MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.15, No.1, páginas 313-317.
Recibido 01-08-2023. Aceptado 01-08-2024.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v15n1/delaml

COLORACIONES DISTINGUIDAS EN GRÁFICAS

DIEGO GONZÁLEZ-MORENO, EMILIO YEDIDIA LICEA MESINO, LUCERO LIZETH MACHORRO FIERRO, AMANDA MONTEJANO CANTORAL, MARCOS ESAÚ NOLASCO SALGADO Y LETICIA RAMÍREZ ESPINOZA

Resumen. Dada una gráfica G, una coloración distinguida de G es una coloración de los vértices de la gráfica que rompe todas las simetrías de ésta. El mínimo número de colores necesarios en una coloración distinguida de G se conoce como el número distinguido de G. En este trabajo estudiamos las coloraciones distinguidas de la unión disjunta de una gráfica G, y damos el número distinguido de ésta unión en términos del número distinguido de G. Como corolario obtenemos el número distinguido del octaedro.

1. Introducción

La definición formal de las coloraciones distinguidas fue propuesta por Albertson y Collins [1]. Ellos se inspiraron en un acertijo matemático planteado por Rubin [5] en 1979, que dice lo siguiente:

> *Tienes un llavero con seis llaves iguales. ¿Cuál es el mínimo número de colores que necesitas para colorear las llaves de tal manera que puedas identificar cada una de ellas?*

Este acertijo se puede plantear en términos de teoría de las gráficas de la siguiente forma: considera el ciclo C_6, donde cada vértice representa una llave y dos vértices son adyacentes si las llaves correspondientes están juntas en el llavero. Buscamos una coloración de los vértices del ciclo de longitud 6, es decir, C_6 que nos permita identificar cada llave por su color y ubicación, en otras palabras, buscamos una coloración de los vértices que rompa todas las simetrías, haciendo que cada configuración de vértices (llaves) sea única. A una coloración que cumpla con estas características la llamaremos distinguida. En la figura 1 aparece una coloración distinguida de C_6 que resuelve el acertijo propuesto por Rubin.

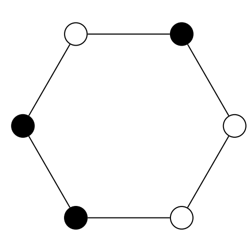

Figura 1. Una coloración distinguida de C_6 con 2 colores

Albertson y Collins generalizaron el acertijo de Rubin considerando coloraciones de los vértices de gráficas en general que distingan a cada vértice.

Una coloración distinguida de una gráfica G es una asignación de colores a los vértices de G que "rompe" todas las simetrías de G. Esto significa que cada vértice de G se vuelve distinguible de los demás de manera única. En términos de algebraicos de la teoría de las gráficas, esto quiere decir que el único automorfismo que mantiene la

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C15, 20F65.

Palabras clave. Gráficas, Coloraciones distinguidas, Automorfismos.

coloración es el automorfismo trivial de la gráfica, donde cada vértice se mapea a sí mismo.

En este trabajo presentamos cotas para el número distinguido de la unión disjunta de una gráfica, mostrando que la cota se alcanza cuando G es la gráfica completa. También estudiamos el caso en el que G es el ciclo de longitud 4. Estos resultados fueron obtenidos durante el quinto Taller de Otoño Metropolitano, realizado en el Mineral del Chico, Hidalgo, en 2023.

2. Definiciones básicas

En esta sección presentamos definiciones necesarias para estudiar las coloraciones distinguidas. En este trabajo solo consideramos gráficas simples, es decir, gráficas sin lazos ni aristas múltiples. Para las definiciones y conceptos que no aparecen aquí nos referimos al libro de Chartrand, Lesniak y Zhang [3].

Un **automorfismo de una gráfica** G es una permutación de los vértices de G, es decir, una función biyectiva $\pi : V(G) \longrightarrow V(G)$ tal que para cualquier par de vértices $u, v \in V(G)$, tenemos que $uv \in E$ si y solo si $\pi(u)\pi(v) \in E(G)$.

Los automorfismos de una gráfica forman un grupo bajo la operación de composición de funciones, conocido como el **grupo de automorfismos** de la gráfica y denotado por $Aut(G)$. Este grupo captura la información de todas las permutaciones que dejan la estructura de la gráfica invariante, es decir, las simetrías de la gráfica.

Una **k-coloración** de una gráfica G es una función $\Gamma : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$. Considera una gráfica con los vértices coloreados, es decir, una pareja (G, Γ). Sea π una permutación de $V(G)$. Decimos que π es un **automorfismo coloreado** de la pareja (G, Γ) si π cumple las siguientes condiciones:

1) $uv \in E(G)$ si y solo si $\pi(u)\pi(v) \in E(G)$ (π es un automorfismo).
2) Para todo $v \in V(G)$ se cumple $\Gamma(v) = \Gamma(\pi(v))$.

Observa que los autormorfismos coloreados son aquellos que preservan la coloración.

Dada una gráfica G, utilizamos $S_{V(G)}$ para denotar al conjunto de todas las permutaciones de $V(G)$ y $Aut(G, \Gamma)$ para el conjunto de los automorfismos coloreados de G. La siguiente observación es inmediata.

Observación 1. Si G es una gráfica y Γ una coloración, entonces

- $Aut(G, \Gamma) \leq Aut(G)$,
- $Aut(G, \Gamma) = Aut(\overline{G}, \Gamma)$.

Con estos elementos podemos dar la definición formal de coloración distinguida de una gráfica.

Definición 1. Sea G una gráfica y Γ una k-coloración de G, decimos que Γ es una **coloración distinguida** si $Aut(G, \Gamma) = \{(1)\}$, donde (1) es el automorfismo trivial-

Observa que si Γ es la coloración que asigna a cada vértice un color diferente, entonces Γ es una coloración distinguida. Entonces, se define el **número distinguido** de G como:

$$D(G) = \text{mín}\{k \in \mathbb{Z} : \text{ existe una } k\text{-coloración distinguida}\}.$$

Además, como $Aut(G) = Aut(\overline{G})$, se sigue que $D(G) = D(\overline{G})$, donde $\overline{G}$ es el complemento de G.

3. Resultados

En esta sección presentamos los resultados obtenidos durante la semana de trabajo en el TOMMAD 23. Para esto es necesario presentar una definición más.

Definición 2. Sea G una gráfica, definimos la gráfica kG como la gráfica que se obtiene de la unión disjunta de k copias de G.

En el siguiente teorema presentamos una cota superior para el número distinguido de esta familia de gráficas.

Teorema 3. *Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ y G un gráfica con $D(G) = 2$, entonces*

$$D(kG) \leq \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2} \right\rceil,$$

y la igualdad se alcanza si $G = K_2$.

Demostración. Dado $k \in \mathbb{Z}^+$, definimos $d = \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2} \right\rceil$. Observamos que $\binom{d}{2} \geq k$, pues

$$\begin{aligned} \binom{d}{2} = \frac{d(d-1)}{2} \geq k \quad &\Longleftrightarrow \quad d^2 - d \geq 2k \\ &\Longleftrightarrow \quad d^2 - d - 2k \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad d \geq \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2}. \end{aligned}$$

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ subconjuntos de 2 colores de $[d]$ tales que $X_i \neq X_j$, para todo $i \neq j$, Nota que esto se puede hacer pues $\binom{d}{2} \geq k$. Sea Γ la coloración $\Gamma : V(kG) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, d\}$ que colorea a la i-ésima copia G en kG de manera distinguida con los 2 colores de X_i (sabemos que lo podemos hacer porque $D(G) = 2$).

Como todo autormorfismo de kG o bien manda los vértices de una copia a otra o es un autormorfismo de G. Entonces por construción al estar cada copia coloreada distinguidamente y no haber dos copias coloreadas con la misma pareja de colores, el único autormorfismo coloreado de (kG, Γ) es la identidad. Por lo tanto,

$$D(kG) \leq \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2} \right\rceil.$$

Para ver que la desigualdad es justa cuando $G = K_2$, supongamos que $D(kK_2) = d$ y sea Γ una d-coloración distinguida de kK_2. Observa que en toda coloración distinguida de kK_2 todas las copias de K_2 reciben una pareja de colores distintos, es decir,

$$\binom{d}{2} = \frac{d(d-1)}{2} \geq k.$$

Por lo tanto,

$$0 \leq d(d-1) - 2k \Longleftrightarrow d \geq \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2} \right\rceil.$$

Por otro lado, como $D(K_2) = 2$, entonces por la primera parte de este teorema 3 tenemos

$$D(kK_2) = d \leq \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2} \right\rceil.$$

Juntando ambas desigualdades el resultado se sigue. $\square$

Se sabe que el número distinguido del tetraedro es 4 [4], y el del n-cubo Q_n es 3 cuando $n = 3$ y 2 si $n \geq 4$ [2]. La familia de los octaedros n-dimensionales, denotada por O_n, se define como el complemento de n copias de K_2, es decir, $O_n = \overline{nK_2}$. Utilizando el teorema 3 y la observación 1 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4. *Sea $n \geq 2$ un entero. Entonces, el número distingido del octaedro n-dimensional es*

$$D(O_n) = \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}.$$

El siguiente teorema generaliza al teorema 3.

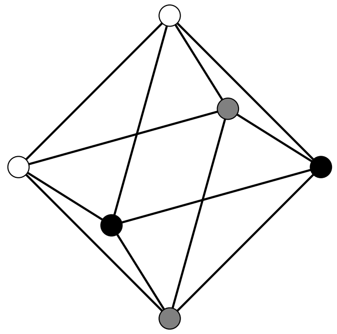

FIGURA 2. Una coloración distinguida del octaedro O_3 con 6 colores

TEOREMA 5. *Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ y G una gráfica con $D(G) = r$, entonces*

$$D(kG) \leq \text{mín}\{d \in \mathbb{Z} : \binom{d}{r} \geq k\}.$$

Demostración. Sea d el mínimo entero tal que $\binom{d}{r} \geq k$, donde k es el número de copias de G. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_k$ subconjuntos de r colores tales que $X_i \neq X_j$, para todo $i \neq j$. Sea Γ la coloración que asigna a la i-ésima copia de kG los r colores de X_i de forma distinguida (sabemos que lo podemos hacer porque $D(G) = r$). Observa que Γ es una coloración distinguida de kG que utiliza d colores. Por lo tanto,

$$D(kG) \leq \text{mín}\{d \in \mathbb{Z} : \binom{d}{r} \geq k\}.$$

□

TEOREMA 6. *Sean $r, k \in \mathbb{Z}^+$, entonces*

$$D(kK_r) = \text{mín}\{d \in \mathbb{Z} : \binom{d}{r} \geq k\}.$$

Demostración. Sea $D(kK_r) = d'$ y sea d el menor entero tal que $\binom{d}{2} \geq k$. Observa que en toda coloración distinguida de kK_r, cada copia de K_r recibe r colores distintos, ya que si dos copias reciben los mismos r colores, existe un automorfismo no trivial que manda una copia en la otra. Por lo tanto,

$$\binom{d'}{r} \geq k,$$

que implica $d \leq d'$.

Por otro lado, el teorema 5, implica que

$$d' = D(kK_r) \leq \text{mín}\{d \in \mathbb{Z} : \binom{d}{r} \geq k\} = d.$$

Por lo tanto, $d = d'$. □

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a todas las instituciones que apoyaron la organización del TOMMAD 2023. Particularmente a la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de las unidades Cuajimalpa e Iztapalapa, al proyecto CONAHCyT CB-47510664 y al árbitro anónimo.

REFERENCIAS

[1] Albertson, M. O., K.L. Collins, K. L. *Symmetry Breaking in Graphs*, Electronic Journal of Combinatorics, vol. 3, no. 1, R18, 1996. doi:10.37236/1242.
[2] Chan, M. *The distinguishing number of the augmented cube and hypercube powers*, Discrete Mathematics, vol. 308, no. 11, pp. 2330-2336, 2008. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.09.056
[3] Chartrand, G., L. Lesniak, L., Zhang, P. *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall/CRC, 6th ed., Boca Raton, FL, 2016.

[4] Pilśniak, M., Tucker, T., *Distinguishing index of maps*, European Journal of Combinatorics, vol. 84 2020. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2019.103034

[5] Rubin, F. Problem 729: The Blind Man's Keys, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 11, p. 128, 1979. Solution in vol. 12, 1980. As cited by Albertson & Collins (1996).

Diego González-Moreno
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: `dgonzalez@cua.uam.mx`

Emilio Yedidia Licea Mesino
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: `emilioyedidia@gmail.com`

Lucero Lizeth Machorro Fierro
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: `lizethmachorro20@gmail.com`

Amanda Montejano Cantoral
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias,
Unidad Multidisciplinaria de Docencia e Investigación de Juriquilla.
Campus UNAM 3001, C.P. 76230 Juriquilla, Querétaro, México
e-mail: `amandamontejano@ciencias.unam.mx`

Marcos Esaú Nolasco Salgado
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: `marcos.nolasco@cua.uam.mx`

Leticia Ramírez Espinoza
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: `leticia.ramirez@cua.uam.mx`