecuación de onda de D’Alambert se puede “factorizar” en términos de dos operadores diferenciales de primer orden:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = 0.$$

De aquí podríamos considerar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \varphi = 0,$$

volviendo a la ecuación de onda hiperbólica lineal más sencilla.

2.2.1. Ondas no lineales. Hay problemas más ricos que pueden describir otros fenómenos y se pueden describir con la ecuación de onda hiperbólica **no** lineal más sencilla:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + c(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} \varphi = 0.$$

En esta ecuación la velocidad de propagación, $c(\varphi)$, depende de la amplitud de la onda φ . Ver figura 2. A sus soluciones se les llama **ondas de choque**. Ejemplos de éstas son las ondas de sonido provocadas por explosiones, por aviones supersónicos, y ondas en el océano.

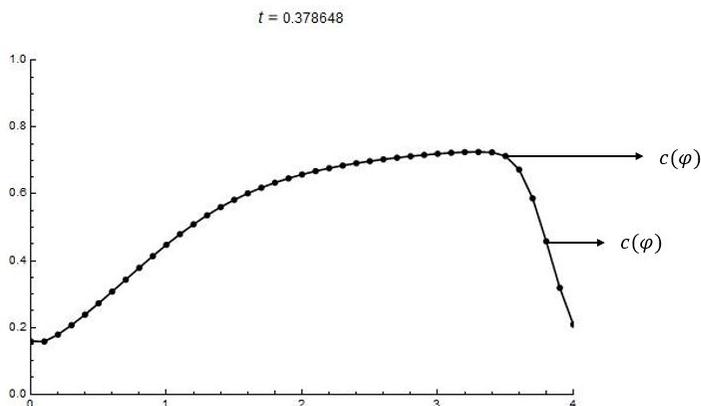


FIGURA 2. Evolución de la solución de la ecuación de onda no lineal unidireccional: $c(\varphi) = \varphi$

Un ejemplo de estas ecuaciones, es la ecuación de Burgers (también es la ecuación de Navier-Stokes en su reducción 1-dimensional):

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + \varphi \frac{\partial}{\partial x} \varphi = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi.$$

Esta es una ecuación hiperbólica no lineal, que incluye difusión. Esta ecuación tiene soluciones exactas relacionadas a la ecuación del calor $\frac{\partial}{\partial t} \psi = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi$. a través de una transformación llamada de Cole-Hopf [22].

2.3. Notación. Definición de ondas hiperbólicas.

Definición 2.3.1 (Operador lineal de primer orden). Un **operador lineal de primer orden**, \mathcal{P} , definido en

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto (x, t),$$

es una expresión lineal en $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial x}$ con coeficientes dependiendo sólo de (x, t) ,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P} \left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = a(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} - d(x, t).$$

Definición 2.3.2 (Ecuación hiperbólica de primer orden). La ecuación diferencial $\mathcal{P}[u] = 0$, *i.e.*,

$$a(x, t) \frac{\partial}{\partial t} u + b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u - d(x, t) u = 0,$$

es **hiperbólica** si $a(x, t) \neq 0$.

Para resolver $\mathcal{P}[u] = 0$, escribámosla en la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{b(x, t)}{a(x, t)} \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \frac{d(x, t)}{a(x, t)} u.$$

Ahora busquemos curvas en el plano (x, t) tales que:

$$(11) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{b(x, t)}{a(x, t)}.$$

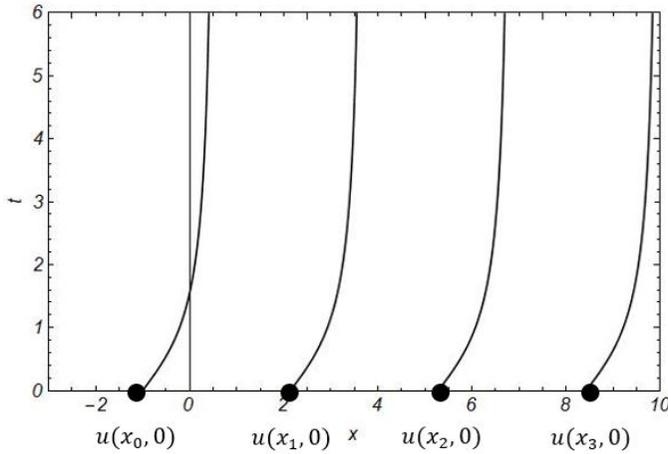


FIGURA 3. Ecuaciones características, soluciones de la ecuación (11)

Entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \frac{d(x, t)}{a(x, t)} u,$$

es decir, la ecuación

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \frac{d(x(t), t)}{a(x(t), t)} u(x(t), t).$$

se cumple a lo largo de las curvas $x = x(t)$, soluciones de la ecuación (11). A estas curvas se les llama **curvas características**.

El comportamiento de $u(x, t)$ a lo largo de las curvas características está bien definido y puede ser bien determinado. (¡Y puede ser constante como en el caso de la ecuación de onda!)

2.4. Curvas características. Una propiedad importante de las ecuaciones hiperbólicas es que presentan **curvas características** en el plano (x, t) .

Las **curvas características** son importantes para resolver ecuaciones diferenciales que describen propagación de ondas. Las curvas características, $x = x(t)$, son soluciones de la ecuación diferencial ordinaria

$$(12) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{b(x(t), t)}{a(x(t), t)}.$$

A lo largo de estas curvas, la solución $u(t) = u(x(t), t)$ de la ecuación de onda unidireccional, satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$(13) \quad \frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{d(x(t), t)}{a(x(t), t)}u(x(t), t).$$

Así, a lo largo de cada *curva característica*, tenemos que la función $u = u(x(t), t)$ es solución de la ecuación de onda unidireccional. Entonces, las condiciones iniciales deben ser dadas a lo largo de una curva “perpendicular” o, mejor dicho, “transversal” a las curvas características para poder determinar completamente la solución al problema de Cauchy (de valores iniciales.)

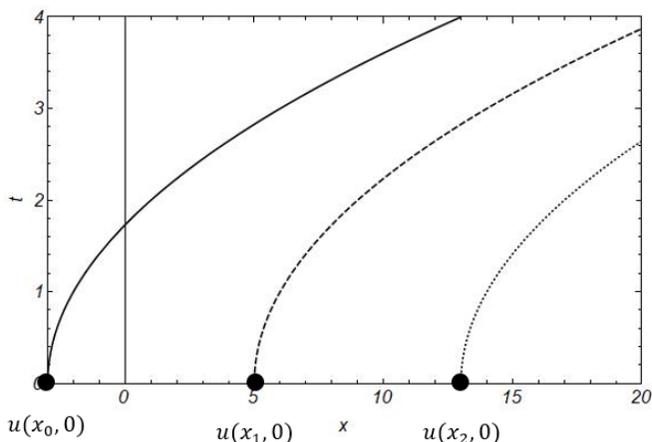


FIGURA 4. Curvas características, soluciones al problema dado por la ecuación (12). Aquí se indican las condiciones iniciales $u(x, 0)$ en distintos puntos del eje x .

A la solución de la ecuación diferencial (12) se le puede asignar la condición inicial $x(0) = x_0$, y a la ecuación (13) se le asignan entonces las condición inicial:

$$\begin{aligned} u(0) &= u(x(0), 0), \\ &= u(x_0, 0) \end{aligned}$$

y la solución $u(x, t)$ de la ecuación unidireccional, (3), se construye con dichas curvas, variando x_0 , y así generando una superficie $z = u(x, t)$. Ver figura 5.

Ejemplo 2.4.I. Consideremos la ecuación de onda unidireccional (3), con condición inicial:

$$(14) \quad u(x, 0) = f(x).$$

Verifiquemos que es hiperbólica:

- $a(x, t) = 1 \neq 0$ (verificado,)
- $b(x, t) = c_0$,
- $d(x, t) = 0$.

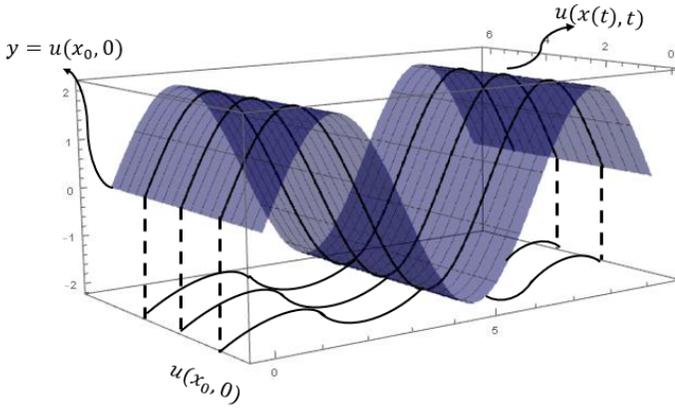


FIGURA 5. Solución a la ecuación hiperbólica de primer orden por el método de las características.

De aquí resulta que la ecuación de las curvas características (12) es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b(x(t), t)}{a(x(t), t)} \implies \frac{dx}{dt} = c_0,$$

por lo que las curvas características son

$$x(t) = c_0 t + \xi,$$

en donde

$$\xi = x(0)$$

es la condición inicial de la curva característica. Observemos que:

$$(15) \quad \xi = x - c_0 t,$$

o bien:

$$t = \frac{x - \xi}{c_0}.$$

Estas últimas son rectas de pendiente $1/c_0$ en el plano t vs. x . Ver figura 6.

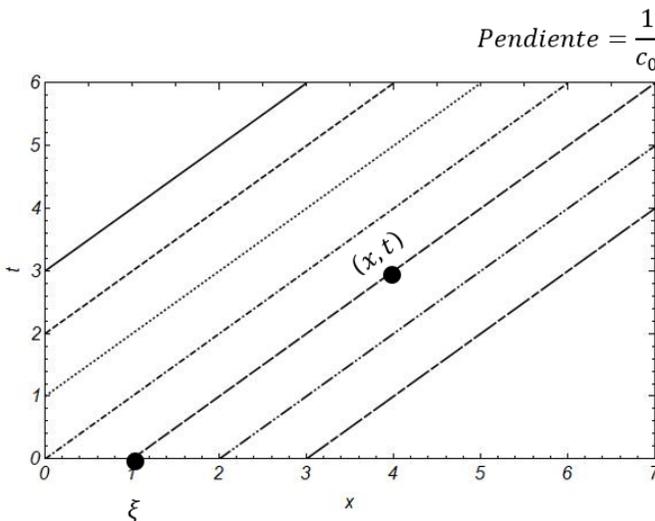


FIGURA 6. Características de la ecuación de onda unidireccional.

Ahora podemos deducir que, a lo largo de las curvas características, la solución $u(x, t)$ satisface la ecuación:

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{d(x(t), t)}{a(x(t), t)}u(x(t), t) \implies \frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0$$

por lo que para todo valor de t , tenemos

$$u(x(t), t) = u_0 = \text{const.}$$

¡A lo largo de las curvas características $u(x, t)$ es constante! Ver figura 7.

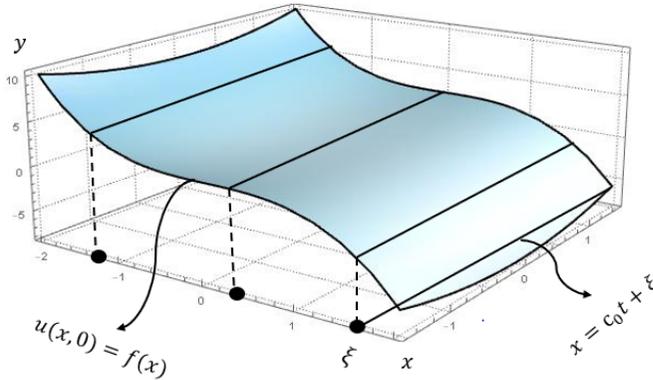


FIGURA 7. Solución de la ecuación unidireccional de onda por el método de las características: superficie.

En $t = 0$,

$$u_0 = u(x(0), 0) = u(\xi, 0) = f(\xi).$$

Por lo tanto:

$$u(x(t), t) = u_0 = f(\xi).$$

Ahora, de (15) concluimos que

$$u(x, t) = f(x - c_0 t)$$

que es la solución al problema de valores iniciales para la ecuación de onda unidireccional. Esta solución es la que generalmente se encuentra de forma intuitiva y se nos da en muchos cursos de ondas sin referencia a este método.

2.5. La ecuación de onda. El operador diferencial lineal de segundo orden, en su forma más general, es un operador, \mathcal{P} , cuadrático en $\frac{\partial}{\partial t}$ y en $\frac{\partial}{\partial x}$, de la forma

$$\mathcal{P}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \alpha(x, t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\beta(x, t)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} + \gamma(x, t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \text{op. dif lin 1er ord},$$

en donde por “*op. dif lin 1er ord*” queremos decir “operador diferencial lineal de primer orden.”

Uno entonces encuentra dos familias de ecuaciones para curvas características:

$$(16) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}$$

Definición 2.5.1 (Ecuaciones hiperbólica de segundo orden). La ecuación

$$\mathcal{P}[u] = 0$$

es **hiperbólica** si, y sólo si,

$$\alpha\gamma - \beta^2 \leq 0.$$

De aquí se sigue que las ecuaciones hiperbólicas tienen dos familias reales de curvas características. Ver figura 8.

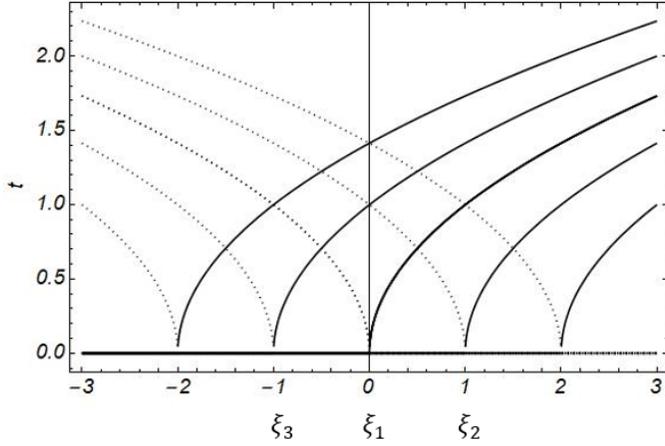


FIGURA 8. Curvas características de la ecuación de segundo orden.

A lo largo de estas curvas, sabemos que $u(x(t), t)$ es una función conocida de t y, para cada ξ , uno encuentra $u(x, t)$.

Comparando con la ecuación de onda (1), tenemos que $\alpha(x, t) = 1$, $\beta(x, t) = 0$, $\gamma(x, t) = -c_0^2$, y así $\alpha\gamma - \beta^2 = -c_0^2 < 0$, por lo que la ecuación de onda es hiperbólica.

Tenemos entonces dos familias de curvas características descritas por las ecuaciones, que de (16) se sigue:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - (1)(-c_0^2)}}{1},$$

i.e.,

$$\frac{dx}{dt} = \pm c_0$$

Por lo tanto, la solución “general”¹ de la ecuación de onda es:

$$u(x, t) = F(x - c_0t) + G(x + c_0t),$$

la cual es la solución encontrada anteriormente, ecuación (8), dada por cambio de variables, ecuación (7). Podríamos seguir desarrollando el método de ecuaciones características para la ecuación de onda y resolver el problema de valores iniciales

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

y obtener la solución de D’Alambert, ecuación (10). No obstante, no lo haremos aquí para proseguir y terminar con nuestro breve estudio de ondas hiperbólicas y enfocarnos en ondas dispersivas.

¹Para la mayoría de las ecuaciones diferenciales parciales, no es posible dar una solución general como en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Es por esto que indico aquí *general* entrecomillado. En el caso de la ecuación de onda, sí es posible.

2.6. Sistemas de ecuaciones hiperbólicas. Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + A(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \vec{v} = B(x, t) \vec{v},$$

en donde $\vec{v} = \vec{v}(x, t)$ es un vector, función de (x, t) ; $A(x, t), B(x, t)$ son matrices cuyas entradas son funciones de (x, t) . Esta ecuación es **hiperbólica** si, y sólo si, $A(x, t)$ tiene valores propios distintos.

Ejemplo 2.6.I. El sistema de ecuaciones diferenciales que describe un par de ondas que se propagan en dirección contraria en una fibra óptica es el siguiente:

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_f + \frac{\partial}{\partial x} A_f - i\kappa A_b &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} A_b - \frac{\partial}{\partial x} A_b - i\kappa A_f &= 0. \end{aligned}$$

Si llamamos

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} A_f \\ A_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_f(x, t) \\ A_b(x, t) \end{pmatrix},$$

podemos escribir la ecuación (17) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \vec{v} = i\kappa \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}.$$

En este ejemplo,

$$A(x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y tiene a $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ como valores propios. Siendo valores propios distintos, por lo que el sistema es hiperbólico.

2.7. Una onda hiperbólica y dispersiva. Hay muchos ejemplos de ondas que son simultáneamente hiperbólicas y dispersivas. De los más sencillos es el siguiente. Es una ecuación que combina dos diferentes ordenes de las ecuaciones de onda y de onda uni-direccional:

$$(18) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi + a_0 \frac{\partial}{\partial x} \varphi \right) = 0,$$

en donde c_0, η y a_0 pueden ser funciones de (x, t) .

2.8. Tarea.

TAREA 2.1. Verifique que la función φ , dada en la ecuación (4) es, efectivamente, solución de la ecuación de onda unidireccional, ecuación (3). Para ello, simplemente substituya (4) en (3).

TAREA 2.2. Verifique que la función φ , ecuación (5) es solución de la ecuación de onda 1-dimensional, ecuación (1). Substituya (5) en (1) para este fin.

TAREA 2.3. Construya la ecuación de onda, ecuación (6), que describe la propagación de ondas acústicas. Siga el texto de Feynman [13] y desglose todos los detalles.

TAREA 2.4. Construya la ecuación de onda que describe la propagación de ondas en:

1. una cuerda extensible y
2. un cadena de canicas unidas por resortes que satisfacen la ley de Hooke.

Pueden usar los textos de Mattheij, et.al [30] y Haberman [19].

TAREA 2.5. Para la ecuación de onda (1), con condiciones iniciales (9), use el cambio de variables (7) y haga todos los detalles para encontrar la solución de D'Alambert (10).

TAREA 2.6. Usando el método de las características, resuelva la ecuación de onda unidireccional, ecuación (3), con condición inicial (14).

TAREA 2.7. Construya las ecuaciones características (16), de la ecuación hiperbólica general $\mathcal{P}[u] = 0$.

TAREA 2.8. Considere c_0, η y a_0 constantes.

- Encontrar la relación de dispersión de la ecuación (18). Para ello, sustituya la función $\varphi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$, simplifique, y la relación entre k y ω es la relación de dispersión. (Para más detalles, consultar la siguiente sección para la definición de “relación de dispersión.”)
- Verificar que, efectivamente, la ecuación describe una onda dispersiva. Es decir, calcule (explícita o implícitamente), $\frac{d\omega(k)}{dk}$, y cheque que es distinta de 0. (De igual modo, para la definición de “onda dispersiva,” consultar la siguiente sección para aprender cómo determinar si una ecuación de onda es dispersiva o no.)
- Verificar también que es una ecuación hiperbólica.
- Calcule sus velocidades de fase y de grupo y compárelas. (Use las definiciones 3.1.3 y 3.1.4 dadas en la siguiente sección.)

3. ONDAS DISPERSIVAS Y RELACIONES DE DISPERSIÓN

3.1. Conceptos básicos. Relación de dispersión. Recordemos que las ondas dispersivas son definidas por las soluciones de las ecuaciones diferenciales que las definen. (Recordemos la clasificación 1.2.1.)

Definición 3.1.1 (ONDA DISPERSIVA). Una **onda lineal dispersiva** es cualquier sistema físico descrito por funciones de la forma

$$(19) \quad \varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

la cual es un elemento de la **base** del sistema de ondas dispersivas. También se le conoce como **modo** de oscilación. Aquí, ω es la frecuencia (angular) y k es el número de onda.

Podemos decir que ω es la **frecuencia** (*temporal*) y k es como una frecuencia “*espacial*”.

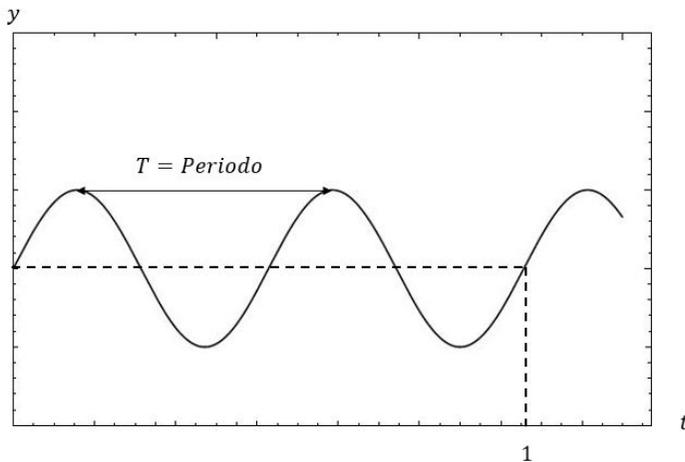


FIGURA 9. Periodo de una onda sinusoidal.

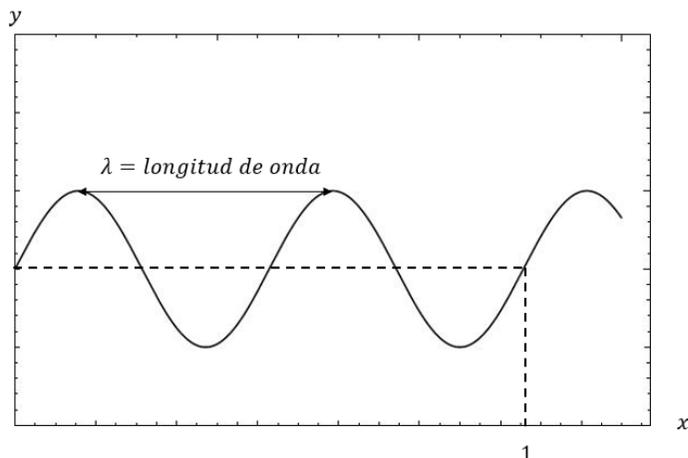


FIGURA 10. Longitud de onda de una onda sinusoidal.

¿Cómo mide uno la frecuencia y el número de onda? Uno lo hace de acuerdo a la siguiente regla:

$$\omega \equiv \frac{2\pi(\# \text{ de oscilaciones})}{\text{unidad de tiempo}}, \quad k \equiv \frac{2\pi(\# \text{ de oscilaciones})}{\text{unidad espacial}}.$$

De aquí uno define el *periodo* T (ver figura 9) y la *longitud de onda* λ (ver figura 10) de una onda dispersiva:

$$\begin{aligned} \omega T &= 2\pi, \\ k\lambda &= 2\pi. \end{aligned}$$

Nota. La frecuencia de una onda se define como $\nu = 1/T$, *i.e.*, $\nu T = 1$, por lo que $\omega = 2\pi\nu$. No obstante, de aquí en adelante nos referiremos a ω como la frecuencia, aunque realmente es la frecuencia angular.

Definición 3.1.2 (Relación de dispersión: primera definición). Resulta también que la frecuencia es función del número de onda:

$$\omega = \omega(k).$$

A esta expresión se le llama **relación de dispersión**.

Volveremos a esta definición más adelante.

Observemos que la base de las ondas dispersivas, se puede escribir como:

$$\varphi(x, t) = A \cos\left(k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)\right),$$

la cual, comparándola con la solución de la ecuación de onda unidireccional $f(x - ct)$, obtenemos la siguiente definición.

Definición 3.1.3 (Velocidad de fase). La velocidad de propagación de la onda es:

$$(20) \quad c = c_f(k) = \frac{\omega(k)}{k}.$$

A esta velocidad se le llama **velocidad de fase**.

Generalmente, la *velocidad de fase* es función de k . Esta dependencia es lo que provoca el fenómeno de **dispersión**.

Si $c_f(k) = c_0 = \text{const.}$, entonces la onda es **no dispersiva**. Así:

$$\frac{\omega(k)}{k} = c_0 \Rightarrow \omega(k) = c_0 k \Rightarrow \frac{d\omega(k)}{dk} = c_0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} = 0.}$$

Podemos definir entonces una onda como dispersiva de la siguiente manera.

Definición 3.1.4 (Velocidad de grupo). La **velocidad de grupo** de una onda dispersiva se define como:

$$(21) \quad c_g(k) \equiv \frac{d}{dk}\omega(k).$$

Definición 3.1.5 (Onda dispersiva). Una onda se dice **dispersiva** si, y sólo si, su velocidad de grupo es **no constante**. Es decir, si su derivada respecto a k es distinta de cero:

$$(22) \quad \frac{d}{dk}c_g(k) = \frac{d^2}{dk^2}\omega(k) \neq 0.$$

3.2. Superposición de modos: Principio de Superposición. Si consideramos la superposición de varios modos de ondas dispersivas de la forma (19), para diferentes valores de k , podemos definir una solución de onda más general. Para dichos valores de k , tenemos diferentes velocidades de fase, $c_f(k)$, causando que la onda se *disperse*.

Definición 3.2.1 (SUPERPOSICIÓN DISCRETA: SERIES DE FOURIER). A la **superposición** la podemos escribir como una serie de Fourier finita:

$$\varphi(x, t) = \sum_{j=1}^N A_j \cos(k_j x - \omega_j t),$$

en donde $\omega_j = \omega(k_j)$.

Para los valores de k :

$$k_1 \neq k_2 \Rightarrow \frac{\omega_1}{k_1} \neq \frac{\omega_2}{k_2} \Rightarrow c_1 \neq c_2.$$

Entonces, para diferentes k 's, uno tiene (en general) diferentes velocidades. Así, diferentes modos se propagan a diferentes velocidades: esto es el fenómeno de **dispersión**.

Para superposiciones más generales se necesita la **transformada de Fourier**.

Definición 3.2.2 (SUPERPOSICIÓN CONTINUA: TRANSFORMADA DE FOURIER). Si tenemos ahora que los números de onda corren en los números reales, $k \in \mathbb{R}$, la **superposición** la podemos escribir como la **transformada inversa de Fourier**:

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \cos(kx - \omega(k)t) dk,$$

en donde $F(k) = \widehat{\varphi}(k, 0)$ es la **transformada de Fourier** de la condición inicial $\varphi(x, 0)$.

Observemos que el modo

$$\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

resuelve la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = 0,$$

siempre y cuando

$$\frac{\omega(k)}{k} = c_0, \quad \text{o bien} \quad \frac{\omega(k)}{k} = -c_0,$$

i.e.,

$$\omega(k) = \pm c_0 k \Rightarrow \frac{d^2}{dk^2}\omega(k) = 0,$$

Esto significa que las soluciones de la ecuación de onda

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} = 0$$

son **ondas no dispersivas**.

3.3. ¿Cómo calcular la relación de dispersión? Aquí se trata de encontrar la relación de dispersión, si de antemano tenemos la ecuación de la onda dispersiva. No obstante, el problema **real** es encontrar la relación de dispersión de las observaciones y datos experimentales, lo cual no haremos aquí, pero sólo para un par de casos: las *ecuaciones de Schrödinger y de Dirac* de la mecánica cuántica. Por lo pronto, tenemos la siguiente forma de encontrar la relación de dispersión.

PROBLEMA 3.3.1. *Cómo encontrar la relación de dispersión si conocemos la ecuación de la onda dispersiva.*

1. *Primero, debemos tener una EDP (Ecuación Diferencial Parcial) **LINEAL, homogénea y de coeficientes constantes**.*
2. *Entonces, sustituir*

$$\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

o, equivalentemente,

$$\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)},$$

en la ecuación.

3. *Eliminar $A \cos(kx - \omega t)$ o bien $Ae^{i(kx - \omega t)}$, para entonces obtener la relación de dispersión.*

Ejemplo 3.3.I (Ecuación de onda). Encontrar la relación de dispersión de la ecuación de onda. Tenemos que:

1. La ecuación de onda

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} = 0$$

es una EDP lineal, homogénea y de coeficientes constantes.

2. Sustituyamos entonces $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$, en la ecuación:

$$\begin{aligned} (Ae^{i(kx - \omega t)})_{tt} - c_0^2 (Ae^{i(kx - \omega t)})_{xx} &= 0, \\ A(-i\omega)^2 e^{i(kx - \omega t)} - c_0^2 A(ik^2) e^{i(kx - \omega t)} &= 0. \end{aligned}$$

3. Eliminar $A \cos(kx - \omega t)$ o bien $Ae^{i(kx - \omega t)}$, para entonces obtener la relación de dispersión.

$$\begin{aligned} (-i\omega)^2 - c_0^2(ik^2) &= 0, \\ -\omega^2 + c_0^2 k^2 &= 0, \end{aligned}$$

i.e.,

$$(23) \quad \omega^2 - c_0^2 k^2 = 0,$$

siendo ésta la relación de dispersión de la ecuación de onda.

Notemos que podemos factorizar la relación de dispersión de la ecuación de onda (23):

$$(\omega - c_0 k)(\omega + c_0 k) = 0,$$

por lo que tenemos dos “componentes” (que llamaremos **modos de oscilación o vibración**) de la relación de dispersión:

$$\begin{aligned} \omega_1(k) &= c_0 k, \\ \omega_2(k) &= -c_0 k, \end{aligned}$$

las cuales nos indican las ondas contrapropagantes que muestra la solución de D’Alambert (10).

Ejemplo 3.3.II (Ecuación de Klein-Gordon). Encontrar la relación de dispersión de la ecuación de Klein-Gordon:

$$(24) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + a^2 \varphi = 0,$$

con $a > 0$ una constante. Este es un ejemplo de una ecuación que es ambas, **hiperbólica y dispersiva**.

Busquemos entonces su relación de dispersion.

1. La ecuación de Klein-Gordon,

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} + a^2 \varphi = 0,$$

es una *EDP lineal, homogénea y de coeficientes constantes*.

2. Sustituyamos entonces $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$, en la ecuación:

$$\begin{aligned} (Ae^{i(kx - \omega t)})_{tt} - c_0^2 (Ae^{i(kx - \omega t)})_{xx} + a^2 Ae^{i(kx - \omega t)} &= 0, \\ A(-i\omega)^2 e^{i(kx - \omega t)} - c_0^2 A(ik^2) e^{i(kx - \omega t)} + a^2 Ae^{i(kx - \omega t)} &= 0. \end{aligned}$$

3. Eliminar $A \cos(kx - \omega t)$ o bien $Ae^{i(kx - \omega t)}$, para entonces obtener la relación de dispersión.

$$\begin{aligned} (-i\omega)^2 - c_0^2(ik^2) + a^2 &= 0, \\ -\omega^2 + c_0^2 k^2 + a^2 &= 0, \end{aligned}$$

i.e.,

$$(25) \quad \omega^2 = c_0^2 k^2 + a^2,$$

siendo ésta la relación de dispersión de la ecuación de Klein-Gordon.

Podemos también escribir:

$$(26) \quad \omega(k) = \pm \sqrt{c_0^2 k^2 + a^2},$$

y calculemos su primera y segundas derivadas. Usando (25) y la regla de la cadena:

$$(27) \quad 2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2c_0^2 k \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_0^2 k}{\omega}.$$

Ahora, calculando la derivada en la primer ecuación que aparece en (27),

$$(28) \quad 2 \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^2 + 2\omega \frac{d^2\omega}{dk^2} = 2c_0^2 \Rightarrow \omega \frac{d^2\omega}{dk^2} = c_0^2 - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^2 \Rightarrow \frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{c_0^2}{\omega} - \frac{1}{\omega} \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^2.$$

Observemos que, de (27), la velocidad de grupo (21), es inversamente proporcional a la velocidad de fase: $c_g(k) = c_0^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c_0^2}{c_f(k)}$,

Usando (26) y (27), obtenemos:

$$\frac{d\omega}{dk} = \pm \frac{c_0^2 k}{\sqrt{c_0^2 k^2 + a^2}},$$

la cual es no constante. Ahora bien, de (25) , (27) y (28):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\omega}{dk^2} &= \frac{c_0^2}{\omega} - \frac{1}{\omega} \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^2, \\ &= \frac{1}{\omega} \left(c_0^2 - \left(\frac{c_0^2 k}{\omega} \right)^2 \right), \\ &= \frac{c_0^2}{\omega} \left(1 - \frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} \right), \\ &= \frac{c_0^2}{\omega^3} (\omega^2 - c_0^2 k^2), \\ &= \frac{c_0^2}{\omega^3} (c_0^2 k^2 + a^2 - c_0^2 k^2), \\ &= \frac{c_0^2 a^2}{\omega^3}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = \pm \frac{a^2 c_0^2}{(c_0^2 k^2 + a^2)^{3/2}} \neq 0,$$

la cual es distinta de cero, por tanto describe una onda dispersiva.

Ahora bien, de la ecuación de Klein-Gordon (24), los términos $\alpha(x, t) = 1 \neq 0$; $\beta(x, t) = 0$; $\gamma(x, t) = -c_0^2$, tenemos que

$$\alpha(x, t)\gamma(x, t) - \beta^2(x, t) = (1)(-c_0^2) - 0^2 = -c_0^2 < 0,$$

por lo que la ecuación es hiperbólica. Entonces **la ecuación de Klein-Gordon es tanto hiperbólica como dispersiva.**

Observación 3.3.2. Escribamos la ecuación de Klein-Gordon (24) usando dimensiones físicas, *i.e.*, $a^2 = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \varphi = 0,$$

Usando el modo fundamental $\varphi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + m^2 c^4 \varphi &= 0, \\ \hbar^2 (-i\omega)^2 \varphi - (ik)^2 c^2 \hbar^2 \varphi + m^2 c^4 \varphi &= 0, \\ -\hbar^2 \omega^2 + k^2 c^2 \hbar^2 + m^2 c^4 &= 0. \end{aligned}$$

Si usamos la expresión de Planck-Einstein, $E = \hbar\omega$, y la longitud de onda de De Broglie, $p = \hbar k$, obtenemos la ecuación de la energía cinética relativista de una partícula libre:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4.$$

De hecho, Klein y Gordon procedieron al revés para obtener su ecuación. Volveremos a esto más adelante.

3.4. Algunas consideraciones importantes.

3.4.1. Dispersión vs. hiperbolicidad. La mayoría de la gente cree que casi todos las ondas se describen con ecuaciones hiperbólicas. De hecho, creen que absolutamente todas las ondas son hiperbólicas o, aún peor, que la única ecuación que describe propagación de ondas es la ecuación de onda (1). Sin embargo, este no es el caso: la mayoría de las ondas son dispersivas y se describen con EDPs (Ecuaciones Diferenciales Parciales) dispersivas.

La forma en que debe ser enseñado, creo, *es la siguiente:* Las ondas hiperbólicas describen muchos fenómenos, pero **la mayoría de las ondas son dispersivas.**

Cuando era estudiante, de hecho yo pensaba precisamente esto, que las ondas eran descritas únicamente por la ecuación de onda: $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = 0$. No obstante, tiempo después, me di cuenta que hay muchas ecuaciones que describen movimientos ondulatorios.

3.4.2. *Ondas planas.* Todas las ecuaciones lineales cumplen el **principio de superposición**. Gracias a esto, podemos construir soluciones más sofisticadas a partir de soluciones más simples. Si las ondas están en 3-dim, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, la soluciones más simples son generalizaciones de (19) en forma compleja:

$$u_{\vec{k}}(x, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{k} \in \mathbb{R}^3.$$

A estas ondas también se les llama **ondas planas**. Esto por la siguiente razón: supongamos que la fase es constante: $\theta(x, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{const.}$ Entonces:

$$u_{\vec{k}}(x, t) = e^{i(\text{const.})} = \text{const.}$$

Si $t = t_0$ es fijo: $\theta(x, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t_0 = \text{const.}$, así:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \omega t_0 + \text{const.}$$

Ésta es la ecuación de un plano en el espacio, perpendicular al vector $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ que describe la misma fase de la onda. Para diferentes valores de t_0 , tenemos diferentes planos, todos perpendiculares a \vec{k} , que se van moviendo con una rapidez $\omega/||\vec{k}||$. Es por esto que se llaman **ondas planas**.

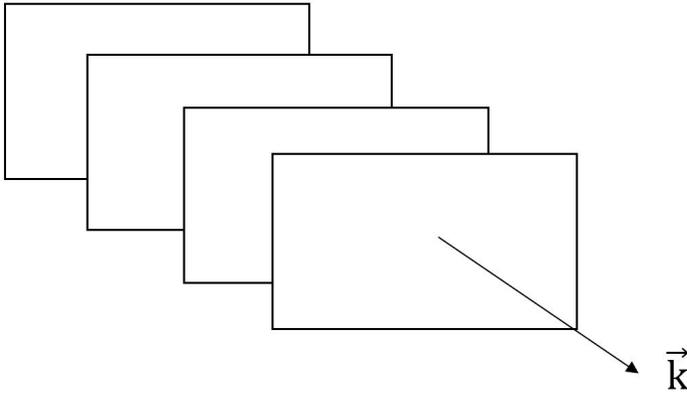


FIGURA 11. Ondas planas.

Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} u_{\vec{k}} &= ik_j u_{\vec{k}}, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_{\vec{k}} &= -i\omega u_{\vec{k}}. \end{aligned}$$

Es por esto que se hace la correspondencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} &\longleftrightarrow ik_j, \\ \frac{\partial}{\partial t} &\longleftrightarrow -i\omega. \end{aligned}$$

Pero recordemos que **esto sólo aplica a ondas planas**, o para **combinaciones lineales de las mismas**, (discretas: series de Fourier; o continuas: transformadas de Fourier.) Para generalizaciones, se parte de esta idea.

3.5. Trenes de onda. Más relaciones de dispersión. Como hemos comentado en diversas ocasiones, para una EDP (Ecuación Diferencial Parcial) lineal, homogénea, con coeficientes constantes, cuya solución es $\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, decimos que la EDP describe el movimiento ondulatorio de una onda dispersiva.

Definición 3.5.1. Combinaciones lineales de los modos fundamentales de ondas dispersivas son llamadas **trenes de onda**. Cada componente del tren, *i.e.*, cada solución (19) es llamada **modo fundamental** de la onda, o bien, **modo de oscilación** o de **vibración**. Y todos ellos son los **modos fundamentales** de la onda.

Estas combinaciones lineales pueden ser **discretas** (numerables; series de Fourier) o **continuas** (transformadas de Fourier.) También aprendimos que para cada ecuación de onda dispersiva, existe una expresión asociada que relaciona la *frecuencia*, ω , con el *número de onda*, k :

$$R(\omega, k) = 0.$$

Algunas veces podemos despejar la ω : $\omega = \omega_1(k), \omega = \omega_2(k), \dots, \omega = \omega_n(k)$, y obtener varias raíces de la relación de dispersión.

El origen de la relación de dispersión depende del movimiento ondulatorio en particular a ser estudiado.

Otras relaciones de dispersión son las siguientes:

1. Para ondas generales en agua, se tiene la siguiente relación de dispersión para las ondas superficiales:

$$(29) \quad \omega^2 = gk \tanh(hk),$$

en donde g es la constante de gravedad (cerca de la superficie terrestre) y h es la profundidad del agua en reposo.

2. Las ondas dispersivas en electromagnetismo tiene la siguiente relación de dispersión:

$$(30) \quad (\omega^2 - \nu_0^2)(\omega^2 - c_0^2 k^2) = \omega^2 \nu_p^2,$$

en donde c_0 es la velocidad de la luz; ν_0 es la frecuencia natural de oscilación y ν_p es la frecuencia de oscilación del plasma.

3.6. Principio de superposición. (Continuación.) Regresamos nuevamente al **principio de superposición**. En el caso discreto, tenemos la serie de Fourier:

$$\varphi(x, t) = \sum_{j=1}^N A_j \cos(k_j x - \omega_j t),$$

en donde $\omega_j = \omega(k_j)$. Aquí $N < \infty$ o $N = \infty$.

Para la superposición continua hacemos uso de la transformada de Fourier:

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \cos(kx - \omega(k)t) dk,$$

en donde $F(k) = \widehat{\varphi}(k, 0)$ es la **transformada de Fourier** de la condición inicial $\varphi(x, 0)$.

La notación usual es con la exponencial compleja:

$$\varphi(x, t) = \sum_{j=-N}^N a_j e^{i(k_j x - \omega_j t)},$$

donde

$$a_j = \frac{k_j}{2\pi} \int_{-\pi/k_j}^{\pi/k_j} f(x) e^{-ik_j x} dx,$$

y $\varphi(x, 0) = f(x)$ es la condición inicial.

Para el caso continuo, la notación usual es:

$$(31) \quad \varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk,$$

con

$$F(k) = \widehat{\varphi}(k, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx,$$

es la transformada de Fourier de la condición inicial $\varphi(x, 0) = f(x)$.

Nuevamente, sea con series o transformadas de Fourier, tenemos una superposición de diferentes modos dispersivos, $e^{i(kx - \omega(k)t)}$, los cuales se mueven a diferentes velocidades dependiendo del número de onda k .

Definición 3.6.1 (Velocidad de fase). Considerando un tren de ondas discreto, la velocidad

$$c_f(k) = \frac{\omega(k)}{k},$$

se llama **velocidad de fase**. Esta velocidad provoca que el tren de ondas se **disperse**. Esto nos dice qué tan rápido se mueve una onda con fase constante: $\theta = kx - \omega(k)t$.

Definición 3.6.2 (Velocidad de grupo). Una aproximación para la solución que aparece en (31) puede ser hecha usando análisis asintótico. A diferencia del caso (mucho más sencillo) de fase constante, aquí uno se fija en un número de onda fijo, $k = k_0$ y calcula la velocidad a la que se mueve ese modo. Uno encuentra que el tren de ondas, alrededor del número de onda $k = k_0$, se mueve con una velocidad

$$c_g(k_0) = \frac{d\omega}{dk}(k_0),$$

la cual es llamada **velocidad de grupo**. Se puede mostrar que la energía que se propaga con la onda es la velocidad de grupo, por lo que es de fundamental importancia en el estudio de propagación de ondas.

Notemos que en el caso de la ecuación de onda: $\omega(k) = \pm c_0 k$, se tiene que las velocidades de onda y de grupo son iguales:

$$c_f(k) = \frac{\omega(k)}{k} = c_0 = \frac{d\omega}{dk}(k) = c_g(k).$$

De este modo, si $c_f(k) = c_g(k)$, tenemos una onda **no dispersiva**. Podemos decir entonces una onda dispersiva de la siguiente forma.

Definición 3.6.3 (Onda dispersiva definida a través de velocidades de fase y de grupo).

Onda dispersiva	\iff	$\frac{\omega(k)}{k} \neq \frac{d\omega}{dk}(k).$
-----------------	--------	---

La **velocidad de grupo**, $c_g(k_0) = \frac{d\omega}{dk}(k_0)$, es la velocidad que juega el papel principal en propagación de ondas.

3.7. Medios no uniformes. Hasta aquí hemos considerado que la amplitud de la onda, A , la frecuencia, ω , y el número de onda, k , son constantes. Pero, ¿qué tal si conforme se desplaza la onda estos van cambiando? Entonces tenemos que pueden ser funciones de (x, t) .

$$\begin{aligned} k &= k(x, t), & \text{número de onda variable,} \\ \omega &= \omega(x, t), & \text{número de onda variable,} \\ A &= A(x, t), & \text{amplitud de onda variable,} \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que un modo dispersivo no uniforme será:

$$\varphi = A(x, t) \cos(\theta(x, t)),$$

en donde $A = A(x, t)$ es la amplitud, $\theta = \theta(x, t) = k(x, t)x - \omega(x, t)t$ es la **fase** y la **frecuencia** será función del número de onda, $\omega(x, t) = \omega(k(x, t))$.

Una clase especial es un tren de ondas uniforme, en el cual

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \text{const.}, \\ \theta &= kx - \omega t, \end{aligned}$$

pero aún con $k = k(x, t)$ y $\omega = \omega(x, t)$.

En el caso general, cuando $\theta = \theta(x, t)$, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.7.1. Si la fase $\theta = \theta(x, t)$ de un movimiento ondulatorio dispersivo es función del tiempo y espacio, (x, t) , se definen el **número de onda no uniforme** y la **frecuencia no uniforme** de la siguiente manera:

$$(32) \quad k(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t),$$

$$(33) \quad \omega(x, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \theta(x, t).$$

Por lo tanto, de la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$ y usando estas definiciones tenemos:

$$- \frac{\partial}{\partial t} \theta = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta \right),$$

es decir, obtenemos la EDP,

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta + \omega \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta \right) = 0,$$

La solución de esta EDP proporciona las propiedades cinemáticas de **trenes de onda**.

También podemos eliminar θ de las ecuaciones (32) y (33) con derivadas cruzadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \theta(x, t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} k(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \omega(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, puesto que la relación de dispersión es $\omega = \omega(k)$, $c_g(k) = \frac{d\omega}{dk}$ y por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial t} k(x, t) + \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial}{\partial x} k(x, t) = 0,$$

i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial t} k + c_g(k) \frac{\partial}{\partial x} k = 0,$$

la cual es una ecuación hiperbólica no lineal. De aquí podemos concluir que existe un comportamiento hiperbólico escondido en ondas dispersivas no uniformes.

Podemos mostrar también que, usando la solución de transformada de Fourier de ondas lineales dispersivas, que **la energía se propaga con la velocidad de grupo**. (Consultar [43].)

3.8. Dispersión no lineal. George Stokes, en 1847, propuso que las ondas de elevación de una superficie de un fluido son ondas no lineales. Enseguida se explica cómo es esto.

Si $\eta = \eta(x, t)$ es la elevación de la superficie con respecto de una línea horizontal (el eje x), entonces Stokes demostró que las ondas se propagan de la siguiente manera:

$$(34) \quad \eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2} k a^2 \cos 2(kx - \omega t) + \frac{3}{8} k^2 a^3 \cos 3(kx - \omega t) + \dots,$$

con relación de dispersión

$$\omega^2 = gk(1 + k^2 a^3 + \dots)$$

En el caso lineal:

$$(35) \quad \omega^2 = gk,$$

lo cual coincide con el límite $hk \rightarrow \infty$ para la relación de dispersión en la ecuación (29).

En estos hechos, hay dos ideas clave.

AFIRMACIÓN 3.8.1. *La existencia de trenes de onda periódicos, en los cuales la variable dependiente, $\eta(x, t)$, depende de la fase*

$$\theta(x, t) = kx - \omega t,$$

pero ya no son ondas sinusoidales. Es decir, la suma en (34) es infinita (ya $\eta(x, t)$ deja de ser sinusoidal).

AFIRMACIÓN 3.8.2. *La relación de dispersión depende de la amplitud, a . Es decir, al substituir $ae^{i(kx - \omega t)}$ en la ecuación dispersiva, no se cancelan las amplitudes en los términos no lineales. Esta es una característica importante en ondas no lineales.*

La afirmación 3.8.1 se puede verificar explícitamente en ondas periódicas de la ecuación de Korteweg-deVries (KdV)

$$(36) \quad \frac{\partial}{\partial t} u + (c_0 + c_1 u) \frac{\partial}{\partial x} u + \nu \frac{\partial^3}{\partial x^3} u = 0,$$

cuyas soluciones pueden ser escritas en términos de las funciones *cnoidales*, $\text{cn}(\theta)$, i.e., las funciones elípticas de Jacobi. (Ver [43] o [21].)

La afirmación 3.8.2, por otra parte, se puede verificar con la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS):

$$(37) \quad i \frac{\partial}{\partial t} u = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \pm \gamma \|u\|^2 u.$$

Linearizando la ecuación de KdV (36), alrededor de $u(x, t) = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + c_0 \frac{\partial}{\partial x} u + \nu \frac{\partial^3}{\partial x^3} u = 0.$$

Substituyendo $u = ae^{i(kx - \omega t)}$:

$$\begin{aligned} -i\omega + c_0(ik) + \nu(ik)^3 &= 0, \\ -i^2\omega + c_0(i^2k) + \nu i^4 k^3 &= 0, \\ \omega - c_0k + \nu k^3 &= 0, \\ \omega &= c_0k - \nu k^3. \end{aligned}$$

que es la relación de dispersion de la ecuación linealizada de KdV. Esto puede ser mejorado por el postulado de Stokes, ecuación (34). Sin embargo, como se mencionó anteriormente, Korteweg y deVries (1895) [23] encontraron soluciones periódicas en términos de las funciones elípticas de Jacobi: *entonces tenemos soluciones **periódicas y no sinusoidales** a una ecuación de onda dispersiva no lineal.*

Si uno busca soluciones a la ecuación de KdV (36), de la forma

$$u(x, t) = f(\theta), \quad \text{con} \quad \theta(x, t) = kx - \omega t,$$

se obtiene uno de los dos siguientes casos:

1. $f(\theta) = \text{cn}(\theta)$, o bien,
2. $f(\theta)$ contiene una amplitud arbitraria a , y la solución (como si fuera solución de una ecuación lineal) involucra cierta relación de dispersión que relaciona ω , k y a .

¿Cuál es la **relación de dispersión no lineal** para la ecuación de KdV? Dicha relación de dispersión está dada por:

$$\omega = c_0 \left(1 + \frac{2\alpha - \beta}{2} \right) k,$$

en donde $\alpha = a/h_0$, $\beta = h_0^2/l^2$, con a la amplitud del modo fundamental, h_0 la profundidad del agua en reposo y l es una longitud de escala típica en la dirección x . (Ver [43], sección 13.12, *Solitary and Cnoidal Waves*, ecuación (13.111).)

Aún más, para las soluciones de la forma $f(\theta) = \text{cn}(\theta)$, se pueden deducir las siguientes dos soluciones en los siguientes límites. Si $\alpha \rightarrow 0$:

$$f(\theta) = \text{cn}(\theta) \rightarrow \cos \theta = \cos(kx - \omega t),$$

es decir, recuperamos el caso lineal.

Por otra parte, si $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 1$, tenemos

$$f(\theta) = \text{cn}(\theta) \rightarrow \eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{ac_1}{12\nu}} (x - Ut) \right],$$

con $U = c_0 + \frac{1}{3}ac_1$. Esta es la onda solitaria que observó Russell en Edinburgo, Escocia, en 1834. (Consultar [21].)

Algunas otras ecuaciones han sido estudiadas en otros contextos. Ya mencionamos la ecuación no lineal de Schrödinger, ecuación (37).

Otra ecuación importante es la ecuación no lineal de Klein-Gordon:

$$(38) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + V'(\varphi) = 0,$$

la cuál es una generalización de la ecuación relativista y cuántica de Klein-Gordon (24).

La existencia de trenes de onda periódicos es una característica típica de las ondas dispersivas no lineales, las cuales deben seguir del postulado de Stokes. De otro modo, estudios más detallados deben ser realizados.

En este caso, una extensión del modo fundamental de ondas dispersivas,

$$\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

solamente por una simple superposición de Fourier, no es posible.

Muchas técnicas han sido desarrolladas como el método de dispersión inversa, las transformadas de Bäcklund, las funciones propias cuadradas, superficies de Riemann, el método de la monodromía, el método de Hirota y el de la función τ (tau), para el estudio y para resolver las ecuaciones de KdV, NLS y sine-Gordon (ecuación (38) con $V(\varphi) = \cos \varphi$), entre muchas otras, siendo estos los más típicos.

Todos estos métodos pueden ser estudiados a fondo y por separado, pero no lo haremos en este curso. Para tal fin, pueden consultar [10], [21], [34], [37], [39], [43].

3.9. Tarea.

TAREA 3.1. *En la tarea 2.8, se consideró la ecuación (18), la cual describe una onda dispersiva e hiperbólica. Calcule su velocidad de fase, (20). ¿Cuál es su velocidad de grupo, (21)? ¿Son iguales su velocidad de fase y su velocidad de grupo? ¿Por qué sí lo son o por qué no? (Hint: Use las definiciones 3.1.3 y 3.1.4.)*

TAREA 3.2. *Usando el modo fundamental de una onda dispersiva, $\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, verifique que la relación de dispersión dada corresponde a las siguientes ecuaciones.*

También intente encontrar la relación de dispersión considerando modos fundamentales de la forma $\varphi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$. ¿Con cuál de las dos formas les fue más sencillo encontrar la relación de dispersión?

1. **La ecuación del haz:**

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi + \gamma^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi = 0; \quad \omega(k) = \pm \gamma k^2.$$

2. **La ecuación lineal de Korteweg-de Vries.** Aparece en ondas de onda largas y poco profundas:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + c_0 \frac{\partial}{\partial t} u + \nu \frac{\partial^3}{\partial x^3} u = 0; \quad \omega(k) = c_0 k - \nu k^3.$$

3. **La ecuación lineal de Boussinesq.** También aparece en ondas de onda largas y poco profundas:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi = \beta^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \varphi; \quad \omega(k) = \pm \alpha k \frac{\alpha k}{\sqrt{1 + \beta^2 k^2}}$$

TAREA 3.3. Para las ecuaciones que aparecen en la tarea 3.2:

1. Encuentre las velocidades de fase 3.1.3, de grupo 3.1.4 y compárelas.
2. Determine, según nuestra definición, ecuación (22), si son ondas dispersivas o no lo son.

TAREA 3.4. Para las ecuaciones (29) y (30):

1. También encuentre las velocidades de fase, definición 3.1.3, $c_f(k)$, de grupo, definición 3.1.4, $c_g(k)$, y compárelas.
2. ¿Son ondas dispersivas o no lo son? (Ecuación (22).) Explique.

TAREA 3.5. Usando el método de la fase estacionaria de Análisis asintótico, aplicado a la solución de onda dispersiva (31), encuentre que la velocidad de grupo en el número de onda k_0 es, precisamente, $c_g(k_0) = \frac{d\omega}{dk}(k_0)$. (Este problema es un poco más avanzado en donde conocimientos de Análisis asintótico son requeridos, los cuales usualmente se dan en cursos de primer año posgrado.)

TAREA 3.6. Demuestre que la energía de una onda dispersiva se mueve con la velocidad de grupo. Consultar [43].

TAREA 3.7. Usando el modo fundamental de ondas dispersivas, $u = Ae^{i(kx - \omega t)}$, verifique las afirmaciones 3.8.1 y 3.8.2 para las ecuaciones KdV (36) y NLS (37), respectivamente. Para la afirmación 3.8.1, vaya a las referencias [43] o [21].

TAREA 3.8. Para la ecuación de KdV (36), usando soluciones de la forma

$$u(x, t) = f(x - ct),$$

encuentre las soluciones periódicas cnoidales de Jacobi

$$u(x, t) = a + b \operatorname{cn}^2(\alpha(x - ct - x_0)|m)$$

(para ciertas constantes a, b, α y m) y la solución de onda solitaria:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \kappa^2 \operatorname{sech} \left(\frac{1}{2} \kappa (x - \kappa^2 t - x_0) \right).$$

Puede consultar [10] o [21].

TAREA 3.9. Considere la ecuación (29). En el límite, $hk \rightarrow \infty$, encuentre la relación de dispersión dada en la ecuación (35).

4. ONDAS DISPERSIVAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

En esta sección trataremos a mayor detalle la relación entre ondas dispersivas y las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) que las describen. En la sección siguiente veremos cómo resolver estas EDPs usando la Transformada de Fourier.

Como mencionamos anteriormente, ésta es una de las dos clases principales de ondas, para no llamarla “la primera” ni “la principal”, aunque por el número de aplicaciones puede ser así. El primer estudio es el de ondas hiperbólicas, que forman una de las clases principales de ondas, principalmente descrita por la ecuación clásica de onda o ecuación de D’Alambert:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - c_0^2 \Delta u = 0.$$

Sin embargo, como también fue mencionado anteriormente, no todas las ondas pueden ser descritas por ecuaciones hiperbólicas. Podríamos entonces desarrollar física y matemáticas más elaboradas para extender el estudio de ecuaciones hiperbólicas empujando la teoría a comportamientos específicos de ondas hiperbólicas.

Sin embargo, estas ondas pueden ser parte de la otra categoría principal de ondas, **ondas dispersivas**.

La **definición** de **ondas dispersivas**, como decíamos, es menos precisa. Entonces definiciones más restrictivas serán dadas, y ondas dispersivas más complejas, elaboradas o sofisticadas se estudiarán dependiendo del problema en particular por resolver.

Por esta razón, las ondas dispersivas cubrirán una amplia gama de posibilidades de estudio. Enfatizamos que esta definición está **enfocada al tipo de soluciones**, *no a la forma de la EDP* que debe ser satisfecha.

Para mayores detalles puede consultar el texto de G.B: Whitham [43].

4.1. Relaciones de dispersión. (Continuación.) Para ondas lineales, la dispersión es encontrada por la existencia de soluciones elementales a Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) (a ser determinadas) de la forma:

$$\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)},$$

las cuales, al combinarlas linealmente, forman trenes de onda sinusoidales, con

- k : el número de onda (equivalente a una “frecuencia” espacial);
- ω : la frecuencia de oscilación (que en realidad es la frecuencia angular, pero se le llama simplemente *frecuencia* en este contexto);
- A : amplitud de la solución elemental dispersiva.

Definición 4.1.1. El caso más simple es el de ondas lineales, que corresponden a EDPs lineales (homogéneas y de coeficientes constantes). Este caso nos lleva a poner atención en el factor A y notamos que se elimina por linealidad, por lo que deducimos que en las ecuaciones lineales A es **arbitraria**. Por tanto, sólo permanece una relación entre k y ω :

$$R(\omega, k) = 0,$$

la cual es la **relación de dispersión**. Aquí R es una función de dos variables (o de tres o cuatro si $k = \vec{k} \in \mathbb{R}^2$ ó \mathbb{R}^3) y depende del problema específico en consideración.

Ejemplo 4.1.I (*La ecuación del haz*). Buscando soluciones de la forma $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ en la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi + \gamma^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi = 0,$$

obtenemos

$$R(\omega, k) = \omega^2 - \gamma^2 k^4 = 0.$$

Hecho importante. En general, para ecuaciones lineales, homogéneas y con coeficientes constantes, no se requerirá la ecuación una vez la relación de dispersión sea conocida.

Similarmente, una vez la relación de dispersión sea conocida, ¡la Ecuación Diferencial Parcial (EDP) que gobierna el movimiento ondulatorio puede ser construída!

Si podemos resolver la relación de dispersión $R(\omega, k) = 0$ para ω :

$$\omega = \omega(k),$$

todas sus raíces necesitan ser *raíces reales*, a saber:

$$\omega = \omega_1(k),$$

$$\omega = \omega_2(k),$$

$$\vdots$$

$$\omega = \omega_N(k),$$

deben ser reales, si la ecuación es un polinomio de grado N .

Ejemplo 4.1.II. Para la ecuación del haz,

$$(39) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi + \gamma^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi = 0,$$

encontramos

$$\omega^2 - \gamma^2 k^4 = 0.$$

la cual tiene dos diferentes modos:

$$(40) \quad \omega = \omega_1(k) = \gamma k^2 = 0,$$

$$\omega = \omega_2(k) = -\gamma k^2 = 0,$$

4.2. Superposición. Representación en N dimensiones.

4.2.1. Superposición. En problemas lineales, combinaciones lineales de los modos (principio de superposición) pueden ser escritas para crear la solución completa del sistema.

Es más sencillo trabajar con exponenciales complejas que con funciones trigonométricas sinusoidales. El principio de superposición nos permite trabajar con:

$$\varphi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)},$$

puesto que es equivalente a $\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + iA \sin(kx - \omega t)$. Es decir, $\text{Re}[\varphi(x, t)] = A \cos(kx - \omega t)$. O, en el caso de que A sea compleja, $A = |A|e^{i\eta}$,

$$\varphi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} = |A| e^{i(kx - \omega t + \eta)},$$

y así, $\text{Re}[\varphi(x, t)] = A \cos(kx - \omega t + \eta)$.

4.2.2. En más dimensiones. En más dimensiones, $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{k} \in \mathbb{R}^N$, tenemos

$$\varphi(\vec{x}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}.$$

A la función

$$\theta(\vec{x}, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t,$$

se le llama **fase** y nos dice en cuál parte del ciclo oscilatorio está nuestra onda. Por decir, si $\theta(\vec{x}, t) = \pi/4$, estamos en $1/8$ parte del ciclo: $2\pi/8 = \pi/4$.

Ahora bien,

$$\nabla \theta(\vec{x}, t) \equiv \vec{k},$$

es llamado **vector de onda** (como similitud al número de onda). Nos dice en qué dirección se mueve la onda plana descrita por esta fase. Es decir, \vec{k} es normal (perpendicular) al plano $\theta(\vec{x}, t) = \text{constante}$.

Definición 4.2.1. Para calcular la “frecuencia espacial”, necesitamos calcular la norma del vector de onda \vec{k} :

$$k \equiv \|\nabla\theta(\vec{x}, t)\| = \|\vec{k}\|,$$

y ésta la definimos como el **número de onda**, la cual podríamos decir que corresponde a una “frecuencia espacial.”

Definición 4.2.2. De manera similar. calculamos la frecuencia (angular),

$$\omega \equiv -\frac{\partial}{\partial t}\theta(\vec{x}, t).$$

Definición 4.2.3. Ya con estas definiciones, podemos definir la **longitud de onda** y el **periodo** de una onda.

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|},$$

$$T \equiv \frac{2\pi}{\omega}.$$

Cualquier valor particular (fijo) de la fase, $\theta(\vec{x}, t) = \theta_0$, se mueve en la dirección $\vec{k} = \|\vec{k}\|\hat{k}$ (con $\|\hat{k}\| = 1$), con una velocidad de fase:

$$\vec{c}_f(\vec{k}) = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}\hat{k}.$$

La **rapidez de fase** es entonces $c_f(\vec{k}) = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}$.

Ejemplo 4.2.I. Para la ecuación de onda en \mathbb{R}^N ,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - c_0^2\Delta\varphi = 0,$$

la relación de dispersión es:

$$\omega^2 - c_0^2\|\vec{k}\|^2 = 0,$$

con dos modos:

$$\omega = \omega_1(\vec{k}) = c_0\|\vec{k}\|,$$

$$\omega = \omega_2(\vec{k}) = -c_0\|\vec{k}\|.$$

De aquí que las rapidezces de propagación son:

$$c_1(\vec{k}) = \frac{\omega_1}{\|\vec{k}\|} = c_0,$$

$$c_2(\vec{k}) = \frac{\omega_2}{\|\vec{k}\|} = -c_0,$$

con velocidades de propagación:

$$\vec{c}_1(\vec{k}) = c_0\hat{k},$$

$$\vec{c}_2(\vec{k}) = -c_0\hat{k},$$

i.e., la velocidad de fase coincide con la velocidad de propagación en este caso. (Aquí, \hat{k} el vector unitario en la dirección de \vec{k} .)

En general, $\vec{c} = \vec{c}(\vec{k})$ es de hecho una función de varias variables, k_1, k_2, \dots, k_N , y ésta es la razón de que el fenómeno de dispersión ocurra.

De esta forma, en las combinaciones lineales de Fourier (sean éstas series o transformadas) tenemos componentes con diferentes números y vectores de onda, teniendo entonces paquetes o trenes de onda que se propagan a diferentes velocidades y el fenómeno de dispersión es observado.

4.3. Clasificación de ondas dispersivas. Ahora bien, para clasificar (identificar) ondas dispersivas comenzamos excluyendo el caso

$$c(k) = \text{constante},$$

puesto que observamos que todas las componentes del tren de onda se propagan a la misma velocidad, $c(k) = \text{constante}$, *i.e.*, **no hay dispersión**.

También se requieren **soluciones reales** de la relación de dispersión $R(\omega, k) = 0$.

Por ejemplo, para la ecuación del calor esto no es posible. La ecuación del calor es $\varphi_t = \gamma \Delta \varphi$. Buscando soluciones de forma dispersiva, $\varphi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$, obtenemos $-i\omega = -\gamma k^2 \implies \omega = -i\gamma k^2$. Por tanto, la ecuación del calor no tiene soluciones de onda dispersiva. Esta relación de dispersión es compleja.

Definición 4.3.1 (ONDA DISPERSIVA LINEAL). Una **onda dispersiva lineal** es una onda cuya relación de dispersión $\omega = \omega(\vec{k})$, es tal que:

(a):

$$\omega = \omega(\vec{k}) \in \mathbb{R}$$

i.e., es real, y

(b):

$$(41) \quad \det \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} \right) \neq 0.$$

Para problemas en una dimensión, la relación (41) coincide con la condición antes encontrada:

$$\frac{d^2}{dk^2} \omega \neq 0.$$

Esta condición es más fuerte que $\frac{dc}{dk} \neq 0$, puesto que $\frac{d^2}{dk^2} \omega \neq 0$ excluye el caso $\omega(k) = c_0 k + d$, el cual corresponde a una onda hiperbólica, como veremos adelante.

Sin embargo,

$$\frac{dc_f}{dk} = 0 \implies c_f(k) = c_0 \implies \frac{\omega(k)}{k} = c_0 \implies \omega(k) = c_0 k,$$

siendo un caso particular de $\omega(k) = c_0 k + d$.

Ahora bien, si

$$(42) \quad \omega(k) = c_0 k + d, \quad \text{con} \quad d \neq 0,$$

entonces

$$c_f(k) = \frac{\omega(k)}{k} = c_0 + \frac{d}{k},$$

por lo que

$$\frac{dc_f}{dk} = -\frac{d}{k^2},$$

lo cual parece como si fuera una onda dispersiva, pero **no** lo es. Para verificar que no es dispersiva, observemos lo siguiente. Tomemos una componente de Fourier de esta onda:

$$\varphi_k(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} = e^{i(kx - (c_0 k + d)t)} = e^{-idt} e^{i(kx - c_0 kt)}.$$

Tomando una combinación lineal (Transformada de Fourier):

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \varphi_k(x, t) dk, \\ &= e^{-idt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx - c_0 kt)} F(k) dk, \\ &= e^{-idt} u(x, t), \end{aligned}$$

siendo $u(x, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx - c_0 kt)} F(k) dk$, solución de $\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, la cual es una

ecuación **hiperbólica**. El factor e^{-idt} es sólo un factor (de la amplitud) oscilante en el tiempo, mas no dispersivo.

Esto significa que la relación de dispersión $\omega(k) = c_0 k + d$ ($d \neq 0$), corresponde a una ecuación de onda no dispersiva, a saber:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + id \varphi = 0.$$

La condición $\frac{dc_f}{dk} \neq 0$ no excluye este caso (ecuación (42)), al contrario, lo incluye; por tanto, ésta no debe ser la definición de ondas dispersivas. Por otra parte, la condición $\frac{dc_f}{dk} = 0$ sólo considera el caso $\omega(k) = c_0 k$.

Observación 4.3.2. Podríamos tener

$$\lim_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial k_i \partial k_j} \right) \omega(\vec{k}) = 0 \quad \text{ó} \quad \pm \infty.$$

Entonces, con una condición como ésta, un análisis asintótico (aproximativo) se debe llevar a cabo en detalle.

4.4. Correspondencia entre Ecuaciones Diferenciales Parciales y Relaciones de Dispersión. Este es un tema clave para propósitos de modelación matemática o descripciones fundamentales de otros fenómenos como sucede, por ejemplo, en la teoría cuántica. Como se mencionó anteriormente, es equivalente (hasta cierto punto) trabajar con la **relación de dispersión** que con una **ecuación diferencial parcial lineal, homogénea, con coeficientes constantes**, que describa efectos dispersivos.

Dados los ejemplos anteriores, para obtener la relación de dispersión (la cual debe ser real), necesitamos **potencias pares** (o derivadas pares) y/o **potencias impares** (derivadas impares).

- Debemos tener $(-i\omega)^2, (ik)^2 \rightarrow -\omega^2, -k^2$,
- o bien, $(-i\omega)^3, (ik)^3 \rightarrow i\omega^3, -ik^3$, y entonces eliminar i de la ecuación.

De esta manera, en general, necesitamos *coeficientes reales* con potencias pares y *coeficientes puramente imaginarios* con potencias impares. Por ejemplo:

$$(43) \quad R(\omega, k) = \alpha(ik)^2 + \beta(-i\omega)^4 = -\alpha k^2 + \beta\omega^4 = 0,$$

es una relación de *dispersión real*. O bien,

$$(44) \quad R(\omega, k) = i\gamma(-i\omega)^3 + i\delta(ik)^5 = -i^4\gamma\omega^3 + i^6\delta k^5 = -\gamma\omega^3 - \delta k^5 = 0,$$

es también una relación de *dispersión real*.

La misma cosa sucede con derivadas. La onda plana $\varphi(x, t) = Ae^{ikx - \omega t}$ debe satisfacer un ecuación diferencial con derivadas de orden par con coeficientes reales:

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + \beta \frac{\partial^4}{\partial t^4} \varphi = \alpha(ik)^2 \varphi + \beta(-i\omega)^4 \varphi = (-\alpha k^2 + \beta\omega^4) \varphi = 0$$

la cual es una expresión con **valores reales**.

De manera similar, para coeficientes *puramente imaginarios* tenemos:

$$i\gamma \frac{\partial^3}{\partial t^3} \varphi + i\delta \frac{\partial^5}{\partial x^5} \varphi = i\gamma(-i\omega)^3 \varphi + i\delta(ik)^5 \varphi = -i^4\gamma\omega^3 \varphi + i^6\delta k^5 \varphi = -(\gamma\omega^3 + \delta k^5) \varphi = 0,$$

se necesitan derivadas de orden impar.

De esta discusión podemos concluir que en una Ecuación Diferencial Parcial podemos mezclar derivadas de orden par e impar siempre y cuando se tengan los coeficientes reales e imaginarios apropiados con el fin de obtener una relación de dispersión real.

Ejemplo 4.4.I. La ecuación de Schrödinger mezcla derivadas pares e impares:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi,$$

la cual tiene una relación de dispersión asociada:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m} k^2,$$

siendo ésta una expresión real.

Esto fue posible dado que podemos admitir coeficientes puramente imaginarios.

4.5. Relación de Dispersión y EDPs. Considere un polinomio P con:

- *coeficientes reales para potencias pares, y*
- *coeficientes puramente imaginarios para potencias impares.*

Entonces, este polinomio define una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) **lineal, homogénea y de coeficientes constantes**:

$$(45) \quad P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi = 0,$$

de forma tal que, cuando usamos ondas planas como soluciones

$$\varphi(x, y, z, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (\vec{x} = (x, y, z)),$$

obtenemos la **relación de dispersión**:

$$(46) \quad P(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3) = 0.$$

De este argumento resuelta evidente la correspondencia usual que nos enseñan en nuestros cursos de propagación de ondas en las carreras de física e ingenierías:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi = -i\omega \varphi \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi = ik_j \varphi, \quad (j = 1, 2, 3),$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\omega \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \longleftrightarrow ik_j, \quad (j = 1, 2, 3),$$

o bien,

$$\omega \longleftrightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad k_j \longleftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, 3),$$

Por lo tanto, es equivalente tener una EDP lineal, homogénea y de coeficientes constantes para un movimiento ondulatorio dispersivo, ecuación (45), a tener la relación de dispersión misma, ecuación (46).

Observación 4.5.1. Esto obviamente restringe a relaciones de dispersión del tipo polinomial. Podríamos entonces preguntarnos si hay relaciones de dispersión de una forma funcional más general. La respuesta es **sí**. Estas se pueden obtener usando funciones no sólo algebraicas (que generalizan los polinomios), sino también con funciones trascendentes como para ondas de gravedad en superficies de ondas en el agua, como en el mar, en donde se tiene una relación de dispersión muy general como $\omega^2 = gk \tanh(hk)$, en donde g es la aceleración de gravedad cerca de la superficie terrestre y h es la profundidad del agua en reposo. (*Nota:* no confundir con *ondas gravitacionales.*) Ver por ejemplo, [43].

Soluciones de la forma de onda plana $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ pueden describir el comportamiento de ondas en unas coordenadas, pero un comportamiento más complejo en otras coordenadas.

Ejemplo 4.5.I (Teoría de ondas en agua profunda). Se supone que las ondas se propagan de forma horizontal, pero la dependencia sobre la coordenada vertical no es oscilatoria

Ejemplo 4.5.II (Comportamiento tipo ondulatorio en todas las variables). Se requiere una ecuación integro-diferencial, en una dimensión:

$$(47) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, t) d\xi = 0,$$

en donde $\varphi = \varphi(x, t)$ y $K(x)$ es el kernel de la ecuación y es una función dada de antemano. Notemos que la ecuación es lineal. Podemos entonces buscar soluciones de onda plana, $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$, por lo que:

$$\begin{aligned} -i\omega\varphi + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) ik\varphi(\xi, t) d\xi &= 0, \\ -i\omega Ae^{i(kx - \omega t)} + ikAe^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) e^{ik\xi} d\xi &= 0, \\ \omega e^{ikx} - k \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) e^{ik\xi} d\xi &= 0. \end{aligned}$$

Definamos $\zeta = x - \xi$. Entonces:

$$\begin{aligned} \omega e^{ikx} - k \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{ik(x - \zeta)} d\zeta &= 0, \\ \omega e^{ikx} - k e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta &= 0, \\ \omega - k \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta &= 0, \end{aligned}$$

es la relación de dispersión. De esta manera, la velocidad de fase es:

$$c_f(k) = \frac{\omega}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta.$$

Así pues, $c = c_f(k)$ es la transformada de Fourier del kernel $K(x)$ y así:

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_f(k) e^{ikx} dk.$$

Por tanto, dada cualquier relación de dispersión $\omega = \omega(k)$, podemos construir un kernel $K(x)$, para obtener la ecuación de onda dispersiva deseada, (47).

En particular, sea:

$$c(k) = c_0 + c_2 k^2 + c_4 k^4 + \dots + c_{2M} k^{2M}.$$

Entonces,

$$K(x) = c_0 \delta(x) - c_2 \delta''(x) + c_4 \delta^{(4)}(x) + \dots + (-1)^M c_{2M} \delta^{(2M)}(x),$$

en donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac. De aquí se sigue que la ecuación (47) resulta ser:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + c_4 \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} + \dots + (-1)^M c_{2M} \frac{\partial^{2M+1} \varphi}{\partial x^{2M+1}} = 0.$$

Cuando $c(k)$ es más general, (como una serie de Taylor), tendríamos una ecuación diferencial con una serie infinita en derivadas. Dichas derivadas se suman usando la ecuación (47).

4.6. Tarea.

TAREA 4.1. Encuentre los modos de vibración, ecuación (40), de la ecuación del haz, (39).

TAREA 4.2. Para las siguientes ecuaciones, verifique que la relación de dispersión asociada es la indicada. Verifique también que todas son ondas dispersivas de acuerdo a nuestra definición. Encuentre sus velocidades de fase y de grupo.

1.

$$(48) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \alpha^2 \Delta \varphi + \beta^2 \varphi = 0, \quad \omega(k) = \pm \sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2}.$$

2.

$$(49) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \alpha^2 \Delta \varphi = \beta^2 \Delta \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi \right), \quad \omega(k) = \pm \frac{\alpha k}{\sqrt{1 + \beta^2 k^2}}.$$

3.

$$(50) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi + \gamma^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi = 0, \quad \omega(k) = \pm \gamma k^2.$$

4.

$$(51) \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \varphi + \beta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \varphi = 0, \quad \omega(k) = \alpha k - \beta k^3.$$

Observación 4.6.1.

1. La ecuación (48) es hiperbólica y dispersiva: $\frac{d^2}{dk^2} \omega(k) \neq 0$. Representa vibraciones de amplitud φ , con fuerzas restaurativas $-\beta^2 \varphi$. Es la ecuación de Klein-Gordon que aparece en Teoría Cuántica. Las ecuaciones (49), (50) y (51) ya no son hiperbólicas, pero son de hecho dispersivas.
2. La ecuación (49) aparece en elasticidad para ondas longitudinales en barras. Aparece también en ondas en el agua, como la ecuación de Boussinesq para ondas largas.
3. La ecuación (50) modela vibraciones de flexión en barras y haces.
4. La ecuación (51) es la ecuación linealizada de Korteweg-deVries, cuya ecuación no lineal correspondiente modela ondas largas en agua poco profunda.

TAREA 4.3. Para las relaciones de dispersión, ecuaciones (43) y (44), encuentre las EDPs correspondientes que modelan ondas dispersivas.

TAREA 4.4. Construya la EDP correspondiente a la relación de dispersión:

$$\omega^2 = gk \tanh(hk).$$

Puede consultar el texto de Whitham [43].

5. ONDAS DISPERSIVAS: SOLUCIÓN POR TRANSFORMADAS DE FOURIER

5.1. Definición de ondas dispersivas (continuación.) Revisemos nuevamente la definición de ondas dispersivas para posteriormente aprender cómo generalizarla y estudiar cómo resolver la ecuación dispersiva.

Definición 5.1.1 (Definición de Ondas Dispersivas). Una definición restrictiva de **ondas dispersivas** está contenida con la solución de onda plana

$$\varphi(\vec{x}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)},$$

junto con la **relación de dispersión**

$$R(\omega, \vec{k}) = 0, \quad \text{o bien,} \quad \omega = \omega(\vec{k}),$$

que satisface:

$$\begin{aligned} \omega = \omega(\vec{k}) &\in \mathbb{R}, \\ \det \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} \right) &\neq 0. \end{aligned}$$

Esta definición es demasiado restrictiva, pues considera sólo ondas asociadas a Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) lineales, homogéneas, con coeficientes constantes. No obstante, éste es el punto de partida para generalizar a otras ecuaciones que no son lineales, ni homogéneas, ni de coeficientes constantes para clasificarlas como dispersivas.

Ejemplo 5.1.I. Entonces, uno generaliza un paso a la vez. Por ejemplo, la **ecuación del haz** con coeficientes **no** constantes:

$$(52) \quad \varphi_{tt} + \gamma^2(x)\varphi_{xxxx} = 0,$$

no tiene soluciones del tipo onda plana $\varphi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$. Esta ecuación representa la evolución de una **onda del haz dispersiva** en un medio **no uniforme**, con $\gamma = \gamma(x)$.

El tipo de soluciones de onda plana podría existir localmente, es decir, en intervalos del tipo $(x_o - \Delta x, x_o + \Delta x)$ con $|\Delta x| \ll |x_o|$.

Para soluciones de la ecuación (52) se espera tener un comportamiento similar al caso cuando $\gamma = \gamma_0$ es constante, pues la estructura de la ecuación es básicamente la misma.

Podemos considerar una separación de variables de la forma:

$$(53) \quad \varphi(x, t) = F(kx)e^{-i\omega t}, \quad \text{con } \omega = \omega(k),$$

en donde F es una función oscilatoria (quizá F podría ser una función de Bessel o de Airy.) Esta solución también describe una **onda dispersiva**, pero es difícil incluirla en la definición compacta de ondas dispersivas dada anteriormente.

Sin embargo, oscilaciones en el espacio están acopladas con oscilaciones en el tiempo a través de la **relación de dispersión**. Debemos entonces esperar las propiedades características de ondas dispersivas, **pero sólo localmente**, en problemas no homogéneos como el aquí mencionado.

Cabe hacer notar que la ecuación de Schrödinger cae en este tipo de ecuaciones, por lo que representa una onda dispersiva.

La misma idea aplica para **problemas no lineales** (ecuaciones no lineales): restringimos el tipo de soluciones o, mucho mejor, linealizamos la ecuación y determinamos si la linealización es una ecuación dispersiva. Decimos entonces que la generalización no lineal es una **ecuación de onda dispersiva no lineal**.

Una planteamiento aún más general es el de una formulación variacional de EDPs. Bajo este punto de vista variacional (integral de acción, ecuaciones de Euler-Lagrange, Hamiltoniano, ecuaciones de Hamilton) podemos definir ondas dispersivas que cubren un tipo más amplio de ecuaciones. Para más detalles de principios variacionales en el estudio de propagación de ondas, véase [43], capítulo 14.

5.2. Solución de ecuaciones de onda dispersivas por Transformadas de Fourier. El **método de Transformadas de Fourier** es muy restrictivo y se limita a Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) que describen ondas dispersivas, y se limitan a ecuaciones²:

²Aplica lo mismo que para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs). La ecuación:

$$a_0 \ddot{y} + b_0 \dot{y} + c_0 y = 0,$$

la cual es lineal, homogénea y de coeficientes constantes, tiene soluciones de la forma

$$y(t) = e^{rt},$$

como lo aprendemos en nuestro primer curso de EDOs en la universidad.

1. lineales,
2. con coeficientes constantes, y
3. homogéneas.

Aquí, tenemos un polinomio P de grado N en la variable ω , de tal forma que tenemos una PDE de orden N en t :

$$(54) \quad P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = 0.$$

Esta sería una PDE la cual satisface las propiedades 1, 2, 3 arriba mencionadas. Entonces, admite soluciones de la forma:

$$(55) \quad \varphi(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \text{con } A = \text{constante},$$

en donde $\vec{x} = (x, y, z)$ y $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ es el **vector de onda**. De esta forma, tenemos la relación de dispersión

$$P(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3) = 0.$$

Esta es la **relación de dispersión**, la cual puede ser escrita como

$$R(\omega, \vec{k}) = 0.$$

Habíamos pedido que esta ecuación es de grado N en ω . Así, en principio, podemos resolver para ω y entonces obtener N diferentes **modos de onda** (diferentes formas o frecuencias de oscilación):

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1(\vec{k}), \\ \omega &= \omega_2(\vec{k}), \\ &\vdots \\ \omega &= \omega_N(\vec{k}). \end{aligned}$$

Puesto que la ecuación (54) es lineal, podemos obtener una combinación lineal de las soluciones de onda plana, ecuación (55), como una serie o transformada de Fourier:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \Psi(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t)} d\vec{k}.$$

Para cada modo de onda $\omega = \omega_j(\vec{k})$, ($j = 1, 2, \dots, N$), tenemos una expresión como la anterior, de forma tal que, tomando la combinación lineal de ellas, obtenemos la expresión general:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_1(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_1(\vec{k})t)} d\vec{k} + \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_2(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_2(\vec{k})t)} d\vec{k} \\ &+ \dots + \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_N(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_N(\vec{k})t)} d\vec{k}. \end{aligned}$$

Las funciones $\Psi_j(\vec{k})$ ($j = 1, 2, \dots, N$) se encuentran dando N condiciones iniciales para $\varphi(\vec{x}, t)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, 0) &= f_1(\vec{x}), \\ \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{x}, 0) &= f_2(\vec{x}), \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{N-1}}{\partial t^{N-1}}\varphi(\vec{x}, 0) &= f_N(\vec{x}), \end{aligned}$$

En seguida tomaremos como ejemplo el caso $N = 2$.

Ejemplo 5.2.I. Supongamos que la relación de dispersión, $R(\omega, \vec{k}) = 0$, es una función de grado $N = 2$ en ω . Supongamos además que $\vec{x} = (x, 0, 0)$ y $\vec{k} = (k, 0, 0)$ son solamente vectores uni-dimensionales. Encontrar la solución de la ecuación que describe una onda dispersiva.

En este caso, la relación de dispersión, $R(\omega, k) = 0$, tiene dos raíces, las cuales deben ser reales de acuerdo a nuestra definición de ondas dispersivas:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1(\vec{k}) = \omega(\vec{k}), \\ \omega &= \omega_2(\vec{k}) = -\omega(\vec{k}).\end{aligned}$$

(Esto, el hecho de que $\omega_2 = -\omega_1$, supone que el coeficiente de grado 1 en ω en la relación de dispersión es cero.) Así pues, requerimos dos funciones, $\Psi_1(k)$ y $\Psi_2(k)$ (las cuales están por determinarse) tales que:

$$(56) \quad \varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(k) e^{i(kx + \omega(k)t)} dk.$$

Debemos proporcionar dos condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\varphi(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) &= g(x),\end{aligned}$$

para encontrar $\Psi_1(k)$ y $\Psi_2(k)$.

Por tanto, evaluando (56) en $t = 0$,

$$f(x) = \varphi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(k) e^{ikx} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(k) e^{ikx} dk.$$

Calculando la derivada de (56) respecto a t y evaluando en $t = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega(k) \Psi_1(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} i\omega(k) \Psi_2(k) e^{i(kx + \omega(k)t)} dk.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega(k) \Psi_1(k) e^{ikx} dk + \int_{-\infty}^{\infty} i\omega(k) \Psi_2(k) e^{ikx} dk.$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}f(x) = \varphi(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_1(k) + \Psi_2(k)) e^{ikx} dk, \\ g(x) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega(k) (\Psi_1(k) - \Psi_2(k)) e^{ikx} dk.\end{aligned}$$

Estas son Transformadas de Fourier inversas. Por el Teorema de inversión de Fourier, obtenemos:

$$\begin{aligned}\Psi_1(k) + \Psi_2(k) = F(k) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dk, \\ -i\omega(k) (\Psi_1(k) - \Psi_2(k)) = G(k) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dk.\end{aligned}$$

Podemos resolver este sistema para $\Psi_1(k)$ y $\Psi_2(k)$:

$$(57) \quad \begin{aligned} \Psi_1(k) &= \frac{1}{2} \left[F(k) + i \frac{G(k)}{\omega(k)} \right], \\ \Psi_2(k) &= \frac{1}{2} \left[F(k) - i \frac{G(k)}{\omega(k)} \right]. \end{aligned}$$

Al sustituir estas dos funciones en (56), obtenemos la solución φ en términos de $F(k)$ y $G(k)$ (las Transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente.) La integración de estas expresiones depende de la forma de la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$.

De esta manera, la solución, ecuación (56), toma la forma:

$$(58) \quad \begin{aligned} \varphi(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) (e^{i(kx - \omega(k)t)} + e^{i(kx + \omega(k)t)}) dk \\ &+ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k)}{\omega(k)} (e^{i(kx - \omega(k)t)} - e^{i(kx + \omega(k)t)}) dk. \end{aligned}$$

También puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(k) + i \frac{G(k)}{\omega(k)} \right) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(k) - i \frac{G(k)}{\omega(k)} \right) e^{i(kx + \omega(k)t)} dk. \end{aligned}$$

A pesar de su forma, esta solución es real. Procedamos a checar esto. Puesto que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales, los complejos conjugados de sus Transformadas de Fourier son:

$$\begin{aligned} F^*(k) &= F(-k), \\ G^*(k) &= G(-k). \end{aligned}$$

Entonces, de la ecuación (57), y recordando que $\omega(k)$ es real:

$$\begin{aligned} \Psi_1^*(k) &= \frac{1}{2} \left[F^*(k) - i \frac{G^*(k)}{\omega^*(k)} \right] = \frac{1}{2} \left[F(-k) + i \frac{G(-k)}{-\omega(k)} \right], \\ \Psi_2^*(k) &= \frac{1}{2} \left[F^*(k) + i \frac{G^*(k)}{\omega^*(k)} \right] = \frac{1}{2} \left[F(-k) + i \frac{G(-k)}{\omega(k)} \right]. \end{aligned}$$

Tenemos entonces dos casos.

(a) Si $\omega(k)$ es impar, entonces $-\omega(k) = \omega(-k)$ y así:

$$\begin{aligned} \Psi_1^*(k) &= \frac{1}{2} \left[F(-k) + i \frac{G(-k)}{\omega(-k)} \right] = \Psi_1(-k), \\ \Psi_2^*(k) &= \frac{1}{2} \left[F(-k) - i \frac{G(-k)}{\omega(-k)} \right] = \Psi_2(-k). \end{aligned}$$

(b) Y si $\omega(k)$ es par, $\omega(k) = \omega(-k)$, entonces:

$$\begin{aligned} \Psi_1^*(k) &= \frac{1}{2} \left[F(-k) - i \frac{G(-k)}{\omega(-k)} \right] = \Psi_2(-k), \\ \Psi_2^*(k) &= \frac{1}{2} \left[F(-k) + i \frac{G(-k)}{\omega(-k)} \right] = \Psi_1(-k). \end{aligned}$$

Ahora bien, tomando el conjugado de $\varphi(x, t)$ de la ecuación (56)

$$\varphi^*(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^*(k) e^{-i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2^*(k) e^{-i(kx + \omega(k)t)} dk.$$

Considerando los dos casos anteriores:

(a) Si $\omega(k)$ es impar, entonces

$$\varphi^*(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(-k) e^{-i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(-k) e^{-i(kx + \omega(k)t)} dk.$$

Con el cambio de variables $\kappa = -k$ se tiene $\omega(k) = \omega(-\kappa) = -\omega(\kappa)$ y de esta forma

$$\varphi^*(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(\kappa) e^{i(\kappa x - \omega(\kappa)t)} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(\kappa) e^{i(\kappa x + \omega(\kappa)t)} d\kappa = \varphi(x, t),$$

i.e., $\varphi^*(x, t) = \varphi(x, t)$ es una solución real.

(b) Y si $\omega(k)$ es par,

$$\varphi^*(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(-k) e^{-i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(-k) e^{-i(kx + \omega(k)t)} dk.$$

Realizando el mismo cambio de variable $\kappa = -k$ se tiene $\omega(k) = \omega(-\kappa) = \omega(\kappa)$, y así

$$\varphi^*(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(\kappa) e^{i(\kappa x + \omega(\kappa)t)} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(\kappa) e^{i(\kappa x - \omega(\kappa)t)} d\kappa = \varphi(x, t).$$

i.e., nuevamente tenemos $\varphi^*(x, t) = \varphi(x, t)$ una solución real.

En ambos casos tenemos una solución real para una ecuación real.

Ejemplo 5.2.II. Hay soluciones estándar de las cuales se pueden obtener el resto de las soluciones. Una de éstas es una solución con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \delta(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Encontrar esta solución estándar. Tenemos que $\delta(x)$ es la función delta de Dirac. (En el siguiente ejemplo veremos cómo obtener la otra solución estándar.)

Recordemos que la Transformada de Fourier de la delta de Dirac $\delta(x)$ es:

$$\widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi}$$

Ahora bien, de la ecuación (57), obtenemos:

$$\begin{aligned} \Psi_1(k) &= \frac{1}{2} \left[\widehat{\delta}(k) + i \frac{\widehat{0}(k)}{\omega(k)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} + 0 \right] = \frac{1}{4\pi}, \\ \Psi_2(k) &= \frac{1}{2} \left[\widehat{\delta}(k) - i \frac{\widehat{0}(k)}{\omega(k)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} - 0 \right] = \frac{1}{4\pi}. \end{aligned}$$

Entonces, la solución (56) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} e^{i(kx + \omega(k)t)} dk, \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (e^{-i\omega(k)t} + e^{i\omega(k)t}) dk, \\
 &= \frac{2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cos(\omega(k)t) dk, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) \cos(\omega(k)t) dk.
 \end{aligned}$$

La última igualdad es debido a que $\sin(kx)$ es impar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \cos(\omega(k)t) dk = 0,$$

y $\cos(\omega(k)t)$ es par, independientemente si $\omega(k)$ es par o impar. De este modo, obtenemos:

$$(59) \quad \varphi_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) \cos(\omega(k)t) dk.$$

Todo esto, por supuesto, es calculado en el sentido de las “distribuciones” o “funciones generalizadas.” (Por ejemplo, la función delta de Dirac, $\delta(x)$, y el Valor Principal de Cauchy al calcular las integrales, son distribuciones o funciones generalizadas.)

Ejemplo 5.2.III. De igual modo, podemos pedir condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, 0) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) &= \delta(x),
 \end{aligned}$$

para encontrar la segunda solución estándar.

Nuevamente, usando la ecuación (57), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(k) &= \frac{1}{2} \left[\widehat{0}(k) + i \frac{\widehat{\delta}(k)}{\omega(k)} \right] = \frac{1}{2} \left[0 + i \frac{1}{2\pi\omega(k)} \right] = \frac{i}{4\pi\omega(k)}, \\
 \Psi_2(k) &= \frac{1}{2} \left[\widehat{0}(k) - i \frac{\widehat{\delta}(k)}{\omega(k)} \right] = \frac{1}{2} \left[0 - i \frac{1}{2\pi\omega(k)} \right] = -\frac{i}{4\pi\omega(k)}.
 \end{aligned}$$

En este caso, la solución (56) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(x, t) &= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(kx - \omega(k)t)}}{\omega(k)} dk - \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(kx + \omega(k)t)}}{\omega(k)} dk, \\
 &= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\omega(k)} (e^{-i\omega(k)t} - e^{i\omega(k)t}) dk, \\
 &= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\omega(k)} (-2i \sin(\omega(k)t)) dk, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\omega(k)} \sin(\omega(k)t) dk, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) \frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)} dk.
 \end{aligned}$$

Nuevamente usamos la paridad de las funciones, y la última igualdad es debido a que $\sin(kx)$ es impar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)} dk = 0,$$

y $\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}$ es par, independientemente si $\omega(k)$ es par o impar. Finalmente obtenemos:

$$(60) \quad \varphi_2(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) \frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)} dk.$$

De esta forma, con $\varphi_1(x, t)$ y $\varphi_2(x, t)$ (ecuaciones (59) y (60)), podemos construir la solución general con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, 0) &= f(x), \\
 \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) &= g(x),
 \end{aligned}$$

usando una combinación lineal continua en forma de convolución:

$$(61) \quad \varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi - x, t) f(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\xi - x, t) g(\xi) d\xi.$$

Nuevamente, estas integrales deben pensarse en el sentido de las “distribuciones”.

5.2.1. Un par de hechos curiosos. Para terminar esta sección, tenemos las siguientes afirmaciones.

AFIRMACIÓN 5.2.1. *Tenemos que para una relación de dispersión cuadrática en ω , la solución de la ecuación dispersiva es la siguiente (ecuación (56)):*

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(k) e^{i(kx + \omega(k)t)} dk.$$

Entonces;

- si $\omega = \omega(k)$ es impar, entonces el primer término de la solución representa un tren de onda moviéndose a la derecha y el segundo otro tren de onda moviéndose a la izquierda;
- si $\omega = \omega(k)$ es par, entonces trenes de onda moviéndose a la izquierda y la derecha están presentes en ambas integrales.

5.3. La ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica. En esta subsección y en la siguiente, construiremos la ecuaciones de Schrödinger y de Dirac de la Mecánica Cuántica. Veremos que son ecuaciones de onda dispersivas con coeficientes no constantes, las cuales corresponden a generalizaciones de relaciones de dispersión y, como consecuencia, a generalizaciones de ecuaciones de onda con coeficientes constantes.

5.3.1. Construcción de la ecuación de Schrödinger. Mas que una “derivación”, “construcción”, o “deducción” de la ecuación de Schrödinger, aquí daremos una **motivación** de por qué la ecuación de Schrödinger es la que conocemos y por qué tiene esa forma (y no otra forma distinta.)

Cuando estaba en la licenciatura, un compañero estaba llevando el curso de Mecánica Cuántica y le hice la pregunta: *¿Cómo se deduce la ecuación de Schrödinger?*, a lo que me respondió: *No se deduce, se postula.* Pues sí, se postula, como muchas afirmaciones en Física, pero ¿por qué se postula de esa forma y no de otra?, me pregunté en ese momento y muchos años después también, pero pues en aquel momento no me quedaba nada claro qué más preguntar, ni siquiera mi pregunta me quedaba clara, ni a qué se refería con “postular.” La respuesta a esta pregunta, sorpresivamente, la encontré por primera vez en un libro de Matemáticas [31], mas no en uno de Física, y es la motivación que a mí me hubiera gustado escuchar en ese entonces y que a continuación describo.

5.3.2. Mecánica Clásica. Para ello, recordemos la ecuación de **la conservación de la energía** de la **mecánica clásica** (en una dimensión):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x),$$

en donde v es la velocidad de la partícula y $U(x)$ es la energía potencial. Recordemos también que el **momentum** se define como $p = mv$, por lo que la energía toma la forma:

$$E = \frac{1}{2m}p^2 + U(x),$$

Consideremos el caso particular de una *partícula libre*:

$$U(x) = U_0 = \text{constante},$$

por lo que:

$$(62) \quad E = \frac{1}{2m}p^2 + U_0.$$

5.3.3. Mecánica cuántica. Ahora bien, hagamos uso de los conceptos encontrados a principios del siglo XX de la incipiente Mecánica Cuántica. Max Planck y Louis De Broglie propusieron que debe haber un análogo cuántico a las cantidades clásicas, en particular, a la energía E y al momentum p :

$$\begin{aligned} E &= h\nu = \frac{h}{2\pi}(2\pi\nu), \\ p &= \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}k, \end{aligned}$$

en donde ν es la frecuencia y λ la longitud de onda de “la onda de materia”; h es la *constante de Planck*, y se usó el hecho que $2\pi = \lambda k$. Estas relaciones fueron encontradas **experimentalmente** (lo cual enfatizo.)

Sabiendo que $\omega = 2\pi\nu$ es la frecuencia angular y definiendo:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi},$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega, \\ p &= \hbar k. \end{aligned}$$

Substituyendo estas expresiones en la ecuación (62), obtenemos:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 + U_0.$$

¿Qué es esto? ¡ES UNA RELACIÓN DE DISPERSIÓN!

Y bien, ya aprendimos que para una relación de dispersión, polinomial en ω y k , corresponde una ecuación en derivadas parciales (EDP) (1) lineal, (2) con coeficientes constantes y, (3) homogénea, bajo la “transformación” o “equivalencia”

$$\begin{aligned}\omega &\longleftrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \\ k &\longleftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial x},\end{aligned}$$

por lo que $k^2 \longleftrightarrow -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

¿Cuál es la EDP asociada a esta relación de dispersión?

$$(63) \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + U_0\psi.$$

Esta es la *ecuación de Schrödinger de la partícula libre*, la cual es, insisto, una EDP (1) lineal, (2) con coeficientes constantes y, (3) homogénea. La generalización sencilla es suponer ahora el potencial, que era constante U_0 , pensarlo ahora variable, teniendo entonces una ecuación de onda dispersiva con coeficientes variables:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + U(x)\psi,$$

que es la famosa **ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica**. Aquí, $\psi = \psi(x, t) \in \mathbb{C}$. Si estamos en 3 dimensiones, obtenemos:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(x, y, z)\psi,$$

En donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es el Laplaceano.

5.3.4. Solución de la ecuación de Schrödinger libre. En esta subsección resolveremos la ecuación de Schrödinger libre, es decir, con potencial constante U_0 , y en una dimensión, ecuación (63). Dado que es una EDP lineal y coeficientes constantes, usaremos la Transformada de Fourier como lo hicimos en la sección anterior, sección 5.2.

Así pues, tenemos la ecuación (63):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + U_0\psi,$$

con condición inicial

$$\psi(x, 0) = f(x),$$

y comportamiento al infinito

$$|\psi(x, t)| \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } x \longrightarrow \pm\infty, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Requerimos, para empezar, la transformada de Fourier de la función Gaussiana:

$$g(x) = e^{-bx^2}, \quad \hat{g}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{k^2}{4b}}.$$

Definición 5.3.1 (La Transformada de Fourier). En esta subsección definimos la transformada de Fourier como:

$$\mathcal{F}[u](k, t) \equiv \hat{u}(k, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{ikx} dx,$$

de forma tal que el Teorema de Fourier es

$$u(x, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(k, t) e^{-ikx} dk.$$

El Teorema de Convolución en este caso se escribe como

$$\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k) \widehat{g}(k).$$

Estamos listos. Tomemos la transformada de Fourier, miembro a miembro, a la ecuación de Schrödinger libre, ecuación (63)³:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \widehat{\psi} &= -\frac{\hbar^2}{2m} (-ik)^2 \widehat{\psi} + U_0 \widehat{\psi}, \\ \widehat{\psi}(k, 0) &= \widehat{f}(k) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\frac{d}{dt} \widehat{\psi} = -i \left(\frac{\hbar}{2m} k^2 + \frac{U_0}{\hbar} \right) \widehat{\psi}.$$

Cada una de estas ecuaciones tiene por solución

$$\widehat{\psi}(k, t) = \widehat{f}(k) e^{-i \frac{\hbar}{2m} k^2 t} e^{-i \frac{U_0}{\hbar} t}.$$

Ahora bien, sabemos que:

$$e^{-\frac{k^2}{4b}} = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \widehat{g}(k) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-\widehat{bx^2}}(k)$$

Entonces, definiendo $b = \frac{m}{2i\hbar t}$, la exponencial que aparece en $\widehat{\psi}(k, t)$ se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} e^{-i \frac{\hbar t}{2m} k^2} &= e^{-\frac{k^2}{4b}} \\ &= \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-\widehat{bx^2}}(k). \end{aligned}$$

El siguiente paso no es riguroso, pues b se supone real, pero puede probarse con la teoría de variable compleja:

$$\begin{aligned} e^{-i \frac{\hbar t}{2m} k^2} &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{-\widehat{\left(\frac{m}{2i\hbar t}\right) x^2}}(k) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{i \widehat{\left(\frac{m}{2\hbar t}\right) x^2}}(k). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(k, t) &= \widehat{f}(k) e^{-i \frac{\hbar}{2m} k^2 t} e^{-i \frac{U_0}{\hbar} t} \\ &= \widehat{f}(k) e^{-i \frac{U_0}{\hbar} t} e^{-i \frac{\hbar t}{2m} k^2} \\ &= \widehat{f}(k) e^{-i \frac{U_0}{\hbar} t} \sqrt{\frac{m}{2i\hbar t \pi}} e^{i \widehat{\left(\frac{m}{2\hbar t}\right) x^2}}(k) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2i\hbar t \pi}} e^{-i \frac{U_0}{\hbar} t} \widehat{f}(k) e^{i \widehat{\left(\frac{m}{2\hbar t}\right) x^2}}(k). \end{aligned}$$

Y, por el teorema de convolución:

$$\widehat{\psi}(k, t) = \sqrt{\frac{m}{2i\hbar t \pi}} e^{-i \frac{U_0}{\hbar} t} \mathcal{F}[f(x) * e^{i \widehat{\left(\frac{m}{2\hbar t}\right) x^2}}](k).$$

³Nota. Para la equivalencia $\widehat{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = -ik\widehat{\psi}$, se necesita el comportamiento asintótico $|\psi(x, t)| \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Entonces, por el Teorema de Fourier, finalmente obtenemos

$$(64) \quad \psi(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2i\hbar\pi t}} e^{-i\frac{U_0}{\hbar}t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{i\left(\frac{m}{2\hbar t}\right)y^2} dy$$

es la solución de la ecuación de Schrödinger libre.

Observación 5.3.2. Observemos que esta solución no se puede encontrar por la técnica de separación de variables, pues ésta $\psi(x, t)$ **no** es de la forma $F(x)G(t)$.

Observación 5.3.3. Si la ecuación (63) la escribimos de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = i\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{U_0}{i\hbar} \psi,$$

y ponemos la constante $\gamma = i\frac{\hbar}{2m}$ y $U_0 = 0$, obtenemos la ecuación del calor:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi.$$

Así, usando la solución (64), obtenemos:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\gamma\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-\frac{1}{4\gamma t}y^2} dy,$$

es la conocida solución de la ecuación del calor. Esto es de esperarse. Usamos la misma técnica para resolver la ecuación del calor que aprendimos en nuestros cursos de Transformadas Integrales.

5.4. La ecuación de Dirac de la Mecánica Cuántica. La ecuación de Schrödinger proviene de la cuantización de la energía cinética clásica (equivalentemente, de la energía total de una partícula clásica libre, *i.e.*, con potencial constante que bien puede valer cero y, posteriormente, a ecuaciones con coeficientes variables.) No obstante, dado que la física relativista era también de recién creación, una idea es incorporar la mecánica relativista a la cuántica. Ese fue el objetivo de varios físicos, como Klein, Gordon y Dirac. Para ello, es necesario cuantizar la energía cinética de una partícula relativista, como el electrón. Esto fue lo que hizo Dirac en [7, 8, 9]. Aquí daremos una breve descripción del trabajo de Dirac e incluiremos brevemente la contribución de Klein y Gordon.

Dada que la ecuación de Dirac es una ecuación cuántica y, a su vez, relativista, quizá vale la pena revisar los conceptos principales de Relatividad Especial. Para este fin, puede usar el texto *Mathematical Aspects of Quantum Field Theory*, por Edson de Faria (Universidade de São Paulo) y Welington de Melo (IMPA) [12].

Una pregunta que me surge justo en este momento es la siguiente: si la ecuación de Schrödinger es no relativista y si suponemos que en el mundo atómico-cuántico se mueven las cosas a velocidades cercanas a la de la luz, ¿por qué es más usada la ecuación de Schrödinger que la de Dirac? Esta pregunta aún la tengo sin respuesta.

5.4.1. Mecánica relativista. Este texto [12] es, en muchas partes, un tanto descuidado en cuanto a su manejo de las matemáticas, pero uno puede seguir muchas de las ideas físicas que presenta. Los puntos importantes los podemos enumerar, *grosso modo*, y son los siguientes:

$$(65) \quad \begin{aligned} 1. \text{ La energía cinética clásica } E &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}p^2 \text{ tiene su equivalente relativista:} \\ E^2 &= c^2p^2 + m^2c^4, \end{aligned}$$

en donde m es la masa de la partícula en movimiento, p su momentum lineal y c es la velocidad de la luz en el vacío. Si $p = 0$, obtenemos la famosa ecuación de Einstein de la energía de un cuerpo de masa m en reposo:

$$E = mc^2.$$

Si se considera el límite $v/c \rightarrow 0$ (v es la velocidad de la partícula), se recupera la energía cinética clásica.

- De la ecuación (65) uno puede construir la ecuación de Klein-Gordon, que fue el primer intento de “relativizar” la mecánica cuántica. De la relación frecuencia-energía de Planck-Einstein, $E = h\nu = \hbar\omega$, y de la relación de longitud de onda de De Broglie, $p = h/\lambda = \hbar k$ (h es la constante de Planck, $\hbar = h/(2\pi)$, ω es la frecuencia angular y k el número de onda) obtenemos:

$$\hbar^2\omega^2 = c^2\hbar^2k^2 + m^2c^4.$$

¡Esta es una relación de dispersión correspondiente a una onda dispersiva! Esta onda es de la forma usual, $\exp(i(kx - \omega t))$, cuya ecuación diferencial parcial correspondiente se sigue de la correspondencia $\partial_t \longleftrightarrow -i\omega$ y $\partial_x \longleftrightarrow ik$, es decir, $\omega \longleftrightarrow i\partial_t$ y $k \longleftrightarrow -i\partial_x$:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = -c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + m^2 c^4 \psi.$$

Reescribiendo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi = 0,$$

y ésta es la ecuación de Klein-Gordon.

- Ahora bien, la ecuación de Klein-Gordon no convencía mucho a los físicos de aquella época pues era de segundo orden. En principio no me queda claro por qué el segundo orden no los convencía, pero haciendo una analogía con la energía cinética clásica, en la que $E \geq 0$ y en la ecuación (65) podemos tener $E \geq 0$ o bien $E < 0$, mejor se debe tener:

$$(66) \quad E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2},$$

como la energía cinética clásica en donde $E \geq 0$. Además, en la conservación de energía clásica, la energía total aparece con potencia de grado 1.

Si usamos ahora la relación de Planck-Einstein y la longitud de onda de De Broglie, obtenemos

$$\hbar\omega = c\sqrt{\hbar^2k^2 + m^2c^2},$$

pero esta relación de dispersión no es un polinomio en ω y k , por lo que no podemos asociarle inmediatamente una ecuación en derivadas parciales, lineal, homogénea con coeficientes constantes.

- Es por esto que Dirac ideó una forma de escribir $\hbar^2k^2 + m^2c^2 = (\text{algo})^2$ de forma tal que

$$\hbar\omega = c\sqrt{(\text{algo})^2} = c(\text{algo}),$$

y ésta deba ser una relación de dispersión polinomial, a saber, de primer grado en ω y k , de donde se sigue (se debe seguir) la ecuación de Dirac.

- Si $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, entonces $p^2 \equiv \|\vec{p}\|^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, la ecuación de Klein-Gordon en 3 dimensiones es:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - c^2 \Delta \psi + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi = 0,$$

con Δ es el Laplaceano en 3-dim. De esta forma, se espera encontrar una relación de dispersión equivalente a (66)

$$E = c\sqrt{\|\vec{p}\|^2 + m^2c^2},$$

y asociarle una ecuación diferencial parcial lineal, homogénea y de coeficientes constantes.

Uno esperaría que esta ecuación sea de primer orden en las tres dimensiones espaciales. El término E indica que se tiene una derivada de primer orden temporal. Los brasileños [12] factorizan el D’Alambertiano $\square^2 = \partial_t^2 - \Delta \equiv D^2$, para algún operador D a ser determinado, pero no es la forma correcta de

proceder. En las siguiente sección, “factorizaremos” el operador $-c^2\hbar^2\Delta+m^2c^4$, para de esta manera construir la ecuación de Dirac.

5.4.2. *Factorización del operador “momentum cuadrado” libre relativista: Construcción de la ecuación de Dirac.* En esta sección seguiremos el trabajo de Dirac [7], pero podemos comparar con el trabajo en su libro [9], en el cual la única diferencia es un signo “-”, pero no tiene relevancia física ni matemática. Son equivalentes como veremos.

Tenemos que la energía cinética de una partícula relativista libre (sin potencial) con momentum \vec{p} y masa m , cumple la relación como en la ecuación (65):

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4.$$

Ahora, escribiendo la energía cinética como en (66)

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2},$$

y bajo la aproximación asintótica $v/c \rightarrow 0$ (v = velocidad de la partícula; c = velocidad de la luz) se recupera la energía cinética clásica:

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O(v^4/c^2) \right) = mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + O(v^4/c^2).$$

(Ésta es una de las razones por las que se debe de encontrar una relación de dispersión para la ecuación (66) y no para (65)).

Dado que para ecuaciones dispersivas necesitamos $\omega \longleftrightarrow i\partial_t$, entonces la relación de dispersión relativista debe ser de primer orden en el tiempo.

Ahora bien, la primera cuantización indica que:

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega, & (\text{Planck-Einstein,}) \\ \vec{p} &= \hbar\vec{k}, & (\text{DeBroglie.}) \end{aligned}$$

de lo que obtenemos:

$$(67) \quad \hbar\omega = c\sqrt{\hbar^2k^2 + m^2c^2},$$

(en donde $k^2 = \|\vec{k}\|^2$.) Esta es la relación de dispersión para partículas cuánticas relativistas. Queremos encontrar una ecuación diferencial parcial (EDP) asociada a esta relación de dispersión. No es posible hacer directo el cambio $\omega \longleftrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$ y $k_a \longleftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, ($a = 1, 2, 3$), porque se requieren relaciones de dispersión polinomiales, como es el caso de la ecuación (65). Por esta razón se trabaja con esta ecuación cuya EDP asociada es la ecuación de Klein-Gordon

$$(68) \quad \hbar^2\omega^2 = c^2\hbar^2k^2 + m^2c^4 \implies -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -c^2\hbar^2\Delta\psi + m^2c^4\psi.$$

Notemos que de (67), efectivamente, la EDP debe ser de primer orden en el tiempo. Entonces quisiéramos una EDP de la forma:

$$(69) \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \widehat{\mathcal{P}}\psi,$$

con $\widehat{\mathcal{P}}$ un operador diferencial de primer orden en las variables $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, de forma tal que:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \widehat{\mathcal{P}}^2\psi,$$

es decir, $E^2 = (\text{“algo”})^2$. Aquí “algo” = $\widehat{\mathcal{P}}$, el cual es el operador diferencial por determinar.

Comparando con la ecuación de Klein-Gordon que aparece en la ecuación (68), definimos $\widehat{\mathcal{P}}$ tal que:

$$(70) \quad \widehat{\mathcal{P}}^2\psi \equiv -c^2\hbar^2\Delta\psi + m^2c^4\psi.$$

Notemos que queremos calcular la “raíz cuadrada” del operador $\widehat{\mathcal{L}} = -c^2\hbar^2\Delta + m^2c^4\text{Id}$:

$$\widehat{\mathcal{P}} \equiv \sqrt{\widehat{\mathcal{L}}},$$

en donde Id es la matriz identidad.

Es aquí en donde a Dirac se le ocurrió escribir al operador $\widehat{\mathcal{P}}$ como sigue:

$$\widehat{\mathcal{P}} = c \left(-\alpha_1\hbar i \frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha_2\hbar i \frac{\partial}{\partial x_2} - \alpha_3\hbar i \frac{\partial}{\partial x_3} + mc\alpha_4 \right),$$

de forma tal que la ecuación (70) en términos dispersivos, *i.e.*,

$$k_a \longleftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial x_a}, a = 1, 2, 3,$$

se escribe como:

$$c^2 (\alpha_1\hbar k_1 + \alpha_2\hbar k_2 + \alpha_3\hbar k_3 + mc\alpha_4)^2 = (c^2\hbar^2 k^2 + m^2c^4)\text{Id},$$

i.e.:

$$(71) \quad (\alpha_1\hbar k_1 + \alpha_2\hbar k_2 + \alpha_3\hbar k_3 + mc\alpha_4)^2 = (\hbar^2 k^2 + m^2c^2)\text{Id},$$

que si usamos la relación de DeBroglie, $p = \hbar k$:

$$(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + mc\alpha_4)^2 = (p^2 + m^2c^2)\text{Id},$$

que es la ecuación con la que trabaja Dirac, pero no lo muestra directamente en su artículo pues incluye al operador temporal $p_0 = W/c = \hbar\omega/c = i(\hbar/c)\partial_t$, pero este lo tratamos más adelante. Es así como Dirac estuvo trabajando en términos de ondas dispersivas sin decirlo (¿o sin saberlo?)

De esta forma Dirac trabaja con la expresión en términos dispersivos (71) y no con operadores diferenciales, aunque tampoco lo diga de forma explícita en su trabajo.

Para ello, expande el lado izquierdo de la ecuación (71), pensando en las α_μ 's como matrices y no como escalares (¿cómo se le ocurrió esto de pasar de un ecuación escalar a una matricial? No tengo la menor idea) para, al hacer corresponder los términos obtenidos con el lado derecho de la misma ecuación, obtener las relaciones de conmutación:

$$(72) \quad \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_4^2 = \text{Id},$$

$$(73) \quad \alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 0, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \quad \mu \neq \nu.$$

En este punto es en donde uno encuentra las Álgebras de Clifford en su representación matricial, $\alpha_\mu \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$. Entonces, la ecuación (69) es la ecuación de Dirac:

$$(74) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = c \left(-i\hbar\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \psi - i\hbar\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \psi - i\hbar\alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \psi + mc\alpha_4 \psi \right),$$

Aquí, $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^4$. Dado que

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \hbar\omega = E = W = cp_0$$

y

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_a} \leftrightarrow \hbar k_a = p_a,$$

se sigue la relación de dispersión,

$$\hbar\omega \text{Id} = c (\hbar\alpha_1 k_1 + \hbar\alpha_2 k_2 + \hbar\alpha_3 k_3 + mc\alpha_4),$$

con Id, la matriz identidad, pues aquí estamos manejando matrices.

En términos de las variables dinámicas, la relación de dispersión se escribe

$$p_0 \text{Id} = (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + mc\alpha_4),$$

y es la ecuación que aparece en su libro [9]. En el artículo [7] tiene:

$$p_0 \text{Id} = -(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + mc\alpha_4).$$

¿Por qué se pueden admitir estos dos signos? Esto es lo que se dejó pendiente anteriormente.

Para argumentar (no necesariamente demostrar) que las dos ecuaciones son plausibles, procedemos como sigue. Consideremos los operadores

$$\begin{aligned} i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}, \\ i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathcal{P}}, \end{aligned}$$

y apliquémoslos uno tras otro a la función ψ y en order inverso, es decir:

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}\right)\left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathcal{P}}\right)\psi &= -\hbar^2\text{Id}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi + i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathcal{P}} - \widehat{\mathcal{P}}i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}^2, \\ \left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathcal{P}}\right)\left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}\right)\psi &= -\hbar^2\text{Id}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathcal{P}} + \widehat{\mathcal{P}}i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}^2, \end{aligned}$$

Ahora bien, como la matriz identidad, Id, conmuta con las matrices α_μ , así como la derivada, ∂_t , conmuta con cada una de las derivadas espaciales, ∂_{x_a} , que aparecen en $\widehat{\mathcal{P}}$, se sigue que ∂_t y $\widehat{\mathcal{P}}$ conmutan y, así:

$$+i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathcal{P}} - \widehat{\mathcal{P}}i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} = 0,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}\right)\left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathcal{P}}\right)\psi &= -\hbar^2\text{Id}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \widehat{\mathcal{P}}^2\psi = 0, \\ \left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathcal{P}}\right)\left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}\right)\psi &= -\hbar^2\text{Id}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \widehat{\mathcal{P}}^2\psi = 0. \end{aligned}$$

Esto último por la definición de $\widehat{\mathcal{P}}^2$, ecuación (70), y la ecuación de Klein-Gordon, ecuación (68).

Podemos concluir entonces que las “raíces” de la ecuación de Klein-Gordon, $-\hbar^2\text{Id}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \widehat{\mathcal{P}}^2\psi$, son:

$$\begin{aligned} i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \widehat{\mathcal{P}}\psi, \\ i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t}\psi &= -\widehat{\mathcal{P}}\psi, \end{aligned}$$

por lo que ambas ecuaciones, la que aparece tanto en el artículo como en el libro de Dirac, son válidas.

De forma explícita tenemos:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= -i\hbar c\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}\psi + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}\psi + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\psi + i\frac{mca_4}{\hbar}\psi\right), \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= +i\hbar c\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}\psi + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}\psi + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\psi + i\frac{mca_4}{\hbar}\psi\right). \end{aligned}$$

Es de aquí de donde se sigue que la partícula cuántica relativista puede tener tanto energía positiva como negativa y la predicción de la existencia del positrón sigue de esta conclusión.

Para terminar esta sección, escribimos de forma explícita las matrices de Dirac:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0_2 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \\ \alpha_4 &= \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

en donde 0_2 es la matriz 2×2 de ceros, I_2 es la matriz identidad de 2×2 , y σ_j , $j = 1, 2, 3$, son las matrices de Pauli:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Si la partícula está bajo la influencia de un potencial externo, la generalización es similar como para la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -i\hbar c \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \psi + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \psi + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \psi + i \frac{mc\alpha_4}{\hbar} \psi \right) + U(x)\psi.$$

Ésta es la ecuación de Dirac con potencial externo.

5.4.3. *Solución de la ecuación de Dirac libre.* En esta sección resolveremos la ecuación de Dirac libre, es decir, con $U(x) = 0$, como en la ecuación (74):

$$(75) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -i\hbar c \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} \psi + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} \psi + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z} \psi + i \frac{mc\alpha_4}{\hbar} \psi \right),$$

y condición inicial:

$$\psi(x, y, z, 0) = f(x, y, z).$$

Tomemos la transformada de Fourier en (75):

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi} = -ic \left(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \frac{mc\alpha_4}{\hbar} \right) \hat{\psi}.$$

En donde la transformada de Fourier de $\psi = \psi(x, y, z, t)$ es $\hat{\psi} = \hat{\psi}(k_1, k_2, k_3, t)$. Resolviendo este último sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\hat{\psi}(k_1, k_2, k_3, t) = e^{-ict(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \frac{mc\alpha_4}{\hbar})} \hat{f}(k_1, k_2, k_3),$$

Aquí, $\hat{f}(k_1, k_2, k_3) = \hat{\psi}(k_1, k_2, k_3, 0)$ es la transformada de Fourier de $f(x, y, z)$. Aplicando la transformada inversa, obtenemos.

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i((k_1 x + k_2 y + k_3 z) \text{Id} + ct(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \frac{mc\alpha_4}{\hbar}))} \hat{f}(k_1, k_2, k_3) d\vec{k},$$

con $d\vec{k} = dk_1 dk_2, dk_3$.

Notemos que aquí debemos ser cuidadosos porque tenemos la exponencial de matrices que no conmutan entre sí.

5.5. Tarea.

TAREA 5.1. *Resuelva la ecuación (52) usando la separación de variables dada en la ecuación (53). Para ello, comience resolviendo la ecuación con coeficientes constantes, $\gamma(x) = \gamma_0$.*

TAREA 5.2. *Usando este método de la Transformada de Fourier, resuelva la ecuación de onda:*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi = 0,$$

con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\varphi(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) &= g(x),\end{aligned}$$

para obtener la solución de D'Alambert, ecuación (10).

TAREA 5.3. Si $\omega = \omega(k)$ no es par ni impar, entonces $\omega(k)$ será una función compleja. Recuerde que, en este caso, los coeficientes de potencias pares de k deben ser pares y los coeficientes de las potencias impares de k deben ser puramente imaginarios. Bajo estas consideraciones, demuestre que la solución (58) es real.

TAREA 5.4. Partiendo de la solución de la ecuación dispersiva usando soluciones estándares, ecuación (61), construya la solución encontrada directamente por transformadas de Fourier, ecuación (58).

TAREA 5.5. Pruebe la afirmación 5.2.1

TAREA 5.6. Expandiendo el lado izquierdo en la ecuación (71), encuentre las relaciones de conmutación (72) y (73).

6. PARES DE LAX: EJEMPLOS BÁSICOS

Comenzando con esta sección podemos decir que comenzamos con la segunda parte de estas notas, con el estudio de ondas no lineales. Como veremos, la teoría lineal será de suma importancia para el estudio no lineal. Comenzaremos estudiando los afamados “pares de Lax”, los cuales son centrales para una formulación de integrabilidad de EDPs, las cuales forman un caso muy particular de ecuaciones de onda dispersivas y no lineales. Veremos cómo se integran todas ellas más adelante. “Integran” en ambos sentidos, de aprender cómo se juntan en un todo y también en el sentido de calcular sus soluciones exactas.

6.1. Los ejemplos más elementales de pares de Lax: el oscilador armónico.

6.1.1. *El oscilador armónico.* Sabemos que el oscilador armónico tiene, como Hamiltoniano:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2,$$

con ecuaciones de evolución (ecuaciones de movimiento de Hamilton):

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m}p, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq.\end{aligned}$$

Si definimos $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{1}{m}p, \\ \dot{p} &= -m\omega^2q,\end{aligned}$$

resulta la ecuación del oscilador armónico:

$$\ddot{q} = -\omega^2q.$$

También podemos escribir

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2.$$

Algunos autores normalizan con $m = 1$, pero aquí mantenemos nosotros la masa m arbitraria.

Definición 6.1.1. El **par de Lax** del oscilador armónico es un par de operadores lineales (en este caso, matrices) dados por [5]:

$$(76) \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p & \omega q \\ \omega q & -\frac{1}{m}p \end{pmatrix}; \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación de Lax es (en la siguiente sección veremos por qué es esta ecuación):

$$(77) \quad \dot{\mathcal{L}} + [\mathcal{L}, \mathcal{P}] = 0,$$

la cual, para el caso del oscilador armónico, resulta:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m}\dot{p} & \omega\dot{q} \\ \omega\dot{q} & -\frac{1}{m}\dot{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^2 q & -\frac{\omega}{m}p \\ -\frac{\omega}{m}p & -\omega^2 q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí se sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}\dot{p} + \omega^2 q &= 0, \\ \omega\dot{q} - \frac{\omega}{m}p &= 0, \end{aligned}$$

las cuales son las ecuaciones de Hamilton para el oscilador armónico. Por tanto, $\dot{q} = -\omega^2 q$, que es la ecuación del oscilador armónico.

Cálculos.

Aquí calculamos el conmutador $[\mathcal{L}, \mathcal{P}]$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}, \mathcal{P}] &= \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p & \omega q \\ \omega q & -\frac{1}{m}p \end{pmatrix} \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p & \omega q \\ \omega q & -\frac{1}{m}p \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} \omega q & -\frac{1}{m}p \\ -\frac{1}{m}p & -\omega q \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} -\omega q & \frac{1}{m}p \\ \frac{1}{m}p & \omega q \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 2\omega q & -\frac{2}{m}p \\ -\frac{2}{m}p & -2\omega q \end{pmatrix} \\ &= \omega \begin{pmatrix} \omega q & -\frac{1}{m}p \\ -\frac{1}{m}p & -1\omega q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.2. Ecuación de Lax para EDOs. Dados dos operadores lineales, \mathcal{L} y \mathcal{P} , podemos considerar un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$(78) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \mathcal{L}\Psi,$$

$$(79) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{P}\Psi.$$

Para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), no hay dependencia explícita de x , así que tomemos:

$$\Psi(x, t) = \psi(t)e^{\lambda x}.$$

Por lo tanto, la ecuación (78) resulta ser:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi(t)e^{\lambda x}) = \mathcal{L}(\psi(t)e^{\lambda x}) \Rightarrow \lambda\psi(t)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\mathcal{L}\psi(t).$$

(El caso más general será considerado posteriormente). Entonces, el sistema de ecuaciones (78)-(79), se convierte en

$$(80) \quad \mathcal{L}\psi = \lambda\psi,$$

$$(81) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{P}\psi.$$

Este es un sistema de ecuaciones sobredeterminado para ψ . Hay una condición de compatibilidad que hace de estas dos ecuaciones (80)-(81) ser consistentes. Para ello, debemos eliminar la función ψ del sistema. Notemos que la ecuación (80) es un problema de valores propios. Derivando miembro a miembro dicha ecuación con respecto a t , se tiene

$$\mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\psi_t = \lambda_t\psi + \lambda\psi_t.$$

Ahora, usando la ecuación (81),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\mathcal{P}\psi &= \lambda_t\psi + \lambda\mathcal{P}\psi, \\ &= \lambda_t\psi + \mathcal{P}(\lambda\psi), \quad \text{dado que } \mathcal{P} \text{ es lineal} \\ &= \lambda_t\psi + \mathcal{P}\mathcal{L}\psi, \quad \text{por la ecuación (80)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\mathcal{P}\psi = \lambda_t\psi + \mathcal{P}\mathcal{L}\psi,$$

i.e.,

$$\mathcal{L}_t\psi + (\mathcal{L}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L})\psi = \lambda_t\psi.$$

Si esto se cumple para cualquier ψ que satisface (80)-(81), se tiene

$$\mathcal{L}_t + [\mathcal{L}, \mathcal{P}] = \lambda_t.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_t + [\mathcal{L}, \mathcal{P}] = 0 \quad \iff \quad \lambda_t = 0.$$

Entonces los valores propios son constantes de movimiento, si la ecuación de Lax (77) se cumple.

TEOREMA 6.2.1. ([26, 27]) *Para los operadores lineales \mathcal{L} y \mathcal{P} que definen el sistema (80)-(81), entonces los valores propios de \mathcal{L} son constantes de movimiento si, y sólo si, la ecuación de Lax:*

$$\dot{\mathcal{L}} + [\mathcal{L}, \mathcal{P}] = 0$$

se satisface.

En seguida, veremos cómo resolver el oscilador armónico usando su par de Lax (76).

6.3. Resolución del oscilador armónico: el método de dispersión inversa.

En esta subsección resolveremos el oscilador armónico usando el *método de dispersión inversa*. Veremos que es muy elaborado y pues uno se preguntaría por qué no mejor uno lo resuelve con los métodos clásicos de EDOs. Pues porque, por una parte, los métodos clásicos ya los conocemos y, por otra, para aprender en qué consiste el método de dispersión inversa y así poder aplicarlo a ecuaciones como la de Korteweg-deVries (KdV) y también darnos cuenta desde ahora que es un método muy elaborado, que lleva tiempo digerirlo y entenderlo.

6.3.1. El problema de valores iniciales. Queremos resolver el problema de valores iniciales del oscilador armónico:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{m}p, & q(0) &= q_0, \\ \dot{p} &= -m\omega^2q, & p(0) &= p_0. \end{aligned}$$

Consideremos el problema espectral (80) en $t = 0$, $\mathcal{L}(0)\psi(0) = \lambda(0)\psi(0)$, i.e.,

$$(82) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p_0 & \omega q_0 \\ \omega q_0 & -\frac{1}{m}p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^{(0)} \\ \psi_2^{(0)} \end{pmatrix} = \lambda(0) \begin{pmatrix} \psi_1^{(0)} \\ \psi_2^{(0)} \end{pmatrix}.$$

6.3.2. Los valores propios. Calculemos los valores propios $\lambda(0)$ resolviendo la ecuación característica:

$$\det(\mathcal{L}(0) - \lambda(0)I) = 0,$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p_0 - \lambda(0) & \omega q_0 \\ \omega q_0 & -\frac{1}{m}p_0 - \lambda(0) \end{pmatrix} &= 0 \\ \left(\frac{1}{m}p_0 - \lambda(0) \right) \left(-\frac{1}{m}p_0 - \lambda(0) \right) - \omega^2 q_0^2 &= 0 \\ - \left(\frac{1}{m}p_0 - \lambda(0) \right) \left(\frac{1}{m}p_0 + \lambda(0) \right) - \omega^2 q_0^2 &= 0 \\ \left(\lambda(0) - \frac{1}{m}p_0 \right) \left(\lambda(0) + \frac{1}{m}p_0 \right) - \omega^2 q_0^2 &= 0 \\ \lambda^2(0) - \frac{1}{m^2}p_0^2 - \omega^2 q_0^2 &= 0, \end{aligned}$$

la cual es la ecuación característica. Las soluciones a esta ecuación son los valores propios del problema y, dado que sabemos que son independientes del tiempo,

$$\lambda_{1,2} \equiv \lambda_{1,2}(t) = \lambda_{1,2}(0) = \pm \sqrt{\frac{p_0^2}{m^2} + \omega^2 q_0^2}.$$

Ahora, usando la ecuación característica,

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2\lambda_1^2 = 2 \left(\frac{p_0^2}{m^2} + \omega^2 q_0^2 \right) = 2 \frac{p_0^2}{m^2} + 2\omega^2 q_0^2,$$

i.e.,

$$\frac{m}{4} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_0^2.$$

Por lo tanto,

$$\text{Energía}(0) = \frac{m}{4} \text{Tr}(\mathcal{L}^2(0)).$$

De forma similar,

$$\text{Energía}(t) = \frac{m}{4} \text{Tr}(\mathcal{L}^2(t)).$$

Puesto que las λ 's son cantidades conservadas,

$$\text{Tr}(\mathcal{L}^2(t)) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \text{Tr}(\mathcal{L}^2(0)).$$

Y así,

$$\text{Energía}(t) = \frac{m}{4} \text{Tr}(\mathcal{L}^2(0)).$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano se conserva:

$$H(q, p) = \frac{m}{4} \text{Tr}(\mathcal{L}^2(0)).$$

6.3.3. Los vectores propios. Tenemos que resolver el sistema (82) en $\lambda(0) = \lambda_j$ (con $j = 1, 2$),

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m} p_0 - \lambda_j & \omega q_0 \\ \omega q_0 & -\frac{1}{m} p_0 - \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{1,j}^{(0)} \\ \psi_{2,j}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las dos ecuaciones son equivalentes (porque el determinante es 0). Por lo tanto, la primera de las ecuaciones es

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{m} p_0 - \lambda_j \right) \psi_{1,j}^{(0)} + \omega q_0 \psi_{2,j}^{(0)} &= 0, \\ \text{i.e., } \left(\lambda_j - \frac{1}{m} p_0 \right) \psi_{1,j}^{(0)} &= \omega q_0 \psi_{2,j}^{(0)}, \end{aligned}$$

i.e., los vectores propios son

$$\vec{\psi}_{1,2}^{(0)} = \begin{pmatrix} \omega q_0 \\ \lambda_{1,2} - \frac{1}{m} p_0 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces un conjunto propio $(\lambda_{1,2}, \vec{\psi}_{1,2}^{(0)})$. Deseamos calcular la evolución en el tiempo de este conjunto propio. Esto nos ayudará a calcular $\mathcal{L}(t)$, la cual contiene $q(t), p(t)$, es decir, las soluciones del oscilador armónico. Este es la parte del problema inverso, de donde proviene el nombre del método.

En este punto, ya conocemos la evolución en el tiempo de los valores propios $\lambda_{1,2}(t) = \lambda_{1,2}(0)$, puesto que son constantes de movimiento. Para encontrar $\vec{\psi}_{1,2}(t)$, haremos uso de la ecuación (81):

$$(83) \quad \frac{\partial \vec{\psi}_j}{\partial t} = \mathcal{P} \vec{\psi}_j \quad \implies \quad \vec{\psi}_j(t) = e^{\mathcal{P}t} \vec{\psi}_j(0), \quad j = 1, 2.$$

Ahora necesitamos calcular $e^{\mathcal{P}t}$. Esta es una tarea sencilla puesto que \mathcal{P} es la matriz constante:

$$(84) \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2} \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \implies \quad e^{\mathcal{P}t} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

con $\theta = \frac{1}{2}\omega t$. Notemos que $e^{\mathcal{P}t} = U(t)$ es una matriz unitaria:

$$U(t)U^*(t) = U^*(t)U(t) = I.$$

Cálculo de la matriz $e^{\mathcal{P}t}$.

La matriz \mathcal{P} tiene valores propios

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{1}{2}i\omega$$

y su matriz de vectores propios es

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},$$

con matriz inversa

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2)^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$, entonces

$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \end{pmatrix}$$

y así,

$$e^{\mathcal{P}t} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) e^{Mt} (\vec{v}_1, \vec{v}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

la cual es la matriz que aparece en (84).

Ahora ya sabemos cómo es la evolución temporal de los valores y vectores propios, $\lambda_j(t) = \lambda_j(0)$, $\vec{\psi}_j(t) = e^{\mathcal{P}t}\vec{\psi}_j(0)$ ($j = 1, 2$), de la matriz \mathcal{L} , y también sabemos que la ecuación:

$$(85) \quad \mathcal{L}(t)\vec{\psi}_j(t) = \lambda_j(0)\vec{\psi}_j(t),$$

se cumple; pero ignoramos qué es $\mathcal{L}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p & \omega q \\ \omega q & -\frac{1}{m}p \end{pmatrix}$, la cual contiene la solución a nuestro problema.

Ahora bien, ¿cómo encontrar $\mathcal{L}(t)$? Procedemos como sigue. Sustituycamos $\vec{\psi}_j(t)$ dada en la ecuación (83) en la ecuación (85),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t)\vec{\psi}_j(t) &= \lambda_j(0)\vec{\psi}_j(t), \\ \mathcal{L}(t)U(t)\vec{\psi}_j(0) &= \lambda_j(0)U(t)\vec{\psi}_j(0), \\ U^{-1}(t)\mathcal{L}(t)U(t)\vec{\psi}_j(0) &= \lambda_j(0)\vec{\psi}_j(0). \end{aligned}$$

Evaluemos la ecuación (85) en $t = 0$ y comparemos con la ecuación anterior. Se sigue que:

$$U^{-1}(t)\mathcal{L}(t)U(t) = \mathcal{L}(0),$$

i.e.,

$$\mathcal{L}(t) = U(t)\mathcal{L}(0)U^{-1}(t).$$

- (i) Notemos que ¡hemos “*vestido*” (“*dressed*”) al operador inicial $\mathcal{L}(0)$ para obtener al operador que evoluciona en el tiempo $\mathcal{L}(t)$! (Este no es el *método de “vestir”* (*dressing method*), pero una idea muy similar está detrás de él.)
- (ii) También notemos que, dado que $U(t)$ es unitario, ¡entonces el espectro de $\mathcal{L}(0)$ y de $\mathcal{L}(t)$ es el mismo! Consecuentemente, los valores propios $\lambda(t)$ de $\mathcal{L}(t)$ son independientes del tiempo

$$\lambda(t) = \lambda(0),$$

lo cual fue ya demostrado.

Por lo tanto, podemos calcular:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p_0 & \omega q_0 \\ \omega q_0 & -\frac{1}{m}p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p_0}{m}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \omega q_0 2 \cos \theta \sin \theta & \frac{p_0}{m} 2 \cos \theta \sin \theta + \omega q_0(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \frac{p_0}{m} 2 \cos \theta \sin \theta + \omega q_0(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & -\frac{p_0}{m}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \omega q_0 2 \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p_0}{m} \cos 2\theta - \omega q_0 \sin 2\theta & \frac{p_0}{m} \sin 2\theta + \omega q_0 \cos 2\theta \\ \frac{p_0}{m} \sin 2\theta + \omega q_0 \cos 2\theta & -\frac{p_0}{m} \cos 2\theta + \omega q_0 \sin 2\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

i.e.,

$$(86) \quad \mathcal{L}(t) = \begin{pmatrix} \frac{p_0}{m} \cos(\omega t) - \omega q_0 \sin(\omega t) & \frac{p_0}{m} \sin(\omega t) + \omega q_0 \cos(\omega t) \\ \frac{p_0}{m} \sin(\omega t) + \omega q_0 \cos(\omega t) & -\frac{p_0}{m} \cos(\omega t) + \omega q_0 \sin(\omega t) \end{pmatrix},$$

ya que definimos $\theta = \frac{1}{2}\omega t$. Usando la definición de $\mathcal{L}(t)$, la ecuación (76) y comparando con la ecuación (86),

$$\begin{aligned}p(t) &= p_0 \cos(\omega t) - m\omega q_0 \sin(\omega t), \\ q(t) &= \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) + q_0 \cos(\omega t),\end{aligned}$$

es la solución del oscilador armónico!

Vemos que las ecuaciones de Hamilton $\dot{q} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -m\omega^2 q$, son satisfechas. De esta manera, resolvimos el problema de valores iniciales del oscilador armónico usando el formalismo de los pares de Lax.

6.4. Los ejemplos más elementales de pares de Lax: el cuerpo rígido.

6.4.1. *El cuerpo rígido.* Supongamos que un cuerpo rígido rota con una velocidad angular $\vec{\Omega}$ y que tiene un *momentum angular* \vec{L} . La ecuación de movimiento para una partícula en rotación es:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}.$$

Componente a componente,

$$(87) \quad \begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_2 L_3 - \Omega_3 L_2 \\ -(\Omega_1 L_3 - \Omega_3 L_1) \\ \Omega_1 L_2 - \Omega_2 L_1 \end{pmatrix}.$$

Estas ecuaciones pueden también ser escritas en forma matricial como sigue. Sean las matrices,

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & 0 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este es el par de Lax del cuerpo rígido. Calculando:

$$\begin{aligned}\hat{L}\hat{\Omega} &= \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & 0 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Omega_1 L_1 + \Omega_2 L_2 & -\Omega_2 L_3 & -\Omega_1 L_3 \\ -\Omega_3 L_2 & \Omega_1 L_1 + \Omega_3 L_3 & -\Omega_1 L_2 \\ -\Omega_3 L_1 & -\Omega_2 L_1 & \Omega_2 L_2 + \Omega_3 L_3 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}\hat{L} &= \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & 0 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_1 \Omega_1 + L_2 \Omega_2 & -L_2 \Omega_3 & -L_1 \Omega_3 \\ -L_3 \Omega_2 & L_1 \Omega_1 + L_3 \Omega_3 & -L_1 \Omega_2 \\ -L_3 \Omega_1 & -L_2 \Omega_1 & L_2 \Omega_2 + L_3 \Omega_3 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

podemos ahora calcular el conmutador

$$[\hat{L}, \hat{\Omega}] = \begin{pmatrix} 0 & L_2\Omega_3 - \Omega_2L_3 & L_1\Omega_3 - \Omega_1L_3 \\ L_3\Omega_2 - \Omega_3L_2 & 0 & L_1\Omega_2 - \Omega_1L_2 \\ L_3\Omega_1 - \Omega_3L_1 & L_2\Omega_1 - \Omega_2L_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando la ecuación (87):

$$[\hat{L}, \hat{\Omega}] = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{L}_1 & \dot{L}_2 \\ \dot{L}_1 & 0 & -\dot{L}_3 \\ -\dot{L}_2 & \dot{L}_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$[\hat{L}, \hat{\Omega}] = \dot{\hat{L}}.$$

Es decir, podemos escribir las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido como un conmutador de sus pares de Lax. Esto significa que el cuerpo rígido también es integrable.

Los valores propios de \hat{L} . Cantidades conservadas.

La ecuación característica de \hat{L} se calcula de la forma usual,

$$P(\lambda) = \det(\hat{L} - \lambda I).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -L_1 & L_2 \\ L_1 & -\lambda & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 + L_3^2) - (-L_1)(-L_1\lambda - L_2L_3) + L_2(L_1L_3 - L_2\lambda) \\ &= -\lambda^3 - \lambda(L_3^2 + L_1^2 + L_2^2) - (L_1L_2L_3) + (L_1L_2L_3), \end{aligned}$$

i.e.,

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda(L_3^2 + L_1^2 + L_2^2).$$

Los ceros del polinomio característico, $P(\lambda) = 0$, son los valores propios de \hat{L} ,

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i\|\vec{L}\|.$$

Notemos que $\text{Tr}(\hat{L}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, la cual es una cantidad conservada trivial. También $\text{Tr}(\hat{L}^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = -2\|\vec{L}\|^2$. Esto significa que la magnitud del momentum angular se conserva. No hay más cantidades conservadas desde este punto de vista ($\text{Tr}\hat{L}^3 = 0$, $\text{Tr}\hat{L}^4 = 2\|\vec{L}\|^4$, las cuales son cantidades ya obtenidas).

Ahora, usando un cambio de variables, podemos escribir las ecuaciones del cuerpo rígido con un par de Lax diferente. Para ver esto, regresemos al movimiento del cuerpo rígido y a la rotación de una partícula.

Velocidad angular

La velocidad angular $\vec{\omega}$ es un vector perpendicular al plano de rotación de la partícula, la cual rota con una rapidez (no velocidad) angular (¡un escalar!) $\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$, en donde $\theta = \theta(t)$ es la posición angular de la partícula al tiempo t . De este modo, $|\omega| = \|\vec{\omega}\|$. También se sigue por la regla de la mano derecha. Ver figura 12.

El momentum angular y el tensor de inercia

El **momentum angular** (a diferencia del momentum lineal) de una partícula que rota se denota con \vec{L} y se define como

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p},$$

en donde \vec{r} es la posición de la partícula y $\vec{p} = m\vec{v}$ es su momentum lineal. Ver figura 13.

La relación entre velocidad angular y la velocidad de la partícula está dada por

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v},$$

y se rige de la regla de la mano derecha. Ver figura 14..

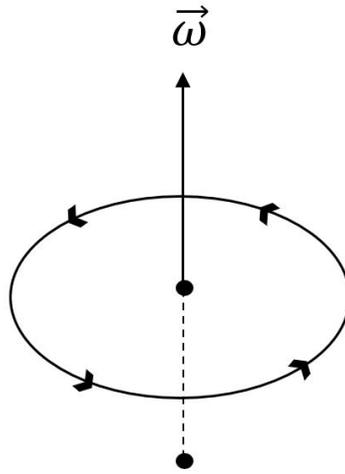


FIGURA 12. Velocidad angular: regla de la mano derecha

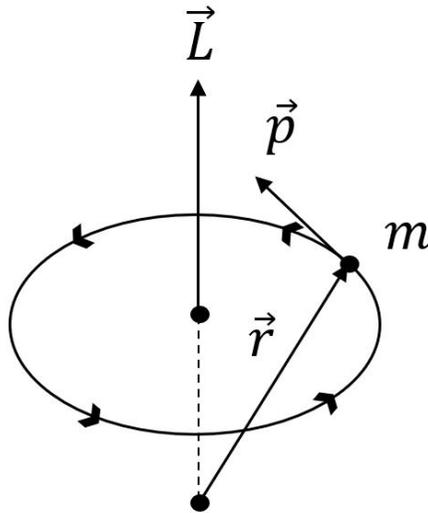


FIGURA 13. Momentum angular

Observemos que $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$, *i.e.*,

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

En el mismo orden de ideas, $\vec{p} = m\vec{v}$ es una transformación lineal, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\vec{v} \mapsto \vec{p}$, *i.e.*, $f(\vec{v}) = m\vec{v} = \vec{p}$. Aquí, m es la constante de proporcionalidad. Es decir, la transformación es una operación de multiplicación.

Ahora, para el momentum angular, tenemos que $\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ es también una transformación lineal que toma la forma, $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\vec{\omega} \mapsto \vec{L}$ *i.e.*,

$$\vec{F}(\vec{\omega}) = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{L}.$$

Puesto que cada transformación lineal puede ser representada por una matriz, tenemos que

$$\vec{F}(\vec{\omega}) = \tilde{I}\vec{\omega}, \quad \text{i.e.,} \quad \vec{L} = \tilde{I}\vec{\omega},$$

en donde \tilde{I} es una matriz (un tensor) llamado **momento de inercia** de la partícula rotante (o bien, el **operador de inercia**, o el **tensor de inercia**).

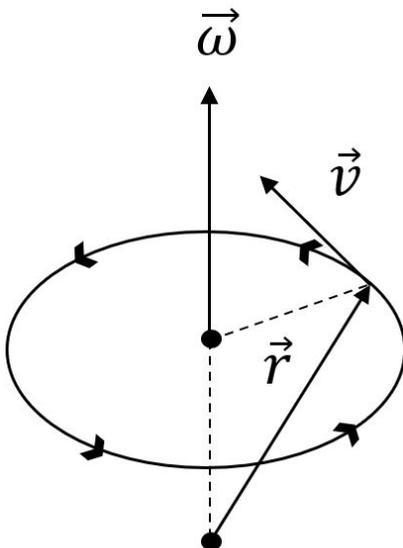


FIGURA 14. Velocidad angular como producto cruz

Notemos que, como tenemos $\vec{p} = m\vec{v}$ y $\vec{L} = \tilde{I}\vec{\omega}$, \tilde{I} juega el papel de “la masa angular” de la partícula rotante, en el mismo papel que la masa juega en el momentum lineal. También notemos que el momento de inercia, \tilde{I} , depende de m y de \vec{r} .

AFIRMACIÓN 6.4.1. *El momento de inercia es simétrico.*

Prueba. Si (\cdot, \cdot) denota el producto interno usual en \mathbb{R}^3 , debemos probar que

$$(\vec{F}(\vec{\omega}_1), \vec{\omega}_2) = (\vec{\omega}_1, \vec{F}(\vec{\omega}_2)), \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^3.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} (\vec{F}(\vec{\omega}_1), \vec{\omega}_2) &= m(\vec{r} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}), \vec{\omega}_2) \\ &= m(\vec{r} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r})) \cdot \vec{\omega}_2 \\ &= m((\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) \times \vec{\omega}_2) \cdot \vec{r} \\ &= m(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}), \quad (\text{aquí vemos que es simétrico}) \\ &= m(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}, \vec{\omega}_1 \times \vec{r}), \\ &= m(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}, \vec{\omega}_2 \times \vec{r}), \quad (\text{dado que el producto interno es simétrico}) \\ &= m(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}), \\ &= m(\vec{r} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}), \vec{\omega}_1), \\ &= m(\vec{\omega}_1, \vec{r} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r})), \quad (\text{puesto que el producto interno es simétrico}) \\ &= m(\vec{\omega}_1, \vec{F}(\omega_2)), \end{aligned}$$

i.e., \vec{F} es simétrico, así también lo es el tensor de inercia \tilde{I} .

□

Dado que el tensor de inercia \tilde{I} es simétrico, entonces es diagonalizable. Si estamos en el marco de referencia en donde \tilde{I} es diagonal, tenemos:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{F}(\vec{\omega}), \quad \text{en donde } I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

y la energía cinética resulta ser,

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2.$$

AFIRMACIÓN 6.4.2. *La energía cinética es*

$$K = \frac{1}{2} (\tilde{I} \vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} (I \vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2,$$

en donde $\vec{\omega} = P \vec{\omega}$ es la velocidad angular en el marco de referencia del tensor de inercia diagonal I , y P es la matriz de vectores propios del tensor de inercia.

Prueba. $K = \frac{1}{2} m(\vec{v}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m(\vec{\omega} \times \vec{r}, \vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} m(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} m(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \vec{\omega}) = \frac{1}{2} (\vec{F}(\vec{\omega}), \vec{\omega}) = (\tilde{I} \vec{\omega}, \vec{\omega}) = (P^{-1} I P \vec{\omega}, \vec{\omega}) = (I P \vec{\omega}, P \vec{\omega}) = (I \vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2.$

□

Ahora, de la expresión de la energía cinética, podemos encontrar la expresión para el momento de inercia, \tilde{I} .

Puesto que la energía cinética es $K = \frac{1}{2} (\tilde{I} \vec{\omega}, \vec{\omega})$, entonces,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} (\vec{F}(\vec{\omega}), \vec{\omega}) = \frac{m}{2} (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \vec{\omega}) = \frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}, \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{m}{2} \|\vec{\omega} \times \vec{r}\|^2 \\ &= \frac{m}{2} (\|\vec{\omega}\|^2 \|\vec{r}\|^2 - |\vec{\omega} \cdot \vec{r}|^2) \\ &= \frac{m}{2} \left(\sum_i \omega_i^2 \sum_i r_i^2 - \left(\sum_i \omega_i r_i \right)^2 \right) \\ &= \frac{m}{2} \left(\sum_i \omega_i^2 \sum_j r_j^2 - \left(\sum_i \omega_i r_i \right) \left(\sum_j \omega_j r_j \right) \right) \\ &= \frac{m}{2} \sum_{i,j} (\omega_i^2 r_j^2 - \omega_i \omega_j r_i r_j) \\ &= \frac{m}{2} \sum_{i,j} (\omega_i \omega_j \delta_i^j r_j^2 - \omega_i \omega_j r_i r_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \left(m (\delta_i^j r_j^2 - r_i r_j) \right), \end{aligned}$$

y comparando con $K = \frac{1}{2} (\tilde{I} \vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \tilde{I}_{i,j}$, encontramos que

$$\tilde{I}_{i,j} = m (\delta_i^j r_j^2 - r_i r_j)$$

son las componentes del tensor de inercia.

Regreso a los pares de Lax

Ya aprendimos que las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido son

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{\Omega}, \hat{L}],$$

en donde

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & 0 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puede ser definido un nuevo par de Lax de la siguiente manera:

$$\hat{L}(\lambda) = \mathcal{I}^2 + \frac{1}{\lambda} \hat{L}, \quad \text{y} \quad \hat{M}(\lambda) = \lambda \mathcal{I} + \hat{\Omega},$$

en donde

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_1 + I_2 - I_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 + I_3 - I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 + I_3 - I_1 \end{pmatrix},$$

(suponiendo $I_i \neq I_j$ para $i \neq j$) y λ siendo el parámetro espectral.

Podemos verificar que:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \mathcal{I} &= \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 I_1 & -\Omega_2 I_2 \\ -\Omega_1 I_1 & 0 & \Omega_3 I_3 \\ \Omega_2 I_2 & -\Omega_3 I_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & L_1 & -L_2 \\ -L_1 & 0 & L_3 \\ L_2 & -L_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en el eje principal de inercia,} \end{aligned}$$

i.e.,

$$(88) \quad \mathcal{I} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \mathcal{I} = \hat{L},$$

en el marco de referencia del eje principal del tensor de inercia.

AFIRMACIÓN 6.4.3. *Las ecuaciones*

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{\Omega}, \hat{L}] \quad \text{y} \quad \frac{d\hat{L}(\lambda)}{dt} = [\hat{M}(\lambda), \hat{L}(\lambda)]$$

son equivalentes.

Prueba. Supongamos que se cumple que

$$\frac{d\hat{L}(\lambda)}{dt} = [\hat{M}(\lambda), \hat{L}(\lambda)]$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \frac{d\hat{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\mathcal{I}^2 + \frac{1}{\lambda} \hat{L} \right), \quad \text{puesto que } \mathcal{I} \text{ es constante,} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\hat{L}(\lambda) \right), \quad \text{por la definición de } \hat{L}(\lambda), \\ &= [\hat{M}(\lambda), \hat{L}(\lambda)] \quad \text{por hipótesis,} \\ &= [\lambda \mathcal{I} + \hat{\Omega}, \mathcal{I}^2 + \frac{1}{\lambda} \hat{L}] \\ &= \lambda [\mathcal{I}, \mathcal{I}^2] + [\mathcal{I}, \hat{L}] + [\hat{\Omega}, \mathcal{I}^2] + \frac{1}{\lambda} [\hat{\Omega}, \hat{L}], \\ (89) \quad &= [\mathcal{I}, \hat{L}] + [\hat{\Omega}, \mathcal{I}^2] + \frac{1}{\lambda} [\hat{\Omega}, \hat{L}]. \end{aligned}$$

Ahora observemos que,

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}, \hat{L}] + [\hat{\Omega}, \mathcal{I}^2] &= \mathcal{I} \hat{L} - \hat{L} \mathcal{I} + \hat{\Omega} \mathcal{I}^2 - \mathcal{I}^2 \hat{\Omega} \\ &= \mathcal{I}(\mathcal{I} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \mathcal{I}) - (\mathcal{I} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \mathcal{I}) \mathcal{I} + \hat{\Omega} \mathcal{I}^2 - \mathcal{I}^2 \hat{\Omega}, \quad \text{de la ecuación (88)} \\ &= \mathcal{I}(\hat{\Omega} \mathcal{I}) - (\mathcal{I} \hat{\Omega}) \mathcal{I}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, de (89), $\frac{1}{\lambda} \frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{1}{\lambda} [\hat{\Omega}, \hat{L}]$, y así

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{\Omega}, \hat{L}],$$

como queríamos probar. Procediendo al revés, obtenemos la implicación en la dirección opuesta. □

Entonces, los valores propios de $\hat{L}(\lambda)$ son constantes de movimiento Así,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{L}^2(\lambda)) &= \text{Tr}(\mathcal{I}^4 - \frac{2}{\lambda} \hat{L}^2), \\ \text{Tr}(\hat{L}^4(\lambda)) &= \text{Tr}(\mathcal{I}^6 - \frac{3}{\lambda^2} (\text{Tr} \mathcal{I})^2 \hat{L}^2 - I_1 I_2 I_3 H), \end{aligned}$$

son cantidades conservadas adicionales, en donde H representa el Hamiltoniano,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{L_i^2}{I_i^2}.$$

7. TRANSFORMACIONES ISOSPECTRALES

Las *transformaciones isoenergéticas* son ciertas transformaciones de operadores que dejan intacto el espectro de dichos operadores. Uno de los “milagros” de los sistemas integrables es que los operadores que en estos aparecen de forma “natural” (!?) son isoenergéticos. En esta sección explicaremos qué son y veremos dos ejemplos de sistemas integrables, la latiz de Toda y la ecuación de Korteweg-deVries, en los que aparecen este tipo de transformaciones.

7.1. Consideraciones generales. Sea

$$\mathcal{L}(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t)$$

el operador de Schrödinger en donde $u(x, t)$ es cierto potencial periódico (o no periódico con “periodo” ∞) y $\mathcal{L}(t)$ actúa en funciones periódicas (*i.e.*, en $L^2([0, P])$, $P > 0$) o no periódicas (*i.e.*, en $L^2(\mathbb{R})$), cuyo espectro puntual es:

$$\sigma_{\text{point}}(\mathcal{L}(t)) = \{\lambda_i\}_{i=1}^N$$

y suponemos que es finito.

Dado el potencial, $u(x, t)$, los valores propios están completamente determinados. La contrapuesta no es verdad: dados los valores propios, el operador $\mathcal{L}(t)$ **no está completamente determinado**.

En particular, si $u(x, t)$ resuelve la ecuación de Korteweg-deVries (KdV),

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

con condición inicial $u(x, 0)$ (periódicas o no periódicas), entonces los operadores

$$(90) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(0) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, 0), \\ \mathcal{L}(t) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t), \end{aligned}$$

tienen el mismo espectro, $\lambda(0) = \lambda(t)$.

- Esto es, el operador $\mathcal{L}(t)$ es **isoenergético**, siempre y cuando $u(x, t)$ satisfaga la ecuación de KdV [15].
- En 1968, P. Lax [26] encontró una forma de construir operadores isoenergéticos; *i.e.*, encontró una manera de generar una sucesión infinita de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones tienen la propiedad de que $\mathcal{L}(0)$ y $\mathcal{L}(t)$ son isoenergéticos.
- C. Gardner identificó este conjunto de ecuaciones como un conjunto generalizado de ecuaciones de KdV. (Ver sección 5 en el artículo de P. Lax, [27]).

Explicamos estos resultados en esta sección.

7.2. Operadores isoespectrales de Lax. Sea $\mathcal{L}(t)$ una familia de un parámetro de operadores auto-adjuntos (más generalmente, no es necesario que sean auto-adjuntos) en un espacio de Hilbert. Sus valores propios y espectro en general, en el caso de operadores auto-adjuntos, son reales. Para detalles, vea [26, 27].

AFIRMACIÓN 7.2.1. El espectro de $\mathcal{L}(t)$ es independiente del tiempo, si todos los elementos de la familia de operadores $\mathcal{L}(t)$ son unitariamente equivalentes uno a otro; i.e., si existe una familia de operadores $U(t)$, de un parámetro t , tal que:

$$(91) \quad U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t) = \mathcal{L}(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Prueba. Es muy conocido el hecho de Álgebra Lineal y Análisis Funcional que el espectro $\mathcal{L}(t)$ y $\mathcal{L}(0)$ coinciden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(0) - \lambda I &= U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t) - \lambda U^*(t)U(t) \\ &= U^*(t)(\mathcal{L}(t) - \lambda I)U(t). \end{aligned}$$

Si $\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(t))$, entonces $\mathcal{L}(t) - \lambda I$ es invertible, con inversa $(\mathcal{L}(t) - \lambda I)^{-1}$. Ahora,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(0) - \lambda I)^{-1} &= (U(t))^{-1}(\mathcal{L}(t) - \lambda I)^{-1}(U^*(t))^{-1} \\ &= U^*(t)(\mathcal{L}(t) - \lambda I)^{-1}U(t), \end{aligned}$$

dado que es unitario: $U(t)U^*(t) = U^*(t)U(t) = I$. Puesto que $(\mathcal{L}(t) - \lambda I)^{-1}$ existe, entonces $(\mathcal{L}(0) - \lambda I)^{-1}$ también existe, y así

$$\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(0)).$$

Éste es un argumento de “*si, y sólo si*”, por lo que

$$\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(t)) \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(0)),$$

i.e.,

$$\lambda \in \sigma(\mathcal{L}(t)) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(\mathcal{L}(0)),$$

i.e.,

$$\sigma(\mathcal{L}(t)) = \sigma(\mathcal{L}(0)).$$

□

Supongamos que ambos operadores $\mathcal{L}(t)$ y $U(t)$ son diferenciables respecto a t . Entonces, de $U(t)U^*(t) = I$ se sigue lo siguiente:

$$(92) \quad \begin{aligned} \dot{U}(t)U^*(t) + U(t)\dot{U}^*(t) &= 0, \\ \dot{U}(t)U^*(t) &= -U(t)\dot{U}^*(t), \\ \dot{U}(t) &= -U(t)\dot{U}^*(t)(U^*(t))^{-1}, \\ \dot{U}(t) &= -U(t)\dot{U}^*(t)U(t), \end{aligned}$$

o bien

$$\dot{U}^*(t) = -U^*(t)\dot{U}(t)U^*(t).$$

Definamos

$$(93) \quad B(t) \equiv \dot{U}(t)U^*(t),$$

por lo que

$$(94) \quad B^*(t) \equiv U(t)\dot{U}^*(t).$$

Sustituyamos (93) y (94) en (92) para obtener

$$B(t) = -B^*(t),$$

i.e., B es un operador **anti-simétrico** (o anti-hermiteano, o skew-simétrico).

Ahora, de la definición de $B(t)$, de $U^*(t)U(t) = U(t)U^*(t) = I$, y de la ecuación (93),

$$\dot{U}(t)U^*(t) = B(t) \Rightarrow \dot{U}(t)U^*(t)U(t) = B(t)U(t),$$

y así

$$(95) \quad \dot{U}(t) = B(t)U(t).$$

Por el contrario, dado $B(t)$, podemos probar que existe un operador $U(t)$ tal que

1. $\dot{U}(t) = B(t)U(t)$, y
2. $U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t) = \mathcal{L}(0)$.

De hecho, resolviendo el problema de valores iniciales,

$$(96) \quad h_t(t) = B(t)h(t), \quad h(t_0) = h_0,$$

(h es un vector), pongamos

$$h(t) \equiv U(t)h(0).$$

Esta operación es isométrica para $U(t)$ unitario:

$$\begin{aligned} \|h(t)\|_2^2 &= (h(t), h(t)) = (U(t)h(0), U(t)h(0)) = (U^*(t)U(t)h(0), h(0)) \\ &= (h(0), h(0)) = \|h(0)\|_2^2. \end{aligned}$$

Si para cada t_0 , la ecuación (96) puede ser resuelta en un conjunto denso cerca de h_0 , entonces $U(t)$ y su inversa están densamente definidos. Por lo tanto, la cerradura es unitaria.

Puesto que $h_t(t) = B(t)h(t)$ y $U(t)h(0) = h(t)$, entonces $\dot{U}h_0 = \dot{h} = B(t)h(t) = B(t)U(t)h_0$, y así:

$$\dot{U}(t) = B(t)U(t).$$

Ahora, conjugando la ecuación anterior, $(\dot{U})^* = (BU)^* = U^*B^* = -U^*B$. Multiplicando desde la izquierda por U ,

$$(97) \quad U\dot{U}^* = -UU^*B.$$

Conjugando la expresión anterior, $\dot{U}U^* = -B^*UU^*$ y, dado que B es anti-simétrico,

$$(98) \quad \dot{U}U^* = BUU^*.$$

Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones previas, (ecuaciones (97) y (98)), obtenemos $U\dot{U}^* + \dot{U}U^* = -UU^*B + BUU^*$, *i.e.*,

$$\frac{d}{dt}(UU^*) = BUU^* - UU^*B.$$

Si el operador U es unitario, $UU^* = I$, entonces la última ecuación se cumple idénticamente.

Por otra parte, $U_t = BU$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^t B(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) U(t_0), \\ \Rightarrow U^*(t) &= U^*(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t B^*(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) \\ &= U^*(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^t B(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) \\ &= U^*(t_0)U(t_0)U^{-1}(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^t B(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) \\ &= U^*(t_0)U(t_0)U^{-1}(t), \end{aligned}$$

en donde usamos el hecho de que B es anti-hermiteana. Por lo tanto,

$$U^*(t) = U^*(t_0)U(t_0)U^{-1}(t) \Rightarrow U^*(t)U(t) = U^*(t_0)U(t_0).$$

Escojamos $U(t_0) = I$, para obtener

$$U^*(t)U(t) = U(t)U^*(t) = I,$$

i.e., U es unitario. Entonces, $\dot{U} = BU \Rightarrow \dot{U}U^* = B$, y la cerradura es unitaria.

Ahora diferenciamos (91) con respecto a t ,

$$\begin{aligned} (U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t))_t &= (\mathcal{L}(0))_t \\ \dot{U}^*\mathcal{L}U + U^*\dot{\mathcal{L}}U + U^*\mathcal{L}\dot{U} &= 0 \\ -(U^*B)\mathcal{L}U + U^*\dot{\mathcal{L}}U + U^*\mathcal{L}BU &= 0 \quad \text{por la ecuación (95) y } B^* = -B. \\ U^*(-B\mathcal{L} + \dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}B)U &= 0 \\ -B\mathcal{L} + \dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}B &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(99) \quad \dot{\mathcal{L}} + [\mathcal{L}, B] = 0,$$

en donde $[\mathcal{L}, B] = \mathcal{L}B - B\mathcal{L}$ es el conmutador de \mathcal{L} y B . La ecuación (99) es conocida como la **ecuación de Lax**.

Si procedemos en sentido contrario, la ecuación (99) implica (91), como queríamos demostrar. Esto prueba el siguiente teorema de P. Lax. [26, 27]

TEOREMA 7.2.2. *Sea $\mathcal{L}(t)$ una familia, con parámetro t , de operadores auto-adjuntos. Supongamos que la ecuación (99) se cumple y que (96) puede ser resuelta para un conjunto denso en la vecindad de h_0 . Entonces, los operadores $\mathcal{L}(t)$ son unitariamente equivalentes.*

Apliquemos el teorema a \mathcal{L} , el operador de Schrödinger, ecuación (90): $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, de tal manera que la ecuación (99) se convierta en

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B\mathcal{L} - \mathcal{L}B$$

Esta es la ecuación de evolución de $u(x, t)$.

7.3. Ecuaciones generalizadas de KdV y sus pares de Lax. El operador

$$B_m = \partial_x^{2m+1} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j^{(m)} \partial_x^{2j+1} + \partial_x^{2j+1} b_j^{(m)},$$

genera una jerarquía de ecuaciones [26, 27, 10],

$$\frac{\partial u}{\partial t_m} = B_m \mathcal{L} - \mathcal{L} B_m.$$

Ahora no las estudiaremos, pero las estudiaremos pronto.

En el mismo orden de ideas, veremos que estas ecuaciones pueden ser escritas en forma variacional como sigue

$$(100) \quad u_{t_m} = c_m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta T_m}{\delta u} \right),$$

en donde $T_m[u]$ son las cantidades conservadas de

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = B_1 \mathcal{L} - \mathcal{L} B_1,$$

y se expresan como

$$T_m[u] = \int_{-\infty}^{\infty} P_m dx,$$

en donde P_m es un polinomio en u y sus derivadas hasta orden m . Para $m = 0, 1, 2$, obtenemos,

$$(101) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_0} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t_1} &= 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} &= -30u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 20 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}, \end{aligned}$$

y estas son las primeras tres ecuaciones que son elementos de **la jerarquía de Lax de la ecuación de KdV**. Las correspondientes cantidades conservadas son

$$(102) \quad \begin{aligned} T_1[u] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx, \\ T_2[u] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^3 + \frac{1}{2} u_x^2 dx, \\ T_3[u] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 21u^5 + 105u^2 u_x^2 + 21uu_{xx}^2 + \frac{3}{2} u_{xxx}^2 dx. \end{aligned}$$

Veremos después cómo es que uno puede generar estas cantidades conservadas, $T_n[u]$, funciones de u y, consecuentemente, poder generar (100). Por el momento, continuemos estudiando los pares de Lax como primeras impresiones.

7.4. Ecuaciones Lax: idea intuitiva. Esta sección y las secciones posteriores fueron escritas con base a [14].

Estudiaremos algunos ejemplos de ecuaciones en dimensiones finita e infinitas. Todas ellas tendrán en común la ecuación de Lax

$$(103) \quad \dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}],$$

en donde \mathcal{L} y B son operadores diferenciales, (\mathcal{L} está en un Álgebra de Lie o un dual de uno, de acuerdo con Flaschka [14]).

Esta ecuación, (103) es llamada **ecuación de Lax**. Tenemos entonces que

- tiene propiedades muy especiales,
- conduce a la mecánica Hamiltoniana,
- también a la mecánica Hamiltoniana integrable,
- hay una relación entre ecuaciones solubles con teoría espectral y geometría algebraica.

De forma intuitiva. Hagamos unos ejemplos concretos. Tomemos $\mathcal{L}, B \in M^{n \times n}$ y consideremos la ecuación (103). Calculemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^2)_t &= \dot{\mathcal{L}}\mathcal{L} + \mathcal{L}\dot{\mathcal{L}}, & (\mathcal{L} \text{ y } \dot{\mathcal{L}} \text{ no siempre conmutan}) \\ &= [B, \mathcal{L}]\mathcal{L} + \mathcal{L}[B, \mathcal{L}], \\ &= (B\mathcal{L} - \mathcal{L}B)\mathcal{L} + \mathcal{L}(B\mathcal{L} - \mathcal{L}B), \\ &= B\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}B\mathcal{L} + \mathcal{L}B\mathcal{L} - \mathcal{L}^2B, \\ &= B\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^2B, \\ &= [B, \mathcal{L}^2]. \end{aligned}$$

En general,

$$(\mathcal{L}^k)_t = [B, \mathcal{L}^k], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

De álgebra lineal, $\text{Tr}[A, B] = 0$, siempre. Por tanto, $\text{Tr}(\mathcal{L}^k)_t = \text{Tr}[B, \mathcal{L}^k] = 0$ y así

$$(104) \quad \text{Tr}(\mathcal{L}^k) = \text{constante en } t, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, las ecuaciones de Lax (103) tienen un montón de constantes de movimiento, $\text{Tr}(\mathcal{L}^k)$.

Ahora, por el teorema de Cayley-Hamilton, $\mathcal{L}^{n+1} = c_n \mathcal{L}^n + \dots + c_1 \mathcal{L} + c_0$, (c_0 es una matriz de $n \times n$), de forma tal que $\text{Tr}(\mathcal{L}^{n+1}) = c_n \text{Tr}(\mathcal{L}^n) + \dots + c_1 \text{Tr}(\mathcal{L}) + \text{Tr}(c_0)$, por lo tanto, a lo más n de estas constantes de movimiento son independientes. Esto lo podemos sintetizar como un teorema que es el siguiente.

TEOREMA 7.4.1. *Supongamos ahora que \mathcal{L} es diagonalizable. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sus valores propios. Entonces, por la ecuación (104),*

$$(105) \quad \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k = \text{constante en } t, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Es claro de (105), que $\lambda_i(t) = \lambda_i(0)$, $i = 1, \dots, n$, i.e., λ_i es independiente del tiempo, i.e., λ_i es una constante de movimiento ($i = 1, \dots, n$.)

Demostración. Esto es cierto. Para cada $k = 1, \dots, n$, tenemos una ecuación con n incógnitas: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Entonces, para todo k , tenemos un sistema de n ecuaciones y n incógnitas (de hecho, un sistema de ecuaciones no lineales.) Este sistema, en principio, puede ser invertido. Puesto que el término no homogéneo es independiente de t , cada λ_i es también independiente de t . Esto conduce a la idea original, fundamental y seminal de Peter Lax. \square

TEOREMA 7.4.2 (Lax (1968)[26]). *Si la función matricial $\mathcal{L}(t)$ satisface una ecuación diferencial de la forma*

$$(106) \quad \dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}],$$

entonces el espectro de $\mathcal{L}(t)$ es independiente del tiempo.

Decimos que la matriz $\mathcal{L}(t)$ es *deformada* conforme t cambia, pero el espectro permanece siendo el mismo. Es por esto que este cambio de \mathcal{L} es llamado una **transformación iso-espectral**. Más adelante daremos ejemplos con operadores diferenciales actuando en espacios de Hilbert, \mathcal{H} .

7.4.1. Preguntas sobre ecuaciones de Lax. Una lista de preguntas acerca de las ecuaciones de Lax está ahora ya lista para ser planteada, para poder escribirla, y tenerla en mente durante este curso.

1. **¿Cuándo una ecuación diferencial puede ser escrita en forma de pares de Lax?** Si tenemos una ecuación $\dot{x} = f(x)$ el problema es encontrar un par de matrices (u operadores), el **par de Lax**, \mathcal{L}, B tal que

$$\dot{x} = f(x) \iff \dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}], .$$

Entonces tendríamos un montón de propiedades para $\dot{x} = f(x)$.

Equivalentemente, ¿cuándo una ecuación diferencial puede ser resuelta exactamente? Esta pregunta es muy difícil de responder (y, probablemente, quede sin responder.)

2. **Dada una ecuación diferencial, $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, ¿es Hamiltoniana?** Una vez que se sabe que una ecuación es Hamiltoniana, hay una luz e indicios de si puede ser soluble o no. La mayoría de las ecuaciones que se pueden escribir en la forma de pares de Lax resultan ser Hamiltonianas en Álgebras de Lie duales (o bien, “órbitas co-adjuntas”), pero no hay siempre una manera directa (o receta) de hacer esto.
3. **Dada la ecuación $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ Hamiltoniana, y que los valores propios de \mathcal{L} son constantes de movimiento, ¿éstas están en involución? ¿Son suficientes para integrar el problema?**
4. **Dado que $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ puede “en principio” ser resuelta, en la práctica ¿cómo obtiene uno la solución?** Ésta es la pregunta que conduce a las superficies de Riemann, a problemas espectrales inversos, y a muchas buenas matemáticas.

Este punto ya lo ejemplificamos al resolver el oscilador armónico con su par de Lax.

5. **Dada una solución explícita, ¿cómo uno extrae información?** Uno puede encontrar una solución en forma integral, o una función complicada (por ejemplo, la función theta de Jacobi de muchas variables.) No es trivial deducir información y propiedades cualitativas o cuantitativas de fórmulas feas.

→ De hecho, responder esta pregunta es lo que hace la diferencia entre un matemático “puro” de un matemático “aplicado.”

6. **¿Qué más sucede?** Una vez que ya hemos respondido a las preguntas anteriores:

- a) ¿Similitudes con otras ecuaciones de Lax?
- b) ¿Otros campos de las matemáticas?
- c) ¿“Simetrías” geométricas no explicadas?
- d) ¿“Simetrías” calculadas y no explicadas?

Estas preguntas abren nuevas perspectivas de ecuaciones no solubles y en matemáticas.

7.5. Ecuaciones de Lax: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs).

Ejemplo 7.5.I. La ecuación de Lax de 2×2 . Sea \mathcal{L} una matriz de 2×2 con traza cero, $\text{Tr}(\mathcal{L}) = a + d = 0$,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

Tomemos

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Por tanto, de la ecuación de Lax $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \beta c - \gamma b, \\ \dot{b} &= \alpha b + \beta d - \beta a - \delta b, \\ \dot{c} &= -\alpha c - \gamma d + \gamma a + \delta c, \\ \dot{d} &= -c\beta + \gamma b. \end{aligned}$$

Ahora, sabemos por nuestro argumento anterior, que $\text{Tr}(\mathcal{L}) = a + d$ es constante en el tiempo. (Esto coincide con nuestra primera y última ecuaciones de nuestro conjunto anterior de ecuaciones.) Podemos tomar las constantes tal que su traza sea cero: $\text{Tr}(\mathcal{L}) = a + d = 0 \Rightarrow d = -a$. Por tanto,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \beta c - \gamma b, \\ \dot{b} &= \alpha b - 2\beta a - \delta b, \\ \dot{c} &= -\alpha c + 2\gamma a + \delta c. \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{L}) &= 0, \quad \text{es constante en el tiempo,} \\ \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{L}^2) &= a^2 + bc, \quad \text{también es constante en el tiempo.} \end{aligned}$$

Principio general. Las ecuaciones de Lax tienen constantes de movimiento por virtud de su forma especial.

En este ejemplo, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pueden ser escogidas arbitrariamente como funciones del tiempo, t , así como también las variables dependientes a, b, c : $a^2 + bc$ es independiente de t .

Sin embargo, no sabemos si esta información es útil para resolver la ecuación diferencial.

Ejemplo 7.5.II. La latiz de Toda. Sea \mathcal{L} una matriz tridiagonal simétrica,

$$(107) \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} \\ & & & & & a_{N-1} & b_N & \end{pmatrix},$$

en donde $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, N - 1$ y $b_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, N$. Con $a_i > 0$, y $b_j \in \mathbb{R}$, tal que la matriz es llamada **matriz de Jacobi**. También sea

$$(108) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & -a_2 & & & & \\ & a_2 & 0 & -a_3 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_{N-2} & 0 & -a_{N-1} \\ & & & & & a_{N-1} & 0 & \end{pmatrix}.$$

Considere ahora la ecuación de Lax $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$.

Por lo tanto, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$(109) \quad \begin{aligned} \dot{a}_1 &= a_1(b_1 - b_2), \\ \dot{a}_2 &= a_2(b_2 - b_3), \\ &\dots \\ \dot{a}_{N-1} &= a_{N-1}(b_{N-1} - b_N), \\ \dot{b}_1 &= -2a_1^2, \\ \dot{b}_2 &= 2(a_1^2 - a_2^2), \\ &\dots \\ \dot{b}_i &= 2(a_{i-1}^2 - a_i^2), \\ &\dots \\ \dot{b}_N &= 2a_{N-1}^2, \end{aligned}$$

De (109), no podemos directamente determinar que $\text{Tr}(\mathcal{L}^k)$ sean constantes en el tiempo. Esto se sigue de las ecuación de Lax, $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$.

Interpretación física de la latiz de Toda. Tomemos un sistema masa-resorte como un modelo para una cadena unidimensional de átomos interactuando debido a fuerzas no lineales. Ver figura 15.

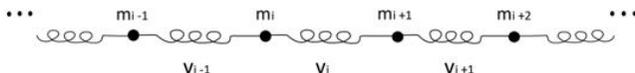


FIGURA 15. Representación física de la latiz de Toda.

Tomemos entonces las siguientes consideraciones.

- Las masas en general son diferentes. La masa de la $i^{\text{ésima}}$ partícula = m_i .
- La cantidad de trabajo (energía) para comprimir el resorte una distancia r la denotamos por $V_i(r)$ para la $i^{\text{ésima}}$ partícula. Si $r < 0$, el resorte se comprime. Ver figura 16.

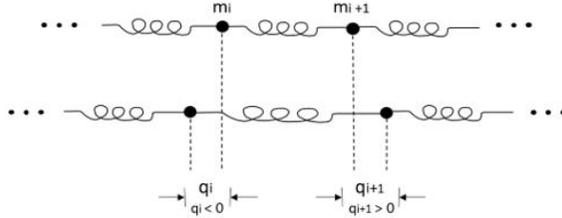


FIGURA 16. Extensión y compresión en la latiz de Toda.

- Los resortes no tienen masa.
- Energía total:

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{q}_i)^2 + V_i(q^{(i+1)} - q^{(i)}).$$

- q_i es el desplazamiento de la i^{a} partícula de su posición de equilibrio.
- $q_{i+1} - q_i$ es la extensión total o compresión de el $i^{\text{ésimo}}$ resorte.
- $V_i(r)$ es el trabajo hecho para comprimir/estirar el resorte = la energía potencial almacenada en el resorte.
- Definamos:

$$p_i = m_i \dot{q}_i = \text{momentum de la } i^{\text{ésima}} \text{ partícula.}$$

- La energía total, o el **Hamiltoniano**, está dada por:

$$(110) \quad H = \sum_i \frac{1}{2m_i} (p_i)^2 + V_i(q^{(i+1)} - q^{(i)}).$$

La suma se extiende sobre todas las partículas.

Condiciones de frontera. Información acerca de la primer y última partículas es requerida. Ver figura 17.

- Están atadas.
- están libres o,
- son periódicas (la última se pega con la primera.)

El potencial $V_i(r)$ modela diferentes clases de fuerzas interatómicas. Además, sistemas generales de masa-resorte no son necesariamente sistemas Hamiltonianos integrables en general. Digamos, para el Hamiltoniano (110),

$$(111) \quad \begin{aligned} \dot{q}^{(i)} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}^{(i)} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

Morikazu Toda [40, 41] inventó un sistema no lineal con:

- $m_i = m, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \dots$, *i.e.*, todas las masas son iguales,
- y todos los resortes iguales, *i.e.*, $V_i(r) = V(r), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \dots$
- Entonces también todas las fuerzas son iguales y propuso el potencial

$$(112) \quad V(r) = \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta r} - 1) + \alpha r.$$

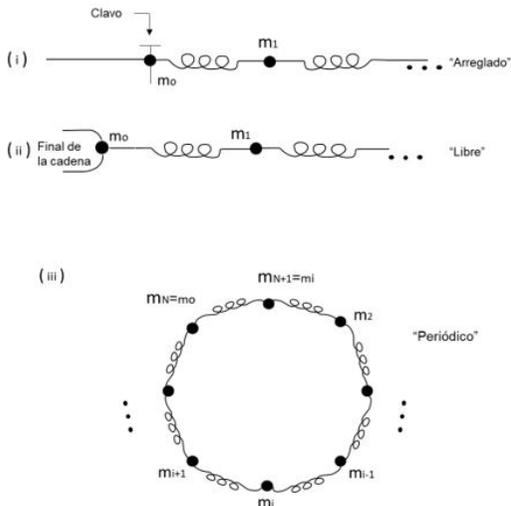


FIGURA 17. Condiciones de frontera de la latiz de Toda.

En casos límite, el potencial $V(r)$ se aproxima a algunos modelos físicos estándar.

- Si $k \equiv \alpha\beta$, sea $\beta \rightarrow 0$ y mantengamos fija α ,

$$\frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta r} - 1) + \alpha r = \frac{\alpha}{\beta} \left(-r\beta + \frac{1}{2}\beta^2 r^2 + O(\beta^3) \right) + \alpha r = \frac{1}{2}\alpha\beta r^2 + O(\beta^2)$$

i.e., para $|\beta| \ll 1$, tenemos el potencial del oscilador armónico:

$$V(r) = \frac{1}{2}\alpha\beta r^2 + O(\beta^2).$$

- Si $\beta \rightarrow \infty$, $V(r) \rightarrow$ potencial que gobierna la interacción de bolas elásticas duras.

Entonces, poniendo $\alpha = \beta = 1$, $m = 1$ y $r = r_i = q^{(i+1)} - q^{(i)}$, el Hamiltoniano es

$$(113) \quad H = \sum_i \frac{1}{2m} (p_i)^2 + e^{-(q^{(i+1)} - q^{(i)})} + (q^{(i+1)} - q^{(i)}) - 1.$$

Si las condiciones de frontera son periódicas, $q^{(N+1)} = q^{(1)}$ (o bien, $q^{(N)} = q^{(0)}$), entonces la suma de $(q^{(i+1)} - q^{(i)})$ es telescópica, la cual entonces suma cero, y uno se queda con (más una constante que puede ser despreciada pues eso sólo desplaza el origen en donde la energía valga cero)

$$(114) \quad \boxed{H = \sum_i \frac{1}{2m} (p_i)^2 + e^{-(q^{(i+1)} - q^{(i)})}.$$

Esta es la definición del Hamiltoniano de Toda y las propiedades bajo condiciones periódicas y no periódicas son estudiadas.

Las ecuaciones de Toda son:

$$(115) \quad \begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{1}{m} p_k \\ m\ddot{q}_k &= \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = e^{-(q^{(k)} - q^{(k-1)})} - e^{-(q^{(k+1)} - q^{(k)})} \end{aligned}$$

Si movemos la partícula 0^{ésima} a $x \rightarrow -\infty$ y la $(N + 1)$ ^{ésima} partícula a $x \rightarrow +\infty$, entonces

$$(116) \quad \begin{aligned} e^{q^{(0)}} &= 0, \\ e^{-q^{(N+1)}} &= 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Toda, (115), junto con estas condiciones de frontera, son llamadas la **latiz de Toda libre**.

La latiz de Toda con Hamiltoniano general (113) tiene más significados físicos que el de la latiz de Toda libre, pero esta última tiene muchas más propiedades matemáticas interesantes.

Excepto por las condiciones de frontera periódicas, (114) tiene como potencial $V(r) = e^{-r}$, el cual para r pequeña, $V(r) = 1 - r + \frac{1}{2}r^2 - \dots$ **no** es el potencial del oscilador armónico, al contrario de (112).

Regresando a (109), definamos para $i = 1, 2, 3, \dots$,

$$(117) \quad \begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2}e^{-(q^{(i+1)} - q^{(i)})/2} \\ b_i &= \frac{1}{2}p_i. \end{aligned}$$

Esto es lo que se conoce como la **Transformación de Flaschka**.

Bajo la transformación de Flaschka, (117), podemos checar que la latiz de Toda, ecuaciones (115), (116), son equivalentes a las ecuaciones de Lax, (109). (¡Calcúlelas!).

Realmente **no** hay una interpretación física de la representación de Lax de la ecuación la latiz de Toda en coordenadas de Flaschka, ecuación (117).

Podemos ahora hacernos entonces varias preguntas.

- Q1.** Si comenzamos con el Hamiltoniano de Toda, (110), (111), (112) (o las ecuaciones (114), (116)), ¿cómo podría uno ir a la representación de Lax de la latiz (109)?
- Q2.** Las ecuaciones físicas son Hamiltonianas. ¿Cómo es que las ecuaciones de Lax son Hamiltonianas? Ellas están sobre una *órbita co-adjunta*.
Ecuaciones físicas:
Ecuaciones: ✓ ya escritas.
Hamiltoniano: ✓ ya escrito.
Ecuaciones de Lax:
Ecuaciones: ✓ ya escritas.
Hamiltoniano: Aún no lo escribimos.
- Q3.** Los valores propios de \mathcal{L} son constantes de movimiento. ¿Qué representan físicamente?
- Q4.** ¿Cómo resolvemos las ecuaciones?

Ejemplo 7.5.III. La cadena de Toda periódica. Sea el par de Lax,

$$(118) \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & & & & a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} & \\ a_N & & & & & & & a_{N-1} & b_N & \end{pmatrix},$$

$$(119) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & a_N \\ a_1 & 0 & -a_2 & & & & & \\ & a_2 & 0 & -a_3 & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_{N-2} & 0 & -a_{N-1} \\ -a_N & & & & & & & a_{N-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que las esquinas superior derecha e inferior izquierda no son cero. Esto es debido a la periodicidad.

Para el caso periódico, tenemos (en cambio de (109)),

$$(120) \quad \begin{aligned} \dot{a}_1 &= a_1(b_1 - b_2), \\ \dot{a}_2 &= a_2(b_2 - b_3), \\ &\dots \\ \dot{a}_{N-1} &= a_{N-1}(b_{N-1} - b_N), \\ \dot{b}_1 &= 2(a_N^2 - a_1^2), \\ \dot{b}_2 &= 2(a_1^2 - a_2^2), \\ &\dots \\ \dot{b}_i &= 2(a_{i-1}^2 - a_i^2), \\ &\dots \\ \dot{b}_N &= 2(a_{N-1}^2 - a_N^2), \end{aligned}$$

Estas ecuaciones, (109) y (120), tienen la forma,

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= a_i(b_i - b_{i+1}), \\ \dot{b}_i &= 2(a_{i-1}^2 - a_i^2), \end{aligned}$$

En (109), $a_0 = a_N = 0$. Y en (120), $a_0 = a_N$ y $b_0 = b_N$.

Las ecuaciones (120) representan la latiz de Toda periódica. Aquí, la transformación (117) es ambigua (de hecho, su inversa es la ambigua). Para quitarle la ambigüedad, requerimos:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \cdots a_N &= 2^N \\ b_1 + b_2 + \cdots + b_N &= 0. \end{aligned}$$

La segunda condición $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 0$ es la conservación del momentum en mecánica.

El poder de las nuevas variables.

En el ejemplo, 7.5.II, tenemos el polinomio característico de \mathcal{L} ,

$$p_{\mathcal{L}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} b_1 - \lambda & a_1 & & & & & & \\ a_1 & b_2 - \lambda & a_2 & & & & & \\ & a_2 & b_3 - \lambda & a_3 & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} - \lambda & a_{N-1} \\ & & & & & & & a_{N-1} & b_N - \lambda \end{pmatrix},$$

$p_{\mathcal{L}}(\lambda)$ es independiente del tiempo, puesto que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ (sus raíces) son independientes de t .

En el presente ejemplo, \mathcal{L} y B se pueden reemplazar por

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & & & \rho a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} & \\ \frac{a_N}{\rho} & & & & & & a_{N-1} & b_N & \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & \rho a_N \\ a_1 & 0 & -a_2 & & & & & & \\ & a_2 & 0 & -a_3 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_{N-2} & 0 & -a_{N-1} & \\ -\frac{a_N}{\rho} & & & & & & a_{N-1} & 0 & \end{pmatrix},$$

en donde $\rho \neq 0$ es un parámetro arbitrario. Si calculamos $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, ¡obtenemos (120)!

De nuevo, las raíces de $\det(\mathcal{L} - \lambda I) = 0$ son independientes del tiempo $t \Rightarrow$ el polinomio $\det(\mathcal{L} - \lambda I)$ también es independiente de t .

Por otra parte, tenemos que la función racional

$$\mathcal{R}(\rho, \lambda) = \det(\mathcal{L} - \lambda I)$$

es un polinomio en dos parámetros, ρ y λ . Ahora.

$$\mathcal{R}(\rho, \lambda) = 0$$

representa una curva algebraica, ¡y la teoría de superficies de Riemann comienza a aparecer aquí! No obstante, el estudio de ecuaciones periódicas, la teoría de la Geometría Algebraica y las superficies de Riemann las dejaremos para otra ocasión.

Ejemplo 7.5.IV. Más notas sobre la cadena de Toda: preguntas de matemáticas. Sea \mathcal{L} una matriz de la forma (107) o (118), en donde tenemos:

- sea $N - 1$ a_n 's y N b_n 's,
- o bien, N a_n 's y N b_n 's.

¿Debemos esperar que una deformación iso-espectral exista? *I.e.*, podemos cambiar las entradas de \mathcal{L} y aún obtener que los valores propios de \mathcal{L} sean constantes en el tiempo?

Las \mathcal{L} 's tienen sea $2N - 1$ o $2N$ entradas distintas de cero. Los N valores propios constantes imponen N condiciones, tales que restan $N - 1$ o N relaciones (grados de libertad) para variar las entradas de \mathcal{L} .

Hasta el momento, tenemos **sólo una** deformación invariante, a saber $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$. De este modo, esperamos $N - 2$ o $N - 1$ deformaciones iso-espectrales más, todas ellas, independientes (“*independientes*” en un sentido a ser definido.)

Q1. ¿Cómo podría uno dibujar esto geoméricamente? El conjunto de las \mathcal{L} de la forma

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} \\ & & & & & & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix},$$

puede ser puesto en un espacio de $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^{N-1}$. Las a_n 's viven en $(\mathbb{R}^+)^{N-1}$ y las b_n 's viven en \mathbb{R}^N . (\mathbb{R}^+ es el conjunto de los números positivos reales.) Y la matriz

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & & a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} \\ a_n & & & & & & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix},$$

está en $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^N$ ($a_n \in \mathbb{R}^+$, $b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots, N$). Los subconjuntos (en $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^{N-1}$ o en $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^N$) de \mathcal{L} 's con valores propios dados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ son llamados **variedades iso-espectrales**. Estas variedades iso-espectrales son subconjuntos $(2N - 1)$ - o $(2N)$ -dimensionales (los cuales, de hecho, son subvariedades.)

Las deformaciones iso-espectrales, como las curvas $t \mapsto \mathcal{L}(t)$ que resuelven la latiz de Toda, caerán enteramente en estas variedades. Los campos vectoriales, que definen la ecuación de Lax, $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, son tangentes a la variedad iso-espectral. Ver la figura 18.

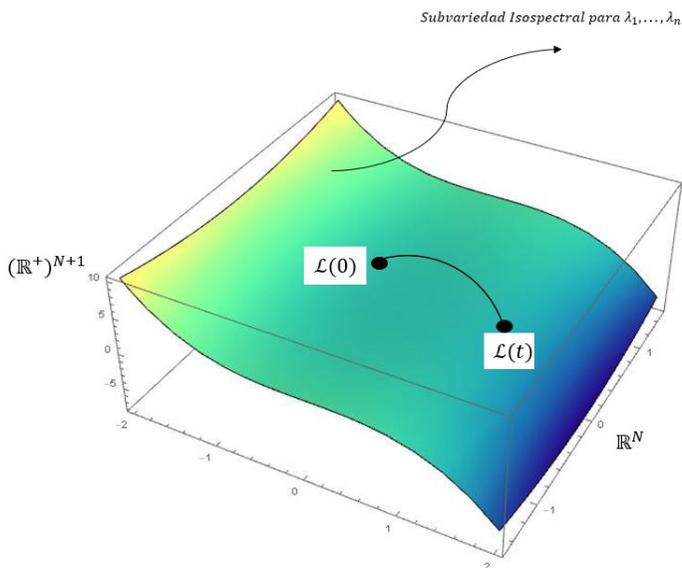


FIGURA 18. Deformación isospectral

PROBLEMA 7.5.1 (**Problema matemático.**). *Aclarar la estructura de las variedades iso-espectrales.*

Q2. Para resolver la ecuación diferencial $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, formulemos otra pregunta: Dados los desplazamientos y las velocidades iniciales de todas las masas de la latiz de Toda libre, en $t = 0$: $\overset{\circ}{q}^1, \dots, \overset{\circ}{q}^N, \overset{\circ}{p}_1, \dots, \overset{\circ}{p}_N$, queremos resolver las ecuaciones de movimiento de Hamilton, ecuaciones (110), (111).

Primero, consideremos $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, y calculemos $\overset{\circ}{a}_1, \dots, \overset{\circ}{a}_{N-1}, \overset{\circ}{b}_1, \dots, \overset{\circ}{b}_N$, por la transformación de Flaschka, ecuación (117). Ahora, construyamos una matriz de Jacobi, $\mathcal{L}(0) = \overset{\circ}{\mathcal{L}}$. Los valores propios de $\overset{\circ}{\mathcal{L}}$ son constanes en el tiempo.

En orden para resolver $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, con condiciones iniciales $\mathcal{L}(0) = \overset{\circ}{\mathcal{L}}$ dadas, “solamente” **necesitamos seguir** otros N parámetros, las coordenadas que distinguen diferentes matrices sobre una sub-variedad iso-espectral.

Q3. ¿Qué cantidades, aparte de los valores propios, determinarán todas las entradas de la matriz de Jacobi? ¿Cómo estas cantidades cambian con \mathcal{L} ?

Q4. Relación con mecánica Hamiltoniana. Dadas las constantes de movimiento, ¿cómo se reduce, de manera efectiva, el número de incógnitas?

Q5. Todo esto *implica una teoría espectral inversa*. ¿Hasta que punto el espectro de un operador lineal \mathcal{L} determina el operador?

Para hacer una analogía, nos referimos al operador de Laplace. Consideremos el problema de valores propios del operador de Laplace en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, con condiciones de frontera de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\lambda u, & x \in \Omega, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

siendo $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ los valores propios del operador de Laplace, que físicamente representan frecuencias naturales de un tambor de forma Ω :

$$\text{Forma de un tambor } \Omega \quad \Rightarrow \quad \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}} - \text{frecuencias.}$$

Ahora, formulemos la pregunta opuesta. Bueno, mas que opuesta, *la pregunta inversa*.

De [20], si uno puede escuchar los sonidos (todos los sonidos) de un tambor (*i.e.*, escuchar todas sus frecuencias), entonces uno puede recobrar todos los valores propios $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ (hay un número infinito de ellos). Ahora bien, ¿puede conocer la forma del tambor que los genera?

El problema fue resuelto en 1992 por Gordon, Webb, and Wolpert [17, 18], cuya respuesta es **no**.

En [14], se estudian y resuelven varios problemas análogos más sencillos en una dimensión.

7.6. Ecuaciones de Lax: Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs).

Ejemplo 7.6.I. La ecuación de Korteweg-deVries. Aquí, \mathcal{L} no es una matriz, es un operador diferencial. Este es el ejemplo original de la ecuación Lax.

Una pregunta auténtica en este sentido es la siguiente. ¿Cómo se ve el conjunto de todas las matrices con espectro fijo? Trataremos de resolver esta pregunta, pero en el contexto de operadores diferenciales.

Sea \mathcal{L} el operador diferencial $D^2 + q$, en donde $D = \frac{d}{dx}$ y $q = q(x)$. Éste puede ser definido en $L^2([a, b])$, con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ y condiciones de frontera apropiadas.

Ejemplo 7.6.II. El operador Laplaceano en una dimension. Consideremos el problema de valores propios con $q = 0$ y condiciones de frontera periódicas:

$$(121) \quad \begin{aligned} y''(x) &= \lambda y(x), & -\infty \leq a < b \leq +\infty, \\ y(a) &= y(b), \\ y'(a) &= y'(b). \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$(122) \quad \lambda_0 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -\left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2, \dots, \lambda_{2j-1} = \lambda_{2j} = -\left(\frac{2j\pi}{b-a}\right)^2, \dots,$$

con funciones propias

$$(123) \quad y_0(x) = 1, y_1(x) = \sin(\sqrt{\lambda_1}x), y_2(x) = \cos(\sqrt{\lambda_1}x), \dots$$

Si $q(x) \neq 0$, los valores propios están separados: $\lambda_1 \neq \lambda_2, \dots$, etc. Veremos los detalles más adelante.

Hay más posibilidades de condiciones de frontera. Podemos pensar también en $D^2 + q$, como una matriz grandotota con valores propios y, como las matrices usuales, tiene valores propios. Similarmente, $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ debe implicar que estos valores propios son independientes de t .

Intentemos encontrar un operador B , asociado a \mathcal{L} , tal que,

$$\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}].$$

Comencemos con $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t) = D^2 + q(x; t)$. Para cada t , tenemos un operador en la variable x . El coeficiente es diferente para cada t . Entonces, el operador es una función, $\mathcal{L}(t)$, del tiempo t y es *deformado* en el tiempo t . También suponemos que $q(x, t)$ es suave en t .

El operador \mathcal{L} aplicado a $f(x)$ es

$$\mathcal{L}f(x) = f''(x) + q(x, t)f(x),$$

de tal forma que si tomamos $\frac{\partial}{\partial t}$ a $\mathcal{L}f(x)$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}f(x)) = \left(\frac{\partial}{\partial t}q(x, t)\right)f(x).$$

De esta forma, definamos:

$$\dot{\mathcal{L}} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} = q_t,$$

el cual es un operador de multiplicación: $\dot{\mathcal{L}}f = q_t f$. Así, debemos requerir que de igual modo $[B, \mathcal{L}]$ sea un operador de multiplicación, de forma tal que todos los cálculos de derivadas se cancelen.

Caso 1. $\mathbf{B} = \mathbf{D}$. Aquí, $\dot{\mathcal{L}} = q_t = [B, \mathcal{L}] = [D, D^2 + q]$. Calculemos separadamente el lado derecho de esta ecuación.

$$\begin{aligned} [D, D^2 + q]\psi &= D(D^2 + q)\psi - (D^2 + q)D\psi, \\ &= D(\psi'' + q\psi) - (D^2 + q)\psi', \\ &= \psi''' + q'\psi + q\psi' - (\psi''' + q\psi'), \\ &= q'\psi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[D, D^2 + q] = q_x$, de forma tal que $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ es

$$q_t = q_x,$$

la cual tiene solución general

$$q(x, t) = q_0(x + t),$$

en donde q_0 es una función diferenciable, $q_0 \in C^1(\mathbb{R})$.

AFIRMACIÓN 7.6.1. *Los valores propios de $D^2 + q_0(x)$ son invariantes bajo traslaciones.*

Prueba. Si $y(x)$ es una solución de

$$y''(x) + q_0(x)y(x) = \lambda y(x),$$

para algún λ , entonces $z(x) \equiv y(x + t)$ resuelve

$$z''(x) + q_0(x + t)z(x) = \lambda z(x).$$

□

Caso 3. (Iremos al caso 2 enseguida.) Echémosle un vistazo al operador de tercer orden B de la forma,

$$B = a(x)D^3 + u(x)D + v(x),$$

tal que $[B, \mathcal{L}]$ es un operador de multiplicación. Tenemos que calcular $[B, \mathcal{L}] = [aD^3 + uD + v, D^2 + q]$:

$$\begin{aligned} [aD^3 + uD + v, D^2 + q]\psi &= (aD^3 + uD + v)(\psi'' + q\psi) - (D^2 + q)(a\psi''' + u\psi' + v\psi), \\ &= a(\psi^{(5)} + q'''\psi + 3q''\psi' + 3q'\psi'' + q\psi''') \\ &\quad + u(\psi'''' + q'\psi + q\psi')v\psi'' + vq\psi \\ &\quad - (a''\psi'''' + 2a'\psi^{(4)} + a\psi^{(5)}) \\ &\quad - (u''\psi' + 2u'\psi'' + u\psi''') \\ &\quad - (v''\psi + 2v'\psi' + v\psi'') - (qa\psi'''' + qu\psi' + qv\psi), \\ &= a(q'''\psi + 3q''\psi' + 3q'\psi'') \\ &\quad + uq'\psi \\ &\quad - (a''\psi'''' + 2a'\psi^{(4)}) \\ &\quad - (u''\psi' + 2u'\psi'') \\ &\quad - (v''\psi + 2v'\psi'), \\ &= -2a'\psi^{(4)} - a''\psi'''' + (3aq' - 2u')\psi'' \\ &\quad + (3aq'' - u'' - 2v')\psi' + (aq''' + uq' - v'')\psi \\ &= [-2a'D^4 - a''D^3 + (3aq' - 2u')D^2 \\ &\quad + (3aq'' - u'' - 2v')D + (aq''' + uq' - v'')]\psi. \end{aligned}$$

Para tener un operador de multiplicación, necesitamos que los coeficientes del operador de diferenciación sean todos cero:

$$D^4 : \quad a_x = 0 \Rightarrow a = \text{constante.}$$

$$D^3 : \quad a_{xx} = 0, \quad \text{se satisface automáticamente.}$$

$$D^2 : \quad 3aq' - 2u' = 0 \Rightarrow (3aq - 2u)_x = 0, \quad \text{puesto que } a = \text{constante,}$$

$$3aq - 2u = \tilde{c} \Rightarrow u = \frac{3}{2}aq + c,$$

$$D : \quad 3aq'' - u'' - 2v' = 0 \Rightarrow 3aq'' - \frac{3}{2}aq'' - 2v' = 0$$

$$\frac{3}{2}aq'' - 2v' = 0 \Rightarrow v' = \frac{3}{4}aq''$$

$$\Rightarrow v = \frac{3}{4}aq' + d \quad (d = \text{constante}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} q_t &= \dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}] = aq_{xxx} + uq_x - v_{xx} \\ &= aq_{xxx} + \left(\frac{3}{2}aq + c\right)q_x - \frac{3}{4}aq_{xxx} \\ &= \frac{1}{4}aq_{xxx} + \frac{3}{2}aqq_x + cq_x, \end{aligned}$$

i.e.,

$$q_t = \frac{a}{4}(q_{xxx} + 6qq_x + 4cq_x),$$

la cual es una EDP no lineal para $q = q(x, t)$. Escojamos $a = 4$, $c = 0$. De esta manera obtenemos la famosa ecuación de Korteweg-deVries:

$$q_t + q_{xxx} + 6qq_x = 0.$$

Caso 2. ¿Por qué nos saltamos este caso de operadores de segundo orden? Por lo siguiente.

Consideremos el operador lineal de segundo orden $B = \alpha(x)D^2 + \beta(x)D + \gamma(x)$. Calculemos $[B, \mathcal{L}]\psi$:

$$\begin{aligned}
 [B, \mathcal{L}]\psi &= [\alpha D^2 + \beta D + \gamma, D^2 + q]\psi \\
 &= (\alpha D^2 + \beta D + \gamma)(\psi'' + q\psi) - (D^2 + q)(\alpha\psi'' + \beta\psi' + \gamma\psi) \\
 (124) \quad &= \dots \text{ (algunos cálculos no muy largos ...)} \\
 (125) \quad &= [(-2\alpha')D^3 + (-\alpha'' - 2\beta')\psi D^2 + (2\alpha q_x - \beta'' - 2\gamma')D + (\alpha q_{xx} \\
 &\quad + \beta q_x - \gamma'')]\psi.
 \end{aligned}$$

Como en el caso anterior, requerimos un operador de multiplicación, de forma tal que debemos poner en ceros todos los coeficientes del operador D y sus potencias:

$$\begin{aligned}
 D^3 : \quad &-2\alpha' = 0 \Rightarrow \alpha = \text{constant} = \alpha_0. \\
 D^2 : \quad &-\alpha'' - 2\beta' = 0 \Rightarrow \beta = \text{constant} = \beta_0. \\
 D : \quad &2\alpha q_x - \beta'' - 2\gamma' = 0 \Rightarrow \gamma' = \alpha_0 q_x \Rightarrow \gamma = \alpha_0 q + c_1.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[B, \mathcal{L}]\psi = \alpha_0 q_{xx} + \beta_0 q_x - (\alpha_0 q)'' = \beta_0 q_x,$$

y

$$B = \alpha_0 D^2 + \beta_0 D + (\alpha_0 q + c_1) \Rightarrow B = \alpha_0 \mathcal{L} + \beta_0 D + c_1.$$

Podemos verificar que $[B, \mathcal{L}] = [\alpha_0 \mathcal{L} + \beta_0 D + c_1, \mathcal{L}] = \alpha_0 [\mathcal{L}, \mathcal{L}] + \beta_0 [D, \mathcal{L}] + c_1 [I, \mathcal{L}] = 0 + \beta_0 [D, D^2 + q] + 0 = \dots = \beta_0 q_x$, el cual es una variación del Caso 1.

Caso $2j + 1$. Hay operadores diferenciales de todos los ordenes **impares**, tales que $[B, \mathcal{L}]$ es un operador de multiplicación. Por lo tanto, la ecuación de Lax $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ se convierte en la EDP

$$q_t = \text{expresión no lineal en } q, q_x, \dots, \frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}} q.$$

Método general para encontrar las ecuaciones de Lax de orden “más alto”: se hará más tarde.

Caso más general: $2j$. Si queremos que B sea de orden **par** y el $[B, \mathcal{L}]$ sea un operador multiplicativo, entonces necesitamos:

$$B = \text{const.} \mathcal{L}^j + \text{cosas de orden } (2j - 1),$$

lo cual implica que $[\mathcal{L}^j, \mathcal{L}] = 0$, *i.e.*, hay una contribución nula en este orden, y regresamos al caso anterior y B tiene que ser de orden impar (hecho no obvio por el momento.)

Hemos encontrado entonces una familia de EDPs relacionadas a la ecuación de KdV,

$$q_t = (\text{Operador diferencial no lineal})[q],$$

llamada la **jerarquía de Lax de la ecuación de Korteweg-deVries** o, simplemente, **jerarquía de la ecuación de Korteweg-deVries**. Estos son **flujos Hamiltonianos conmutativos** en un espacio fásico ∞ -dimensional. (El corchete indica “aplicado a ...”).

Las ecuaciones de Lax, $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, son “*deformaciones*” iso-espectrales del operador diferencial \mathcal{L} . Hemos considerado este operador diferencial en particular, pero hay otros tipos de operadores los cuales también son iso-espectrales, tales como operadores integro-diferenciales o el operador de Zakharov-Shabat [35]. Esto requiere un entendimiento profundo de teoría espectral.

Ejemplo 7.6.III. La ecuación de Korteweg-deVries. Interpretación física.
La ecuación de Korteweg-deVries

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

es muy importante en hidrodinámica, física de plasmas, etc.

Comencemos con la ecuación de onda más simple, la ecuación uni-dimensional de onda (retomémosla aunque ya la hayamos estudiado,)

$$(126) \quad q_t + aq_x = 0, \quad a = \text{constant.}$$

Si la condición inicial es dada,

$$q(x, 0) = f(x),$$

entonces, la solución es

$$q(x, t) = f(x - at).$$

Si, digamos, $a > 0$, tenemos una translación por una distancia, at , a la derecha. Ver figura 19.

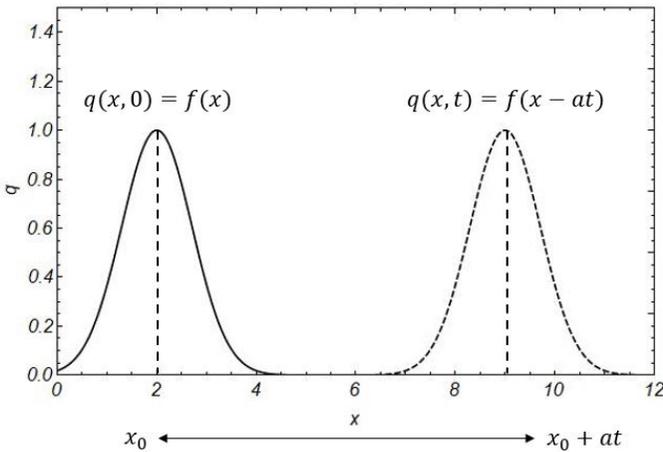


FIGURA 19. Onda translacional

Disipación. Es el mecanismo en el cual se le quita energía al sistema. Si a la ecuación (126) le agregamos el término bq_{xx} , obtenemos:

$$(127) \quad q_t + aq_x = bq_{xx}, \quad b > 0, \quad q(x, 0) = f(x).$$

El término bq_{xx} es el termino *disipativo*.

Este problema de valores iniciales se puede resolver con el método de transformadas de Fourier cuya solución es:

$$(128) \quad q(x, t) = \frac{1}{\sqrt{b\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(\frac{x - at - y}{bt}\right)^2 dy.$$

Si sustituímos $q(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ en (127), obtenemos

$$\omega(k) = ak - ibk^2.$$

Por lo tanto, $q^{(k)} = e^{ik(x-at) - bk^2t}$ resuelve (127). Tomando, digamos, la parte imaginaria (aplica lo mismo si tomamos la parte real,)

$$e^{-bk^2t} \sin(k(x - at)),$$

describe

- (a) una onda sinusoidal,
- (b) una onda translacional con velocidad a , y
- (c) una onda con amplitud decreciente por un factor e^{-bk^2t} .

Análisis de Fourier. La solución puede ser escrita en términos de todas las $q^{(k)}$:

$$q(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik(x-at) - bk^2t} dk,$$

con condición inicial

$$q(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk,$$

$|A(k)|$ denota la amplitud de la componente e^{ikx} . Entonces, todas las componentes son trasladadas una distancia at :

$$e^{ikx} \longrightarrow e^{ik(x-at)}.$$

Asimismo, la amplitud decrece como

$$|A(k)| \longrightarrow e^{-bk^2t} |A(k)|.$$

El factor de amortiguamiento e^{-bk^2t} eliminará componentes de k grandes más rápidamente.

Terminología.

k = número de onda,

ω = frecuencia,

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ = longitud de onda,

$R(\omega, k) = 0$: relación de dispersión

Efectos dispersivos. Consideremos la ecuación de onda dispersiva

$$(129) \quad q_t = -aq_x + cq_{xxx}.$$

Sustituyamos $q(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ para obtener

$$\omega(k) = ak + ck^3.$$

La solución a esta ecuación de onda dispersiva es

$$(130) \quad q(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik(x - (a + ck^2)t)} dk.$$

Notemos que la amplitud **no** es amortiguada. Los modos armónicos se trasladan con **velocidades dependientes de k** .

$$e^{ikx} \longrightarrow e^{ik(x - (a + ck^2)t)},$$

i.e., la velocidad de propagación de un modo depende del número de onda. Ver figuras 20 y 21.

Este fenómeno se llama **dispersion**: la luz pasando a través de un prisma, onditas en el agua después de que una piedra se aventó en un charco, etc.

La ecuación de onda,

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

no muestra disipación ni dispersión!

Efectos no lineales. Cambiemos $q_t = -aq_x$ por:

$$q_t = -qq_x,$$

la cual es una ecuación no lineal. La exponencial compleja, $q(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$, **no** resuelve esta ecuación, precisamente por la no linealidad: el análisis de Fourier no puede ser usado aquí.

En esta situación, busquemos soluciones de la forma

$$q(x, t) = f(x - qt),$$

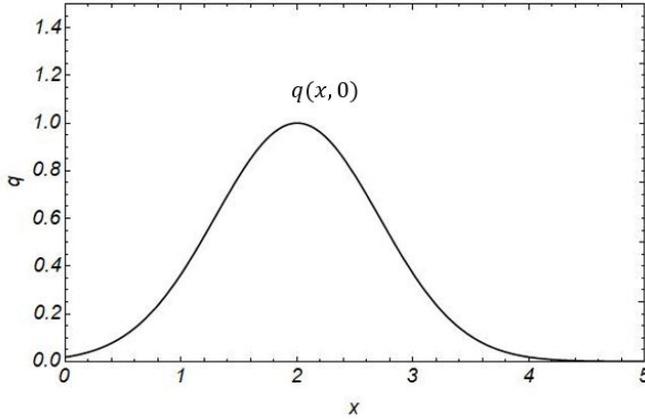


FIGURA 20. Condición inicial para la onda dispersiva

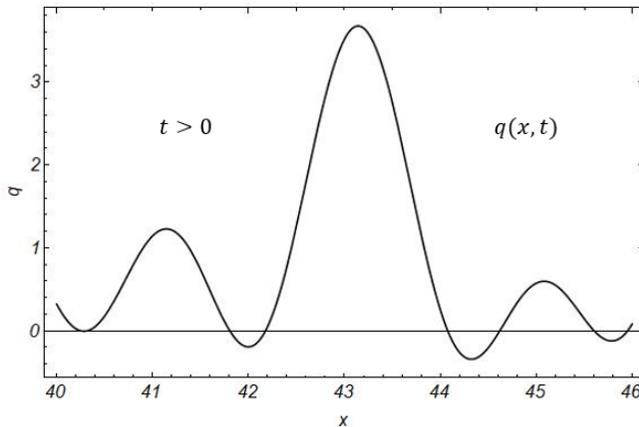


FIGURA 21. Evolución de la onda dispersiva

para alguna función continuamente diferenciable, $f \in C^1(\mathbb{R})$, excepto, quizá, en algunos puntos aislados. Notemos que $q = q(x, t)$ aparece en el argumento de f ,

Este tipo de solución, para la condición inicial $q(x, 0) = f(x)$, evoluciona como lo muestran las figuras 22, 23 y 24.

Decimos entonces que la onda “se rompe”, “se quiebra” o que ha “desarrollado una discontinuidad” (¡en $q_x(x, t)$!) o un “shock” o “choque”. Es común estudiar ondas de choque “promediando” las ondas de choque [28]. Ver figura 25. Por ejemplo, ondas poco profundas en la playa desarrollan ondas de choque, como lo vemos en las olas del mar cuando llegan a la playa.

La ecuación de Korteweg-deVries. La ecuación de Korteweg-deVries, como se ha mencionado previamente, es una ecuación que describe propagación de ondas en agua poco profunda [37, 38, 23]. La ecuación incorpora tanto efectos dispersivos, como no lineales. Algo completamente sorprendente (¡¿o milagroso acaso?!), es que soluciones a esta ecuación describen el equilibrio entre la dispersión y la no linealidad. Como consecuencia, no hay pérdidas de energía o cambios en la forma de la solución. Ver figuras 26 y 27.

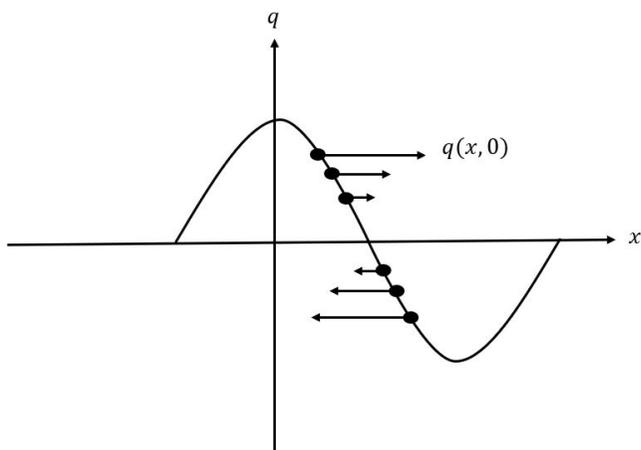


FIGURA 22. Condición inicial para una onda de choque

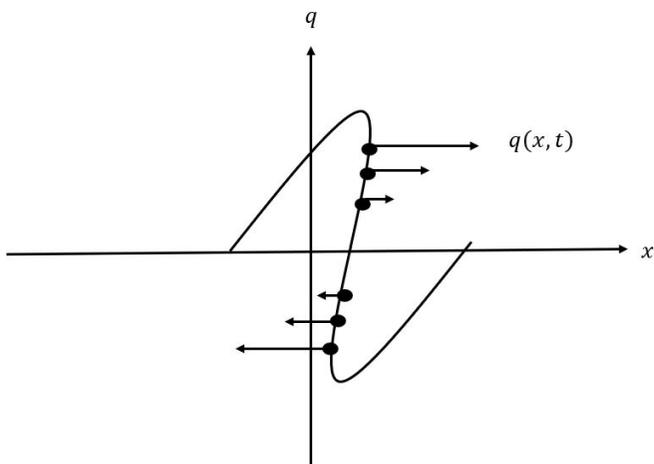


FIGURA 23. Evolución de una onda de choque

La ecuación de KdV,

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0,$$

surge como una aproximación a órdenes mayores de dispersión y no linealidad. Si q es pequeño, $|q^2q_x| \ll |qq_x|$. Puesto que q no es tan pequeño, *i.e.*, **no** es “infinitesimal”, entonces $|qq_x|$ contribuye a la ecuación.

Similarmente, $|q_{xxxx}| \ll |q_{xxx}|$, lo cual significa que $e^{i(kx+k^5t)}$ es menos significativo que $e^{i(kx-k^3t)}$. Esto funciona si k es chico. Entonces, k^5 es más pequeño que k^3 . Sin embargo, para valores grandes de t , entonces k^5t es grande y podría tener una contribución significativa.

No linealidad \sim Amplitud de onda.

q infinitesimal \implies no hay términos no lineales (matemáticamente, una ecuación no lineal es reemplazada por su linealización alrededor de cero).

q pequeña \implies términos no lineales cuadráticos.

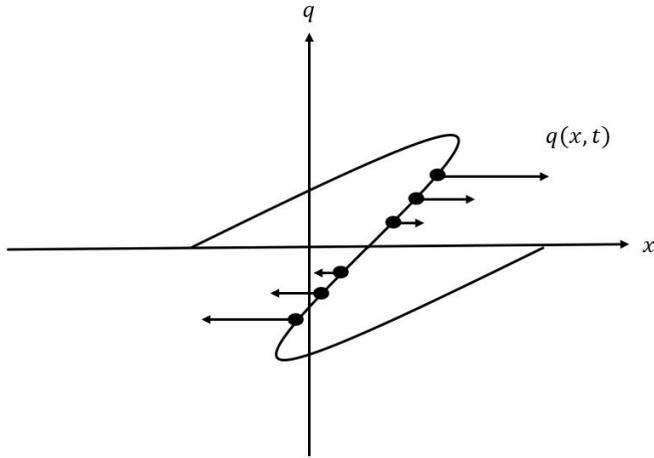


FIGURA 24. Más evolución de una onda de choque

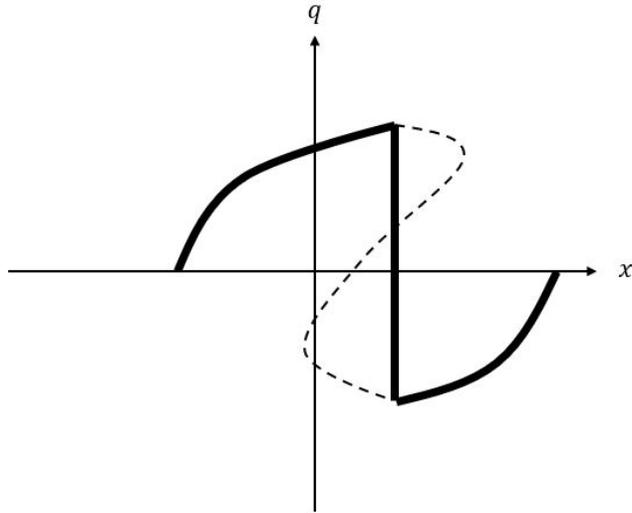


FIGURA 25. Promediando ondas de choque

Esto solamente es una expansión en Taylor en los parámetros que miden el tamaño de q .

Dispersion \sim Longitud de onda.

- q tiene una longitud de onda “infinita” o $k \sim 0 \implies$ no hay dispersion.
- q tiene ondas largas solamente. O k es chica pero no 0 $\implies q_{xxx}$,
- \implies dispersion de 3^{er} orden

Esto es sólo una expansión en Taylor alrededor del número de onda k .

Una aproximación más es la derivación de la ecuación de KdV: efectos 2-dimensionales o 3-dimensionales son débiles. Pero aún así podemos tener propagación hacia la izquierda o derecha.

La derivada de primer orden, ∂_t , restringe el movimiento a la derecha o a la izquierda, como en $q_t + aq_x = 0$.

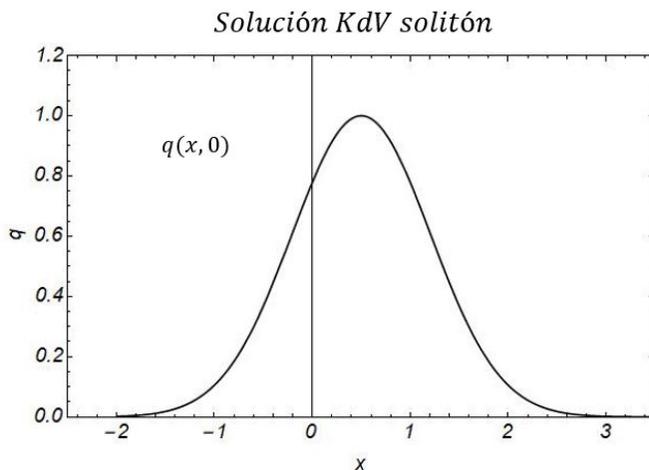


FIGURA 26. Condición inicial del solitón de KdV

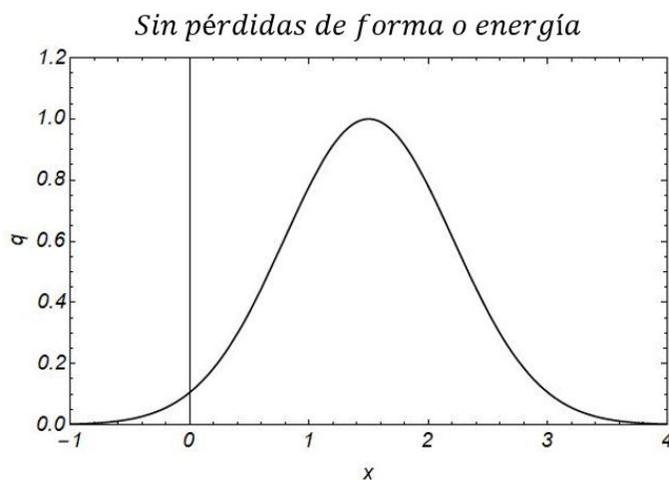


FIGURA 27. El solitón de KdV

7.7. Resumen. Tenemos una ecuación para operadores:

$$\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}].$$

Ésta define una “**deformación**” **iso-espectral** del operador \mathcal{L} . Aquí representa una EDO, o una EDP, o una ecuación discreta, para los coeficientes del operador \mathcal{L} .

Falta:

- checar que esta ecuación es Hamiltoniana y
- checar cómo podemos extraer información de ella.

No obstante, esto lo dejaremos para otro curso.

Dos ejemplos. Se estudiaron dos ejemplos: la cadena de Toda y la ecuación de Korteweg-deVries y se pusieron en forma de la ecuación de Lax. Son los ejemplos de ecuaciones y modelos típicos (y más sencillos) de ecuaciones integrables.

Estos también representan algunas cantidades físicas y fenómenos en la naturaleza.

Referencias. Esta sección está basada principalmente en las siguientes cuatro fuentes: [14] H. Flaschka. *Notes on Soliton theory*, [26] P. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolutions and solitary waves*. CPAM **XXI**. 467-490 (1968), [27] P. Lax, *Periodic solutions of the KdV equation*. CPAM **XXVIII**. 141-188 (1975), y [21] A. Kasman. *Glimpses of Soliton Theory*. American Mathematical Society. Student Mathematical Library, vol. **54** (2010).

7.8. Tarea.

TAREA 7.1. *Construya las primeras tres ecuaciones de KdV en la jerarquía de Lax, (101), usando la formulación variacional (100) y las primeras tres cantidades conservadas de la ecuación de KdV, (102).*

TAREA 7.2. *Revise la prueba del teorema de Lax, 7.2.2, en [26], [10], [38], [37], [35] o en [21].*

TAREA 7.3. *Considere ahora la ecuación de Lax $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$. Pruebe las siguientes afirmaciones para B y \mathcal{L} dadas como en (107) y (108).*

- (i) *Checar que $[B, \mathcal{L}]$ es tridiagonal y simétrica. Puesto que $\dot{\mathcal{L}}$ es tridiagonal y simétrica, también $[B, \mathcal{L}]$ debe ser tridiagonal y simétrica.*
- (ii) *De un cálculo directo, podemos checar que el producto de matrices tridiagonales es tridiagonal. Así, $[B, \mathcal{L}]$ es tridiagonal. Verifíquelo.*
- (iii) *Ahora $[B, \mathcal{L}]^T = (B\mathcal{L})^T - (\mathcal{L}B)^T = \mathcal{L}^T B^T - B^T \mathcal{L}^T = \mathcal{L}(-B) - (-B)\mathcal{L} = -\mathcal{L}B + B\mathcal{L} = [B, \mathcal{L}] \Rightarrow [B, \mathcal{L}]$ es simétrica.*
- (iv) *Los elementos fuera de la diagonal de $\dot{\mathcal{L}}$ no son necesariamente positivos.*

TAREA 7.4. *Construya las ecuaciones (109) usando (107), (108) y la ecuación de Lax (106).*

TAREA 7.5. *Usando el Teorema de Lax, teorema 7.4.2, pruebe que $\text{Tr}(\mathcal{L}^k)$ son constantes de movimiento*

TAREA 7.6. *Usando la transformación de Flaschka (117), transforme las ecuaciones de Toda (115), para obtener las ecuaciones de Flaschka (109).*

TAREA 7.7. *Constuya las ecuaciones (120) usando los operadores definidos en las ecuaciones (118) y (119), y la ecuación de Lax (106).*

TAREA 7.8. *Verifique que los valores y funciones dados en (122) y en (123) son efectivamente los valores propios y funciones propias correspondientes al problema de valores en la frontera dado en (121).*

TAREA 7.9. *Efectúe los cálculos no muy largos que deben ir en la ecuación (124) para obtener la ecuación (125).*

TAREA 7.10. *Calcule el operador B de orden 5° y la correspondiente ecuación de Lax $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$. Debe obtener:*

$$q_t + 3q^2 q_x + 20q_x q_{xx} + 10q_x q_{xxx} + \partial_x^5 q.$$

TAREA 7.11. *Resolver la ecuación (127) con transformadas de Fourier para obtener la solución (128). Puede hacerlo de dos maneras.*

1. *Aplicar la transformada de Fourier a la ecuación (127) y usar propiedades de la transformada.*
2. *Con el camino de variables, $x = a\tau + y$, $t = \tau$ para obtener la ecuación del calor y resolverla como se hizo en la sección 5.3.*

TAREA 7.12. *Con la transformada de Fourier, encuentre la solución (130) de (129). Describa qué es $A(k)$ en términos del problema de valores iniciales de (129).*

8. EL MÉTODO DE DISPERSIÓN INVERSA.

La ecuación que ahora deseamos resolver es la ecuación de Korteweg-deVries (KdV),

$$(131) \quad u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Notemos que hemos puesto $q(x, t) = -u(x, t)$. Como condición inicial para este problema tomemos:

$$(132) \quad u(x, 0) = V(x),$$

donde la función $V(x)$ es una función dada.

Nuestro problema es un problema de propagación de ondas en un canal con agua poco profunda y también de longitud infinita, por lo que debemos dar el comportamiento de la solución $u(x, t)$ en el infinito.

Como en cualquier tiempo finito la onda está a una distancia finita, en el infinito el agua debe de estar quieta, en reposo. Por tanto, vamos a pedir para la amplitud de onda

$$(133) \quad u(x, t) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty,$$

para todo tiempo finito t . Así pues, deseamos resolver la ecuación (131), con condición inicial (132) y comportamiento en el infinito (133).

8.1. Invarianza de Galileo. Probaremos enseguida que la ecuación de Korteweg-deVries es invariante bajo transformaciones de Galileo. Este resultado es esperado, pues para la construcción de las ecuaciones se usaron desde un principio la ley de Newton y las leyes de la hidrodinámica. Tomando:

$$(134) \quad u(x, t) = U(\xi, \tau) - \lambda,$$

con:

$$\begin{aligned} \xi &= x - 6\lambda t \\ \tau &= t, \end{aligned}$$

entonces, sustituyendo en (131):

$$(U_\tau - 6\lambda U_\xi) - 6(U - \lambda)U_\xi + U_{\xi\xi\xi} = 0,$$

i.e.,

$$U_\tau - 6UU_\xi + U_\xi\xi\xi = 0,$$

la cual es la ecuación de Korteweg-deVries (KdV). Por lo tanto, la ecuación de KdV es invariante bajo transformaciones de Galileo.

8.2. La transformación de Miura y la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica. Para su referencia, puede consultar detalles en [41].

La ecuación de KdV (131) es una ecuación **no** lineal, debido al término uu_x . En general, las ecuaciones no lineales, aún las ordinarias, son muy difíciles de estudiar y aún más, de resolver. Sin embargo, hay algunas ecuaciones que, usando alguna transformación más o menos ingeniosa, pueden ser linealizadas. Por ejemplo, ecuaciones del tipo

$$(135) \quad y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$$

llamadas *ecuaciones de Riccati*, pueden ser linealizadas bajo la transformación:

$$(136) \quad y = \frac{z'}{zP(x)}$$

que conducen a la ecuación:

$$(137) \quad P(x)z'' + (PQ - P')z' + P^2Rz = 0$$

la cual es lineal en z [24], [33]. La complejidad en el método de solución de esta ecuación depende de las funciones $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, pero el hecho que es *lineal* puede facilitar enormemente la tarea de resolverla.

También existen ecuaciones en derivadas parciales *no* lineales, las cuales pueden ser linealizadas. Por ejemplo, la ecuación de Burgers:

$$(138) \quad u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad (\nu > 0),$$

puede ser linealizada por la transformación

$$(139) \quad u = -2\nu \frac{\phi_x}{\phi},$$

que se le llama **Transformación de Cole-Hopf**, y que conduce a la expresión

$$\left(\frac{\phi_t}{\phi}\right)_x = \nu \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi}\right)_x,$$

que al integrar respecto a x se obtiene:

$$\phi_t = \nu \phi_{xx} + C(t)\phi,$$

donde $C(t)$ es constante de integración. Ahora, llamando

$$\phi = \Phi \exp \left[\int C(t) dt \right],$$

obtenemos la ecuación del calor

$$(140) \quad \Phi_t = \nu \Phi_{xx},$$

por lo que la ecuación de Burgers puede ser integrada para cualquier $C(t)$.

Pensamos en utilizar transformaciones del tipo de Cole-Hopf (139), $u = \psi_x/\psi$, para tratar de linealizar la ecuación de KdV (131), pero sólo nos lleva a una ecuación más complicada . . . y no lineal:

$$(\psi\psi_{xt} - \psi_x\psi_t)\psi^2 - 6(\psi\psi_{xx} - \psi_x^2)\psi\psi_x + \dots = 0$$

La solución al problema de resolver la ecuación de KdV (131), con condición inicial (132), se encontró por un camino realmente inesperado. Para verlo, definamos primero los operadores K y M de la siguiente manera:

$$(141) \quad \begin{aligned} K[u] &= u_t - 6uu_x + u_{xxx} \\ M[v] &= v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} \end{aligned}$$

Con esta notación, la ecuación de KdV se escribe:

$$K[u] = 0$$

Ahora, a la ecuación:

$$M[v] = 0,$$

se le conoce como **ecuación modificada de KdV** (mKdV).

Muchos matemáticos siguieron buscando una transformación que linealizara la ecuación de KdV, mientras R. Miura estudiaba simultáneamente las ecuaciones de KdV y mKdV [32]. En sus estudios, Miura observó que si u y v (soluciones a las ecuaciones de KdV y MKdV respectivamente) están relacionadas por la ecuación

$$(142) \quad u = v^2 + v_x,$$

entonces,

$$(143) \quad \frac{\partial}{\partial x} M[v] + 2vM[v] = K[u],$$

donde los operadores K y M están dados por (141).

Así, si v satisface la ecuación mKdV, $M[v] = 0$, entonces u satisface la ecuación de KdV,

$$K[u] = 0.$$

Al revés también es cierto. Esto es, si u satisface la ecuación de KdV, $K[u] = 0$, entonces v es solución de una ecuación mucho más complicada, $\frac{\partial}{\partial x} M[v] + 2vM[v] = 0$, que no necesariamente es la ecuación MKdV, pero que si se pide $v \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \pm\infty$, entonces $M[v] = 0$.

A la transformación (142), se le conoce como **transformación de Miura**.

El siguiente intento fue linealizar la transformación de Miura (142). Si en dicha transformación $u(x)$ fuese dada, entonces es una ecuación del tipo de Riccati (135) para la función $v(x)$, con $P(x) \equiv 1$, $Q(x) \equiv 0$ y $R(x) = -u(x)$. Podemos así linealizar (142) (cf. (135)) con la transformación (cf. (136)):

$$v = \frac{\psi_x}{\psi},$$

por lo que ψ satisface la siguiente ecuación:

$$\psi_{xx} - u\psi = 0.$$

Ahora, recordemos que la ecuación de KdV es invariante bajo las transformaciones de Galileo (sección 8.1). Es decir, podemos tomar la transformación (134):

$$u \longrightarrow u - \lambda.$$

Entonces:

$$(144) \quad \psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0$$

¡Pero ésta es la ecuación estacionaria de Schrödinger de la mecánica cuántica!

En este momento, el enfoque ha cambiado. Ahora, más que hablar de una transformación, hablamos más bien de un problema asociado de dispersión (o bien, un problema espectral) para la función ψ , cuya información puede ser usada para conocer propiedades de $u = u(x, t)$. Desde este punto de vista, el perfil de la onda $u = u(x, t)$ es el potencial de dispersión. El tiempo t aparece aquí como un parámetro, por lo que hay un problema de dispersión para cada valor del parámetro t .

Es importante hacer notar que el tiempo t de la ecuación de KdV **no tiene nada que ver** con la variable temporal de la ecuación dependiente del tiempo de Schrödinger. De esta forma, la idea de Greene (uno de los inventores del *Método de Dispersión Inversa*) fue buscar el “potencial” $u = u(x, t)$ para todo tiempo t , a partir de información del espectro $\lambda = \lambda(t)$ y de las funciones de onda $\psi = \psi(x, t)$ en todo instante t . Su idea fue correcta ...

8.3. Los Espectros Discretos y Contínuos. Al resolver la ecuación de Schrödinger y buscar cuáles valores toma la energía (*i.e.*, buscar los valores propios), encontraremos que pertenecen a dos tipos de conjuntos: uno **discreto** y otro **contínuo**, y les llamaremos **espectro discreto** y **espectro contínuo**, respectivamente, a dichos conjuntos.

Tomemos $\lambda \equiv k^2$ en la ecuación (144), por lo que :

$$(145) \quad \psi_{xx} - (u - k^2)\psi = 0$$

En nuestro problema de propagación de ondas en el agua, $u(x, t) \rightarrow 0$ para $|x| \rightarrow \infty$. Así, las asintóticas de las soluciones de la ecuación (145) son:

$$\psi(x, k) \sim e^{ikx} \quad \text{ó} \quad e^{-ikx},$$

pues en el caso $u(x, t) \equiv 0$, (145) es

$$\psi_{xx} + k^2\psi = 0.$$

Elijamos el comportamiento:

$$(146) \quad \psi(x, k) \sim e^{ikx}, \quad \text{para } x \sim \infty,$$

debido al hecho de que queremos estudiar un problema de dispersión. Esto es, pedimos que hacia el infinito se propague una onda de módulo 1 (de amplitud 1), después de haber interactuado con el potencial $u(x, t)$.

Para estudiar el efecto de u sobre ψ , consideremos la ecuación no homogénea:

$$(147) \quad \psi_{xx} + k^2\psi = \eta(x)$$

donde $\eta(x) \equiv u\psi(x, k)$ es el término no homogéneo. A la ecuación (147), podemos encontrarle una solución particular usando el método de variación de parámetros,

pues conocemos dos soluciones linealmente independientes del problema homogéneo: e^{ikx} y e^{-ikx} .

La solución estará dada por

$$(148) \quad \psi(x, k) = e^{ikx} + \psi_p(x, k),$$

donde $\psi_p(x, k)$ es una solución particular dada por

$$(149) \quad \psi_p(x, k) = A(x)e^{ikx} + B(x)e^{-ikx},$$

con

$$A(x) = - \int_{\infty}^x \frac{e^{-iky} \eta(y)}{W(e^{iky}, e^{-iky})} dy$$

$$B(x) = \int_{\infty}^x \frac{e^{iky} \eta(y)}{W(e^{iky}, e^{-iky})} dy,$$

tales que $A(x), B(x) \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow \infty$, de tal modo que $\psi_p(x, k) \rightarrow 0$, pues pedimos el comportamiento $\psi(x, k) \sim e^{ikx}$, si $x \sim \infty$. La función W es el Wronskiano de las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea y su valor es

$$W(e^{iky}, e^{-iky}) = -2ik.$$

Así la solución particular (149) de la ecuación de Schrödinger (147) está dada por:

$$\psi_p(x, k) = \int_x^{\infty} \frac{-e^{-iky} u(y) \psi(y, k) e^{ikx} + e^{iky} u(y) \psi(y, k) e^{-ikx}}{-2ik} dy$$

que simplificando y sustituyendo en (148) obtenemos:

$$(150) \quad \psi(x, k) = e^{ikx} - \int_x^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \psi(y, k) dy$$

Esta es un ecuación integral para la función $\psi(x, k)$, solución a la ecuación de Schrödinger. Veremos más adelante que la ecuación integral puede resolverse usando iteraciones, y que, además, es una función analítica de la variable k para $\text{Im}(k) \geq 0$.

Ahora, la ecuación de Schrödinger es un problema de Sturm-Liouville. Sabemos que las funciones propias corresponden a **valores propios discretos**. También sabemos que, cuando se trata de funciones propias, los valores propios son negativos: $\lambda_j = -\kappa_j^2 < 0$, ($j = 1, 2, 3, \dots$), dado que el potencial $u(x) < 0$ y $u(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Para tener tal comportamiento, pedimos que $k_j = i\kappa_j$. La continuación analítica impondrá la condición $\text{Im}(k_j) = \kappa_j > 0$. Los estados correspondientes a las funciones propias forman lo que se llama **los estados ligados**.

Observación 8.3.1. Para un estudio detallado sobre la continuación analítica de las soluciones, el lector interesado puede consultar [44].

En el caso $\text{Im}(k) = 0$, tenemos que $\lambda = k^2 \geq 0$. Aquí, las soluciones $\psi(x, k)$ oscilan y están acotadas, por lo que los valores de k no están restringidos y pueden tomar cualquier valor real, esto es, pueden variar continuamente en $\text{Im}(k) = 0$. Aquí hablamos del **espectro continuo**. Estos son **los estados libres**.

Para visualizar que los estados libres pertenecen al espectro continuo y los acotados al discreto, recurramos a las ideas de la mecánica cuántica. Sabemos que en mecánica cuántica la energía (aquí representada por la letra λ) es muy probablemente mayor que la “energía potencial” $u(x)$. (En mecánica clásica, siempre es mayor). Por tanto, $\lambda - u = k^2 - u > 0$. (Figura 28).

Para el valor de $\lambda = -\kappa^2$ dado en la figura 28, los estados son acotados. Es decir, el dominio de la función de onda $\psi(x, k)$ es (muy probablemente) acotado, y es dado por la restricción:

$$\lambda - u = -\kappa^2 - u > 0 \quad (\text{muy probablemente})$$

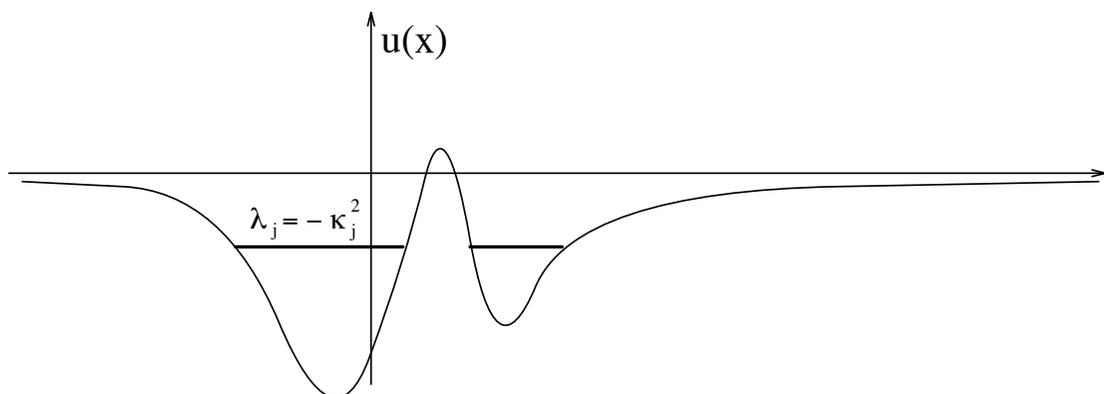


FIGURA 28. El espectro discreto

Cuando ésto sucede (los estados acotados), la energía está cuantizada, es decir, los valores propios toman valores discretos:

$$\lambda = \lambda_j = -\kappa_j^2 < 0.$$

Como estudiamos el caso $\lambda = k_j^2 = -\kappa_j^2 < 0$, debemos pedir: $k_j = i\kappa_j$. Así, tenemos un energía negativa: $\lambda_j = -\kappa_j^2 < 0$. Podemos pensar, por ejemplo, en los *estados acotados* de un electrón atrapado por un núcleo de hidrógeno (esto es, recordemos el modelo atómico de Bohr). En este modelo, los estados de los electrones están *cuantizados*, son *discretos*.

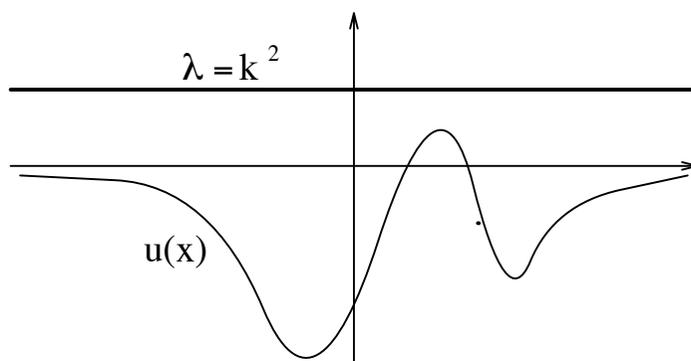


FIGURA 29. El espectro continuo

Si $\lambda = k^2$ (Figura 29), $\lambda - u = k^2 - u > 0$, para *cualquier* valor de x , de aquí que para el ejemplo o analogía con el electrón en el átomo de hidrógeno de Bohr *no* esté atrapado, es decir, que el estado sea *no* acotado.

En mecánica cuántica, cuando un estado es *no* acotado, se tiene un espectro continuo, esto es, cualquier valor de la energía es un valor permitido. Continuando con la analogía del átomo de hidrógeno, en el caso del estado *no* acotado, el electrón es libre, *no* está atrapado. Cambiar su energía $\lambda_1 > 0$ por otra arbitraria $\lambda_2 > 0$, no altera el estado libre del electrón, pues su energía siempre es positiva. Así, el cambio de energía será siempre en forma continua en el intervalo $\lambda \geq 0$, por lo que el **espectro**, en este caso, es **continuo**.

8.4. La Invarianza del Espectro en el Tiempo. Como mencionamos al final de la sección 8.2, tenemos un problema de dispersión para cada valor del parámetro t . Sin embargo, no conocemos la solución $u(x, t)$ de la ecuación de KdV, por lo que nos gustaría saber si se puede determinar el “potencial” $u(x, t)$ con cierta información dada de antemano que debe, por supuesto, depender de t . La respuesta es que **sí es posible** encontrar la solución a tal problema, dando como datos “*el coeficiente de reflexión*”, “*las constantes de normalización*” (que más adelante definiremos) y “*los valores propios*.” Todos deben ser conocidos en el instante t .

Como veremos a continuación, ¡el espectro es constante en el tiempo t ! De este modo, lo único necesario es encontrar los valores propios en $t = 0$. Esto se puede lograr resolviendo el problema directo:

$$\psi_{xx} + (\lambda(0) - V(x))\psi = 0,$$

pues recordemos que $V(x) = u(x, 0)$ es la condición inicial del problema de valores iniciales para la ecuación de KdV.

Tenemos pues que a la ecuación de KdV le podemos asociar el problema **lineal** de la ecuación estacionaria de Schrödinger:

$$\psi_{xx} + (k^2 - u)\psi = 0$$

La función de onda $\psi(x, k)$ es una función de x y de k , y el valor propio λ es una constante (¡en x !). Ahora, el potencial es solución de la ecuación de KdV (131), por lo que depende tanto de la variable espacial x como de la temporal t : $u = u(x, t)$. Así, el tiempo t juega el papel de parámetro en la ecuación de Schrödinger (144):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, k; t) + (\lambda(t) - u(x, t))\psi(x, k; t) = 0,$$

por lo que no solo la función de onda $\psi(x, k; t)$ puede depender del tiempo, *sino también del valor propio* $\lambda(t)$.

Ahora, nos podríamos hacer la siguiente pregunta: ¿cómo evoluciona en el tiempo el valor propio $\lambda(t)$, si el “potencial” $u = u(x, t)$ evoluciona de acuerdo a la ecuación de KdV? La respuesta, como lo mencionamos anteriormente, es bastante sorprendente.

Veamos primero cómo evolucionan en el tiempo los valores propios correspondientes al espectro discreto $\lambda_j(t) = -\kappa_j^2(t)$. Para ello, escribamos $u(x, t)$ de la siguiente forma, usando la ecuación de Schrödinger,

$$u(x, t) = \frac{\psi_{xx}(x, i\kappa_j(t), t)}{\psi(x, i\kappa_j(t), t)} - \kappa_j^2(t).$$

Substituyendo esta expresión de $u(x, t)$ en la ecuación de KdV, tendremos la relación siguiente entre $\psi(x, i\kappa_j(t), t)$ y sus derivadas con la evolución de $-\kappa_j^2(t)$:

$$(151) \quad |\psi_j|^2 \frac{d\kappa_j^2}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi_j \frac{\partial Q_j}{\partial x} - Q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right),$$

donde

$$\psi_j = \psi(x, i\kappa_j, t),$$

$$(152) \quad Q \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_x \psi - 2(u + 2\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

y

$$Q_j = Q|_{k=i\kappa_j}.$$

La prueba de la validez de la ecuación (151) será dada en el apéndice D.

Ahora, por ser ψ_j función propia:

$$(153) \quad \psi_j \rightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Integrando desde $-\infty$ hasta ∞ la ecuación (151) y usando el comportamiento (153) de la función propia ψ_j , obtenemos

$$(154) \quad \frac{d\kappa_j^2}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_j|^2 dx = 0$$

Además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_j|^2 dx \neq 0,$$

y es convergente, por ser ψ_j función propia. De (154) se concluye que

$$(155) \quad \frac{d\kappa_j^2}{dt} = 0.$$

Esto es, $i\lambda_j(t) = -\kappa_j^2(t)$ es una *constante de movimiento*!. Por tanto escribiremos:

$$\kappa_j(t) = \kappa_j(0) = \kappa_j.$$

Ahora, ¿qué pasa con el espectro continuo? Sabemos que el espectro continuo consiste de los valores $\lambda = k^2 > 0$ y esto se cumple *para toda* k real. Ahora, el *espectro continuo siempre es positivo, independientemente* del parámetro t . Por tal motivo,

$$\frac{dk^2}{dt} = 0,$$

¡también es constante de movimiento!. Por lo que escribiremos:

$$\lambda(t) = k^2,$$

sin anotar explícitamente el tiempo para recordar que se trata de una constante de movimiento.

8.5. Evolución de las Funciones de Onda. Es un hecho también muy sorprendente que podemos “casi” calcular la evolución temporal de las funciones propias $\psi_j = \psi(x, i\kappa_j; t)$ y de las funciones correspondientes al espectro continuo $\psi = \psi(x, k; t)$. Esto nos servirá posteriormente para calcular la evolución temporal de “*las constantes de normalización*” y del “*coeficiente de reflexión*”. Aquí por temporal se refiere a la evolución en el tiempo “ t ” de la ecuación de KdV.

Veamos primero cuál es la ecuación de evolución de las funciones propias. Usando la ecuación de evolución (155) de los valores propios, $\lambda_j = -\kappa_j^2$, en la ecuación (151) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi_j \frac{\partial Q_j}{\partial x} - Q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) = 0.$$

Integrando con respecto a x se sigue que:

$$\psi_j \frac{\partial Q_j}{\partial x} - Q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = D(t),$$

donde $D(t)$ es una función arbitraria del tiempo. Notemos que, dividiendo la ecuación anterior entre ψ_j^2 , la podemos escribir como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_j}{\psi_j} \right) = \frac{D(t)}{\psi_j^2},$$

que integrando resulta

$$(156) \quad \frac{Q_j}{\psi_j} = D(t) \int_{-\infty}^x \frac{dy}{\psi_j^2} + E(t),$$

donde $E(t)$ es otra función arbitraria del tiempo. Como $\psi_j(y) \rightarrow 0$ exponencialmente, cuando $y \rightarrow \infty$ (ver ecuación (153)), tenemos que $1/\psi_j^2$ *crece exponencialmente*, por lo que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\psi_j^2}$$

es divergente. Ahora, por (156), tendríamos que Q_j diverge cuando $x \rightarrow \infty$. Pero Q_j **no** puede diverger, ya que depende de ψ_j y sus derivadas, por lo que $Q_j \rightarrow 0$, si $x \rightarrow \infty$. Así, debemos escoger $D(t) \equiv 0$ en (156), resultando:

$$Q(x, i\kappa_j : t) = \psi(x, i\kappa_j : t)E(t).$$

Usando la definición (152) de Q y $\lambda = \lambda_j = -\kappa_j^2$:

$$(157) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial t} + u_x \psi_j - 2(u - 2\kappa_j^2) \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = E(t) \psi_j,$$

y tomando $\psi_j = \varphi_j e^{\int E(t) dt}$, tenemos:

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + u_x \varphi_j - 2(u - 2\kappa_j^2) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = 0,$$

por lo que, equivalentemente, podemos escoger $E(t) \equiv 0$ en (157), quedando:

$$(158) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial t} + u_x \psi_j - 2(u - 2\kappa_j^2) \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = 0$$

Usando la ecuación de Schrödinger (144), despejemos $\lambda = \lambda_j = -\kappa_j^2$ y derivemos dicha ecuación respecto a x para obtener:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_j = -\kappa_j^2 &= u - \frac{(\psi_j)_{xx}}{\psi_j}, & \text{y} \\ u_x &= \frac{(\psi_j)_{xxx}}{\psi_j} - \frac{(\psi_j)_{xx}(\psi_j)_x}{\psi_j^2}. \end{aligned}$$

Usando estas expresiones en la ecuación (158), encontramos que la ecuación de evolución de ψ_j es

$$(159) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial t} + 4 \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial \psi_j}{\partial x} - 3\psi_j u_x = 0.$$

Definamos al operador B del siguiente modo:

$$(160) \quad B[\varphi] \equiv -4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 3\varphi u_x.$$

Así, la ecuación de evolución (159) de ψ_j se puede escribir como:

$$(161) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = B[\psi_j]$$

Observación 8.5.1. El operador B , ecuación (160), es uno de los operadores de Lax, y aparece en la ecuación de Lax (99) y del que hablamos en toda la sección 7, pero aquí aplicado a la ecuación de KdV.

Con un razonamiento análogo, podemos llegar a que las funciones ψ correspondientes al espectro continuo $\lambda = k^2$ cumplen con la ecuación:

$$\psi \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial \psi}{\partial x} = D(t).$$

Usando la definición (152) de Q y el comportamiento asintótico $\psi \sim e^{ikx}$ en $x \sim \infty$ (ecuación (150)), tenemos:

$$D(t) = \psi \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial \psi}{\partial x} \sim 0, \quad \text{para } x \sim \infty$$

y, por tanto,

$$(162) \quad D(t) \equiv 0,$$

pues es constante en x .

Así, se cumple la ecuación

$$\psi \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Entonces, y de la misma manera como se hizo para el caso discreto, obtenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + 4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial \psi}{\partial x} - 3\psi u_x = 0,$$

o bien,

$$(163) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = B[\psi],$$

la cual es la ecuación de evolución para las funciones $\psi(x, k; t)$ correspondientes al espectro continuo, donde B está definido en (160).

8.5.1. Panorama del método de dispersión inversa: resolución de la ecuación de KdV. Notemos ahora que, dado que la condición inicial $u(x, 0) = V(x)$ (ecuación (132)) es dada de antemano, en principio podemos resolver la ecuación estacionaria de Schrödinger en el instante inicial $t = 0$,

$$\psi_{xx}(x, k, 0) + (\lambda(0) - V(x))\psi(x, k, 0) = 0.$$

Esto es, podemos conocer los valores propios, $\lambda(0) = -\kappa_j^2(0)$, y funciones propias, $\psi(x, i\kappa_j, 0)$, en el instante inicial $t = 0$. Es decir, habremos resuelto *el problema de dispersión directa*.

Conocemos la evolución temporal de los valores propios $\lambda(t) = -\kappa_j^2$ pues, como vimos, son constantes de movimiento. Además, podemos también “casi” conocer la evolución en el tiempo de las funciones propias $\psi_j = \psi(x, i\kappa_j, t)$ y de las que corresponden al espectro continuo $\psi = \psi(x, k; t)$ (ecuaciones (161) y (163)). Y hacemos énfasis en la palabra *casi*, pues en el operador B (ecuación (160)), aparece la función desconocida $u(x, t)$.

Ahora, con esta información de los valores propios $\lambda_j(t) = \lambda_j = -\kappa_j^2$ (constantes de movimiento), de las funciones propias $\psi_j = \psi(x, i\kappa_j, t)$ y de las funciones de onda $\psi = \psi(x, k; t)$, ¿podemos conocer el potencial $u(x, t)$? Es decir, ahora queremos resolver el problema inverso: dadas las funciones $\psi(x, i\kappa_j, t)$, $\psi(x, k; t)$ y los valores propios $\lambda_j(t) = -\kappa_j^2$, determinar el “potencial” $u(x, t)$.

En el año de 1951, Gel’fand y Levitan [16] encontraron que esto **sí es posible**. Aún más, no es necesario conocer completamente las soluciones ψ_j y ψ , sino que solo basta conocer “la constante de normalización” $c_j(t)$ de ψ_j , y el comportamiento asintótico de la función ψ en $x \sim \infty$ y $x \sim -\infty$. En estos límites, la función $u(x, t)$ es conocida, por lo que tomando las asintóticas en las ecuaciones de las funciones ψ_j y ψ , (161) y (163), tendremos un medio para conocer la evolución temporal de ψ_j y ψ en ∞ .

Gel’fand y Levitan [16] se dieron cuenta además que, dando solamente el comportamiento asintótico de las funciones propias, ψ_j , y de onda ψ , las constantes de normalización c_j y los valores propios λ_j , es posible plantear una ecuación integral **lineal** para cierta función $K(x, y)$. De hecho, la ecuación que relaciona el potencial $u(x, t)$ con la función $K(x, y; t)$ es:

$$u(x, t) = -2 \frac{dK}{dx}(x, x; t)$$

Por lo que el problema inverso quedaría resuelto y conoceríamos la solución de la ecuación de KdV. Los detalles serán dados más adelante.

8.6. Problemas de Dispersión. En esta sección daremos una idea sumamente intuitiva de qué queremos decir con problemas de dispersión, y daremos una idea de lo que queremos decir por datos de dispersión, como coeficientes de transmisión, reflexión y estados ligados. Reitero: será muy intuitiva.

Tenemos entonces que la ecuación de Schrödinger nos plantea dos tipos de problemas:

1. **Problema de dispersión directa** o bien **problema espectral**. Dada $u(x)$ y su comportamiento en el infinito, $|x| \rightarrow \infty$, determinar $\psi_j(x)$, $\psi(x)$ y λ_j , *i.e.*, las funciones propias, la función de onda y los valores propios.

2. **Problema de dispersión inversa** Dadas $\psi_j(x), \psi(x)$ y λ_j , determinar el potencial $u(x)$.

De manera muy intuitiva y nada rigurosa, veamos la descripción de un sencillo problema que, en cierto modo, se parece al problema *inverso* de dispersión en mecánica cuántica.

Imaginemos que lanzamos N pelotas desde la derecha sobre algunos obstáculos y valles, cuya forma desconocemos. (Figura 30).

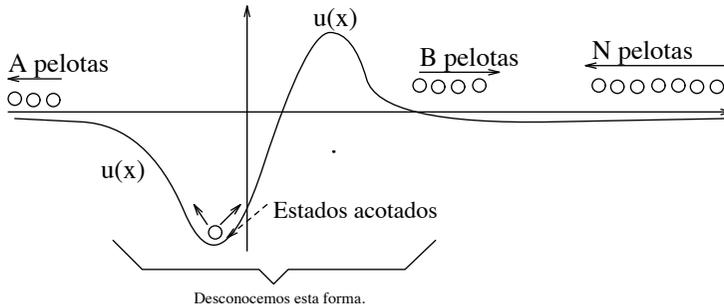


FIGURA 30. Problema de dispersión (imagen descriptiva)

Lo que deseamos conocer es la forma de los obstáculos y valles, i.e., del potencial $u(x)$. Para tal fin, será necesario conocer el número A de pelotas que pasan las barreras y el número B de pelotas que rebotan en dichos obstáculos. Además, quedarán otras pelotas atrapadas en los valles. La región de movimiento de estas pelotas atrapadas es finita, lo que constituirá los *estados acotados*, pues la región en que se encuentran es acotada (de otra forma serían estados libres).

Ahora, como mencionamos en la sección anterior, para conocer la forma de $u(x)$, los datos necesarios son B/N (el coeficiente de reflexión, el cual se determina del comportamiento asintótico de ψ), los valores propios (determinados por los *estados acotados*) y las constantes de normalización (que en este ejemplo no tienen análogo) de las funciones propias $\psi(x, i\kappa_j)$. A estos datos se les conoce como **datos de dispersión**. Más adelante daremos expresiones precisas para los coeficientes de reflexión, las constantes de normalización y de los estados acotados en términos de las soluciones ψ de la ecuación de Schrödinger.

Notemos que el número total de pelotas debe conservarse, esto es, $A + B = N$. O bien:

$$\frac{A}{N} + \frac{B}{N} = 1.$$

Esta ecuación lo que nos dice es que lo que se transmite más lo que se refleja, debe de ser siempre el total, la unidad. (En este dibujo la expresión anterior no es tan precisa, pues quedan pelotas “atrapadas.”) En términos de la función de onda ψ (solución de la ecuación de Schrödinger), encontraremos una relación similar a ésta.

8.7. La Expresión Integral para la Función de Onda. La expresión (150) es una ecuación integral para la función $\psi(x, k)$, que podemos escribir en la forma:

(164)
$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \tilde{T}\psi,$$

donde \tilde{T} es el operador

(165)
$$\tilde{T}[\psi] \equiv - \int_x^\infty \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \psi(y, k) dy$$

Resolvamos la ecuación (164) por iteraciones. Esto es, substituyamos el valor de ψ dado por (164) en el miembro derecho de esta misma ecuación, resultando:

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \tilde{T}e^{ikx} + \tilde{T}^2\psi.$$

Repitiendo el argumento anterior sucesivamente, eventualmente tendremos una expresión para la solución de la ecuación de Schrödinger (145),

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \tilde{T}e^{ikx} + \tilde{T}^2e^{ikx} + \dots + \tilde{T}^n e^{ikx} + \dots$$

Denotemos por $L(x, y)$ al kernel del operador \tilde{T} definido en (165):

$$(166) \quad L(x, y) \equiv -\frac{\sin k(x-y)}{k}u(y)$$

Así,

$$\tilde{T}\psi(x, k) = \int_x^\infty L(x, y)\psi(y, k) dy$$

Tendremos entonces que:

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty L(x, y)e^{iky} dy + \int_x^\infty L^{(2)}(x, y)e^{iky} dy + \dots + \int_x^\infty L^{(n)}(x, y)e^{iky} dy + \dots$$

donde hemos definido

$$L^{(2)}(x, y) = \int_x^y L(x, y_1)L(y_1, y) dy_1,$$

$$L^{(3)}(x, y) = \int_x^y \int_{y_2}^y L(x, y_1)L(y_1, y_2)L(y_2, y) dy_2 dy_1,$$

y, en general,

$$L^{(n)}(x, y) = \int_x^y \dots \int_{y_3}^y \int_{y_2}^y L(x, y_{n-1})L(y_{n-1}, y_{n-2}) \dots L(y_2, y_1)L(y_1, y) dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1}.$$

Notemos que estas integrales definen las desigualdades $x \leq y_{n-1} \leq y_{n-2} \leq \dots \leq y_2 \leq y_1 \leq y$, por lo que tenemos:

$$x \leq y$$

La serie de Neumann,

$$(167) \quad K(x, y) \equiv L(x, y) + L^{(2)}(x, y) + \dots + L^{(n)}(x, y) + \dots$$

define una nueva función $K(x, y)$ en la región $x \leq y$. Si esta serie es uniformemente convergente, entonces:

$$\psi = e^{ikx} + \int_x^\infty (L(x, y) + L^{(2)}(x, y) + \dots + L^{(n)}(x, y) + \dots)e^{iky} dy$$

y de la definición (167) de $K(x, y)$:

$$(168) \quad \psi = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, y)e^{iky} dy \quad \text{en } x \leq y.$$

Esta es la expresión integral para $\psi(x, k)$, solución de la ecuación de Schrödinger (145).

Ahora tenemos que el núcleo $K(x, y)$ depende de cada una de las funciones $L^{(k)}(x, y)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Estas dependen de $L(x, y)$, quien a su vez depende de $u(y)$, por (166). Por tanto, el kernel $K(x, y)$ debe de tener cierta relación con el potencial $u(x)$. Para nuestros fines, no será necesario encontrar todas las $L^{(k)}(x, y)$, únicamente es necesario encontrar la $K(x, y)$, como veremos enseguida.

Es importante observar que la solución ψ del problema espectral con $u(x) \neq 0$, ¡está dada en términos de las soluciones e^{ikx} del problema libre! Es decir, la solución ψ es una combinación lineal (continua) de las funciones e^{ikx} , como es claro de la ecuación (168).

Desde luego, hay una relación entre $K(x, y)$ y $u(x)$, pero ésta es explícita, como ahora veremos. Para sustituir la representación (168) de la función ψ en la ecuación (145), necesitamos calcular

$$(169) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2 e^{ikx} - \frac{dK}{dx}(x, x)e^{ikx} - ikK(x, x)e^{ikx} - \frac{\partial K}{\partial x}(x, x)e^{ikx} + \int_x^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y)e^{iky} dy,$$

y, por otra, integrando por partes la representación (168) con la suposición adicional que $K(x, y) \rightarrow 0$, si $y \rightarrow \infty$:

$$(170) \quad k^2\psi(x, k) = k^2 e^{ikx} + ikK(x, x)e^{ikx} - \frac{\partial K}{\partial y}(x, x)e^{ikx} + \int_x^\infty -\frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y)e^{iky} dy.$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones anteriores, y usando la regla de la cadena, $\frac{\partial}{\partial x} K(x, x) + \frac{\partial}{\partial y} K(x, x) = \frac{d}{dx} K(x, x)$, se sigue que:

$$(171) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi(x, k) = \left[-2\frac{d}{dx} K(x, x) \right] e^{ikx} + \int_x^\infty \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y) \right] e^{iky} dy.$$

También tenemos que:

$$u(x)\psi = u(x)e^{ikx} + \int_x^\infty u(x)K(x, y)e^{iky} dy,$$

y como $\frac{d^2}{dx^2}\psi + k^2\psi(x, k) = u(x)\psi$ (ecuación de Schrödinger (145)), de las últimas dos igualdades obtenemos finalmente

$$(172) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y) = u(x)K(x, y),$$

$$(173) \quad u(x) = -2\frac{d}{dx} K(x, x)$$

La ecuación (173) es la relación buscada entre $u(x)$ y $K(x, y)$. Así, si conocemos $K(x, y)$, podemos conocer el potencial $u(x)$, y el problema inverso quedaría resuelto.

Vale la pena hacer notar que, para resolver el problema directo (encontrar ψ conociendo $K(x, y)$), estas relaciones (ecuaciones (172) y (173)) no son tan útiles. Si $u(x)$ es dado, hay que resolver la ecuación en derivadas parciales (172) con datos (173) dados sobre la característica $x = y$, lo cual complica el problema. A este problema se le conoce como *el problema de Goursat* [6], cuyas soluciones también se sabe son únicas, por lo que la función $K(x, y)$ debe de ser única. Más adelante veremos una forma de encontrar la función $K(x, y)$ para así poder determinar el potencial $u(x)$ (ver sección 8.11).

En resumen, hay una relación *simple* entre el potencial $u(x)$ y el núcleo $K(x, y)$ de la representación integral (168) de la solución $\psi(x, k)$ de la ecuación de Schrödinger (145), con $u(x) \neq 0$, y en términos de las soluciones e^{ikx} del problema libre.

8.8. Datos de Dispersión. La utilidad del núcleo $K(x, y)$ es que puede ser determinado a partir de información asintótica. Para esto es conveniente introducir soluciones apropiadas, linealmente independientes, de la ecuación de Schrödinger.

Para tal fin, y usando el mismo razonamiento que en la sección anterior, podemos expresar la otra solución linealmente independiente $\varphi(x, k)$ de la siguiente manera:

$$\varphi(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, k) e^{-iky} dy,$$

la cual tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$\varphi \sim e^{-ikx}, \quad \text{en } x \sim -\infty.$$

También, como en la sección anterior, existe una relación sencilla entre el potencial $u(x)$ y el núcleo $\tilde{K}(x, y)$:

$$u(x) = 2 \frac{d}{dx} \tilde{K}(x, x)$$

Introduzcamos aquí, un cambio de notación:

$$(174) \quad f(x, k) \equiv \psi(x, k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x, k) e^{iky} dy,$$

$$(175) \quad g(x, k) \equiv \varphi(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, k) e^{-iky} dy,$$

A estas funciones, soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger, se les conoce como **funciones de Jost**.

Podemos tomar la continuación analítica de las **funciones de Jost**, pero esto sólo lo podemos hacer en el plano $\text{Im}(k) > 0$. En efecto, escribiendo:

$$k = \mu + i\kappa,$$

con $\kappa = \text{Im}(k) > 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{ikx} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{i\mu x} e^{-\kappa x} = 0, & y \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-ikx} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-i\mu x} e^{\kappa x} = 0, \end{aligned}$$

pues de otro modo las *funciones de Jost* serían divergentes.

Por tanto, k puede ser, en general, un número complejo. De la definición de k , $\lambda = k^2$, se sigue que λ puede ser también un número complejo. Sin embargo, es real (como probaremos en el apéndice A). Esto último como consecuencia directa del hecho que λ es valor propio de la ecuación de Schrödinger. Esto también ya fue utilizado en la sección 8.3, en donde comentamos que la energía $\lambda > 0$ corresponde al espectro continuo, mientras que para los valores $\lambda < 0$ tenemos el espectro discreto. Como vemos, usamos el hecho de que λ es real.

Por todo esto, los valores posibles que puede tomar k son de dos tipos:

1. $k \in \mathbb{R}$. En este caso, $\lambda = k^2$ es real *positivo*, y corresponde al espectro *continuo*.
2. $k = i\kappa$ es imaginario puro, con $\kappa > 0$, pues $\kappa = \text{Im}(k) > 0$. Aquí, $\lambda = -\kappa^2$ también es real, pero negativo. Se trata del *espectro discreto*.

8.9. El Espectro Continuo: el Coeficiente de Reflexión. Como mencionamos anteriormente, el núcleo $K(x, y)$ puede ser determinado por información asintótica de las funciones de Jost. Dicha información asintótica es el coeficiente de reflexión, que definiremos enseguida.

Tomemos la función de Jost $f(x, k)$ (ecuación (174)) solución de la ecuación de Schrödinger (145). Dicha función tiene el siguiente comportamiento asintótico en el infinito, ∞ :

$$f(x, k) \sim e^{ikx}, \quad x \sim \infty.$$

Y, por tanto,

$$f(x, -k) \sim e^{-ikx}, \quad x \sim \infty,$$

es otra solución, linealmente independiente, de la misma ecuación. Como aquí tratamos con el espectro continuo, k es real.

Consideremos ahora $g(x, k)$ y $g(x, -k)$ (ecuación (175)), soluciones también linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger (145), pero con comportamiento en menos infinito, $-\infty$:

$$\begin{aligned} g(x, k) &\sim e^{-ikx}, & x \sim -\infty, \\ g(x, -k) &\sim e^{ikx}, & x \sim -\infty \end{aligned}$$

Como la ecuación de Schrödinger es una ecuación de segundo orden, tiene *única-*mente dos soluciones linealmente independientes y cualquier otra solución estará dada como combinación lineal de la dos primeras. Por tanto:

$$(176) \quad g(x, k) = a(k)f(x, -k) + b(k)f(x, k)$$

El comportamiento asintótico de $g(x, k)$ será entonces:

$$(177) \quad g(x, k) \sim a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, \quad x \sim \infty.$$

$$(178) \quad g(x, k) \sim e^{-ikx}, \quad x \sim -\infty.$$

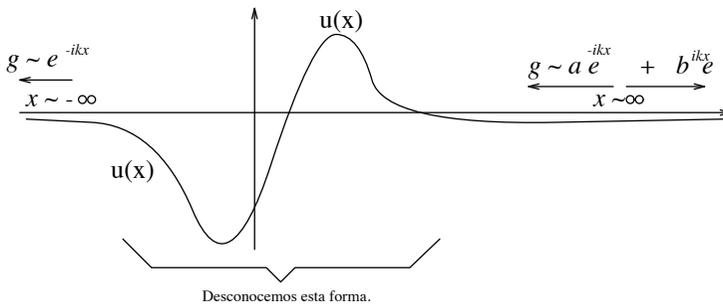


FIGURA 31. Problema de dispersión

Esto significa lo siguiente. (Ver figura 31). Inicialmente mandamos una onda $a(k)e^{-ikx}$ desde $+\infty$, con dirección negativa y amplitud $a(k)$. Como resultado de la interacción de la onda con el potencial, seguirán dos ondas: una transmitida y otra reflejada.

La primera, e^{-ikx} , se dirige hacia $-\infty$ con amplitud 1 y es la onda transmitida. La segunda es la onda reflejada, pues se dirige hacia $+\infty$, llevando ésta una amplitud $b(k)$.

Es un resultado de mecánica cuántica (enseguida lo probaremos) que *las probabilidades se conservan*. La **probabilidad** de que una partícula se encuentre en el intervalo $[a, b]$, está dada por

$$\int_a^b |\psi(x, k)|^2 dx.$$

A la función $|\psi(x, k)|^2$ se le llama **densidad de probabilidad**.

TEOREMA 8.9.1. *Dado que las probabilidades (las densidades de probabilidad) deben conservarse, entonces la (densidad de) probabilidad $|a(k)|^2$ que se manda inicialmente, debe de ser igual a la (densidad de) probabilidad 1 que se transmite, más la densidad $|b(k)|^2$ que se refleja. Esto es:*

$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2,$$

y es la igualdad que debemos probar.

Demostración. Para ello, veamos que las soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger:

$$g(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, y) e^{-iky} dy,$$

$$g(x, -k) = e^{ikx} + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, y) e^{iky} dy,$$

están relacionadas por:

$$g^*(x, k) = g(x, -k)$$

en vista de que k y $\tilde{K}(x, y)$ son reales ($\tilde{K}(x, y)$ es real, pues $u(x) = 2\frac{d\tilde{K}}{dx}$ es real). Aquí $g^*(x, k)$ denota el complejo conjugado de $g(x, k)$. De igual modo:

$$f^*(x, k) = f(x, -k)$$

Calculemos ahora el Wronskiano de las soluciones $g(x, k)$ y $g^*(x, k)$, y tomemos su comportamiento asintótico en $x \sim \infty$, usando (177):

$$W(g, g^*) = gg_x^* - g_x g^* \\ \sim 2ik(|a|^2 - |b|^2), \quad \text{si } x \sim \infty$$

y en $x \sim -\infty$, usando (178):

$$W(g, g^*) \sim \det \begin{pmatrix} e^{-ikx} & e^{ikx} \\ -ike^{-ikx} & ike^{ikx} \end{pmatrix} \\ = 2ik.$$

Ahora, como el Wronskiano de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger es una constante (la prueba está en el apéndice B), entonces:

$$W(g, g^*)|_{x=\infty} = W(g, g^*)|_{x=-\infty}$$

Por tanto,

$$2ik(|a|^2 - |b|^2) = 2ik,$$

o bien,

$$|a|^2 = |b|^2 + 1,$$

como queríamos probar. □

Si $|a|^2 \neq 0$:

$$\frac{1}{|a|^2} + \frac{|b|^2}{|a|^2} = 1$$

Esta es la identidad que define el coeficiente de transmisión $T(k) \equiv \frac{1}{a(k)}$ y de reflexión:

$$R(k) \equiv \frac{b(k)}{a(k)}$$

Tomamos esta definición, pues $T(k) = \frac{1}{a(k)}$ es la proporción de la cantidad reflejada 1, sobre la cantidad o amplitud inicial $a(k)$. Del mismo modo, el coeficiente de reflexión $R(k)$ es la proporción de la amplitud reflejada $b(k)$ a la amplitud inicial $a(k)$: $R(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$.

La igualdad $|a|^2 = |b|^2 + 1$ es análoga a la planteada para el caso de “*conservación de pelotas*” que pasan y rebotan por los valles y obstáculos (ejemplo dado en la sección 3.6):

$$\frac{A}{N} + \frac{B}{N} = 1$$

Tenemos pues, la conservación de probabilidades:

$$\frac{1}{|a(k)|^2} + \frac{|b(k)|^2}{|a(k)|^2} \equiv 1$$

i.e.,

$$|T(k)|^2 + |R(k)|^2 \equiv 1$$

8.10. El Espectro Discreto: Estados Acotados, Constantes de Normalización y Valores Propios. La función g , cuando se continúa analíticamente para $\text{Im}(k) > 0$, determina toda la información sobre el espectro puntual. En efecto, los ceros de la ecuación $a(k_j) = 0$ son los puntos del espectro. Es decir, si $a(k_j) = 0$ tenemos:

$$(179) \quad g(x, k_j) = \rho_j f(x, k_j)$$

donde ρ_j es la **constante de proporcionalidad**.

Para $\kappa_j = \text{Im}(k_j) > 0$ sabemos que:

$$\begin{aligned} g(x, k_j) = \rho_j f(x, k_j) &\sim \rho_j e^{ik_j x} = \rho_j e^{-\kappa_j x} \rightarrow 0, & \text{cuando } x \rightarrow \infty \\ g(x, k_j) &\sim e^{-ik_j x} = e^{\kappa_j x} \rightarrow 0, & \text{cuando } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Así pues, $g(x, ik_j)$ es función propia, con valor propio $\lambda_j = k_j^2 = -\kappa_j^2 < 0$, pues recordemos que los valores propios son *negativos*. Para tal k_j , la función $g(x, k_j)$ representa un estado acotado, esto es, la probabilidad de que una partícula con función de onda $g(x, k_j)$ se encuentre en un intervalo acotado es muy alta, debido al decaimiento exponencial de la función de onda cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Aquí tenemos que $\text{Im}(k_j) > 0$, y que $\lambda_j = k_j^2 = -\kappa_j^2$ es real. Para ello, recordemos que al principio de la sección pedimos que k_j sea imaginario puro:

$$k_j = i\kappa_j$$

Recordemos también que, cuando nos encontramos en la región donde la energía, λ_j , es negativa, el espectro es discreto. Podemos recordar aquí el espectro discreto del electrón, en el modelo del átomo de Hidrógeno de Bohr. Dicho electrón está atrapado por el núcleo atómico del Hidrógeno y está en un estado acotado. Así, vemos que todo es consistente. (Figura 32).

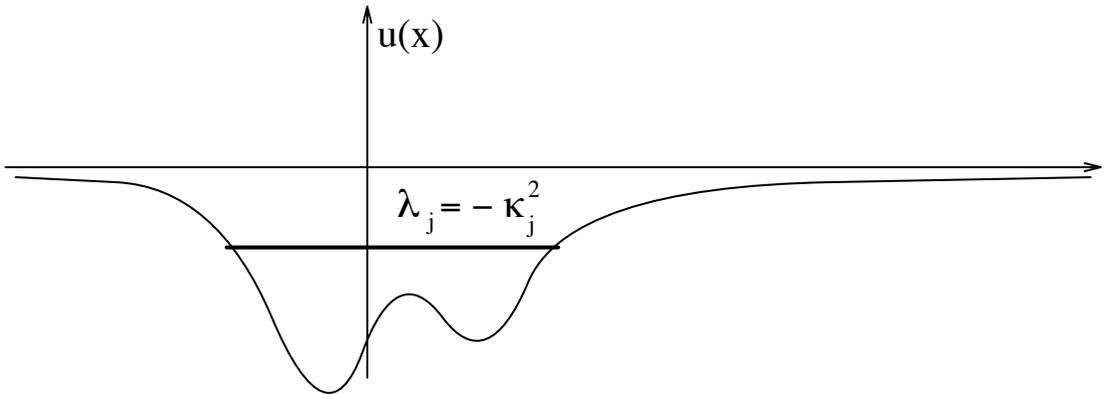


FIGURA 32. Espectro discreto

La raíz $k = k_j = i\kappa_j$ de la ecuación $a(k) = 0$, es un cero simple pues, como probaremos en el apéndice C,

$$\frac{d}{dk} a(i\kappa_j) = -i\rho_j \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, i\kappa_j) dx \neq 0,$$

ya que $\rho_j \neq 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, i\kappa_j) dx \neq 0$, dado que queremos soluciones no triviales.

Además,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} &= \lim_{k \rightarrow i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} (k - i\kappa_j), \quad \text{por definición de residuo,} \\ &= \lim_{k \rightarrow i\kappa_j} \frac{k - i\kappa_j}{a(k) - a(i\kappa_j)}, \quad \text{pues } a(i\kappa_j) = 0, \\ (180) \qquad &= \frac{1}{\frac{da}{dk} \Big|_{k=i\kappa_j}}. \end{aligned}$$

Y así,

$$\operatorname{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} = \frac{i}{\rho_j \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, i\kappa_j) dx}.$$

Definiendo c_j del siguiente modo,

$$(181) \qquad c_j^2 \equiv \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, i\kappa_j) dx},$$

podemos escribir

$$(182) \qquad \operatorname{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} = \frac{ic_j^2}{\rho_j},$$

La constante c_j , es **la constante de normalización**, pues normaliza la función de Jost, $f(x, i\kappa_j)$, del siguiente modo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [c_j f(x, i\kappa_j)]^2 dx = 1.$$

La relación existente entre la *constante de proporcionalidad* ρ_j y la *constante de normalización* c_j se sigue de las ecuaciones (180) y (182):

$$(183) \qquad \rho_j = ic_j^2 \frac{d}{dk} a(i\kappa_j)$$

De aquí que es *equivalente* dar c_j^2 o dar ρ_j .

Ahora, si $u \rightarrow 0$ suficientemente rápido, cuando $|x| \rightarrow \infty$, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 8.10.1. *El número de raíces de la ecuación $a(k) = 0$ es finito.*

Demostración. Esto es una consecuencia de la continuación analítica de las expresiones integrales de las funciones de Jost:

$$\begin{aligned} f(x, k) &= e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x, k) e^{iky} dy, \\ g(x, k) &= e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, k) e^{-iky} dy. \end{aligned}$$

Para $|k| \rightarrow \infty$, las integrales se anulan, por el lema de Riemann-Lebesgue (si $K(x, y)$ y $\tilde{K}(x, y)$ son absolutamente integrables). Así, cuando $|k| \sim \infty$, con $\operatorname{Im}(k) > 0$,

$$\begin{aligned} f(x, k) &\sim e^{ikx} \\ g(x, k) &\sim e^{-ikx}. \end{aligned}$$

Sabemos que el Wronskiano de f y g está dado por (apéndice B):

$$W(f(x, k), g(x, k)) = -2ika(k)$$

de donde:

$$a(k) = \frac{i}{2k} W(f, g)$$

Si $|k| \sim \infty$:

$$a(k) = \frac{i}{2k} W(f, g) \sim \frac{i}{2k} W(e^{ikx}, e^{-ikx}) = 1$$

Entonces:

$$(184) \quad \lim_{|k| \rightarrow \infty} |a(k)| = 1.$$

Por tanto, los ceros de $a(k) = 0$ deben de estar en una región acotada D del plano complejo.

Si el número de ceros es infinito, todos ellos deben de estar en D , y tendrán al menos un punto de acumulación. Si $a(k)$ es analítica en D , de la unicidad de las funciones analíticas se sigue que $a(k) \equiv 0$ en D . Ahora, por continuación analítica, $a(k) \equiv 0$ en todo el plano complejo \mathbb{C} . Pero en este caso $\lim_{k \rightarrow \infty} |a(k)| = 0$, lo cual contradice la igualdad (184). Por tanto el número de ceros de $a(k) = 0$ debe de ser finito. \square

El hecho de que $|a(k)| \rightarrow 1$, cuando $|k| \rightarrow \infty$, es sencillo de entender en términos de dispersión de ondas en mecánica cuántica. Recordemos que el momentum \mathbf{p} está relacionado directamente con el número de onda \mathbf{k} : $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$.

Si una partícula se mueve con gran velocidad, o momentum \mathbf{p} , será difícil que se refleje, y sí muy fácil de que se transmita totalmente:

$$\begin{aligned} |b(k)| &\rightarrow 0, & \text{y} \\ |a(k)| &\rightarrow 1, \end{aligned}$$

esto si $\mathbf{p} \rightarrow \infty$, es decir, si $\mathbf{k} \rightarrow \infty$.

Tenemos pues que la ecuación $a(k) = 0$ tiene un número finito de ceros $k = i\kappa_j$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, con $\lambda_j = -\kappa_j^2$ como *valores propios*. Las constantes de proporcionalidad ρ_j y de normalización c_j están dadas por las ecuaciones (181) y (183).

8.11. La Ecuación de Gel'fand-Levitan. La ecuación de Gel'fand-Levitan es una ecuación integral **lineal** para la función $K(x, y)$ en la región $x \leq y$, quien determina la función de Jost $f(x, k)$ bajo la transformación integral (174). Como veremos, dicha ecuación estará determinada por el coeficiente de reflexión $R(k)$, por los valores propios $\lambda_j = -\kappa_j^2$ y por las constantes de normalización c_j (o por las constantes de proporcionalidad ρ_j) los cuales constituyen los **datos de dispersión**.

Partimos de la ecuación (176):

$$g(x, k) = a(k)f(x, -k) + b(k)f(x, k)$$

Dividiendo entre $a(k)$,

$$(185) \quad \frac{g(x, k)}{a(k)} = f(x, -k) + \frac{b(k)}{a(k)} f(x, k)$$

Recordemos que hemos tomado la continuación analítica de f y g , para $\text{Im}(k) > 0$. Consideremos una curva cerrada \mathcal{C} que consta de un semicírculo de radio A y centro en $k = 0$, en el semiplano complejo $\text{Im}(k) \geq 0$, y el segmento rectilíneo que inicia en el punto $(-A, 0)$ y termina en $(A, 0)$. (Figura 33).

Tomemos A suficientemente grande de tal modo que contenga todos los ceros de $a(k)$: $k_j = i\kappa_j$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$. Multiplicando (185) por e^{iky} para $y > x$, e integrando sobre \mathcal{C} , tenemos

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{g(x, k)}{a(k)} e^{iky} dk = \oint_{\mathcal{C}} f(x, -k) e^{iky} dk + \oint_{\mathcal{C}} R(k) f(x, k) e^{iky} dk,$$

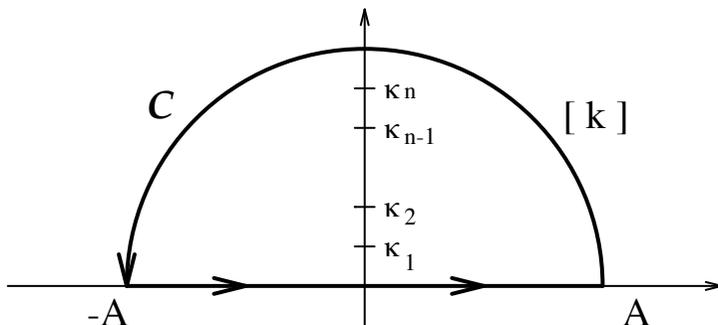


FIGURA 33. El espectro discreto: polos en el plano complejo

donde $R(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$ es el coeficiente de reflexión. Ahora, la última ecuación se puede escribir como:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

donde:

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_C \frac{g(x, k)}{a(k)} e^{iky} dk, \\ I_2 &= \oint_C f(x, -k) e^{iky} dk, \\ I_3 &= \oint_C R(k) f(x, k) e^{iky} dk. \end{aligned}$$

Calculemos I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_C \frac{g(x, k)}{a(k)} e^{iky} dk = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{g(x, k)}{a(k)} e^{iky} = \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j y} g(x, i\kappa_j) \text{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} \end{aligned}$$

De la ecuación (182) tenemos:

$$I_1 = 2\pi i \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j y} g(x, i\kappa_j) \frac{ic_j^2}{\rho_j}$$

y de (179):

$$(186) \quad I_1 = -2\pi \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j y} c_j^2 f(x, i\kappa_j)$$

Por otra parte, usando la representación integral de f (ecuación (174)), tenemos:

$$f(x, i\kappa_j) = e^{-\kappa_j x} + \int_x^\infty K(x, z) e^{-\kappa_j z} dz,$$

que sustituyendo en (186):

$$I_1 = -2\pi \left(G(x + y) + \int_x^\infty G(y + z) K(x, z) dz, \right)$$

donde:

$$G(s) \equiv \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j s} c_j^2$$

Calculemos ahora I_2 . Usando (174):

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_C e^{ik(y-x)} dk + \oint_C \left(\int_x^\infty K(x, z) e^{ik(y-z)} dz \right) dk \\ &= \oint_C \left(\int_x^\infty K(x, z) e^{ik(y-z)} dz \right) dk \end{aligned}$$

pues la función exponencial es analítica. Tomando el límite cuando $A \rightarrow \infty$:

$$I_2 = \int_{-\infty}^\infty \int_x^\infty K(x, z) e^{ik(y-z)} dz dk,$$

ya que la integral sobre el semicírculo se anula cuando $A \rightarrow \infty$, pues $y - z > x - z > 0$, es la región donde está definida $K(x, z)$ y $\text{Im}(k) > 0$. (Este es el lema de Jordan. Consultar cualquier texto de Variable Compleja.)

Ahora, como $y > x$, y usando el teorema de inversión de Fourier obtenemos:

$$I_2 = 2\pi K(x, y)$$

Finalmente, usando la expresión integral de $f(x, k)$, calculemos I_3 :

$$I_3 = \oint_C R(k) e^{ik(x+y)} dk + \oint_C \left(\int_x^\infty R(k) K(x, z) e^{ik(y+z)} dz \right) dk.$$

Si $A \rightarrow \infty$, las integrales se anulan sobre los semicírculos (por la misma razón que antes), resultando:

$$I_3 = \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{ik(x+y)} dk + \int_x^\infty K(x, z) \left(\int_{-\infty}^\infty R(k) e^{ik(y+z)} dk \right) dz,$$

donde usamos el teorema de Fubini.

Llamando

$$H(s) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{iks} dk$$

a la transformada inversa de Fourier de $R(k)$, entonces

$$I_3 = 2\pi H(x + y) + 2\pi \int_x^\infty K(x, z) H(y + z) dz.$$

Así, la ecuación:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

es:

$$(187) \quad K(x, y) + F(x + y) + \int_x^\infty K(x, z) F(y + z) dz = 0$$

en la región:

$$x \leq y$$

y donde

$$(188) \quad F(s) \equiv G(s) + H(s) = \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j s} c_j^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{iks} dk$$

La ecuación (187) es **la ecuación de Gel'fand-Levitan**. También se le conoce como **ecuación de Marchenko**. Es una ecuación integral para $K(x, y)$ en el semiplano $x \leq y$. Si consideremos $F(s)$ como dada, el problema es ahora resolver una ecuación **lineal** (lo cual simplifica infinitamente el problema). Esto es, dados *los valores propios* $\lambda_j = -\kappa_j^2$, *las constantes de normalización* c_j y *el coeficiente de reflexión* $R(k)$ (i.e., **los datos de dispersión**), estará dada $F(s)$.

Resolver la ecuación de Gel'fand-Levitan es encontrar $K(x, y)$ para $x \leq y$, lo cual nos llevará inmediatamente al *cálculo del potencial*, a través de la relación (173):

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x)$$

Esto es, ¡recuperamos el potencial de la ecuación de Schrödinger!

8.12. Evolución Temporal de los Datos de Dispersión. Como mencionamos en la sección 8.4, los valores propios son constantes de movimiento (155):

$$\frac{d\kappa_j}{dt} = 0,$$

y las funciones de Jost f y g (soluciones a la ecuación de Schrödinger) evolucionan de acuerdo a la ecuación ((161) y (163):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = B[\varphi] \quad (\text{con } \psi = f \text{ ó } g),$$

tanto para el espectro discreto (funciones de Jost, f y g , evaluadas en $k = i\kappa_j$) como para el continuo. El operador B está dado por (ecuación (160)):

$$B[\varphi] \equiv -4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 3\varphi u_x.$$

Pero como hicimos notar en las secciones anteriores, sólo es necesario el comportamiento asintótico de las funciones de Jost en $|x| \sim \infty$. Esto nos dará la evolución temporal de los datos de dispersión:

$$\begin{aligned} \kappa_j &= \kappa_j(t) = \kappa_j(0) \quad (\text{ya conocemos esta evolución}), \\ R &= R(k, t), \\ c_j &= c_j(t). \end{aligned}$$

Podemos así, encontrar una solución:

$$K = K(x, y; t)$$

a la ecuación de Gel'fand-Levitan, y encontraremos el "*potencial*" de la ecuación de Schrödinger en todo instante:

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t),$$

¡que es la solución a la ecuación de Korteweg-deVries!

Esto nos da un método, **el método de dispersión inversa**, para resolver la ecuación de KdV, ¡la cual es muy difícil de resolver directamente!. Por ejemplo, podemos buscar soluciones del tipo de onda viajera:

$$u(x, t) = u(x - ct),$$

la cual, como veremos posteriormente, también se encuentra con el método de dispersión inversa. Pero hay otras soluciones que pueden ser encontradas usando dispersión inversa, ¡que **no** pueden ser encontradas usando la suposición de onda viajera! También, como vimos en la sección 8.2, los intentos de linealizar la ecuación de KdV resultaron ser infructuosos.

Así pues, vemos que el **método de dispersión inversa** resulta ser muy efectivo. Calculemos así, la evolución temporal de *las constantes de proporcionalidad* ρ_j y del *coeficiente de reflexión* $R(k)$, para poder determinar completamente la función $F(s; t)$ en todo instante t .

Notemos que la asintótica de la ecuación (161) es:

$$(189) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \sim -4 \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x^3},$$

pues $u, u_x \sim 0$ en este límite y ψ_j es una función propia de la ecuación de Schrödinger (145) (no necesariamente la función de Jost $f(x, i\kappa_j, t)$). Consideremos la función de Jost $g(x, i\kappa_j, t)$. Como también es solución a la ecuación de Schrödinger (145), g_j y ψ_j son proporcionales:

$$(190) \quad \psi(x, i\kappa_j, t) = h(i\kappa_j, t)g(x, i\kappa_j, t)$$

Si escribimos $h_j = h(i\kappa_j, t)$ y substituyendo en (189) obtenemos:

$$(191) \quad \frac{dh_j}{dt} = -4\kappa_j^3 h_j,$$

donde usamos el comportamiento asintótico $g_j \sim e^{\kappa_j x}$ en $x \sim -\infty$. Ahora, como g_j y f_j , son proporcionales, la ecuación (190) se puede también escribir como:

$$(192) \quad \psi(x, i\kappa_j, t) = h(i\kappa_j, t)\rho_j f(x, i\kappa_j, t)$$

Tomando nuevamente la asintótica de (161) en $x \sim \infty$, pero con ψ_j como en (192) obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(h_j \rho_j) = 4\kappa_j^3 \rho_j h_j$$

Usando (191), se sigue

$$\frac{d\rho_j}{dt} = 8\kappa_j^3 \rho_j,$$

la cual describe la evolución temporal de la constante de proporcionalidad ρ_j y tiene solución:

$$\rho_j(t) = \rho_j(0)e^{8\kappa_j^3 t}.$$

Pero quienes aparecen en la ecuación de Gel'fand-Levitan son las constantes de normalización $c_j^2(t)$, relacionadas con ρ_j según la ecuación (183):

$$c_j^2(t) = -\frac{i\rho_j(t)}{\frac{d}{dk}a(i\kappa_j)} = -\frac{i\rho_j(0)}{\frac{d}{dk}a(i\kappa_j)}e^{8\kappa_j^3 t},$$

por lo que

$$(193) \quad c_j^2(t) = c_j^2(0)e^{8\kappa_j^3 t}$$

es la evolución temporal de $c_j^2(t)$.

La evolución temporal del coeficiente de reflexión se encuentra de un modo similar. La asintótica de la ecuación (163) en $x \sim -\infty$ es:

$$(194) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \sim -4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$$

Si escogemos ψ proporcional a g ,

$$\psi(x, k, t) = h(k, t)g(x, k, t),$$

para $x \sim -\infty$, obtenemos

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -4ik^3 h.$$

Tomando ahora la asintótica (163) en $x \sim \infty$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \sim -4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$$

con $\psi(x, k, t) = h(k, t)g(x, k, t)$, obtenemos, usando (177):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(ha) &= -4ik^3(ha) \\ \frac{\partial}{\partial t}(hb) &= 4ik^3(hb) \end{aligned}$$

Y de la ecuación de evolución de h , se sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= 8ik^3b \end{aligned}$$

¡Obtenemos nuevamente otra constante de integración $a(k, t)$! Además, como la evolución temporal de $b(k, t)$ es *muy* sencilla, la evolución temporal del coeficiente de reflexión también será realmente sencilla:

$$R(k, t) = \frac{b(k, 0)}{a(k, 0)} e^{8ik^3t},$$

o bien,

$$(195) \quad R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3t}.$$

Conocemos entonces $c_j^2(t), \lambda_j = -\kappa_j^2$ y $R(k, t)$ en todo instante t , por lo que el núcleo $F(s, t)$ de la ecuación de Gel'fand-Levitan está bien determinado:

$$F(s, t) = \sum_{j=1}^n c_j^2(t)e^{-\kappa_j s} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, t)e^{iks} dk$$

La ecuación de Gel'fand-Levitan será

$$K(x, y; t) + F(x + y; t) + \int_x^{\infty} K(x, z; t)F(y + z; t) dz = 0$$

cuya solución $K(x, y; t)$ determina la función de Jost $f(x, k; t)$,

$$f(x, k; t) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x, y; t)e^{iky} dy \quad \text{en } x \leq y.$$

solución a la ecuación de Schrödinger y también determina el *potencial*

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t)$$

¡solución a la ecuación de KdV!

8.13. Esquema del Método de Dispersión Inversa. Podemos dar aquí un esquema del funcionamiento del *método*, el cual es realmente sorprendente, ¡pues es un análogo no lineal de la transformada de Fourier! Para ello, recordemos cómo funciona la transformada de Fourier.

Por ejemplo, resolvamos la ecuación de onda

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

Usando la transformada de Fourier obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} + k^2\tilde{u} &= 0, \\ \tilde{u}(k, 0) &= \tilde{f}(k), \\ \tilde{u}_t(k, 0) &= \tilde{g}(k). \end{aligned}$$

que es un ecuación ordinaria en t para la función $\tilde{u}(k, t)$ y cuya solución es

$$\tilde{u}(k, t) = \cos(kt)\tilde{f}(k) + \frac{\sin(kt)}{k}\tilde{g}(k).$$

Lo que permitió encontrar esta solución es que la evolución en el tiempo es *simple*, por ser desacoplada de la variable espacial x . Invertiendo esta última ecuación obtenemos:

$$u(x, t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds.$$

Gráficamente, representamos este método en la figura 34.

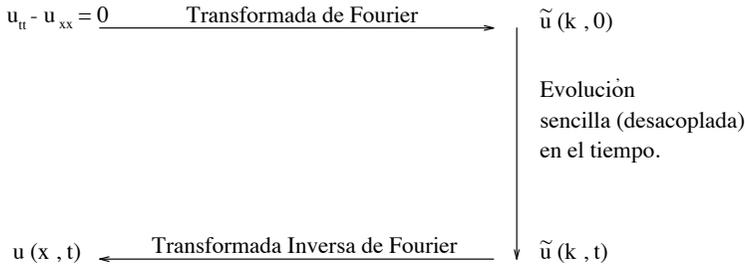


FIGURA 34. Fourier Transform

El problema de resolver la ecuación de KdV mediante el *método de dispersión inversa*, tiene el mismo esquema que de resolver un problema lineal usando la transformada de Fourier. La diferencia consiste que con la transformada de Fourier se obtiene una transformada $\tilde{u}(k, t)$ de la incógnita $u(x, t)$, mientras que en el problema de KdV trabajamos con los datos de dispersión

$$S_n(k, t) = \left\{ \lambda_j(t), c_j^2(t), R(k, t), \text{ donde } j = 1, 2, 3, \dots, n, \text{ y } k \in \mathbb{R} \right\}.$$

En el instante inicial conocemos $u(x, 0) = V(x)$, lo que nos permite conocer por dispersión directa (i.e., resolviendo la ecuación de Schrödinger con el potencial $V(x)$) los datos de dispersión $S_n(k, 0)$ en el instante inicial $t = 0$.

Sabemos además, cómo evolucionan los datos de dispersión en el tiempo t :

$$S_n(k, t) = \left\{ \lambda_j(t) = \lambda_j(0), c_j^2(t) = c_j^2(0)e^{8\kappa_j^3 t}, j = 1, \dots, n, R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3 t}, k \in \mathbb{R} \right\}$$

Usando ahora la ecuación de Gel'fand-Levitan, resolvemos el problema de *Dispersión Inversa*, esto es, encontraremos el potencial $u(x, t)$. El esquema del método se da en la figura 35.

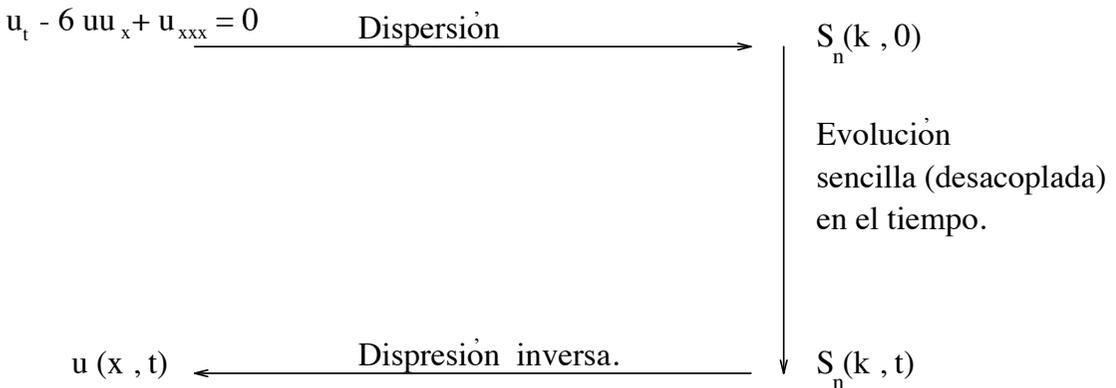


FIGURA 35. El método de dispersión inversa

Debido a esta analogía, el método lleva también el nombre de *Transformada de Dispersión Inversa*, aunque no tratemos con alguna transformada para la función $u(x, t)$.

8.14. Ejemplo. Queremos resolver la ecuación de KdV (131):

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

sujeta a la condición:

$$u(x, 0) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x)$$

como perfil inicial. La ecuación que debemos resolver corresponde a resolver el problema directo de dispersión o problema de valores propios

$$(196) \quad \psi_{xx} + (k^2 + 2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x))\psi = 0$$

donde ψ es una función de x y k , evaluada en $t = 0$, $\psi(x, k, 0)$, y cuyo dominio es $-\infty < x < \infty$.

Tomando el siguiente cambio de variable

$$(197) \quad \begin{aligned} \xi &= \tanh(\kappa x), \\ \varphi(\xi) &= \psi(x(\xi)), \end{aligned}$$

tenemos que su dominio es $-1 < \xi < 1$ y

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= \kappa(1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi}, \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \kappa^2(1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \end{aligned}$$

Así, la ecuación de Schrödinger se transforma en

$$(198) \quad \kappa^2(1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + [2\kappa^2(1 - \xi^2) + k^2]\varphi = 0.$$

Dividiendo entre $\kappa^2(1 - \xi^2)$,

$$(199) \quad \frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \left[2 + \frac{k^2}{\kappa^2(1 - \xi^2)} \right] \varphi = 0.$$

Ahora, la ecuación,

$$(200) \quad \frac{d}{dz} \left((1 - z^2) \frac{dw}{dz} \right) + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{(1 - z^2)} \right] w = 0,$$

es la ecuación asociada de Legendre [29]. Para que la ecuación (199) de Schrödinger sea la asociada de Legendre (200), se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \nu(\nu + 1) &= 2 \\ k_m^2 &= -\kappa^2 m^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

De la primer ecuación, $\nu = 1$ ó -2 . Pero $\nu = -2$ es un polo de las funciones asociadas de Legendre $w(z) = P_n^m(z)$ soluciones de (200). Por tanto,

$$\nu = 1.$$

Ahora, $m \neq 0$, pues queremos encontrar valores propios $\lambda_m = -\kappa^2 m^2 \neq 0$. Además, como $\nu = n = 1$ debe ser natural y se debe de cumplir la desigualdad:

$$0 < m \leq \nu = 1,$$

resulta forzosamente $m = 1$ y tenemos por tanto un único valor propio:

$$\lambda_1 = -\kappa^2.$$

Así, la función de onda $\varphi(\xi)$, solución de la ecuación (199) (transformada de Schrödinger) debe de ser proporcional a la función asociada de Legendre $P_{\nu=1}^{m=1}(\xi)$:

$$\varphi(\xi) \sim w(\xi) = P_{\nu=1}^{m=1}(\xi) = -2(1 - \xi^2)^{1/2}$$

Como $\xi = \tanh \kappa x$, entonces:

$$\psi(x) \sim -2 \operatorname{sech} \kappa x$$

Pero recordando el comportamiento asintótico

$$f(x, i\kappa) \sim e^{-\kappa x}, \quad \text{si } x \sim \infty,$$

se tiene que

$$f(x, i\kappa) = \frac{1}{2} \operatorname{sech} \kappa x$$

y la función ψ debe de ser proporcional a la función de Jost f ,

$$\psi(x, k) = cf(x, i\kappa) = \frac{c}{2} \operatorname{sech} \kappa x,$$

donde c es la constante de normalización por determinar. Para ello, pedimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \frac{c^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{sech} \kappa x|^2 dx = 1.$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \kappa x dx = \frac{1}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (\tanh \kappa x) dx = \frac{2}{\kappa},$$

entonces se sigue

$$c = \sqrt{2\kappa}.$$

Tenemos así el valor propio λ y la constante de normalización c en el instante inicial $t = 0$:

$$(201) \quad \begin{aligned} \lambda(0) &= -\kappa^2 \\ c(0) &= \sqrt{2\kappa} \end{aligned}$$

En lo que sigue, para encontrar información respecto al espectro continuo, seguiremos [25]. Falta entonces encontrar el coeficiente de reflexión $R(k, 0)$. Para ello notemos que la ecuación (198) se puede escribir como

$$(202) \quad (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \left[\nu(\nu + 1)(1 - \xi^2) - \left(\frac{ik}{\kappa} \right)^2 \right] \varphi = 0$$

donde hemos puesto $2 = \nu(\nu + 1)$.

Efectuando la substitución

$$(203) \quad \varphi(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{ik}{2\kappa}} \chi(\xi),$$

llegamos a la ecuación

$$(204) \quad - \left(\frac{ik}{\kappa} - \nu \right) \left(\frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1) \right) \chi(\xi) - 2 \left(\frac{ik + \kappa}{\kappa} \right) \xi \chi'(\xi) + (1 - \xi^2) \chi''(\xi) = 0.$$

Usando el cambio de variables,

$$(205) \quad \begin{aligned} \xi &= 1 - 2\eta, \\ H(\eta) &= \chi(\xi(\eta)), \end{aligned}$$

tenemos que la ecuación (204) es:

$$(206) \quad - \left(\frac{ik}{\kappa} - \nu \right) \left(\frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1) \right) H(\eta) + \left(\frac{ik}{\kappa} + 1 \right) (1 - 2\eta) H'(\eta) + \eta(1 - \eta) H''(\eta) = 0.$$

Si tomamos

$$(207) \quad \begin{aligned} \gamma &= \frac{ik}{\kappa} + 1, \\ \alpha + \beta + 1 &= 2 \left(\frac{ik}{\kappa} + 1 \right), \\ \alpha\beta &= \left(\frac{ik}{\kappa} - \nu \right) \left(\frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1) \right), \end{aligned}$$

entonces la ecuación (206) resulta ser

$$-\alpha\beta H(\eta) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)\eta) H'(\eta) + \eta(1 - \eta) H''(\eta) = 0,$$

la cual es la ecuación hipergeométrica, cuya solución es

$$H(\eta) = F(\alpha, \beta, \gamma; \eta).$$

Usando (205), (203) y (197), obtenemos

$$(208) \quad \psi(x, k) = \psi_0 (\operatorname{sech} \kappa x)^{\frac{ik}{\kappa}} F(\alpha, \beta, \gamma; \eta(x))$$

donde

$$\eta(x) = \frac{1 - \tanh \kappa x}{2}$$

y ψ_0 es una constante por determinar.

Del sistema (207) se sigue

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{ik}{\kappa} - \nu, \\ \beta_1 &= \frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1), \\ \gamma_1 &= \frac{ik}{\kappa} + 1. \end{aligned}$$

Observación 8.14.1. También podemos escoger:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1) \\ \beta_2 &= \frac{ik}{\kappa} - \nu \\ \gamma_2 &= \frac{ik}{\kappa} + 1 \end{aligned}$$

pero recordemos:

$$F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \eta) = F(\beta_2, \alpha_2, \gamma_2; \eta) = F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \eta)$$

por lo que tenemos la misma solución.

Una posible solución es

$$f^*(x, k) = f_0^* (\operatorname{sech} \kappa x)^{\frac{-ik}{\kappa}} F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \eta(x))$$

Si $f_0^* = 2^{\frac{-ik}{\kappa}}$, entonces, para $x \sim \infty$:

$$f^*(x, k) \sim e^{-ikx} F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; 0)$$

Pero

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; 0) = 1$$

y así se tiene que

$$f(x, k) = 2^{\frac{ik}{\kappa}} (\operatorname{sech} \kappa x)^{\frac{-ik}{\kappa}} F^*(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \eta(x))$$

es una solución con comportamiento asintótico

$$f(x, k) \sim e^{ikx}, \quad \text{si } x \sim \infty.$$

Ahora, como la ecuación de Schrödinger (196) es invariante si se toman las sustituciones $k \rightarrow -k$ ó $x \rightarrow -x$, podemos tener otra solución $g(x, k)$. Haciendo dichas sustituciones en la solución (208):

$$g(x, k) \equiv \psi(-x, -k) = g_0 (\operatorname{sech} \kappa x)^{\frac{-ik}{\kappa}} F(\alpha, \beta, \gamma; \eta(-x))$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-ik}{\kappa} - \nu, \\ \beta &= \frac{-ik}{\kappa} + (\nu + 1), \\ \gamma &= \frac{-ik}{\kappa} + 1 \end{aligned}$$

y

$$\eta(-x) = \frac{1 + \tanh \kappa x}{2}.$$

Tomando $g_0 = 2^{\frac{ik}{\kappa}}$ y como $F(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1$,

$$g(x, k) \sim e^{-ikx}, \quad \text{si } x \sim -\infty.$$

Entonces $g(x, k)$ está dada por:

$$(209) \quad g(x, k) = \left(\frac{\operatorname{sech} \kappa x}{2} \right)^{\frac{-ik}{\kappa}} F(\alpha, \beta, \gamma; \eta(-x)).$$

Ahora, para encontrar el coeficiente de reflexión $R(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$, debemos tomar la asintótica de $g(x, k)$ cuando $x \sim \infty$, pues determina los factores $a(k)$ y $b(k)$ (ecuación (177)):

$$g(x, k) \sim a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, \quad x \sim \infty.$$

Para tal fin, recordemos que la función hipergeométrica puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z), \end{aligned}$$

donde

$$z \equiv \eta(-x) = \frac{1 + \tanh \kappa x}{2}.$$

Para $x \sim \infty$, se tiene $z \sim 1$:

$$\begin{aligned} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta; 1 - z) &\sim 1 \\ F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z) &\sim 1 \end{aligned}$$

y también

$$1 - z \sim e^{-2\kappa x}.$$

Así, si $x \sim \infty$,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-2ikx} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)},$$

pues $\gamma - \alpha - \beta = \frac{ik}{\kappa}$. De aquí, la asintótica de $g(x, k)$ (209) en $x \sim \infty$ es

$$g(x, k) \sim \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{-ik}{\kappa}} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-ikx} + \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{-ik}{\kappa}} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} e^{ikx}.$$

Comparando con (177), el coeficiente de reflexión es

$$R(k) = \frac{b(k)}{a(k)} = \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)},$$

con módulo cuadrado

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)} \right|^2 \left| \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \right|^2.$$

Ahora,

$$\left| \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)} \right|^2 = \left| \frac{\Gamma(\frac{ik}{\kappa})}{\Gamma(\frac{-ik}{\kappa})} \right|^2 = 1,$$

pues $|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sin(\pi y)}$, para y real. Así,

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \right|^2.$$

Usando $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y $\Gamma(\frac{1}{2}+z)\Gamma(\frac{1}{2}-z) = (-1)^z\pi$ y usando el hecho que $\nu = 1$, podemos escribir:

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{(-\frac{ik}{\kappa} + 1)\frac{ik}{\kappa}\Gamma^2(\frac{-ik}{\kappa})}{\pi(\frac{ik}{\kappa} + 1)} \right|^2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

Así, $\psi u(x, 0) = 2\kappa^2 \operatorname{sech} \kappa x$ es un potencial sin reflexión!:

$$(210) \quad |R(k)|^2 \equiv 0$$

Conocemos ya los datos de dispersión en el instante $t = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= -\kappa^2, \\ c(0) &= \sqrt{2\kappa}, \\ R(k) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Ahora viene el paso importante: *podemos conocer la evolución en el tiempo de los datos de dispersión*. Como sabemos, están dados en términos muy sencillos:

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= -\kappa^2 \quad (\text{¡constante de movimiento!}) \\ c(t) &= \sqrt{2\kappa} e^{4\kappa^3 t} \\ R(k) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Ahora, la expresión (188) de $F(s; t)$ está dada por

$$F(s; t) = 2\kappa e^{8\kappa^3 t - \kappa s},$$

por lo que la ecuación de Gel'fand-Levitan es

$$K(x, y; t) + 2\kappa e^{8\kappa^3 t - \kappa(x+y)} + 2\kappa e^{8\kappa^3 t} \int_x^\infty K(x, z; t) e^{-\kappa(y+z)} dz = 0.$$

Busquemos soluciones del tipo degenerado:

$$K(x, y; t) = A(x; t) e^{-\kappa y}.$$

Entonces, la ecuación de Gel'fand-Levitan se reduce a,

$$A(x; t) + 2\kappa e^{8\kappa^3 t - \kappa x} + e^{8\kappa^3 t - 2\kappa x} A(x; t) = 0,$$

la cual es una ecuación algebraica para $A(x; t)$. Entonces,

$$A(x; t) = \frac{-2\kappa e^{8\kappa^3 t + \kappa x}}{e^{2\kappa x} + e^{8\kappa^3 t}},$$

por lo que el kernel de la ecuación de Gel'fand-Levitan es

$$K(x, y; t) = \frac{-2\kappa e^{8\kappa^3 t + \kappa(x-y)}}{e^{2\kappa x} + e^{8\kappa^3 t}}.$$

De este modo,

$$K(x, x; t) = \frac{-2\kappa e^{8\kappa^3 t}}{e^{2\kappa x} + e^{8\kappa^3 t}}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} K(x, x; t) &= \frac{(2\kappa)^2 e^{8\kappa^3 t + 2\kappa x}}{(e^{2\kappa x} + e^{8\kappa^3 t})^2}, \\ &= \kappa^2 \left(\frac{2}{e^{\kappa x - 4\kappa^3 t} + e^{-(\kappa x - 4\kappa^3 t)}} \right)^2, \\ &= \kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t). \end{aligned}$$

Entonces la solución a la ecuación de Korteweg-deVries (131) con condición inicial (132) es

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t).$$

Esta solución también se puede recuperar proponiendo soluciones del tipo de onda viajera $u(x, t) = u(x - ct)$ como lo mencionamos anteriormente. Sin embargo, para perfiles iniciales de la forma

$$V(x) = -N(N + 1)\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x,$$

tendremos también un potencial sin reflexión, $R(k) \equiv 0$, con N valores propios,

$$\lambda_m = -(m\kappa)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots, N,$$

dando esto como resultado soluciones mucho más complicadas ¡que *no* pueden ser recuperadas con la sencilla suposición de onda viajera! Por ejemplo, si $N = 2$, la solución a la ecuación de KdV será:

$$(211) \quad u(x, t) = -12 \frac{3 + 4 \cosh 2\kappa(x - 4\kappa^2 t) + \cosh 4\kappa(x - 16\kappa^2 t)}{[\cosh 3\kappa(x - 12\kappa^2 t) + 3 \cosh \kappa(x - 28\kappa^2 t)]^2}$$

solución que **no** es del tipo de onda viajera y que en $t = 0$ se reduce a la condición inicial,

$$(212) \quad u(x, 0) = -6\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x.$$

Esta solución tiene valores propios $\lambda_1 = -\kappa^2$ y $\lambda_2 = -4\kappa^2$.

8.14.1. Otra forma de abordar el problema. Formulemos la siguiente pregunta: ¿existe potencial $u(x, 0)$, tal que el coeficiente de reflexión sea nulo,

$$R(k, 0) \equiv 0?$$

Para dar respuesta, debemos resolver la ecuación de Gel'fand-Levitan,

$$(213) \quad K(x, y) + F(x + y) + \int_x^\infty K(x, z)F(y + z) dz = 0$$

con

$$F(s) = e^{-\kappa s}.$$

Así,

$$K(x, y) + e^{-\kappa(x+y)} + \int_x^\infty K(x, z)e^{-\kappa(y+z)} dz = 0.$$

Como lo hicimos anteriormente, propongamos un kernel degenerado,

$$K(x, y) = A(x)e^{-\kappa y},$$

por lo que debemos de resolver la ecuación algebraica para $A(x; t)$,

$$A(x) + e^{-\kappa x} + A(x) \int_x^\infty e^{-2\kappa z} dz = 0.$$

Entonces

$$A(x) = \frac{-2\kappa e^{-\kappa x}}{2\kappa + e^{-2\kappa x}}$$

y el kernel será

$$K(x, y) = \frac{-2\kappa e^{-\kappa(x+y)}}{2\kappa + e^{-2\kappa x}},$$

por lo que

$$K(x, x) = \frac{-2\kappa e^{-2\kappa x}}{2\kappa + e^{-2\kappa x}}$$

y

$$\frac{d}{dx} K(x, x) = \kappa^2 \left(\frac{2}{\sqrt{2\kappa} e^{\kappa x} + \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} e^{-\kappa x}} \right)^2.$$

Definiendo δ_0 tal que

$$e^{\delta_0} \equiv \sqrt{2\kappa},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= -2 \frac{d}{dx} K(x, x) = \\ &= -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x + \delta_0). \end{aligned}$$

Aún más, dado que conocemos el kernel $K(x, y)$, podemos conocer las funciones de Jost $f(x, k)$ y $g(x, k)$. La función de Jost $f(x, k)$ es

$$f(x, k) = e^{ikx} - \frac{2\kappa e^{-\kappa x}}{2\kappa + e^{-\kappa x}} \int_x^\infty e^{-(\kappa - ik)y} dy.$$

Integrando y usando $e^{\delta_0} = \sqrt{2\kappa}$ obtenemos

$$f(x, k) = e^{ikx} \left(1 - \frac{2i\kappa e^{-2\kappa x}}{(e^{2\delta_0} + e^{-2\kappa x})(k + i\kappa)} \right).$$

Multiplicando y dividiendo por $e^{\kappa x - \delta_0}$, sumando y restando $i\kappa e^{\kappa x + \delta_0}$ en el segundo sumando, encontramos

$$f(x, k) = e^{ikx} \left(\frac{k + i\kappa \tanh(\kappa x + \delta_0)}{k + i\kappa} \right),$$

¡la cual es una solución sorprendentemente sencilla! Notemos que, en efecto,

$$f(x, k) \sim e^{ikx}, \quad \text{si } x \sim \infty$$

Ahora, sabemos que (ver ecuación (177)):

$$g(x, k) = a(k)f^*(x, k) + b(k)f(x, k).$$

Para $x \sim -\infty$,

$$g(x, k) \sim a(k) \left(\frac{k + i\kappa}{k - i\kappa} \right) e^{-ikx} + b(k) \left(\frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \right) e^{ikx}.$$

Pero también sabemos que

$$g(x, k) \sim e^{-ikx}, \quad \text{si } x \sim -\infty,$$

para cualquier k . Por tanto,

$$a(k) = \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \quad \text{y} \quad b(k) \equiv 0.$$

Entonces, la segunda función de Jost es

$$g(x, k) = a(k)f^*(x, k) = e^{-ikx} \left(\frac{k - i\kappa \tanh(\kappa x + \delta_0)}{k + i\kappa} \right).$$

Ahora, sabemos que los valores propios son las raíces de la ecuación

$$a(k) = 0,$$

que en este caso sólo tenemos un valor propio:

$$k = i\kappa$$

Así pues, la función $F(s; t)$ será

$$F(s; t) = c^2(t)e^{-\kappa s}$$

y la ecuación de Gel'fand-Levitan es

$$K(x, y; t) + c^2(t)e^{-\kappa(x+y)} + c^2(t)e^{-\kappa y} \int_x^\infty K(x, z; t)e^{-\kappa z} dz = 0$$

Suponiendo

$$K(x, y; t) = A(x; t)e^{-\kappa y},$$

tenemos

$$A(x; t) + c^2(t)e^{-\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa} A(x; t)e^{-2\kappa x} = 0.$$

Así,

$$A(x; t) = \frac{-c^2(t)e^{\kappa x}}{e^{2\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa}},$$

por lo que el kernel será

$$K(x, y; t) = \frac{-c^2(t)e^{\kappa(x-y)}}{e^{2\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa}}.$$

Entonces,

$$K(x, x; t) = \frac{-c^2(t)}{e^{2\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa}}$$

y

$$\frac{d}{dx}K(x, x; t) = \frac{2\kappa c^2(t)e^{2\kappa x}}{\left(e^{2\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa}\right)^2} = \kappa^2 \left(\frac{2}{\frac{\sqrt{2\kappa}}{c(t)}e^{\kappa x} + \frac{c(t)}{\sqrt{2\kappa}}e^{-\kappa x}} \right)^2$$

Definiendo $\delta(t)$ del siguiente modo:

$$e^{\delta(t)} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c(t)},$$

entonces,

$$\frac{d}{dx}K(x, x; t) = \kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x + \delta(t))$$

por lo que la solución de la ecuación de KdV es

$$u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x + \delta(t)).$$

Ahora, si δ_0 se define como

$$e^{\delta_0} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c(0)},$$

se sigue

$$e^{\delta(t)} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c(t)} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c(0)} e^{-4\kappa^3 t} = e^{-4\kappa^3 t + \delta_0},$$

por lo que,

$$\delta(t) = -4\kappa^3 t + \delta_0.$$

Así,

$$u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x - 4\kappa^3 t + \delta_0).$$

Pero en $t = 0$, $u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x$, de donde $\delta_0 = 0$ y la solución de la ecuación de Korteweg-deVries resulta ser

$$u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x - 4\kappa^3 t),$$

y la constante de normalización

$$c(0) = \sqrt{2\kappa}$$

es la misma que antes. La velocidad de propagación del soliton es

$$\text{Velocidad de propagación} = 4\kappa^2,$$

y como vemos es proporcional a la amplitud

$$\text{Amplitud} = -2\kappa^2.$$

Así, los solitones más altos son los solitones más rápidos.

8.15. ¿Qué hace el Espectro Continuo? En la sección anterior vimos un ejemplo en que el coeficiente de reflexión es nulo, $R(k) \equiv 0$, pero en general tendremos potenciales en los que dicho coeficiente sea distinto de cero:

$$R(k) \neq 0.$$

Lamentablemente, y a pesar de ser una ecuación lineal, la ecuación de Gel'fand-Levitan *no* podrá ser resuelta explícitamente en la mayoría de los casos.

Veamos qué sucede si la condición inicial es

$$u(x, 0) = -\nu(\nu + 1) \operatorname{sech}^2 x.$$

donde $\nu > 0$ *no* es un entero. Aquí, los valores propios son

$$\lambda_1 = -(\nu - (N - 1))^2,$$

$$\lambda_2 = -(\nu - (N - 2))^2,$$

$$\vdots$$

$$\lambda_N = -\nu^2,$$

donde N es el máximo entero tal que $N < \nu + 1$. (Ver la nota al final de esta sección).

Si por ejemplo $\nu = 0,5$, entonces el perfil inicial tiene amplitud

$$A_i = \nu(\nu + 1) = 0,75.$$

Aquí $N = 1$ y el solitón correspondiente al valor propio $\lambda_1 = -\kappa_1^2 = -\nu_1^2 = -0,25$, tiene amplitud

$$A_1 = 2\kappa_1^2 = 0,5.$$

Notemos que la amplitud inicial es mayor que la amplitud del solitón en cualquier otro instante posterior:

$$A_i > A_1.$$

Y esto es debido a que parte de la amplitud se pierde en **radiación**, debido a que el coeficiente de reflexión **no** es idénticamente cero: $R(k, 0) \neq 0$.

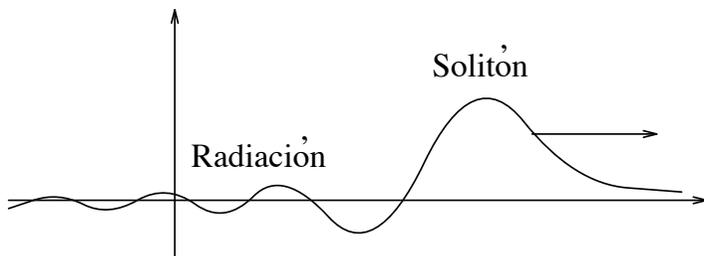


FIGURA 36. Espectro continuo: radiación

Vemos que efectivamente en este caso $R(k) \neq 0$, pues:

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \right|^2 \sim \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi$$

lo cual no necesariamente vale *cero*.

Observación 8.15.1. Los valores propios están dados por los polos del coeficiente de reflexión:

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \right|^2 = \left| \frac{b(k)}{a(k)} \right|^2$$

Por tanto, los polos de $|R(k)|^2$ son los polos de $\Gamma(\alpha)$ y $\Gamma(\beta)$, los cuales son los siguientes:

$$\alpha = -ik - \nu = -n,$$

$$\beta = -ik + (\nu + 1) = -m,$$

donde $m, n = 0, 1, 2, \dots$ Así,

$$k = i(\nu - m) \quad \text{ó} \quad k = -i(n + \nu + 1).$$

Pero como pedimos $\text{Im}(k) > 0$,

$$\begin{aligned} \nu - m &> 0, \\ n + \nu + 1 &< 0, \end{aligned}$$

los valores propios son

$$\begin{aligned} \lambda_{M+1} &= -\nu^2, \\ \lambda_M &= -(\nu - 1)^2, \\ &\vdots \\ \lambda_1 &= -(\nu - M)^2, \end{aligned}$$

donde M es un entero tal que $\nu - M > 0$. Esto es, M es el máximo entero menor que ν . Si definimos

$$M \equiv N - 1,$$

entonces:

$$N < \nu + 1,$$

como deseabamos verificar.

Apéndice A. Aquí probaremos que los valores propios de la ecuación de Schrödinger son reales.

Tomemos la ecuación de Schrödinger y también su conjugada:

$$\begin{aligned} \psi_{xx} + (\lambda - u)\psi &= 0 \\ \psi_{xx}^* + (\lambda^* - u)\psi^* &= 0, \end{aligned}$$

donde el asterisco denota conjugación. El potencial $u = u(x, t)$ es real, por ser la amplitud de nuestra onda. Multiplicando la primera de nuestras ecuaciones por ψ^* y la segunda por ψ y restando,

$$\psi^* \psi_{xx} - \psi_{xx}^* \psi + (\lambda - \lambda^*) \psi \psi^* = 0,$$

de donde

$$(214) \quad \frac{d}{dx} (\psi^* \psi_x - \psi_x^* \psi) + (\lambda - \lambda^*) |\psi|^2 = 0.$$

Tenemos ahora dos casos:

a) $\text{Im}(k) = 0$. Entonces $\lambda = k^2$ es real y positivo y corresponde al espectro continuo.

b) $\text{Im}(k) > 0$. Tomemos, por ejemplo, $\psi(x, k) = g(x, k)$ (se hace de igual forma para $\psi(x, k) = f(x, k)$). Como $g(x, k) \sim e^{-ikx}$ cuando $x \sim -\infty$ y $e^{-ikx} \rightarrow 0$, si $x \rightarrow -\infty$ (pues $\text{Im}(k) > 0$), entonces

$$g(x, k) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } x \rightarrow -\infty.$$

Sabemos que

$$g(x, k) = a(k)f^*(x, k) + b(k)f(x, k),$$

entonces

$$g(x, k) \sim a(k)e^{-ik^*x} + b(k)e^{ikx} \quad \text{cuando } x \sim \infty.$$

Sea $k = k_1 + i\kappa$, con $\text{Im}(k) = \kappa > 0$. Entonces

$$g(x, k) \sim a(k)e^{-ik_1x - \kappa x} + b(k)e^{ik_1x - \kappa x} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Por tanto,

$$|g(x, k)|^2 \rightarrow 0$$

exponencialmente, cuando $|x| \rightarrow \infty$.

De aquí que al integrar la ecuación (214), desde $-\infty$ hasta $+\infty$, el término de frontera se anule,

$$(g^* g_x - g_x^* g)|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

pues $|g| \rightarrow 0$, cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces:

$$(\lambda - \lambda^*) \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, k)|^2 dx = 0$$

Ahora, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x, k)|^2 dx$ es convergente, pues $|g| \rightarrow 0$ exponencialmente, para $|x| \rightarrow \infty$. Además es distinta de cero, pues buscamos soluciones no triviales. Entonces

$$\lambda = \lambda^*$$

i.e., λ es real y es lo que deseábamos probar.

Ahora,

$$\lambda = k^2 = k_1^2 - \kappa^2 + 2ik_1\kappa$$

Como λ es real, $k_1\kappa = 0$. Pero $\kappa = \text{Im}(k) > 0$. Así $k_1 = 0$, $\lambda = -\kappa^2 < 0$ y $k = i\kappa$. Así pues, tenemos que si $\text{Im}(k) > 0$, entonces $k = i\kappa$, con $\kappa = \text{Im}(k) > 0$ y corresponde al caso discreto, por ser $\lambda < 0$, esto es, tener energía negativa.

Apéndice B. El Wronskiano de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger es una constante independiente de x .

Sean ψ_1 y ψ_2 soluciones linealmente independientes a la ecuación de Schrödinger,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1 + (k^2 - u)\psi_1 &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_2 + (k^2 - u)\psi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera de las ecuaciones por ψ_2 , la segunda por ψ_1 y restando obtenemos

$$\psi_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1 - \psi_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_2 = 0$$

que podemos escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi_2 \frac{\partial}{\partial x} \psi_1 - \psi_1 \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 \right) = 0$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x} (W(\psi_1, \psi_2)) = 0.$$

Y así,

$$W(\psi_1, \psi_2)(x, k) = W(\psi_1, \psi_2)(0, k)$$

es una constante (i.e., independiente de x pero puede depender de k).

Si por ejemplo $\psi_1 = f(x, k)$, $\psi_2 = g(x, k)$, entonces

$$\begin{aligned} W(f, g) &= W(f, af^* + bf), \\ &\sim W(e^{ikx}, ae^{-ikx} + be^{ikx}), \end{aligned}$$

en $x \sim \infty$. Así,

$$W(f, g) \sim \begin{pmatrix} e^{ikx} & ae^{-ikx} + be^{ikx} \\ ik e^{ikx} & -ika e^{-ikx} + ikb e^{ikx} \end{pmatrix}$$

y, por tanto,

$$(215) \quad W(f, g) = -2ik a(k).$$

De aquí se sigue que si $k = k_j = i\kappa_j$ es raíz de $a(k)$, i.e., $a(k_j) = 0$, entonces $f(x, i\kappa_j, t)$ y $g(x, i\kappa_j, t)$ son **linealmente dependientes**:

$$g(x, i\kappa_j, t) = \rho_j f(x, i\kappa_j, t)$$

Dado el comportamiento asintótico en $x \sim \infty$ y en $x \sim -\infty$ de $f(x, i\kappa_j, t)$ y $g(x, i\kappa_j, t)$ respectivamente, resulta que $g(x, i\kappa_j, t) = \rho_j f(x, i\kappa_j, t)$ es función propia con valor propio $\lambda_j = k_j^2 = -\kappa_j^2$.

Apéndice C. Probaremos el siguiente teorema.

TEOREMA Se cumple

$$\frac{d}{dk}a(k_0) = -i\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx,$$

donde $k_0 = i\kappa_0$ corresponde a un valor propio.

Demostración. Sabemos que (ver ecuación (215)):

$$W(f, g) = -2ik a(k).$$

Calculando la derivada en ambos miembros de la ecuación respecto a k ,

$$(216) \quad \frac{d}{dk}W(f, g) = -2ia(k) - 2ik \frac{d}{dk}a(k).$$

Ahora, la derivada respecto a k en ambos miembros de la ecuación de Schrödinger es:

$$(217) \quad \frac{d}{dk}f_{xx} + (k^2 - u) \frac{d}{dk}f + 2kf = 0.$$

También tenemos

$$(218) \quad g_{xx} + (k^2 - u)g = 0.$$

Multiplicando (217) por g , (218) por $\frac{df}{dk}$ y tomando la diferencia obtenemos

$$g_{xx} \frac{df}{dk} - g \frac{d}{dk}f_{xx} - 2kfg = 0.$$

Así,

$$(219) \quad 2kfg = \frac{d}{dx} \left[W \left(\frac{df}{dk}, g \right) \right]$$

Intercambiando los papeles de f y g en (219), obtenemos:

$$(220) \quad 2kfg = \frac{d}{dx} \left[W \left(\frac{dg}{dk}, f \right) \right]$$

Integrando (219) desde algún punto x_0 hasta l y (220) desde $-l$ hasta x_0 ,

$$(221) \quad 2k \int_{x_0}^l (fg) dx = \left[W \left(\frac{df}{dk}, g \right) \right]_{x_0}^l,$$

$$(222) \quad 2k \int_{-l}^{x_0} (fg) dx = \left[W \left(\frac{dg}{dk}, f \right) \right]_{-l}^{x_0}.$$

Ahora, en $k = k_0 = i\kappa_0$, ($\kappa_0 > 0$), sabemos

$$g(x, k_0) = \rho_0 f(x, k_0),$$

con

$$\begin{aligned} g(x, k_0) &\rightarrow 0, \\ f(x, k_0) &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \left[W \left(\frac{df}{dk}, g \right) \right]_{x_0}^l &= - \left[W \left(\frac{df}{dk}, g \right) \right] (x_0, k_0) \\ \lim_{l \rightarrow \infty} \left[W \left(\frac{dg}{dk}, f \right) \right]_{-l}^{x_0} &= \left[W \left(\frac{dg}{dk}, f \right) \right] (x_0, k_0) \end{aligned}$$

Por consiguiente, las ecuaciones (221) y (222) se escriben

$$2k_0 \int_{x_0}^{\infty} (fg) dx = - \left[W \left(\frac{df}{dk}, g \right) \right] (x_0, k_0),$$

$$2k_0 \int_{-\infty}^{x_0} (fg) dx = \left[W \left(\frac{dg}{dk}, f \right) \right] (x_0, k_0).$$

Sumando miembro a miembro,

$$2k_0 \int_{-\infty}^{\infty} (fg) dx = - \left[W \left(\frac{df}{dk}, g \right) \right] (x_0, k_0) - \left[W \left(f, \frac{dg}{dk} \right) \right] (x_0, k_0)$$

$$= - \frac{d}{dk} [W(f, g)](x_0, k_0)$$

Usando el hecho que $g(x, k_0) = \rho_0 f(x, k_0)$:

$$\frac{d}{dk} [W(f, g)](x_0, k_0) = -2k_0 \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx$$

Comparando con (216) evaluada en $k = k_0$ y recordando que $a(k_0) = 0$, tenemos

$$\frac{d}{dk} a(k_0) = -i \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx$$

como deseábamos probar. □

Además, como $f(x, k_0) \not\equiv 0$, entonces $f^2(x, k_0) \not\equiv 0$ y la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx \neq 0$, por lo que

$$\frac{d}{dk} a(k_0) \neq 0,$$

y así

$$a(k) = 0$$

tiene ceros simples.

Apéndice D. Aquí probaremos la igualdad

$$\psi^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right),$$

es válida, en donde

$$Q \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_x \psi - 2(u + 2\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

y

$$\lambda = k^2(t).$$

Demostración. Calculemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \psi_{xx} - \psi Q_{xx}$$

Pero para ello necesitamos conocer

$$Q_x = \psi_{xt} + u_{xx} \psi - u_x \psi_x - 2(u + 2\lambda) \psi_{xx},$$

$$Q_{xx} = \psi_{xxt} + u_{xxx} \psi - 3u_x \psi_{xx} - 2(u + 2\lambda) \psi_{xxx},$$

Usando $\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi$ en la expresión para Q_{xx} tenemos

$$Q_{xx} = (u_t - \lambda_t)\psi + (u - \lambda)\psi_t + u_{xxx}\psi - 3u_x \psi_{xx} - 2(u + 2\lambda)[u_x \psi + (u - \lambda)\psi_x].$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= Q\psi_{xx} - \psi Q_{xx} \\ &= [\psi_t + u_x\psi - 2(u + 2\lambda)\psi]\psi_{xx} \\ &\quad - \psi\{(u_t - \lambda_t)\psi + (u - \lambda)\psi_t + u_{xxx}\psi \\ &\quad - 3u_x\psi_{xx} - 2(u + 2\lambda)[u_x\psi + (u - \lambda)\psi]\}. \end{aligned}$$

Arreglando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= \psi_{xx}[\psi_t - 2(u + 2\lambda)\psi_x] - \psi(u_{xxx}\psi - 4u_x\psi_{xx}) \\ &\quad + \psi[(\lambda_t - u_t)\psi + (\lambda - u)\psi_t] \\ &\quad + 2\psi(u + 2\lambda)[u_x\psi + (u - \lambda)\psi_x]. \end{aligned}$$

Usando nuevamente la ecuación de Schrödinger $\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= -\psi^2 u_{xxx} + 4(u - \lambda)u_x\psi^2 - (u_t - \lambda_t)\psi^2 + 2\psi^2(u + 2\lambda)u_x \\ &= \psi^2[-u_{xxx} - u_t + 6uu_x + \lambda_t]. \end{aligned}$$

Como se cumple la ecuación de KdV, entonces

$$\psi^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right).$$

como queríamos probar. □

8.16. Tarea.

TAREA 8.1. Use la transformación (136) en la ecuación (135) para obtener (137).

TAREA 8.2. Use la transformación de Cole-Hopf (139) en la ecuación 1-dimensional de Burgers (138) y obtener la ecuación del calor (140).

TAREA 8.3. Usando la transformación de Miura (142) y la definición de los operadores K y M , (141), pruebe que la relación (143) es válida.

TAREA 8.4. Termine la prueba de $K[v] = 0 \implies M[v] = 0$, usando la ecuación (143).

TAREA 8.5. Complete los detalles del cálculo para encontrar la solución (150) de la ecuación (145) con condiciones de "frontera" (146).

TAREA 8.6. De la ecuación (158), deducir la ecuación (159).

TAREA 8.7. Pruebe que, efectivamente, $D(t) \equiv 0$ (ecuación (162).)

TAREA 8.8. Demuestre las ecuaciones (169), (170) y (171).

TAREA 8.9. Demuestre las ecuaciones (172) y (173).

TAREA 8.10. Partiendo de las ecuaciones (189) y (194), de todos los detalles para encontrar la evolución temporal de las constantes de normalización $c_j(t)$ y del coeficiente de reflexión $R(k, t)$, ecuaciones (193) y (195).

TAREA 8.11. Partiendo de la ecuación de Schrödinger (196), rellene todos los detalles para encontrar las condiciones iniciales $\lambda(0), c(0)$, ecuación (201).

TAREA 8.12. Rellene todos los detalles para demostrar que el coeficiente de reflexión es idénticamente 0, ecuación (210). Parta de la ecuación (202).

TAREA 8.13. Verificar que la solución dada en la ecuación (211) se reduce a la condición inicial dada en (212).

TAREA 8.14. Para un potencial de la forma:

$$V(x) = -N(N+1)\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x,$$

con $N \in \mathbb{N}$ y siguiendo el mismo argumento que en la presente sección, demuestre que la ecuación de Schrödinger tiene N valores propios, $\lambda_n = -(n\kappa)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots, N$ y coeficiente de reflexión $R(k) \equiv 0$.

TAREA 8.15. Para la ecuación de Gel'fand-Levitan-Marchenko (213), proponga un núcleo $F(s)$ como:

$$F(s) = c_1^2 e^{-\kappa_1 s} + c_2^2 e^{-\kappa_2 s},$$

es decir, con datos espectrales que consisten en dos valores propios y cuyo coeficiente de reflexión $R(k, 0) \equiv 0$. Aquí, $c_1 = c_1(0)$ y $c_2 = c_2(0)$ son las constantes de normalización. **Encontrar la solución de 2-soliton dada en la ecuación (211).** Para este fin:

1. Proponga una separación de variables en la solución de la forma:

$$K(x, y) = A_1(x)e^{-\kappa_1 y} + A_2(x)e^{-\kappa_2 y}.$$

Usando la ecuación de Gel'fand-Levitan-Marchenko, encuentre un sistema de ecuaciones (¡lineales!) para A_1 y A_2 , resuélvalo. Encuentre así la condición inicial (212)

2. Ahora, proponga

$$F(s; t) = c_1(t)^2 e^{-\kappa_1 s} + c_2(t)^2 e^{-\kappa_2 s}.$$

Recuerde que conoce la evolución de $c_1(t)$ y $c_2(t)$ pues su evolución es sencilla. Considerando la separación de variables:

$$K(x, y; t) = A_1(x; t)e^{-\kappa_1 y} + A_2(x; t)e^{-\kappa_2 y},$$

resuelva la ecuación de Gel'fand-Levitan-Marchenko.

3. Encuentre la solución **2-soliton** de la ecuación de KdV (211).

9. TRANSFORMACIONES DE BÄCKLUND

9.1. Comentarios iniciales. Las transformaciones de Bäcklund fueron llamadas así después del matemático sueco Albert Viktor Bäcklund (1845-1922). Las transformaciones de Bäcklund relacionan soluciones de dos EDPs, de las cuales las más interesantes son las EDPs no lineales. Si las dos EDPs son la misma, entonces se les llama **auto-transformaciones de Bäcklund**.

Los orígenes de las transformaciones de Bäcklund se remontan al trabajo de Bianchi y Bäcklund a principios de la década de 1880. Estaban interesados en encontrar superficies de 2 dimensiones con curvatura negativa. Si se conoce una superficie con curvatura constante negativa, fueron capaces de encontrar otra superficie con la misma propiedad.

Esto tiene una aplicación muy amplia en teoría de solitones. Si uno tiene una EDP que describa solitones, y si tenemos una solución específica de dicha EDP, las transformaciones de Bäcklund pueden generar una nueva solución a esa EDP. Es costumbre que todas las ecuaciones de solitones tengan una transformación de Bäcklund correspondiente. Al revés, no es necesariamente cierto.

9.2. Las transformaciones de Bäcklund más elementales.

9.2.1. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann es el ejemplo más sencillo de transformaciones de Bäcklund:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Sabemos que si u resuelve la ecuación de Laplace,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

entonces $u(x, y)$ es la parte real de la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ la cual debe ser analítica en la variable compleja $z = x + iy$. Entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen y,

$$v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

de forma tal que hemos encontrado otra solución a la ecuación de Laplace. Es decir, las ecuaciones de Cauchy-Riemann son la transformación de Bäcklund de la ecuación de Laplace. De hecho, ellas son una auto-transformación de Bäcklund, es decir, conecta soluciones de la ecuación de Laplace con soluciones de la ecuación de Laplace.

Como ejemplo, consideremos la solución $u(x, y) = x^2 - y^2$ de la ecuación de Laplace. Sustituyendo en las ecuaciones de Cauchy-Riemann e integrando, encontramos $v(x, y) = 2xy$, la cual también resuelve la ecuación de Laplace. Podemos repetir este procedimiento a soluciones polinomiales de grado superior, como también a otros tipos de soluciones de la ecuación de Laplace.

9.2.2. La ecuación de sine-Gordon. La ecuación de sine-Gordon,

$$(223) \quad u_{xy} = \sin u,$$

aparece en el contexto de superficies de curvatura constante negativa y en teoría de solitones, y aunque este ejemplo no es elemental, aparece en el trabajo de V. Bäcklund. Esta tiene una auto-transformación de Bäcklund dada por el sistema:

$$(224) \quad \begin{aligned} v_x &= u_x + 2a \sin\left(\frac{u+v}{2}\right), \\ v_y &= -u_y - \frac{2}{a} \sin\left(\frac{u-v}{2}\right), \end{aligned}$$

en donde a es un parámetro arbitrario. Si sabemos que $u(x, y)$ resuelve la ecuación de sine-Gordon, entonces resuelve el sistema anterior de ecuaciones de primer orden para $v(x, y)$ y habremos descubierto que

$$v_{xy} = \sin v.$$

9.2.3. La ecuación Liouville. La ecuación Liouville es

$$(225) \quad u_{xy} = e^u.$$

La transformación de Bäcklund para la ecuación de Liouville está dada por el sistema

$$(226) \quad \begin{aligned} v_x &= u_x + 2ae^{\left(\frac{u+v}{2}\right)}, \\ v_y &= -u_y - \frac{1}{a}e^{\left(\frac{u-v}{2}\right)}, \end{aligned}$$

en donde a es también un parámetro libre. Este sistema conecta la ecuación de Liouville con la ecuación de onda

$$(227) \quad v_{xy} = 0.$$

Así pues, si resolvemos la ecuación de onda, resolvemos la correspondiente transformación de Bäcklund, podremos encontrar soluciones de la ecuación de Liouville.

9.3. Problemas de valores propios de segundo orden y sistemas de ecuaciones de primer orden. El resto de este capítulo está basado en *Elements of Soliton Theory*, de George L. Lamb, Jr. [24].

El sistema de ecuaciones

$$\partial_x \Psi = (iED + N)\Psi,$$

siendo E el parámetro espectral y

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix},$$

en donde $q = q(x)$ y $r = r(x)$. (si $r = \pm q^*$, $q = u$, esto corresponde al problema de valores propios de Zakharov-Shabat, asociado a la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) para u .) Explícitamente,

$$(228) \quad \begin{aligned} \partial_x \psi_1 &= -iE\psi_1 + q\psi_2, \\ \partial_x \psi_2 &= iE\psi_2 + r\psi_1. \end{aligned}$$

Definamos ϕ_1 y ϕ_2 tales que

$$(229) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}(\phi_1 + i\phi_2), \\ i\psi_2 &= \frac{1}{2}(\phi_1 - i\phi_2). \end{aligned}$$

Tomemos $r = -q$. (Si $q = u$, el sistema está asociado a la ecuación modificada de KdV (mKdV) para u . Si $u = q_x/2$, el sistema está asociado a la ecuación de sine-Gordon para u). Entonces el sistema (228) con (229) se convierte en

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_1 &= E\phi_2 - iq\phi_1, \\ \partial_x \phi_2 &= -E\phi_1 + iq\phi_2. \end{aligned}$$

O, en forma matricial:

$$\partial_x \Phi = (EJ + iqD)\Phi,$$

con

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando segundas derivadas y haciendo un poco de álgebra, encontramos el sistema desacoplado

$$(230) \quad \begin{aligned} \partial_x^2 \phi_1 + (E^2 + iq_x + q^2)\phi_1 &= 0, \\ \partial_x^2 \phi_2 + (E^2 - iq_x + q^2)\phi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Esto significa que podemos asociar ecuaciones de segundo orden a problemas de valores propios de primer orden.

Si $q = u$, $r = -1$, nuevamente calculemos segundas derivadas, y el sistema (228) se puede llevar al sistema,

$$(231) \quad \begin{aligned} \partial_x^2 \psi_2 + u\psi_2 &= -E^2\psi_2, \\ \partial_x^2 \psi_1 + u\psi_1 &= -E^2\psi_1 + u_x\psi^2. \end{aligned}$$

La primer ecuación es un problema de valores propios de segundo orden, el cual corresponde al problema asociado de valores propios para la ecuación de KdV. De hecho, es la ecuación estacionaria de Schrödinger. La segunda ecuación no es propiamente un problema de valores propios. Es decir, esta asignación, $q = u$, $r = -1$, corresponde a la ecuación de KdV y u debe satisfacer dicha ecuación.

9.4. Relación entre sistemas de una y dos componentes y ecuaciones de Ricatti. Previamente comenzamos con el sistema (230). Multiplicamos la primer ecuación por ϕ_2 , la segunda por ϕ_1 , y restamos miembro a miembro; después dividimos por ϕ_2^2 . Observemos que aquí está la regla de la derivada de un cociente. Definamos entonces:

$$\varphi \equiv \frac{\phi_1}{\phi_2}.$$

Obtenemos una ecuación para φ

$$\partial_x \varphi = E(1 + \varphi^2) - 2iq\varphi,$$

la cual es una ecuación de Ricatti para φ . Sea ahora $\varphi = -\frac{1}{E\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$. Obtenemos,

$$-\partial_x^2 \theta = E^2 \theta + 2iq\partial_x \theta,$$

la cual es una ecuación lineal para θ ! (En principio, puede ser resuelta.) Ahora pongamos $\theta = \phi_3 \exp(-i \int q(x) dx)$, para obtener

$$(232) \quad \partial_x^2 \phi_3 + (E^2 - iq_x + q^2)\phi_3 = 0.$$

Esta es la segunda ecuación que aparece en (230) obtenida anteriormente.

Esta manera de proceder de sistemas de primer orden a problemas de valores propios de segundo orden puede parecer más complicado. Sin embargo, pasando por una ecuación de Ricatti es un paso crucial, pues la ecuación de Ricatti aparece muchas veces en el análisis de transformaciones de Bäcklund.

Observación 9.4.1. El proceso de ir en dirección opuesta partiendo de la ecuación de Ricatti al sistema de primer orden es un proceso más sutil pero puede realizarse.

9.5. Propiedades generales de ecuaciones de Ricatti. Comencemos de la ecuación general de Ricatti:

$$(233) \quad \phi_x + A\phi + B\phi^2 = C,$$

donde $A = A(x)$, $B = B(x)$ y $C = C(x)$. Definamos $\theta = \theta(x)$ de la siguiente manera:

$$\varphi = \frac{\theta_x}{B\theta}.$$

Sustituyamos en la ecuación de Ricatti para obtener una ecuación lineal en θ ,

$$\partial_x^2 \theta + \left(A - \frac{B_x}{B} \right) \partial_x \theta = BC\theta,$$

la cual en principio puede ser resuelta.

Si $\theta_1(x)$ y $\theta_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes, la solución general está dada por $\theta(x) = a\theta_1(x) + b\theta_2(x)$, para a y b ciertas constantes. De aquí ($b \neq 0$),

$$(234) \quad \varphi(x) = \frac{\frac{a}{b} \partial_x \theta_1(x) + \partial_x \theta_2(x)}{B(x) \left(\frac{a}{b} \theta_1(x) + \theta_2(x) \right)}$$

es una solución de la ecuación de Ricatti. Podemos entonces imponer una solución general de la ecuación de Ricatti de la siguiente forma:

$$(235) \quad \varphi(x) = \frac{kP(x) + Q(x)}{kR(x) + S(x)},$$

con k la constante de integración.

De manera similar, se puede demostrar que si φ_1 y φ_2 son soluciones de la ecuación de Ricatti, una nueva solución φ puede ser encontrada resolviendo la siguiente relación

$$(236) \quad \frac{\varphi - \varphi_1(x)}{\varphi - \varphi_2(x)} = K \exp \left(\int B(x) (\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) dx \right),$$

siendo k una constante de integración.

Observación 9.5.1. Tenemos un comentario final. La ecuación $\partial_{xx}^2 \theta + a(x)\partial_x \theta + b(x)\theta = 0$, usando la siguiente transformación,

$$\theta = \phi \exp \left(-\frac{1}{2} \int a(x) dx \right),$$

puede ser llevada a la siguiente forma

$$(237) \quad \partial_x^2 \phi + \left(b - \frac{1}{4}(a^2 + 2a_x) \right) \phi = 0.$$

Bajo cierta elección de a y b , ésta puede ser la ecuación estacionaria de Schrödinger.

9.6. Ecuaciones asociadas de Sturm-Liouville. La ecuación

$$-\partial_x^2 \psi + V(x)\psi = \lambda\psi,$$

es la ecuación estacionaria de Schrödinger y es de importancia fundamental en mecánica cuántica y teoría de solitones. De hecho, la teoría de solitones adoptó las ideas y técnicas de la mecánica cuántica para resolver sus propios problemas. Ver, por ejemplo, [10], [21].

Uno de estos problemas es resolver esta ecuación para potenciales sin reflexión para encontrar soluciones exactas de solitón de la ecuación de KdV.

Cómo encontrar soluciones sin reflexión por métodos directos fue adoptado por primera vez por Darboux (1882) y muchos otros. Aquí seguiremos el procedimiento de Darboux, de acuerdo a G.L. Lamb [24].

Supongamos que hay una conexión entre los siguientes problemas de valores propios:

$$(238) \quad y'' = (\lambda + u(x))y,$$

$$(239) \quad z'' = (\lambda + v(x))z.$$

Supongamos además que las soluciones están relacionadas por:

$$(240) \quad z = A(x, \lambda)y + B(x, \lambda)y'.$$

Por simplicidad, tomemos $B(x, \lambda) = 1$.

La ecuación (240) será de fundamental importancia dado que nos permitirá encontrar más soluciones a ecuaciones no lineales.

Sustituyendo (240) en (239), usando (238), considerando λ independiente de x , agrupando términos como factores en y y y' , y suponiendo que y y y' son linealmente independientes, obtenemos el sistema:

$$(241) \quad A'' + A(u - v) + u' = 0,$$

$$(242) \quad 2A' + (u - v) = 0.$$

Multiplicando (242) por A , restando de (241), e integrando, obtenemos

$$A' - A^2 + u = -\tilde{\lambda},$$

con $\tilde{\lambda}$ constante de integración. Esta es una ecuación de Ricatti, la cual la podemos linealizar con

$$A = -\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}},$$

obteniendo

$$(243) \quad \tilde{y}'' = (\tilde{\lambda} + u(x))\tilde{y},$$

i.e., \tilde{y} es una solución particular de (238)!

$$\text{De la ecuación (242), } v = u + 2A' = u - 2\left(\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}}\right)', \text{ i.e.,}$$

$$v = u - 2(\text{Log } \tilde{y})'',$$

de forma tal que z resuelve el problema de valores iniciales

$$(244) \quad z'' = [\lambda + u - 2(\text{Log } \tilde{y})'']z.$$

Obtuvimos una ecuación de Schrödinger con un nuevo potencial

$$u(x) \rightarrow u(x) - 2(\text{Log } \tilde{y}(x))''.$$

Ahora, por la identidad $2(\text{Log } f)'' = \frac{f'''}{f} - f\left(\frac{1}{f}\right)''$, y usando la ecuación (243),

$$z'' = \left[\lambda + u - \frac{\tilde{y}''}{\tilde{y}} + \tilde{y}\left(\frac{1}{\tilde{y}}\right)'' \right] z = \left[\lambda + u - (\tilde{\lambda} + u) + \tilde{y}\left(\frac{1}{\tilde{y}}\right)'' \right] z,$$

i.e.,

$$(245) \quad z'' = \left[\lambda - \tilde{\lambda} + \tilde{y} \left(\frac{1}{\tilde{y}} \right)'' \right] z.$$

Notemos que la solución de (245) es $z = \frac{1}{\tilde{y}}$, siempre y cuando escojamos $\tilde{\lambda} = \lambda$, i.e., la ecuación (245) llega a ser:

$$\frac{z''}{z} = \tilde{y} \left(\frac{1}{\tilde{y}} \right)''.$$

Esto nos permite encontrar condiciones iniciales para soluciones de solitones puros (sin radiación) de la ecuación de KdV. Esto se hace de la siguiente manera.

PROBLEMA 9.6.1. *El prodecimiento es como sigue. Dado un potencial $u(x)$, encontrar una solución $\tilde{y}(x)$ a*

$$\tilde{y}'' = (\tilde{\lambda} + u(x))\tilde{y},$$

para un valor particular de $\tilde{\lambda}$. Entonces, una nueva solución (con un nuevo potencial) a la ecuación

$$y'' = (\lambda + u(x))y,$$

se puede encontrar a través de la ecuación (244),

$$z'' = [\lambda + u - 2(\text{Log } \tilde{y})''] z.$$

y el nuevo potencial es

$$(246) \quad u_{\text{new}}(x) = u - 2(\text{Log } \tilde{y})'',$$

con $z = A(x, \tilde{\lambda})y + B(x, \tilde{\lambda})y' = -\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}}y + y'$. El nuevo potencial es la nueva condición inicial para la ecuación de KdV.

Ejemplo 9.6.I. Condiciones iniciales para la ecuación de KdV. Considere la ecuación

$$y'' = (\lambda + u(x))y,$$

con $u(x) = 0$. Notemos que la ecuación de KdV, $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ tiene una solución exacta, $u(x, t) = 0$ para la cual $u(x) = 0$ corresponde a su condición inicial. Ahora vamos a generar la condición inicial para la solución de 1-soliton.

Entonces la ecuación previa resulta ser, $y'' = \lambda y$ y tiene solución general

$$y(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Tomemos $\lambda = \tilde{\lambda} = 1$, $\alpha = \beta = 1/2$:

$$\tilde{y}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Por tanto, por (246)

$$u_{\text{new}} = 0 - 2(\text{Log } \tilde{y})'' = -2 \left(\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}} \right)' = -2 \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' = -2 \left(\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2} \right),$$

i.e.,

$$u_{\text{new}}(x) = -2 \text{sech}^2 x.$$

la cual es la condición inicial para la solución 1-soliton de la ecuación de KdV.

Ahora la solución del problema de valores iniciales

$$z'' = (\lambda - 2 \text{sech}^2 x)z,$$

está dada por

$$\begin{aligned} z &= y' - \left(\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}} \right) y \\ &= \alpha \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}x} - \beta \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}x} - (\alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}) \frac{\sinh x}{\cosh x}, \end{aligned}$$

i.e., la función propia asociada al problema de valores iniciales está dada por

$$z(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x}(\sqrt{\lambda} - \tanh x) - \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}(\sqrt{\lambda} + \tanh x).$$

Este procedimiento puede ser repetido iterativamente tantas veces como uno desee, digamos N veces, para generar la condición inicial para la solución N -solitón de la ecuación de KdV.

9.7. La transformación de Bäcklund para la ecuación de KdV. En la sección anterior aprendimos cómo generar condiciones iniciales para la ecuación de KdV tales que evolucionen como soluciones de N -solitón puros. Aquí encontraremos tales soluciones de N -solitón partir de la solución $(N-1)$ -solitón. Para este fin, requerimos de un sistema de dos problemas de valores propios de Sturm-Liouville, tales que el potencial también dependa del tiempo t , en donde t aquí es un parámetro.

Hipótesis. El valor propio λ de este sistema de problemas de valores propios de Sturm-Liouville es **independiente de t** .

Tenemos entonces dos problemas de valores propios de Sturm-Liouville,

$$\begin{aligned} y_{xx} &= [\lambda + \varphi(x, t)]y, \\ w_{xx} &= [\lambda + \psi(x, t)]w; \end{aligned}$$

los cuales comparten el mismo valor propio, λ . Las funciones $\varphi(x, t)$ y $\psi(x, t)$ se toman como soluciones de la ecuación de KdV y se trata de saber cómo se relacionan.

Las soluciones $y(x, t)$, $w(x, t)$ de estas ecuaciones están relacionadas por

$$w(x, t) = A(x, t; \lambda)y + y'.$$

Tal y como encontramos en la sección anterior,

$$(247) \quad 2A_x + \varphi - \psi = 0,$$

$$(248) \quad A^2 - A_x - \varphi = \tilde{\lambda}(t),$$

en donde $\tilde{\lambda}(t)$ es una constante de integración, que podría depender de t . Linealizando (248) con $A = -\tilde{y}_x/\tilde{y}$, obtenemos,

$$\tilde{y}_{xx} = (\tilde{\lambda}(t) + \varphi)\tilde{y}.$$

Puesto que $\varphi(x, t)$ resuelve la ecuación de KdV, $\tilde{\lambda}(t) = \tilde{\lambda}$ es independiente del tiempo.

Definamos z y ζ tal que $\psi = z_x$ y $\varphi = \zeta_x$. Integrando (247) y poniendo la constante de integración igual a cero,

$$(249) \quad A = \frac{1}{2}(z - \zeta).$$

Sustituyamos A_x de la ecuación (247) en (248), para obtener

$$(250) \quad A^2 = \tilde{\lambda} + \frac{1}{2}(\psi + \varphi).$$

Ahora, sustituir (249) en (250) y reorganizando términos,

$$(251) \quad \psi + \varphi = -2\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}(z - \zeta)^2.$$

Esta es una ecuación tipo de Ricatti que relaciona las funciones z y ζ , las cuales están relacionadas por las soluciones $\psi = z_x$ y $\varphi = \zeta_x$, soluciones de la ecuación de KdV.

AFIRMACIÓN 9.7.1. Si $\psi(x, t)$ satisface la ecuación de KdV

$$\psi_t - 6\psi\psi_x + \psi_{xxx} = 0,$$

entonces

$$(252) \quad \begin{aligned} z_t - 3(z_x)^2 + z_{xxx} &= 0, \\ \zeta_t - 3(\zeta_x)^2 + \zeta_{xxx} &= 0. \end{aligned}$$

Con la ayuda de esta afirmación, se puede encontrar una ecuación de evolución para z y ζ . El punto inicial es calcular la derivada de la ecuación (251) y, después de un proceso largo y no tan obvio, obtenemos

$$z_t + \zeta_t = 2(z_x^2 + z_x \zeta_x + \zeta_x^2) - (z - \zeta)(z_{xx} - \zeta_{xx}).$$

Esta ecuación, junto con la ecuación (251), conforman la transformación de Bäcklund de la ecuación de KdV:

$$(253) \quad \begin{aligned} z_x + \zeta_x &= -2\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}(z - \zeta)^2, \\ z_t + \zeta_t &= 2(z_x^2 + z_x \zeta_x + \zeta_x^2) - (z - \zeta)(z_{xx} - \zeta_{xx}). \end{aligned}$$

Así es como funciona el método de las transformaciones de Bäcklund para sistemas integrables. Encontrar una solución $\zeta(x, t)$ a (252), en donde $\zeta_x(x, t) = \phi(x, t)$, con $\phi(x, t)$ solución de la ecuación de KdV. Se sustituye $\zeta(x, t)$ en (253). Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones acopladas para $z(x, t)$. Se resuelve y resulta ser que $\psi(x, t) = \partial_x z$ también es solución de la ecuación de KdV.

Ejemplo 9.7.I. La solución de 1-soliton de la ecuación de KdV. Notemos que $\zeta(x, t) = 0$ resuelve (252),

$$\zeta_t - 3(\zeta_x)^2 + \zeta_{xxx} = 0.$$

Ahora, sustituyamos en la transformación de Bäcklund de la ecuación de KdV (253) para obtener,

$$\begin{aligned} z_x &= -2\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}z^2, \\ z_t &= 2z_x^2 - zz_{xx}. \end{aligned}$$

Diferenciando la primer ecuación y sustituyendo en la segunda,

$$(254) \quad z_x = -2\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}z^2,$$

$$(255) \quad z_t = -4\tilde{\lambda}z_x.$$

Haciendo $\tilde{\lambda} = \kappa^2$ ($\kappa > 0$), y resolviendo (254) por fracciones parciales, obtenemos

$$\left| \frac{z - 2\kappa}{z + 2\kappa} \right| = e^{2\kappa(x-x_0)},$$

en donde x_0 es la constante de integración. Hay ahora dos casos, $2\kappa < |z|$ y $|z| < 2\kappa$. Resolviendo para z en ambos casos,

$$\begin{aligned} z_1(x) &= -\frac{2\kappa}{\tanh \kappa(x - x_0)}, \quad \text{for } 2\kappa < |z_1|, \\ z_2(x) &= -2\kappa \tanh \kappa(x - x_0), \quad \text{for } |z_2| < 2\kappa. \end{aligned}$$

Ahora resolviendo (255), $z(x, t) = f(x - 4\tilde{\lambda}t) = f(x - 4\kappa^2t)$, obtenemos

$$(256) \quad \begin{aligned} z_1(x, t) &= -\frac{2\kappa}{\tanh \kappa(x - 4\kappa^2t - x_0)}, \quad \text{for } 2\kappa < |z_1|, \\ z_2(x, t) &= -2\kappa \tanh \kappa(x - 4\kappa^2t - x_0), \quad \text{for } |z_2| < 2\kappa. \end{aligned}$$

Puesto que $\psi_2(x, t) = \partial_x z_2$, entonces

$$(257) \quad u(x, t) = \psi_2(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - 4\kappa^2t - x_0)$$

es la solución de 1-soliton de la ecuación de KdV.

Podemos construir soluciones más elaboradas, tales como una solución de 2-soliton o de N -soliton, y podemos usar también el teorema de permutación para encontrar de una forma un poco más fácil soluciones de N -soliton. Podemos ver detalles del teorema de permutación en [24] o en [36].

9.8. Tarea.

TAREA 9.1. Verifique que $u(x, y) = x^2 - y^2$ es solución de la ecuación de Laplace. Usando las condiciones de Cauchy-Riemann, encuentre la solución $v(x, y) = 2xy$.

TAREA 9.2. Compruebe que $u(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy^2 + 3x^2y$, resuelve la ecuación de Laplace. Encuentre una segunda solución $v(x, y)$ usando las condiciones de Cauchy-Riemann.

TAREA 9.3. Considere cualquier solución polinomial de grado n de la ecuación de Laplace en 2 dimensiones, $u(x, y)$. Encuentre una segunda solución $v(x, y)$ usando las condiciones de Cauchy-Riemann.

TAREA 9.4. Por cálculo directo, verifique que si $u(x, y)$ satisface la ecuación de sine-Gordon (223), entonces $v(x, y)$ dada por (224), también la satisface.

TAREA 9.5. Dado que $u(x, y) \equiv 0$ es solución de la ecuación de sine-Gordon (223), encuentre una segunda solución usando las transformaciones de Bäcklund (224).

TAREA 9.6. Verifique por cálculo directo, que si $v(x, t)$ satisface la ecuación de onda en coordenadas de curvas características, ecuación (227), entonces $u(x, t)$ dada por la solución de la transformación de Bäcklund (226), satisface la ecuación de Liouville (225).

TAREA 9.7. Considere la función $v(x, y) = F(x) + G(y)$, solución de la ecuación de onda en coordenadas de curvas características, ecuación (227). Encuentre una solución de la ecuación de Liouville (225).

TAREA 9.8. Considere la solución de D'Alambert (10) de la ecuación de onda en coordenadas de laboratorio (1). Encuentre una solución a la ecuación de Liouville en coordenadas de laboratorio:

$$u_{tt} - u_{XX} = e^u.$$

Para ello, use el cambio de variables (7) y proceda usando la transformación de Bäcklund para la ecuación de Liouville en coordenadas de las características (225).

TAREA 9.9.

1. Deduzca la ecuación (230).
2. Deduzca la ecuación (231).

TAREA 9.10. Usando las indicaciones de la sección 9.4, deducir a ecuación (232).

TAREA 9.11.

1. Deducir φ , dada como en (234), solución de la ecuación de Ricatti (233).
2. Verificar por cálculo directo que φ es, efectivamente, solución de la ecuación de Ricatti (233).

TAREA 9.12. Encuentre las condiciones sobre $P(x), Q(x), R(x)$ y $S(x)$ para que $\varphi(x)$ dada en (235), sea solución de la ecuación de Ricatti (233).

TAREA 9.13. Verificar que φ dada en (236) es solución de la ecuación de Ricatti.

TAREA 9.14. Derive la ecuación (237) y, posteriormente, encuentre a y b que la transforme en la ecuación de Schrödinger.

TAREA 9.15. Realice todos los detalles del ejemplo 9.6.I para obtener la condición inicial del 1-soliton.

TAREA 9.16. Repita el procedimiento, comenzando con $u_{old} = -2\text{sech}^2x$, para obtener la condición inicial del 2-soliton.

TAREA 9.17. Realice todos los detalles del ejemplo 9.7.I.

TAREA 9.18. Encuentre otra solución, $\psi_1(x, t) = \partial_x z_1$, de KdV usando la ecuación (256). ¿A qué corresponde esta solución?

TAREA 9.19. Partiendo de la solución 1-soliton de KdV, ecuación (257), encuentre la solución 2-soliton.

AGRADECIMIENTOS. El autor desea agradecer a los árbitros anónimos cuya revisión y comentarios mejoraron la presentación de este trabajo. También agradecemos a los lectores, y en particular a los estudiantes, que utilizaron versiones preliminares de estas notas y cuyos valiosos comentarios ayudaron a mejorar las mismas. De igual forma, a la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco. Expreso mi más grato agradecimiento al Profesor Roberto Quezada Batalla por la invitación al proyecto del CONAHCYT y por consiguiente al CONAHCYT (proyecto CF2019-684340). Agradecimiento especial a *Carlos Iván Ávila Joachin* y *Daniela Yuliana Juárez Estrada*, por su apoyo en la elaboración de los dibujos y gráficas que aparecen en esta notas.

REFERENCIAS

- [1] M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell and H. Segur, *The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems*. Studies in Applied Mathematics. 53 249-315. 1974
- [2] M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell and H. Segur, *Method of Solution for the Sine-Gordon Equation*. Phys. Rev. Lett. 30. 1262-1264. 1973.
- [3] M. Ablowitz and H. Segur Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM, Philadelphia, 1981.
- [4] M. Ablowitz, B. Prinari, and A.D. Trubatch. Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger systems. Cambridge University Press. 2004.
- [5] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, Introduction to Classical Integrable systems. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press. 53 2007.
- [6] R. Courant & D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics. Vol. I. Wiley Classics Library. Wiley Interscience. 1953.
- [7] P.A.M. Dirac. *The Quantum Theory of the Electron*. (Part I.) Proceedings of the Real Society of London. Series A. (Papers of Mathematical and Physical Character.) Vol. **117**. No. 778. 610-624. Feb. 1, 1928.
- [8] P.A.M. Dirac. *The Quantum Theory of the Electron*. (Part II.) Proceedings of the Real Society of London. Series A. (Papers of Mathematical and Physical Character.) Vol. **118**. No. 779. 351-361. Mar. 1, 1928.
- [9] P.A.M. Dirac. The Principles of Quantum Mechanics. Cambridge University Press. Cambridge Texts in Applied Mathematics. 1989.
- [10] P.G. Drazin and R.S. Johnson. Solitons: an introduction. Cambridge University Press. Cambridge Texts in Applied Mathematics. 1989.
- [11] N.M. Ercolani. Introduction to Linear and Nonlinear Waves. Class notes.
- [12] de Fari, E. & de Melo, W. Mathematical Aspects of Quantum Field Theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2010.
- [13] R.P. Feynman, R.B. Leighton & M. Sands. The Feynman Lectures on Physics. Addison-Wesley Publishing Company. Vols. I, II. III. 1963.
- [14] H. Flaschka. Notes on Soliton theory. Class notes.
- [15] C. Gardner, J. Greene, M. Kruskal and R. Miura, *A Method for Solving the Korteweg-DeVries Equation*. Phys. Rev. Letters, 19 1095-1097. 1967.
- [16] Gel'fand, I. M. & B. M. Levitan. textitOn the determination of a differential equation from its spectral function. American Mathematical Translations (2). 1: 253-304. 1951.
- [17] Gordon, C & Webb, D. *You can't hear the shape of a drum*, American Scientist, 84. 46-55. January/February 1996.
- [18] Gordon, C.; Webb, D. & Wolpert, S. *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Inventiones Mathematicae, 110 (1): 1-22, 1992.
- [19] R. Haberman, Elementary Applied Partial Differential Equations: with Fourier series and Boundary Value problems. 2nd edition. Prentice-Hall, 1987.
- [20] M. Kac.. *Can One Hear the Shape of a Drum?*. American Mathematical Monthly. 73. no. 4, part 2. 1-23. April 1966.
- [21] A. Kasman. Glimpses of Soliton Theory. American Mathematical Society. Student Mathematical Library, vol. 54. 2010.
- [22] J. Kevorkian & J.D. Cole. Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. Springer. 1996.

- [23] Korteweg, D. J.; de Vries, G. *On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves*, Philosophical Magazine, **39** (240): 422-443. 1895.
- [24] G.L. Lamb, Jr. *Elements of soliton theory*. John Wiley & Sons. 1980.
- [25] L.D. Landau & E.M. Lifshitz *Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory.) Course of Theoretical Physics Vol. 3*. Elsevier Science. 2003.
- [26] P. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolutions and solitary waves*. Communications on Pure and Applied Mathematics. XXI. 467-490. 1968.
- [27] P. Lax, *Periodic solutions of the KdV equation*. Communications on Pure and Applied Mathematics. XXVIII. 141-188. 1975.
- [28] P. Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for the industrial and Applied Mathematics, 1973.
- [29] N.N. Levedev. *Special functions and their applications*. Dover Books. 1965.
- [30] R.M.M. Mattheij, S.W. Rienstra and J.H.M. ten Thijs Boonkamp, *Partial Differential Equations: Modeling, Analysis, Computation*. Monographs on Mathematical Modeling and Computation. Society for the Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005.
- [31] P. D. Miller. *Applied Asymptotic Analysis*. Graduate Studies in Mathematics. Volume 75. American Mathematical Society (AMS). 2005.
- [32] R.M. Miura, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation*, J. Math. Phys. 9, 1202-1204. 1968.
- [33] Nagle, Saff &, Snider. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. 6th Edition. Addison-Wesley. 2012.
- [34] A.C. Newell. *Solitons in Mathematics and Physics*. Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for the Industrial and Applied Mathematics (SIAM). 1985.
- [35] S. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii & V.E. Zakarov. *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. Consultants Bureau, New York. 1984.
- [36] C. Rogers & W. K. Schief. *Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*. Cambridge University Press. 2002.
- [37] A.S. Scott. *Nonlinear Science: Emergence, Dynamics of Coherent Structures and Solitons*. Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics. Oxford University Press. 2003.
- [38] A.S. Scott. *The development of nonlinear Science*. Rivista del Nuovo Cimento, vol. 27, Issue 10, 1-115. 2004.
- [39] M. Toda. *Nonlinear Waves and Solitons*. Mathematics and its Applications Kluwer Academic Publishers. 1983.
- [40] M. Toda, *Vibration of a Chain with Nonlinear Interaction*. Journal of the Physics Society of Japan. 22, 1967.
- [41] M. Toda, *Nonlinear waves and Solitons*. Mathematics and its applications. (Japanese Series), KTK Scientific Publishers, Tokyo, 1989.
- [42] M. Toda, *Wave Propagation in Anharmonic Lattices*. Journal of the Physics Society of Japan. 23, 1967.
- [43] G.B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. John-Wiley and Sons, Inc. 1974.
- [44] J. Yang. *Nonlinear waves: in Integrable and Nonintegrable Systems*. Monographs on Mathematical Modeling and Computation. Society for the Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2010.

Nombre del autor: Jesús Adrián Espínola Rocha

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Azcapotzalco,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Ciencias Básicas.

Av. San Pablo 180, Col. Reynosa-Tamaulipas

Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200 CDMX, México

e-mail: jaer@azc.uam.mx