

COLORACIONES ROBUSTAS DE GRÁFICAS

GABRIELA J. BLANCO RODRÍGUEZ, KAREN MIRANDA, MIKA OLSEN, AXEL PRESTEGUI RAMOS Y NADIA VÁSQUEZ

RESUMEN. Las coloraciones son fundamentales para resolver diversos problemas y una coloración robusta busca mantener su validez incluso con modificaciones. El Problema de la Coloración Robusta (RCP) introduce el concepto de rigidez en la coloración de gráficas, definida como la suma de penalizaciones de las aristas en la gráfica complemento que conectan vértices del mismo color. El RCP busca minimizar la rigidez en una k -coloración de la gráfica, y tiene aplicaciones en planificación, asignación de tareas y diseño de sistemas tolerantes a fallos. Este trabajo analiza el RCP en varias familias de gráficas y propone una heurística útil para abordarlo.

1. INTRODUCCIÓN

Las coloraciones es uno de los tópicos más estudiados en la teoría de gráficas. Hay problemas interesantes tanto desde un punto de vista teórico como para problemas de aplicaciones donde se colorean vértices, aristas o ambos y se les puede asignar un sólo color, un conjunto o una lista de colores a cada vértice y/o arista, así como definir la coloración en términos de propiedades del conjunto de colores o en términos de propiedades o estructuras de la gráfica. Los problemas relacionados con coloraciones en gráficas reciben (y a lo largo de los últimos 200 años han recibido) mucha atención gracias a lo seductores que son los problemas teóricos, así como sus diversas aplicaciones en problemas reales tales como la asignación de recursos, la programación de tareas y la optimización de redes.

Los problemas de coloraciones iniciaron con el famoso problema de los 4 colores (ahora teorema de los 4 colores), que data del siglo XIX, conjeturado por un estudiante, Francis Guthrie en 1852. Sin embargo, la conjetura no se volvió importante hasta que Arthur Cayley la consideró en 1878. El problema de los 4 colores establece que toda gráfica plana¹ se puede colorear con 4 colores de modo que vértices que están unidos por una aristas tienen colores distintos, justo el tipo de coloración que se conoce como una coloración propia. Dice la leyenda que este problema esta inspirado en los conocimientos de los cartógrafos (las personas que dibujaban los mapas), un oficio de mucha importancia en ese entonces.

Las coloraciones en gráficas han mostrado ser una herramienta importante en la solución de problemas. En este contexto, es deseable que una coloración que resuelve algún problema siga siendo una buena solución aun si se hacen algunas modificaciones al problema. Una **coloración robusta** de una gráfica busca la k -coloración propia de G con la propiedad de que al hacer modificaciones a la coloración, ésta continúe siendo propia con una alta probabilidad y con ello, también una solución al problema. Se distingue del problema de una coloración propia mínima, principalmente, porque permite obtener soluciones donde no sólo es importante encontrar soluciones válidas, sino también que sean estables. En éste trabajo exploramos las coloraciones del **Problema de la Coloración Robusta** (RCP, por sus siglas en inglés), que introduce

Palabras clave. Coloraciones propias, rigidez, algoritmos genéticos.

¹Una gráfica es una gráfica dibujada en el plano de modo que las aristas no se intersectan.

la idea de rigidez en la coloración propia de gráficas. El objetivo de la RCP es encontrar una coloración propia con la mínima rigidez.

Dada una gráfica G y su gráfica complemento \overline{G}^2 , consideramos una función de penalización definida sobre las aristas de la gráfica complemento \overline{G} . La **rigidez** de una k -coloración de los vértices G se define como la suma de las penalizaciones de las aristas de \overline{G} que conectan vértices del mismo color. Así en el RCP se busca la k -coloración propia con la mínima rigidez posible.

La importancia del estudio del RCP está relacionado con la gran cantidad de aplicaciones en diversas áreas y, además, por ser una herramienta importante para mejorar la capacidad de adaptación y el rendimiento de sistemas complejos en entornos dinámicos y cambiantes como, por ejemplo,

- **Optimización de Redes de comunicación:** En redes de comunicación, en redes inalámbricas y en redes de sensores, es importante minimizar la interferencia entre canales. La coloración robusta permite asignar frecuencias o canales de manera que se minimice la penalización asociada con la interferencia, asegurando así una comunicación más eficiente y fiable. Este enfoque es particularmente útil en entornos dinámicos donde las conexiones pueden cambiar con el tiempo.
- **Planificación, Programación y Asignación de Tareas:** En sistemas de asignación de tareas, programación de turnos, horarios escolares, distribución de trabajos en centros de datos y organización de eventos es importante minimizar los conflictos y maximizar la eficiencia. La coloración robusta ayuda a asignar tareas a recursos limitados de manera que se minimicen las penalizaciones por conflictos o sobrecargas, mejorando el rendimiento general del sistema.
- **Diseño de Redes y Sistemas Tolerantes a Fallos:** En el diseño de redes y sistemas tolerantes a fallos, la robustez es un factor importante. La coloración robusta asegura que el sistema pueda seguir funcionando eficientemente incluso cuando se producen fallos o cambios en la red. Esto es crucial en aplicaciones críticas como las redes eléctricas, sistemas de transporte y redes de emergencia.
- **Optimización de Infraestructuras:** En la gestión y optimización de infraestructuras, y en las redes de distribución de energía o agua, la coloración robusta permite minimizar los costes y penalizaciones asociados con el mantenimiento y la redistribución de recursos. Esto ayuda a asegurar que la infraestructura opere de manera más eficiente y sostenible.
- **Seguridad en Redes de Computadoras:** En ciberseguridad, la coloración robusta puede utilizarse para minimizar las vulnerabilidades y maximizar la resistencia de las redes frente a ataques. Al asignar recursos de seguridad de manera óptima, se puede reducir la penalización asociada con brechas de seguridad y mejorar la protección general del sistema.

El RCP es un problema NP-completo³ por lo que se ha trabajado con diferentes heurísticas computacionales tales como: *Simulated Annealing*, *GRASP* (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure), *Scatter Search*, *Algoritmos Genéticos* y *Búsqueda Tabú*. Cada uno de estos algoritmos tiene sus fortalezas y se adapta a diferentes características del problema. La elección de la heurística adecuada depende de la naturaleza específica de la gráfica y de los requisitos del problema en cuestión y permite encontrar buenas soluciones de manera eficiente. Otro enfoque para abordar problemas

²La gráfica complemento de G tiene los mismos vértices que G y una arista es arista de \overline{G} si y solo si **no** es arista de G .

³Un problema de decisión (es decir solamente tiene como respuesta *Sí* o *No*) es del tipo NP-completo cuando la respuesta *Sí* puede ser demostrada mediante una respuesta en tiempo polinomial, la correctitud de cada solución puede ser igualmente verificada; y el problema se puede emplear para simular cualquier otro problema cuyas soluciones puedan ser rápidamente verificadas.

NP-completos, es estudiar las RCP en familias particulares, un enfoque que, hasta donde sabemos las y los autores, aún no se ha abordado.

En este trabajo vamos a trabajar tanto con heurísticas como con un enfoque teórico, determinando para una función de penalización dada, la mínima rigidez para diferentes familias de gráficas, tales como trayectorias, árboles, ciclos con una función de penalización constante y posteriormente ciclos con una función de penalización en términos de las distancias entre los vértices del ciclo. Finalmente, construimos un Algoritmo Genético Simple para aproximar la rigidez de una gráfica.

2. DEFINICIONES

Sea $G = (V, A)$ una gráfica donde V (o $V(G)$) es el conjunto de vértices y A (o $A(G)$) es el conjunto de aristas. El complemento de la gráfica $G = (V, A)$, denotado \overline{G} , tiene los mismos vértices que G y una arista e es una arista del complemento de G si y solo si no es una arista de G , es decir, $\overline{G} = (V, \overline{A})$. Decimos que dos vértices u, v son adyacentes si hay una arista que los une, es decir, $\{u, v\} \in A(G)$. Una **k -coloración propia** de los vértices de una gráfica es una asignación de k colores a los vértices de la gráfica tal que dos vértices adyacentes tienen color distinto. La **penalización** de las aristas de una gráfica es una asignación de números a las aristas de la gráfica. En este trabajo vamos a considerar solamente penalización del complemento de una gráfica. Dada una gráfica G con una k -coloración propia φ y una penalización ω sobre las aristas de \overline{G} , definimos la **rigidez** de la coloración φ , denotada $R(\varphi^k)$, como la suma de las penalizaciones de las aristas entre vértices del mismo color en \overline{G} . Si definimos el conjunto A de todas las aristas de \overline{G} que unen vértices del mismo color, $A = \{\{i, j\} \in A(\overline{G}) \mid \varphi^k(i) = \varphi^k(j)\}$, entonces

$$R(\varphi^k) = \sum_{\{i,j\} \in A} p_{ij}.$$

El problema de la coloración robusta, para un número k de colores dada, consiste en minimizar la rigidez considerando todas las k -coloraciones propias de la gráfica:

$$R(G^k) = \min_{\varphi^k} \{R(\varphi^k)\}.$$

Primero revisamos algunos ejemplos sencillos que luego generalizaremos en la sección 4. Vamos considerar una penalización constante igual a 3 en todos los ejemplos.

Si coloreamos propiamente una trayectoria de longitud 9 con dos colores, habrá 5 vértices de un color y 4 vértices del otro color y cualquier par de vértices del mismo color está conectado por una arista con penalización 3 en el complemento. Así la rigidez de una trayectoria de longitud 9 coloreada con dos colores y penalización constante 3 es (como se observa en la figura 1)

$$R(P_9^2) = 3 \binom{5}{2} + 3 \binom{4}{2} = 3(16) = 48.$$

Si coloreamos propiamente un ciclo de longitud 10 con dos colores, habrán 5 vértices de cada color y cualquier par de vértices del mismo color esta conectado por una arista de peso 3 en el complemento. Así la rigidez es de un ciclo de longitud 10 coloreado con dos colores y penalización constante 3 es (como se observa en la figura 2)

$$R(C_{10}^2) = 3 \binom{5}{2} + 3 \binom{5}{2} = 3(5)4 = 60.$$

A lo largo del trabajo vamos a considerar ciclos con diferentes funciones de penalización. Para simplificar las explicaciones vamos a definir la longitud de una arista. Si

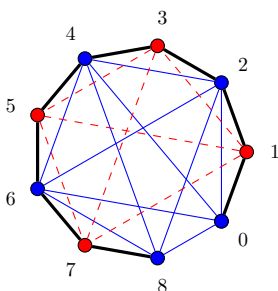


FIGURA 1. $R(P_9^2) = 10(3 + 6(3)) = 48$

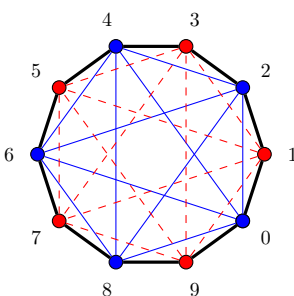


FIGURA 2. $R(C_{10}^2) = 10(3) + 10(3) = 3(5)4 = 60$

tenemos un ciclo con n vértices y la arista $\{v_i, v_j\}$ con $j > i$, decimos que la **longitud de la arista** es la distancia entre los vértices v_i y v_j sobre el ciclo, es decir,

$$\text{long}(\{v_i, v_j\}) = \min\{j - i, n - (j - i)\}.$$

Por ejemplo, en la figura 3, la longitud de la arista $\{2, 6\}$ es 4, mientras que la longitud de la arista $\{1, 7\}$ es 3.

3. CICLOS IMPARES CON PENALIZACIÓN CONSTANTE

Si tenemos un ciclo de longitud impar, necesitamos 3 colores para colorear los vértices. En la figura 3 podemos ver dos coloraciones distintas del ciclo C_9 . En la figura 3 de

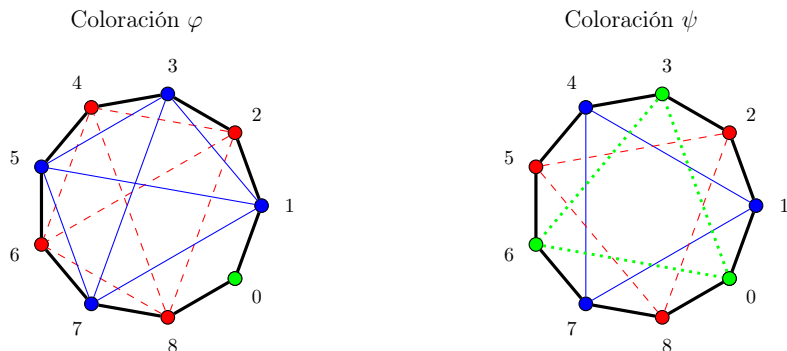


FIGURA 3. Dos coloraciones de C_9 con rigidez distinta

la izquierda, la coloración φ tiene un color asignado a un solo vértice $\{0\}$ y los otros

dos colores están asignados a cuatro vértices cada uno $\{1, 3, 5, 7\}$ y $\{2, 4, 6, 8\}$. Esta coloración tiene rigidez $R(\varphi^3) = 6 + 6 = 12$. En la figura 3 de la derecha, en la coloración ψ cada color está asignado a tres vértices $\{0, 3, 6\}$, $\{1, 4, 7\}$ y $\{2, 5, 8\}$ por lo que tiene rigidez $R(\psi^3) = 3 + 3 + 3 = 9$. Es decir, la segunda coloración es mejor que la primera ya que tiene rigidez menor. Con estos dos ejemplos podemos concluir que $R(C_9) \leq 9$. Para poder probar la igualdad necesitamos probar que no hay ninguna coloración de C_9 con rigidez menor a 9.

Si la penalización es constante, necesitamos minimizar el número de aristas entre vértices del mismo color y este objetivo se alcanza cuando la cardinalidad de los conjuntos de vértices del mismo color son lo más balanceados posible. Decimos que un conjunto U_1, U_2, \dots, U_n de conjuntos es **balanceado** si para cualquier par de conjuntos U_i, U_j se tiene que

$$||U_i| - |U_j|| \leq 1.$$

El siguiente resultado determina la rigidez de ciclos de longitud impar con penalización constante.

TEOREMA 1. *Sea G un ciclo de longitud impar con penalización constante ℓ . Entonces*

$$R(C_n^3) = \begin{cases} \ell^{\frac{k(3k-3)}{2}} & \text{si } n = 3k; \\ \ell^{\frac{k(3k-1)}{2}} & \text{si } n = 3k + 1; \\ \ell^{\frac{k(3k+1)}{2}} & \text{si } n = 3k + 2. \end{cases}$$

Demostración. Consideramos un ciclo de longitud impar $n = 3k + r$, donde $0 \leq r \leq 2$, coloreado con 3 colores. Vamos a considerar por separado los siguientes 3 casos: $n = 3k$, $n = 3k + 1$ y $n = 3k + 2$.

Caso $n = 3k$

Cuando $n = 3k$ podemos encontrar 3 conjuntos con el mismo número de vértices en cada uno. Los conjuntos de vértices con el mismo color son $C_1 = \{1, 4, \dots, 3k - 2\}$, $C_2 = \{2, 5, \dots, 3k - 1\}$ y $C_3 = \{3, 6, \dots, 3k\}$. Cada conjunto tiene k vértices y entre los k vértices hay $\binom{k}{2}$ aristas con penalización ℓ , por lo que cada conjunto aporta $\ell \binom{k}{2}$. Así encontramos una coloración que nos proporciona una cota superior para la rigidez de un ciclo de longitud $3k$ y penalización constante ℓ y

$$R(C_{3k}^3) \leq 3\ell \binom{k}{2} \leq \ell^{\frac{k(3k-3)}{2}}.$$

Caso $n = 3k + 1$

Cuando $n = 3k + 1$ podemos encontrar 3 conjuntos balanceados tales que hay un conjunto con $k + 1$ vértices y dos conjuntos con k vértices. El conjunto con $k + 1$ vértices del mismo color es $C_1 = \{1, 4, \dots, 3k + 1\}$ y los conjuntos con k vértices del mismo color son $C_2 = \{2, 5, \dots, 3k - 1\}$ y $C_3 = \{3, 6, \dots, 3k\}$. El conjunto con $k + 1$ vértices tiene $\binom{k+1}{2}$ aristas con penalización ℓ , por lo que aporta $\ell \binom{k+1}{2}$ y cada conjunto con k vértices tiene $\binom{k}{2}$ aristas con penalización ℓ , por lo que cada conjunto aporta $\ell \binom{k}{2}$. Así encontramos una coloración que nos proporciona una cota superior para la rigidez de un ciclo de longitud $3k + 1$ y penalización constante ℓ y

$$R(C_{3k+1}^3) \leq \ell \binom{k+1}{2} + 2\ell \binom{k}{2} = \ell^{\frac{k(3k-1)}{2}}.$$

Caso $n = 3k + 2$

Cuando $n = 3k + 2$ podemos encontrar 3 conjuntos de colores balanceados tales que hay dos conjuntos con $k + 1$ vértices y un conjunto con k vértices. Los conjuntos con $k + 1$ vértices del mismo color son $C_1 = \{1, 4, \dots, 3k + 1\}$ y $C_2 = \{2, 5, \dots, 3k + 2\}$ y el conjunto con k vértices del mismo color es $C_3 = \{3, 6, \dots, 3k\}$. Cada conjunto con $k + 1$ vértices tiene $\binom{k+1}{2}$ aristas con penalización ℓ , por lo que cada conjunto aporta $\ell \binom{k+1}{2}$, el conjunto con k vértices tiene $\binom{k}{2}$ aristas con penalización ℓ , por lo que aporta

$\ell \binom{k}{2}$. Así encontramos una coloración que nos proporciona una cota superior para la rigidez de un ciclo de longitud $3k + 2$ y penalización constante ℓ y

$$R(C_{3k+2}^3) \leq 2\ell \binom{k+1}{2} + \ell \binom{k}{2} = \ell \frac{k(3k+1)}{2}.$$

Como la rigidez se minimiza cuando los conjuntos de colores son balanceados obtenemos en cada caso la igualdad. □

4. GRÁFICAS BIPARTITAS CON PENALIZACIÓN CONSTANTE

Las gráficas bipartitas es una familia de gráficas que contiene entre otras a las trayectorias, a los ciclos pares y a los árboles. Esta familia de gráficas tiene la característica que la coloración propia con dos colores es única (salvo la permutación de colores).

Observación 1. Si la coloración propia es única, la rigidez es única.

Observación 2. Sea G una gráfica bipartita con bipartición (U_1, U_2) , $|U_i| = n_i$ y una penalización constante ℓ . Si coloreamos propiamente los vértices de G con dos colores, entonces hay $\binom{n_1}{2}$ aristas de peso ℓ entre los vértices de U_1 y hay $\binom{n_2}{2}$ aristas de peso ℓ entre los vértices de U_2 . Por lo tanto

$$R(G^2) = \ell \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \ell \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}.$$

En particular, las trayectorias, los ciclos pares y los árboles son gráficas bipartitas con una 2-coloración propia única. Si la penalización es constante ℓ y coloreamos propiamente una trayectoria de longitud n con dos colores, habrán $\lceil n/2 \rceil$ vértices de un color y $\lfloor n/2 \rfloor$ del otro color y cualquier par de vértices del mismo color esta conectado por una arista de peso ℓ en el complemento. Así la rigidez es de una trayectoria de longitud n coloreado con dos colores y penalización constante ℓ es

$$R(P_n^2) = \ell \binom{\lceil n/2 \rceil}{2} + \ell \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{2} = \begin{cases} \ell m(m-1) & \text{si } n = 2m; \\ \ell m^2 & \text{si } n = 2m + 1. \end{cases}$$

Si la penalización es constante ℓ y coloreamos propiamente un ciclo de longitud $2n$ con dos colores, habrán n vértices de cada color y cualquier par de vértices del mismo color esta conectado por una arista de peso ℓ en el complemento. Así la rigidez es de un ciclo de longitud $2n$ coloreado con dos colores y penalización constante ℓ es

$$R(C_{2n}^2) = \ell \binom{n}{2} + \ell \binom{n}{2} = \ell n(n-1).$$

De la misma manera, si la penalización es constante ℓ y coloreamos propiamente con dos colores un árbol con n vértices, tendremos n_1 vértices de un color y n_2 vértices del otro color, con $n_1 + n_2 = n$. Como cualquier par de vértices del mismo color esta conectado por una arista de peso ℓ en el complemento, la rigidez de un árbol coloreado con dos colores, donde hay n_1 vértices de un color, n_2 vértices del otro color y penalización constante ℓ es

$$R(T^2) = \ell \binom{n_1}{2} + \ell \binom{n_2}{2} = \ell \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \ell \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}.$$

El siguiente resultado asegura que si n_1 y n_2 son enteros positivos, entonces existe un árbol con $n = n_1 + n_2$ vértices que realiza la rigidez $R(G^2) = \ell \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \ell \frac{n_2(n_2-1)}{2}$.

PROPOSICIÓN 2. Sea $n \geq 2$ un entero positivo. Para todo par de enteros positivos n_1 y n_2 tales que $n = n_1 + n_2$ existe un árbol T de orden n tal que si la penalización es constante ℓ , entonces

$$R(T^2) = \ell \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \ell \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}.$$

Demostración. Considera dos conjuntos independientes V_1 y V_2 de vértices con n_1 y n_2 vértices respectivamente, ver figura 4.

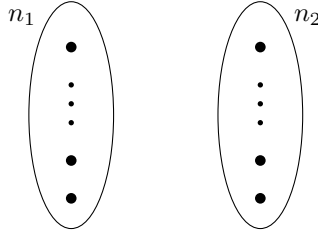


FIGURA 4. La partición de los vértices de un árbol T

Construye un árbol con la bipartición (V_1, V_2) , es decir, todas las aristas del árbol deben estar entre los dos conjuntos V_1 y V_2 y no debe haber aristas entre vértices que pertenecen al mismo conjunto. Claramente, la 2-coloración propia es única y por las observaciones 1 y 2,

$$R(T^2) = \ell \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \ell \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}.$$

Como $n = n_1 + n_2$ es una partición cualquiera, entonces para todo par de enteros positivos n_1 y n_2 tales que $n = n_1 + n_2$ existe un árbol con una 2-coloración que realiza tal rigidez. \square

El siguiente resultado establece el rango de rigidez de una gráfica bipartita para el cual no conocemos la bipartición y determina la rigidez exacta en caso de que conocemos la bipartición, generalizando los resultados obtenidos para la trayectoria, los ciclos pares y los árboles.

PROPOSICIÓN 3. Sea G una gráfica bipartita de orden n con función de penalización constante ℓ . Entonces

$$\ell \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1) + \lfloor n/2 \rfloor (\lceil n/2 \rceil - 1)}{2} \leq R(G) \leq \ell \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}.$$

Además, si la partición de vértices es (V_1, V_2) con $|V_1| = n_1$ y $|V_2| = n_2$, entonces

$$R(G^2) = \ell \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \ell \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}.$$

Demostración. Considera el conjunto de todas las gráficas bipartitas de orden n con función de penalización constante k . Las gráficas bipartitas que realizan la mínima rigidez son las gráficas balanceadas y las gráficas bipartitas que realizan la mayor rigidez son las estrellas. \square

5. CICLOS CON PENALIZACIÓN CONSTANTE SALVO UNA LONGITUD

Vamos a considerar una función de penalización que le asigna el valor 1 a todas las aristas del complemento salvo las aristas de longitud⁴ i . Formalmente esto significa que tenemos el ciclo C_n con los vértices etiquetados con los números $0, 1, 2, \dots, n - 1$ (\mathbb{Z}_n) tal que $\{i, i + 1\} \in A(C_n)$, para $0 \leq i \leq n - 2$, y además, $\{n - 1, 0\} \in A(C_n)$.

⁴La distancia entre los vértices de la arista sobre el ciclo.

Definimos la penalización del complemento de C_n como sigue: sea i un entero fijo con $2 \leq i \leq n/2$,

$$\omega'(\{u, v\}) = \begin{cases} i & \text{si } \text{long}(\{u, v\}) = i; \\ 1 & \text{si } \text{long}(\{u, v\}) \neq i. \end{cases}$$

Denotamos al ciclo C_n con penalización ω' por $C_{n,i}$. En la figura 5 se puede ver el ciclo $C_{n,2}$, es decir, un ciclo de longitud 7 donde las aristas del complemento tienen peso 1 (aristas punteadas) y las aristas entre vértices a distancia 2 del ciclo tienen peso 2 (aristas “rayadas”).

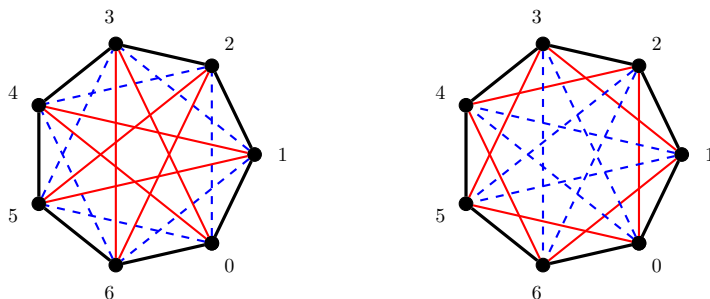


FIGURA 5. Las gráficas $C_{7,2}^3$ y $C_{7,3}^3$

Para entender la idea, vamos a revisar dos ejemplos donde coloreamos propiamente el ciclo de longitud 7 con 3 colores. Primero el ciclo de longitud 7 con las aristas de longitud 2 de peso 2 $C_{7,2}$ y luego el ciclo de longitud 7 con las aristas de longitud 3 de peso 3 $C_{7,3}$.

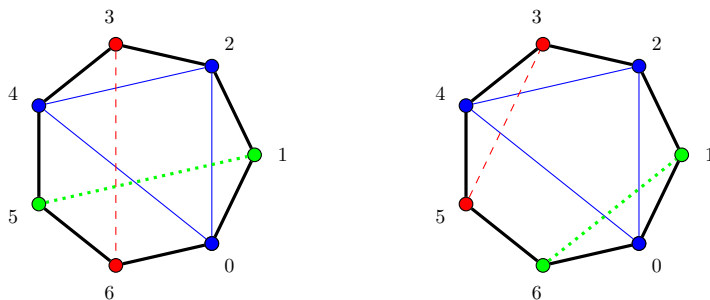


FIGURA 6. $R(C_{7,2}^3) = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7$, $R(C_{7,3}^3) = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 = 7$

En el caso del ciclo $C_{7,2}$ vamos a procurar que no haya aristas a distancia 2 con el mismo color. En el ciclo, los vértices adyacentes tienen colores distintos, y como tenemos 7 vértices y tres colores hay al menos 3 vértices del mismo color. No importa cómo acomodamos estos tres vértices, siempre utilizan dos aristas de longitud 2. En la figura 6 hay un ejemplo de una coloración que utiliza solamente dos aristas de longitud 2, los demás aristas tienen peso 1, por lo que esta coloración es la que tiene la rigidez menor y podemos concluir que

$$R(C_{7,2}^3) = 7.$$

En el caso del ciclo $C_{7,3}$ vamos a procurar que no haya aristas a distancia 3 con el mismo color. Igual que en el caso anterior, si tenemos 3 vértices del mismo color hay una arista de longitud 3. En la figura 6 hay un ejemplo de una coloración que utiliza solamente una arista de longitud 3, los demás aristas tienen peso 1, por lo que esta coloración es la que tiene la rigidez menor y podemos concluir que

$$R(C_{7,3}^3) = 7.$$

Claramente, el ciclo $C_{n,i}$ tiene una k -coloración balanceada que no usa aristas de longitud i , entonces $R(C_{n,i}^k) = R(C_n^k)$. El siguiente teorema determina la rigidez para cualquier ciclo impar $C_{n,2}$ según si n es múltiplo de 3 o no.

TEOREMA 4. *Sea $n \geq 5$ un entero impar. Considera el ciclo $C_{n,2}$ con penalización ω' . Entonces*

$$R(C_{n,2}^3) = \begin{cases} R(C_n^3) & \text{si } n = 3k; \\ R(C_n^3) + 2 & \text{si } n \neq 3k. \end{cases}$$

Demostración. Sea $C = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}v_0$ el ciclo $C_{n,2}$.

Si $n = 3k$, consideramos la siguiente 3-coloración propia que no utiliza las aristas de longitud 2: $C_1 = \{v_1, v_4, \dots, v_{3k-2}\}$, $C_2 = \{v_2, v_5, \dots, v_{3k-1}\}$ y $C_3 = \{v_0, v_3, \dots, v_{3k-3}\}$. En este caso la rigidez coincide con la rigidez de C_n^3 .

Si $n \neq 3k$, vamos primero a probar que en cualquier 3-coloración φ hay al menos una arista de longitud 2 (dos vértices a distancia dos del mismo color). Para llegar a una contradicción, suponemos que no hay vértices a distancia dos del mismo color. Sin pérdida de generalidad, $\varphi(v_0) = 0$. Entonces $\varphi(v_2) \neq 0$ y $\varphi(v_{n-2}) \neq 0$. Si $\varphi(v_2) = \varphi(v_{n-2})$ (ver figura 7 de la izquierda), entonces $\varphi(v_1) = \varphi(v_{n-1})$ lo cual contradice que no hay vértices a distancia dos del mismo color.

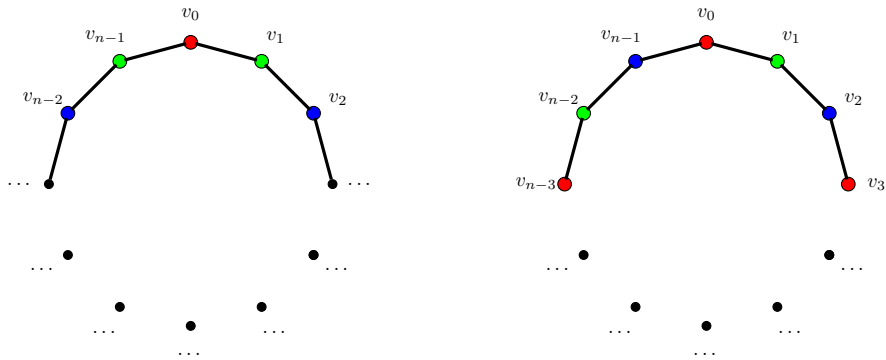


FIGURA 7. Hay al menos dos vértices del mismo color a distancia dos

Por lo tanto $\varphi(v_2) \neq \varphi(v_{n-2})$. Sin pérdida de generalidad, $\varphi(v_2) = 2$ y $\varphi(v_{n-2}) = 1$ (ver figura 7 de la derecha). Como la coloración es propia $\varphi(v_1) = 1$ y $\varphi(v_{n-1}) = 2$. Además, como no hay aristas del mismo color a distancia 2, $\varphi(v_{n-3}) = 0$, $\varphi(v_3) = 0$, siguiendo con esta idea, tendríamos que $\varphi(v_i) = 0$ si $i \equiv 0 \pmod 3$, $\varphi(v_i) = 1$ si $i \equiv 1 \pmod 3$ y $\varphi(v_i) = 2$ si $i \equiv 2 \pmod 3$, contradiciendo que $\varphi(v_{n-3}) = 0$ ya que $n \not\equiv 0 \pmod 3$.

Por lo tanto, cualquier 3-coloración usa al menos una arista de longitud 2 (dos vértices a distancia dos del mismo color).

Vamos, ahora, a probar que siempre hay al menos 2 aristas de longitud 2 (2 pares de vértices a distancia dos del mismo color). Supongamos, para llegar a una contradicción, que hay exactamente dos vértices a distancia dos del mismo color. Sin pérdida de generalidad, $\varphi(v_0) = 0$ y $\varphi(v_1) = \varphi(v_{n-1}) = 1$. De manera análoga al caso anterior y por la suposición de que solo hay una pareja de vértices del mismo color a distancia 2, $\varphi(v_2) = \varphi(v_{n-2}) = 2$, $\varphi(v_3) = \varphi(v_{n-3}) = 0$ y así sucesivamente. Si n es par (ver figura 8 de la izquierda), entonces $\varphi(v_{m-1}) = \varphi(v_{m+1})$ y los vértices v_{m-1} y v_{m+1} tienen el mismo color, lo cual contradice la suposición de que hay una sola pareja de vértices a distancia dos del mismo color.

Si n es impar (ver figura 8 de la derecha), entonces $\varphi(v_{m-1}) = \varphi(v_{m+2})$, ahora los vértices v_m y v_{m+1} no pueden tener el mismo color ya que son adyacentes, por lo que al menos uno de ellos debe tener el color de los vértices v_{m-1} y v_{m+2} . En cualquiera de los dos casos obtenemos otra pareja de vértices a distancia dos con el mismo color.

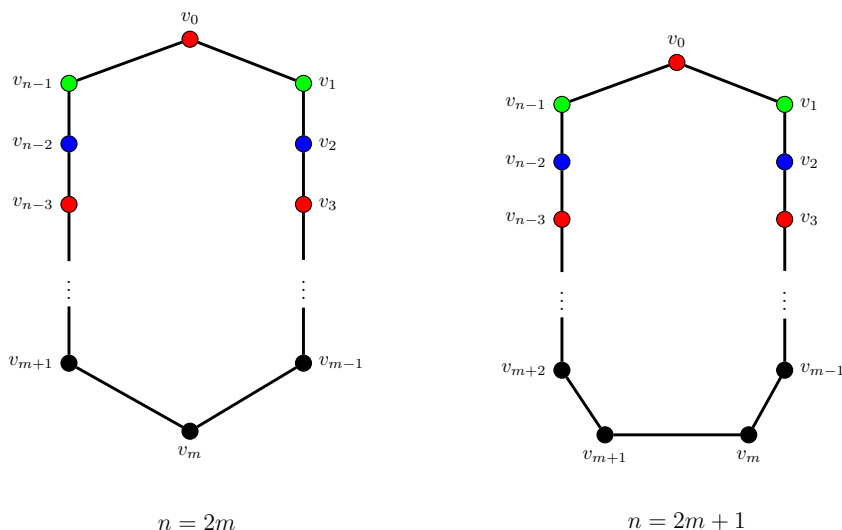


FIGURA 8. Exactamente dos vértices del mismo color a distancia 2

Entonces cualquier 3-coloración usa al menos dos aristas de longitud 2 (dos parejas de vértices a distancia 2 que tienen el mismo color). Las siguientes coloraciones usan exactamente dos aristas de longitud 2.

Si $n = 3k + 1$, consideramos la siguiente 3-coloración:

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 3l \text{ y } i \neq n - 1; \\ 1 & \text{si } i = 3l + 1 \text{ o } i = n - 1; \\ 2 & \text{si } i = 3l + 2. \end{cases}$$

Si $n = 3k + 2$, consideramos la siguiente 3-coloración:

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 3l; \\ 1 & \text{si } i = 3l + 1; \\ 2 & \text{si } i = 3l + 2. \end{cases}$$

Como la coloración utiliza exactamente dos aristas de longitud 2, entonces aumenta la rigidez en una unidad por cada arista y la rigidez es igual a $R(C_n^3) + 2$. \square

TEOREMA 5. *Sea n un entero impar. Considera el ciclo $C_{n,3}$ con penalización ω' . Si para algún entero impar k se tiene que $n \in \{9k, 9k + 2, 9k + 4\}$, entonces $R(C_{n,3}^3) = R(C_n^3)$.*

Demostración. Si para algún entero impar k se tiene que $n \in \{9k, 9k + 2, 9k + 4\}$, se puede construir una 3-coloración balanceada que no utiliza las aristas de longitud 3.

Primero observamos que en la sucesión de colores $S = (1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2)$ no hay dos entradas del mismo color a distancia exactamente tres. La idea en cada uno de los casos, es repetir esta sucesión de colores sobre el ciclo. La concatenación de sucesiones se denota con el símbolo \circ . Es fácil ver que al pegar dos de las sucesiones S , tampoco vamos a tener aristas de longitud 3 ya que $S \circ S = (1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2) \circ (1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2) = (1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2)$.

Caso $n = 9k$

Construimos la coloración φ_0 repitiendo la sucesión S de colores k veces. La coloración del ciclo $\mathcal{C}_{9k,3}$ es

$$S \circ S \circ \dots \circ S.$$

Como S se pega bien y es balanceado, entonces la coloración que obtenemos al repetir la sucesión S de colores k veces también lo es.

Caso $n = 9k + 2$

Construimos la coloración φ_2 repitiendo la sucesión S de colores k veces y al final pegamos con $(1, 2)$. La coloración del ciclo $\mathcal{C}_{9k+2,3}$ es

$$S \circ S \circ \dots \circ S \circ (1, 2) \circ S.$$

El pegado final es $S \circ (1, 2) \circ S = (1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2)$ no tiene aristas de longitud 3 y como S usa cada color exactamente 3 veces, esta nueva coloración usa los colores uno y dos $3k + 1$ veces y usa el color tres $3k$ veces, por lo que la coloración es balanceada.

Caso $n = 9k + 4$

Construimos la coloración propia φ_4 repitiendo la sucesión S de colores k veces y al final pegamos con $(1, 2, 3, 2)$. La coloración del ciclo $\mathcal{C}_{9k+4,3}$ es

$$S \circ S \circ \dots \circ S \circ (1, 2, 3, 2) \circ S.$$

El pegado final es $S \circ (1, 2, 3, 2) \circ S = (1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2)$ no tiene aristas de longitud 3 y como S usa cada color exactamente 3 veces, esta nueva coloración usa el color uno y el color tres exactamente $3k + 1$ veces y usa el color dos exactamente $3k + 2$ veces, por lo que la coloración es balanceada. \square

6. CICLOS CON PENALIZACIÓN SEGÚN LA LONGITUD DE ARISTA

Sea C_n un ciclo donde los vértices están etiquetados con \mathbb{Z}_n tales que $\{i, i+1\} \in A(C_n)$. Definimos la penalización ω del complemento de C_n como sigue: si $u - v = nk + i$, con $0 \leq i < n$, entonces $\omega(\{u, v\}) = i$. Denotamos el ciclo C_n con penalización ω por \mathbb{C}_n . El caso más sencillo es el ciclo de longitud 5, \mathbb{C}_5 , coloreado con 3 colores. No es difícil ver que habrá un color asignado a un solo vértice y los otros dos colores estarán asignados a dos vértices cada uno, y no importa cómo coloreamos los 5 vértices del ciclo, siempre habrá exactamente dos aristas en $\overline{\mathbb{C}_5}$ entre vértices del mismo color, cada uno con peso 2, por lo que $R(\mathbb{C}_5^2) = 4$. Una análisis similar en la coloración de \mathbb{C}_7 en la figura 9 lleva a que $R(\mathbb{C}_7^3) = 11$ y una revisión exhaustiva arroja que $R(\mathbb{C}_{11}^3) = 49$.

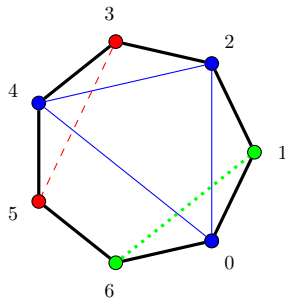


FIGURA 9. $R(\mathbb{C}_7^3) = 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 11$.

Antes de probar la cota superior para la rigidez de los ciclos impares con función de penalización ω , vamos a revisar el ejemplo de \mathbb{C}_{13} coloreado con 3 colores y con 4 colores. La idea principal es partir los vértices en conjuntos (colores) tal que los vértices en cada conjunto utilicen el menor número de aristas de longitud grande.

Recordamos que dos vértices adyacentes tienen que tener color distinto, y por eso no podemos tener vértices adyacentes en un mismo conjunto. En la figura 10, podemos ver dos coloraciones del ciclo de longitud 13. En la figura izquierda usamos 3 colores y esta coloración es un ejemplo del teorema 6, mientras que la figura derecha es un ejemplo del teorema 8 donde usamos 4 colores.

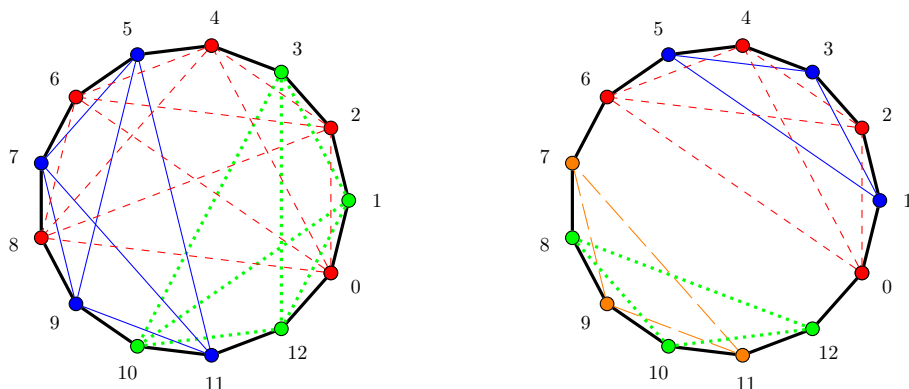


FIGURA 10. $R(\mathbb{C}_{13}^3) = 37 + 20 + 20 = 77$ y $R(\mathbb{C}_{13}^4) = 20 + 8 + 8 + 8 = 52$.

El siguiente resultado establece una cota superior para la rigidez de un ciclo de longitud impar con función de penalización ω .

TEOREMA 6. Sea $n \geq 9$ un entero impar. Si ω es la función de penalización, entonces la rigidez $R(\mathbb{C}_n^3)$ es menor que o igual a:

$$\begin{aligned} & 3(3k + (k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]) && \text{si } n = 3k; \\ & 3(3k + 1) + 2(k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]] + (k - 2)[2 + (k - 1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 3)]] && \text{si } n = 3k + 1; \\ & 3(3k + 2) + (k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]] + 2(k - 2)[2 + (k - 1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 3)]] && \text{si } n = 3k + 2. \end{aligned}$$

Demostración. Para establecer una cota superior de la rigidez del ciclo impar \mathbb{C}_n coloreado con 3 colores, vamos a definir una 3-coloración balanceada. Analizaremos por separado los 3 casos $n = 3k$, $n = 3k + 1$ y $n = 3k + 2$ y para facilitar las explicaciones, vamos a usar lenguaje de geometría.

Caso $n = 3k$

Consideramos la siguiente 3-coloración φ_0 del ciclo impar \mathbb{C}_{3k} : $C_1 = \{0, 2, \dots, 2k - 2\}$, $C_2 = \{2k, 2k + 2, \dots, n - 1, 1, \dots, k - 4, k - 2\}$ y $C_3 = \{k, k + 2, \dots, n - 2\}$. Los polígonos formados al colorear el ciclo de esta manera, procurando usar el mayor número de aristas de longitud 2, serán todos iguales, en donde para cada uno de ellos:

- La penalización del perímetro estará dado por $n = 3k$.
- Debido a que las diagonales internas de un polígono están dadas por su número de vértices menos 3 y dado que las diagonales incrementarán su salto de 2 en 2 al “alejarse” del vértice inicial, se puede expresar el valor total de la longitud de sus aristas de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{k-3} (2 + 2i) + \sum_{i=1}^{k-3} \sum_{j=1}^i (2 + 2j).$$

Lo cual, al simplificar para quedar en función de k , nos lleva a:

$$\sum_{i=1}^{k-3} (2 + 2i) + \sum_{i=1}^{k-3} \sum_{j=1}^i (2 + 2j) = 2(k - 3) + 2 \sum_{i=1}^{k-3} i + \sum_{i=1}^{k-3} \left(2i + 2 \sum_{j=1}^i j \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(k-3) + 2 \frac{(k-3)((k-3)+1)}{2} + \sum_{i=1}^{k-3} \left(2i + 2 \frac{i(i+1)}{2} \right) \\
 &= 2(k-3) + (k-3)(k-2) + 3 \sum_{i=1}^{k-3} i + \sum_{i=1}^{k-3} i^2 \\
 &= 2(k-3) + (k-3)(k-2) + 3 \frac{(k-3)((k-3)+1)}{2} + \frac{(k-3)((k-3)+1)(2(k-3)+1)}{6} \\
 &= (k-3) \left[2 + (k-2) \left[\frac{5}{2} + (2k-5)/6 \right] \right].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la penalización total de cada uno de los 3 polígonos formados es:

$$(1) \quad 3k + (k-3) \left[2 + (k-2) \left[\frac{5}{2} + (2k-5)/6 \right] \right].$$

Dado que la penalización de los tres polígonos son iguales, basta multiplicar la ecuación (1) por 3, y la rigidez de la 3-coloración φ_0 del ciclo impar \mathbb{C}_{3k} es

$$R(\varphi_0^3) = 3(3k + (k-3)[2 + (k-2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k-5)]).$$

Caso $n = 3k + 1$

Consideramos la siguiente 3-coloración φ_1 del ciclo impar \mathbb{C}_{3k+1} : $C_1 = \{0, 2, \dots, 2k\}$, $C_2 = \{2k+2, 2k+4, \dots, n-1, 1, 3, \dots, k-1\}$ y $C_3 = \{k+1, k+3, \dots, n-2\}$. Los polígonos formados al colorear el ciclo de esta manera, procurando usar el mayor número de saltos de dos, serán un polígono de $k+1$ vértices y dos polígonos de k vértices, en donde:

- El perímetro de cada uno estará dado por $n = 3k + 1$, siempre que $k \geq 2$.
- Para la figura de $k+1$ vértices, las diagonales internas sumarán un peso de

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{k-2} (2+2i) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=1}^i (2+2j) = (k-2)[2 + (k-1)[\frac{5}{2} + (2k-3)/6]].$$

- Mientras que para las figuras de k vértices, las diagonales internas sumarán un peso de:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{k-3} (2+2i) + \sum_{i=1}^{k-3} \sum_{j=1}^i (2+2j) = (k-3)[2 + (k-2)[\frac{5}{2} + (2k-5)/6]].$$

Dado que la penalización de los dos polígonos con k vértices son iguales, para obtener la rigidez de la 3-coloración φ_1 del ciclo impar \mathbb{C}_{3k+1} , basta multiplicar la ecuación (3) por 2 y sumarle la ecuación (2).

$$R(\varphi_1^3) = 3(3k+1) + 2(k-3)[2 + (k-2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k-5)]] + (k-2)[2 + (k-1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k-3)]].$$

Caso $n = 3k + 2$

Consideramos la siguiente 3-coloración φ_2 del ciclo impar \mathbb{C}_{3k+2} : $C_1 = \{0, 2, \dots, 2k\}$, $C_2 = \{2k+2, 2k+4, \dots, n-1, 1, 3, \dots, k\}$ y $C_3 = \{k+2, k+4, \dots, n-2\}$. Los polígonos formados al colorear el ciclo de manera equilibrada, procurando usar el mayor número de los saltos de dos, serán dos polígonos de $k+1$ vértices y un polígono de k vértices, en donde:

- El perímetro de cada uno estará dado por $n = 3k + 2$, siempre que $k \geq 3$
- Para la figura de k vértices, las diagonales internas sumarán un peso de:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{k-3} (2+2i) + \sum_{i=1}^{k-3} \sum_{j=1}^i (2+2j) = (k-3)[2 + (k-2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k-5)]].$$

- Mientras que para las figuras de $k + 1$ vértices, las diagonales internas sumarán un peso de

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{k-2} (2 + 2i) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=1}^i (2 + 2j) = (k - 2)[2 + (k - 1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 3)]].$$

Dado que la penalización de los dos polígonos con $k + 1$ vértices son iguales, para obtener la rigidez de la 3-coloración φ_2 del ciclo impar \mathbb{C}_{3k+2} , basta multiplicar la ecuación (5) por 2 y sumarle la ecuación (4).

$$R(\varphi_2^3) = 3(3k + 1) + (k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]] + 2(k - 2)[2 + (k - 1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 3)]].$$

En cada caso encontramos la rigidez de la 3-coloración φ_i del ciclo impar \mathbb{C}_{3k+1} para $i = 0, 1, 2$ y la rigidez de estas coloraciones establecen una cota superior para la rigidez de las 3-coloraciones del ciclo impar \mathbb{C}_n . □

Para tener la igualdad en el teorema anterior falta probar que no hay una coloración propia con menor rigidez que la coloración que proporcionamos. Sin embargo, no logramos completar la prueba formal de esta afirmación.

CONJETURA 7. *Sea $n \geq 9$ un entero impar. Si ω es la función de penalización, entonces la rigidez $R(\mathbb{C}_n^3)$ es igual a:*

$$\begin{aligned} 3(3k + (k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]]) & \quad \text{si } n = 3k; \\ 3(3k + 1) + 2(k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]] + (k - 2)[2 + (k - 1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 3)]] & \quad \text{si } n = 3k + 1; \\ 3(3k + 2) + (k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]] + 2(k - 2)[2 + (k - 1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 3)]] & \quad \text{si } n = 3k + 2. \end{aligned}$$

TEOREMA 8. *Sea ω la función de penalización del ciclo \mathbb{C}_{2k+1} . La rigidez $R(\mathbb{C}_{2k+1}^4)$ es menor o igual a*

$$\begin{aligned} 2(1)(2k - 3) + \dots + 2(s)(2k - (4s - 1)) + \dots + 2(k/2)(1) & \quad \text{si } k = 2l; \\ 2(1)(2k - 3) + \dots + 2(s)(2k - (4s - 1)) + \dots + 2((k - 1)/2)(3) & \quad \text{si } k = 2l + 1. \end{aligned}$$

Demostración. Como la rigidez es la penalización mínima, para la cota superior basta encontrar la penalización de una 4-coloración propia de \mathbb{C}_{2k+1} . Vamos a analizar por separado dos casos, según la paridad de k .

Caso $k = 2l$.

Definimos los conjuntos de colores C_i de la 4-coloración φ_0 de \mathbb{C}_{2k+1} como sigue:

$$\begin{aligned} C_0 &= \{0, 2, \dots, k - 2\}, & C_1 &= \{1, 3, \dots, k - 1\}, \\ C_2 &= \{k, k + 2, \dots, 2k\}, & C_3 &= \{k + 1, k + 3, \dots, 2k - 1\}. \end{aligned}$$

Observamos que los conjuntos C_0, C_1 y C_3 tienen l vértices, mientras que el conjunto C_2 tiene $l + 1$ vértices, además, son conjuntos disjuntos y $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 = V(\mathbb{C}_n^4)$.

Los conjuntos C_0, C_1, C_3 tienen:

$$\begin{aligned} l - 1 & \text{ aristas con penalización } 2, \\ l - 2 & \text{ aristas con penalización } 4, \\ & \vdots \\ l - s & \text{ aristas con penalización } 2s, \\ & \vdots \\ 1 & \text{ arista con penalización } 2(l - 1), \end{aligned}$$

El conjunto C_2 tiene:

$$\begin{aligned} l & \text{ aristas con penalización } 2, \\ l - 1 & \text{ aristas con penalización } 4, \\ & \vdots \\ l - s & \text{ aristas con penalización } 2(s + 1), \\ & \vdots \\ 1 & \text{ arista con penalización } 2l. \end{aligned}$$

La suma de las penalizaciones de cada uno de los conjuntos C_0, C_1 y C_3 es

$$2(l - 1) + 4(l - 2) + \dots + (l - s)2s + \dots + 2(l - 1).$$

La suma de las penalizaciones del conjunto C_2 es

$$2(l) + 4(l - 1) + \dots + (l - s)(2(s + 1)) + \dots + 2l.$$

La rigidez de la coloración φ_0 es

$$\begin{aligned} R(\varphi_0^4) &= 3(2(l-1) + 4(l-2) + \dots + (l-s)2s + \dots + 2(l-1)) + \\ &\quad 2(l) + 4(l-1) + \dots + (l-s)2(s+1) + \dots + 2l \\ &= 2(1)(2k-3) + \dots + 2(s)(2k - (4s-1)) + \dots + 2(k/2)(1). \end{aligned}$$

Caso $k = 2l + 1$.

Definimos los conjuntos de colores C_i de la 4-coloración φ_1 de \mathbb{C}_{2k+1} como sigue:

$$\begin{aligned} C_0 &= \{0, 2, \dots, 2l\}, & C_1 &= \{1, 3, \dots, 2l+1\}, \\ C_2 &= \{2l+2, 2l+4, \dots, 4l+2\}, & C_3 &= \{2l+3, 2l+5, \dots, 4l+1\}. \end{aligned}$$

Observamos que los conjuntos C_0, C_1 y C_2 tienen $l+1$ vértices mientras que el conjunto C_3 tiene l vértices, además, son conjuntos disjuntos y $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 = V(\mathbb{C}_n^4)$.

Los conjuntos C_0, C_1 y C_2 tienen:

l	aristas con penalización 2,
$l-1$	aristas con penalización 4,
\vdots	
$l-s$	aristas con penalización $2s-1$,
\vdots	
1	arista con penalización $2l$,

El conjunto C_3 tiene:

$l-1$	aristas con penalización 2,
$l-2$	aristas con penalización 4,
\vdots	
$l-s-1$	aristas con penalización $2(s+1)$,
\vdots	
1	arista con penalización $2(l-1)$.

La suma de las penalizaciones de cada uno de los conjuntos C_0, C_1 y C_2 es

$$2(l) + 4(l-1) + \dots + 2s(l-s+1) + \dots + 2(l).$$

La suma de las penalizaciones del conjunto C_3 es

$$2(l-2) + 4(l-2) + \dots + 2(s+1)(l-s-1) + \dots + 2(l-1).$$

La rigidez de la coloración φ_1 es

$$\begin{aligned} R(\varphi_0^4) &= 3(2(l) + 4(l-1) + \dots + 2s(l-s+1) + \dots + 2(l)) + \\ &\quad 2(l-2) + 4(l-2) + \dots + 2(s+1)(l-s-1) + \dots + 2(l-1) \\ &= 2(1)(2k-3) + \dots + 2(s)(2k - (4s-1)) + \dots + 2(k/2)(1). \end{aligned}$$

En cada caso encontramos la rigidez de la 4-coloración φ_i del ciclo impar $\mathbb{C}_{2(2l+i)+1}$ para $i = 0, 1$ y la rigidez de estas coloraciones establecen una cota superior para la rigidez de las 4-coloraciones del ciclo impar \mathbb{C}_n . □

CONJETURA 9. *Sea ω la función de penalización del ciclo \mathbb{C}_{2k+1} . La rigidez $R(\mathbb{C}_{2k+1}^4)$ es igual a*

$$\begin{aligned} &2(1)(2k-3) + \dots + 2(s)(2k - (4s-1)) + \dots + 2(k/2)(1) && \text{si } k = 2l; \\ &2(1)(2k-3) + \dots + 2(s)(2k - (4s-1)) + \dots + 2((k-1)/2)(3) && \text{si } k = 2l+1. \end{aligned}$$

7. CONOS

Una gráfica es un cono si tiene un vértice que es adyacente a todos los demás vértices. Para poder describir las gráficas en esta sección, definimos la suma de dos gráficas G y H , denotado $G + H$, como la gráfica resultante de tomar las dos gráficas G y H y añadir todas las aristas $\{u, v\}$ donde u es un vértice de G y v es un vértice de H . Así, si H es una gráfica y u es un vértice que no pertenece a la gráfica H , entonces la gráfica $G = \{u\} + H$ (que también se denota como $G = u + H$) es un cono ya que el vértice u es adyacente a todos los demás vértices de G . Hay muchas familias de gráficas que son conos, las gráficas completas, estrellas y ruedas para mencionar algunas.

PROPOSICIÓN 10. *Sea $G = u + H$ tal que H es conexa. Entonces $R(G^k) = R(H^k)$*

Demostración. Sea φ una coloración propia de G . Como el vértice u es adyacente a todos los vértices en la gráfica H , entonces u es el único vértice de su color, es decir, $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ para todos los vértices $v \in V(H)$. Esto significa que el vértice u no aporta nada a la rigidez de la gráfica G ya que no hay aristas entre vértices del mismo color que el vértice u y todas las aristas que aportan valor a la rigidez son aristas de la gráfica H . \square

La rueda W_n es una gráfica como $u + C_{n+1}$, es decir es un ciclo de longitud $n - 1$ con un vértice en el centro que es adyacente a todos los vértices del ciclo.

COROLARIO 11. $R(W_n^k) = R(C_{n-1}^k)$.

8. PRIMERAS APROXIMACIONES CON ALGORITMOS EVOLUTIVOS

El algoritmo genético es un tipo de algoritmo evolutivo que se inspira en la reproducción natural y que sigue los principios darwinianos de la supervivencia del más apto. Se comienza con un conjunto (población) de objetos individuales que se reproducirán y heredarán a la siguiente generación ciertas características. Aquellos individuos que tengan mejores características sobrevivirán y se reproducirán para crear una nueva generación de la población. Se le llaman algoritmos genéticos porque la información de los individuos asemejan el sistema del ADN, donde se tiene un conjunto de genes que representan ciertas características específicas de cada individuo y que se agrupan en cromosomas.

Este tipo de algoritmos son usados con frecuencia en la resolución de problemas de NP-duros y NP-completos. Dado que la coloración robusta pertenece a los problemas NP-completos, es interesante utilizar algún algoritmo genético para encontrar soluciones (ver [2, 3]). El algoritmo genético enfatiza la importancia de la cruce sexual (operador principal) sobre el de la mutación (operador secundario) y de la selección probabilística.

En esta primera aproximación, se utilizó el Algoritmo Genético Simple o Canónico como muestra el Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Algoritmo Genético Simple o Canónico

Entrada: Población P que va a evolucionar

Salida: Población P^* resultado del proceso de evolución

$P_0 \leftarrow P$

Evaluar P_0 y asignar aptitud

$i \leftarrow 0$

Repite

 Seleccionar padres de P_i y recombinar para obtener la nueva población Q_i

 Mutar Q_i , evaluar y asignar aptitud

 Seleccionar P_{i+1} de P_i y Q_i

$i \leftarrow i + 1$

Hasta Parar cuando se alcancen los criterios

Regresa $P^* \leftarrow P_i$

8.1. Formulación del problema. Dado que el PCR consiste en:

$$R(G^k) = \min_{\varphi^k} \{R(\varphi^k)\},$$

el problema de coloración robusta se puede formular como un problema de programación lineal binaria:

- $x_{ui} = 1$ si el color es asignado al vértice u , 0 en otro caso;
- $y_{uv} = 1$ si los vértices u y v pertenecen a la misma clase cromática, 0 en otro caso.

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^k x_{ui} = 1 \text{ para todo } u \in V,$$

$$x_{ui} + x_{vi} \leq 1 \text{ para todo } uv \in E \text{ y para todo } i \in \{1, \dots, k\},$$

$$x_{ui} + x_{vi} - 1 \leq y_{uv} \text{ para todo } uv \in \bar{E} \text{ y para todo } i \in \{1, \dots, k\},$$

$$x_{ui} \in \{0, 1\} \text{ para todo } u \in V, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, k\},$$

$$y_{uv} \in \{0, 1\} \text{ para todo } uv \in \bar{E}.$$

Función objetivo

Dada una coloración φ de la gráfica, la **función objetivo** evalúa dos parámetros: (i) la cantidad de vértices adyacentes de mismo color y (ii) la rigidez de φ . El parámetro (i) nos permite evaluar negativamente aquellas coloraciones que no son propias y, entre mayor sea la cantidad de pares de vértices adyacentes de mismo color, peor es la evaluación de la coloración. Puesto que nuestro objetivo es encontrar una coloración con la menor rigidez posible, el parámetro (ii) es esencial para la evaluación de una coloración.

Población inicial

La **población inicial** del algoritmo consiste en coloraciones propias de la gráfica. Para implementar una coloración, se usa un vector donde la entrada i -ésima consiste en el color asignado al vértice i . Obtener la población inicial es relativamente sencillo puesto que el método `all_graph_colorings(k)` de SageMath nos proporciona todas las coloraciones propias de una gráfica dada si se desea colorearla con k colores. Nuestra población se comprende de “individuos” representados como vectores de longitud n conteniendo un rango de $1, \dots, k$ valores representando los colores.

Operador de cruza

La **cruza** de la población se realiza como sigue: dadas dos coloraciones padre de nuestra población, se escoge un valor i entre 1 y n (el número de vértices de la gráfica y el tamaño del vector que representa nuestra coloración). Los colores a partir de ese valor son intercambiados entre las coloraciones padre para obtener dos nuevas coloraciones. De esta forma, basta emparejar la población actual para obtener la nueva población.

Mutación

La **mutación** es un mecanismo que se usa para alcanzar soluciones en el espacio de búsqueda que la cruza no exploraría, es decir, que el algoritmo encuentre soluciones parcialmente óptimas. Esto se realiza al cambiar el color de un vértice de manera aleatoria con una probabilidad de entre el 5% y 10%.

En esta primera etapa del trabajo, se delimitó y planteó el problema de manera de que posteriormente se pudiera implementar en algún lenguaje de programación para su ejecución y prueba. En particular, se considera como trabajo futuro la implementación de la formulación y el algoritmo genético simple en el lenguaje *Python*.

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a la Universidad Autónoma Metropolitana, al proyecto CONAHCyT CB-47510664 y al árbitro anónimo.

REFERENCIAS

- [1] Gutiérrez–Andrade M. A., Lara–Velázquez P., López–Bracho R., Ramírez–Rodríguez J., *Heuristics for the robust coloring problem*, Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones **18**(1) 2011, 137–147.
- [2] Lim, A., Wang, F. *Meta-heuristics for robust graph coloring problem*, 16th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence, 2004, 514–518.
- [3] Malhotra K., Vasa K. D., Chaudhary N., Vishnoi A., Sapra V., *A Solution to Graph Coloring Problem Using Genetic Algorithm*, EAI Endorsed Transactions on Scalable Information Systems, Vol. 11 No. 6, 2024,

Gabriela Judith Blanco Rodríguez

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Ciencias Básicas.
Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas
Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200 Ciudad de México, México
e-mail: gabyj.blanco@gmail.com

Karen Miranda

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Lerma,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Sistemas de Información y Comunicaciones.
Av. de las Garzas 10, Col. El Panteón
Municipio Lerma de Villada, C.P. 52005 Estado de México, México
e-mail: kmiranda@cua.uam.mx

Mika Olsen

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: olsen@cua.uam.mx

Axel Prestegui Ramos

Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias.
Investigación científica, C.U.
Alcaldía Coyoacán, C.P. 04510 Ciudad de México, México
e-mail: axelprestegui@ciencias.unam.mx

Nadia Vásquez Martínez

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: nadia.vasquez@cua.uam.mx