

LA GRÁFICA DE SUCESIONES DE PRÜFER

JULIÁN ALBERTO FRESÁN FIGUEROA, TANIA JIMÉNEZ ALVARADO, ALDO LOZANO PIÑA, OSVALDO PADILLA MORALES Y MAXIMILIANO RAMÍREZ MEJÍA

RESUMEN. Sea σ una asignación de grados de los vértices de la gráfica completa de n vértices. La gráfica $P_\sigma(n)$ es la gráfica cuyos vértices son todas las sucesiones de Prüfer de árboles generadores de K_n con la asignación de grados σ , es decir, aquellos árboles T tales que $d_T(u) = \sigma(u)$ para todo vértice u de K_n . En $P_\sigma(n)$ dos sucesiones son adyacentes si difieren en exactamente dos entradas, y la diferencia entre los números en estas entradas es uno. En este artículo mostramos que la gráfica es conexa y algunas propiedades sobre $P_\sigma(n)$.

1. INTRODUCCIÓN

En una era de interconectividad global, es fundamental diseñar redes óptimas que aseguren la conexión entre personas. Desde este punto de vista, un desafío que ha intrigado a matemáticos y científicos informáticos desde hace casi 100 años, es cómo obtener un árbol generador de peso mínimo, que representa una manera eficiente y rentable para conectar distintos puntos. Desde entonces algoritmos como los de Prim, Kruskal o Borůvka se han presentado como unos métodos eficientes para encontrar árboles de peso mínimo. Sin embargo algunos problemas no solo necesitan que el peso del árbol sea el mínimo, sino que además tenga algunas restricciones. Por ejemplo, en un sistema de distribución eléctrica, se busca transmitir energía de manera eficiente y confiable entre las estaciones de distribución y los hogares. Podemos modelar este problema usando una gráfica en la que los vértices representan las estaciones y los hogares, y el peso en las aristas refleja el costo de instalar las líneas eléctricas.

En este contexto, la manera más económica de asegurar que todas las estaciones y hogares estén conectados sin necesidad de mantener demasiadas líneas eléctricas, es encontrar un árbol de peso mínimo. Sin embargo, es esencial considerar las limitaciones de capacidad, energía y recursos de procesamiento en cada estación de distribución.

Cada estación puede tener una capacidad limitada para manejar conexiones simultáneas debido a restricciones de infraestructura. Esto se traduce en que se debe elegir una cantidad de aristas que salen de un vértice en función de su capacidad. Encontrar un árbol generador de peso mínimo que respete las restricciones en los grados de los vértices, es decir, el número de aristas que inciden en un vértice v , denotado por $d(v)$, permite que la solución sea factible en términos prácticos, optimizando el costo y la eficiencia y asegurando el uso óptimo de los recursos disponibles, evitando la sobrecarga en los vértices. Esto implica que existan restricciones de forma que $d(x) \leq b(x)$, donde $b(x)$ es el máximo de aristas que en el árbol puede tener el vértice x .

Por otro lado, para las redes eléctricas de alta demanda, es importante distribuir equitativamente la carga de tráfico entre las diferentes aristas y vértices para evitar congestiones o sobrecalentamientos y maximizar la eficiencia del sistema. Al tener múltiples aristas conectadas a cada vértice, se facilita la distribución de la carga de energía y se evita la congestión en estaciones individuales, mejorando el rendimiento general de la red. Esto se refleja en que necesitaremos una restricción $a(x) \leq d(x)$, donde $a(x)$ es el mínimo de conexiones que debe tener un vértice para que la carga se distribuya de manera efectiva.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C05, 05C07.

Palabras clave. Gráficas de árboles, sucesiones de Prüfer, Conexidad, Grados fijos.

Es importante observar que en las soluciones para el árbol de peso mínimo dadas por los algoritmos clásicos como Kruskal, Prim o Borůvka no hay control sobre el grado que tiene cada vértice x en un árbol de peso mínimo. Sin embargo, hay problemas en los que, de manera natural, el grado de algún vértice x en el árbol de peso mínimo necesita cumplir ciertas restricciones ($a(x) \leq d(x) \leq b(x)$).

Cuando en un problema de este estilo no se conocen algoritmos eficientes para resolver el problema, se desarrollan algoritmos heurísticos. Estos algoritmos, que no realizan una búsqueda exhaustiva, son cruciales para abordar de manera eficiente problemas complejos en la optimización combinatoria. A diferencia de los algoritmos exactos, que aseguran una solución óptima, los algoritmos heurísticos adoptan un enfoque práctico, explorando el espacio de búsqueda¹ para encontrar una solución que, aunque no sea la mejor, se obtiene rápidamente y es suficientemente buena en la práctica (en nuestro ejemplo, el espacio de búsqueda incluiría todos los posibles árboles generadores que cumplen con las restricciones de grado, independientemente de su peso).

Frecuentemente estos algoritmos necesitan una representación adecuada del espacio de búsqueda y maneras de moverse dentro de él. En este contexto destacan las gráficas de objetos combinatorios. Sea C un conjunto de objetos combinatorios y sea f una transformación de un objeto en C en algún otro objeto en C . La gráfica de objetos de C con la transformación f es la gráfica cuyos vértices son los elementos de C y dos objetos en C son adyacentes si puedo ir de uno a otro mediante la transformación f . Estas gráficas nos ayudan para modelar los espacios de búsqueda de los algoritmos heurísticos.

En este trabajo presentamos los resultados obtenidos durante el Quinto Taller Metropolitano de Matemáticas Discretas, llevado a cabo en el Mineral del Chico, Hidalgo en el 2023. En este trabajo nos centramos en el caso particular de la gráfica de árboles en el que $a(x) = b(x)$, es decir el grado que debe tener cada vértice en el árbol esta fijo. Para ello usaremos una representación de estos árboles mediante sucesiones de Prüfer.

2. SUCESIONES DE PRÜFER

En 1918, Prüfer [1] mostró una manera de codificar árboles al dar una demostración del Teorema de Cayley. Consideraremos árboles etiquetados de manera decreciente en función del grado de cada vértice, es decir, el vértice con la etiqueta 1 tiene grado mayor que o igual al grado del vértice de etiqueta 2, el cual a su vez tiene grado mayor que o igual al vértice que tiene etiqueta 3, y así sucesivamente. Sea T un árbol con n vértices y etiquetemos los vértices de T con los números del 1 al n .

Removamos de T el vértice terminal que tenga la menor etiqueta, digamos u_1 . Sea v_1 el vértice adyacente a u_1 en T . De los $n - 1$ vértices restantes, sea u_2 el vértice terminal con la menor etiqueta y sea v_2 el único vértice adyacente a él en $T - u_1$. Removamos ahora el vértice u_2 de $T - u_1$ y repitamos esta operación hasta que sólo queden 2 vértices. Esto nos define una única sucesión $(v_1, v_2, \dots, v_{n-2})$ de $n-2$ enteros, todos entre 1 y n . A esta sucesión se le conoce como *ucesión de Prüfer*. En la figura 1 se muestra un ejemplo de construcción de una sucesión de Prüfer.

De igual manera, dada una sucesión $S = (v_1, v_2, \dots, v_{n-2})$ de $n - 2$ enteros entre 1 y n , no necesariamente distintos, podemos contruir un único árbol de n vértices de la siguiente manera: determinemos cuál número de la sucesión $Q = (1, 2, \dots, n)$ es el primero que no aparece en la sucesión S . Llamemos u_1 a ese número. Entonces diremos que el árbol tiene la arista $u_1 v_1$. Removamos a v_1 de la sucesión S y a u_1 de la sucesión Q . En lo que queda de la sucesión Q determinemos cuál es el primer número que no aparece en lo restante de la sucesión S . Sea u_2 este número e inclumos a nuestro árbol la arista $u_2 v_2$. Repetimos estos pasos hasta que la sucesión S no tenga

¹El espacio de búsqueda se refiere a todas las posibles soluciones, aunque no sean óptimas.

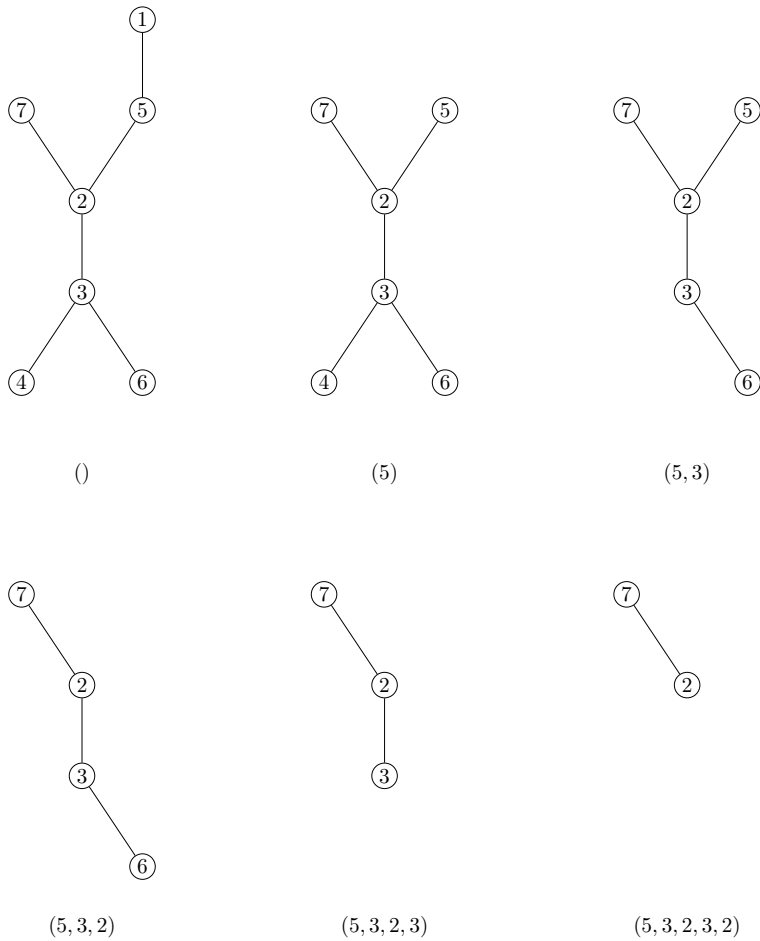


FIGURA 1. Construcción de una sucesión de Prüfer

ningún elemento más. Finalmente hagamos adyacentes los últimos dos vértices que aparecen en Q . En la figura 2 podemos ver la reconstrucción del árbol de la figura 1.

Esto nos define una biyección entre los árboles de n vértices, es decir, árboles generadores de una gráfica completa, y las sucesiones de $n - 2$ enteros entre 1 y n .

Las sucesiones de Prüfer tienen algunas propiedades muy bien conocidas, de entre ellas es muy fácil probar la siguiente:

PROPOSICIÓN 1. *El número v aparece $d(v) - 1$ veces en una sucesión de Prüfer.*

3. LA GRÁFICA DE SUCESIONES DE PRÜFER

Siguiendo la notación en [3], una sucesión de n enteros decreciente $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ es una *sucesión arbórea* si y sólo si

1. $1 \leq d_i \leq n - 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$
2. $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2(n - 1)$

Claramente una sucesión σ es arbórea si y solo si existe un árbol generador T de K_n tal que $d_T(u) = \sigma(u)$ para todo vértice u de K_n .

Sea $n \geq 2$ y sea $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ una sucesión arbórea. La gráfica de sucesiones de Prüfer de σ , denotada por $P_\sigma(n)$ es la gráfica cuyos vértices son todas las sucesiones de Prüfer de árboles generadores de K_n con la asignación de grados σ , es decir, aquellos árboles T tales que $d_T(u) = \sigma(u)$ para todo vértice u de K_n . En $P_\sigma(n)$ dos sucesiones son adyacentes si difieren en exactamente dos entradas (una transposición),

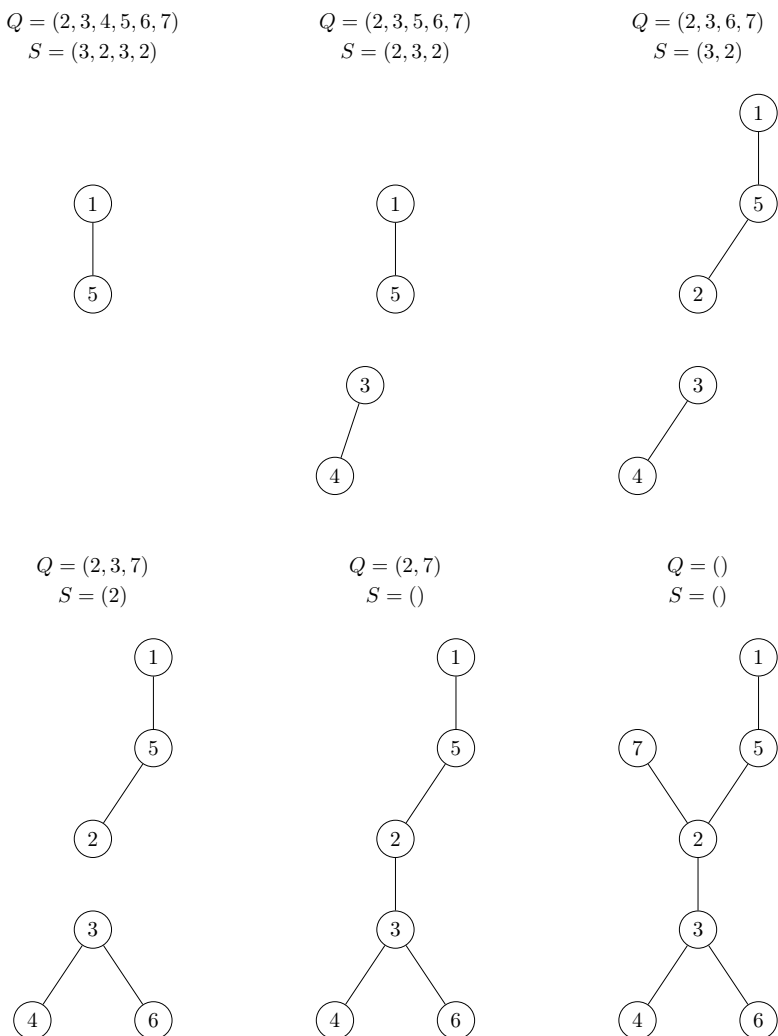


FIGURA 2. Construcción de un árbol a partir de una sucesión de Prüfer

y la diferencia entre los números en estas entradas es uno. En la figura 3 se presenta la gráfica correspondiente a la sucesión arbórea $(2, 2, 2, 1, 1)$, es decir, a las trayectorias cuyas hojas son los vértices 4 y 5. Observa que las sucesiones de Prüfer de estos árboles, por la proposición 1 serán permutaciones de la sucesión $(3, 2, 1)$.

El siguiente teorema es una consecuencia directa de la proposición 1:

TEOREMA 2. *Sea n un entero y sea $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ una sucesión arbórea. Entonces las sucesiones de Prüfer correspondientes a árboles con la asignación de grados σ son reordenamientos de la sucesión:*

$$S = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{d_1-1}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{d_2-1}, \dots, \underbrace{n, n, \dots, n}_{d_n-1})$$

Como se observa en el teorema anterior, la sucesión arbórea determina por completo las sucesiones de Prüfer. Sea n_k para $k = 1, 2, \dots, n$ el número de veces que aparece k en las sucesiones de Prüfer asociadas a una sucesión arbórea σ . Con esta notación, podemos reescribir el siguiente teorema debido a Moon.

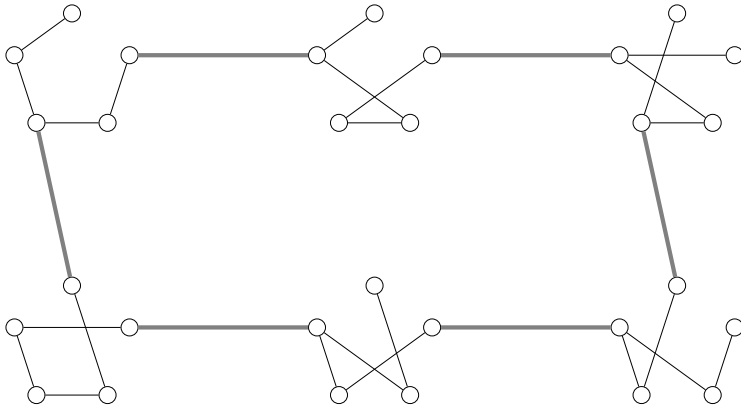


FIGURA 3. La gráfica $P_\sigma(5)$ para $\sigma = (2, 2, 2, 1, 1)$. Las sucesiones de Prüfer están apareadas como el árbol al que codifican

TEOREMA 3. [2] Sean n un entero, σ una sucesión arbórea de orden n y n_k para $k = 1, 2, \dots, n$ el número de veces que aparece k en las sucesiones de Prüfer asociadas a σ . Entonces la gráfica $P_\sigma(n)$ es una gráfica de orden $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_n!}$.

El grado de un vértice en $P_\sigma(n)$ está dado por el número de transposiciones válidas entre sus entradas. Entonces por un argumento sencillo de conteo tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 4. Sean n un entero, σ una sucesión arbórea de orden n y n_k para $k = 1, 2, \dots, n$ el número de veces que aparece k en las sucesiones de Prüfer asociadas a σ . La gráfica $P_\sigma(n)$ es una gráfica $(n_1n_2 + n_2n_3 + \dots + n_{n-1}n_n)$ -regular.

Demostración. Sea σ una sucesión arbórea y sea n_k para $k = 1, 2, \dots, n$ el número de veces que aparece k en las sucesiones de Prüfer asociadas a σ y sea S un vértice de $P_\sigma(n)$. Como dos sucesiones son adyacentes si difieren en exactamente dos entradas (una transposición), y la diferencia entre los números en estas entradas es uno, entonces S será adyacente a $n_i n_{i+1}$ vértices en $P_\sigma(n)$ pues son todos los posibles intercambios en entradas con los elementos i e $i + 1$. Al sumar sobre todas las posibles parejas de elementos consecutivos el resultado se sigue. \square

Una consecuencia directa de los teoremas 3 y 4 y del lema del apretón de manos es el siguiente corolario.

COROLARIO 5. El tamaño de la gráfica $P_\sigma(n)$ es $\frac{n!(n_1n_2 + n_2n_3 + \dots + n_{n-1}n_n)}{2n_1!n_2!\dots n_n!}$.

Sea $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ una sucesión arbórea y sea n_k para $k = 1, 2, \dots, n$ el número de veces que aparece k en las sucesiones de Prüfer asociadas a σ . Como σ es decreciente entonces se cumple que $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_n$. Sea H_j la subgráfica de $P_\sigma(n)$ de todas las sucesiones en cuya última entrada aparece el número j .

LEMA 6. Sean σ una sucesión arbórea y r el entero más grande que aparece en las sucesiones de Prüfer asociadas a σ . Todo vértice en H_a es adyacente a un vértice en H_{a+1} para $a = 1, 2, \dots, r - 1$.

Demostración. Sea $v \in V(H_a)$. Notemos que v es de la forma $u = (x_1, x_2, \dots, x_{n-3}, a)$ con $1 \leq x_i \leq x_r$ para $i = 1, 2, \dots, n - 3$. Como $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$ entonces en particular $n_a \geq n_{a+1} \geq n_r \geq 1$ por lo que existe un entero j tal que $x_j = a + 1$. Sea $u = (y_1, y_2, \dots, y_{n-2})$ tal que $y_j = a, y_{n-2} = a + 1$ y $y_i = x_i$ en cualquier otro caso. Claramente, $u \in H_{a+1}$ y u es adyacente a v en $P_\sigma(n)$. \square

LEMA 7. Sea $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_r, \dots, d_n)$ una sucesión arbórea con r el entero más grande que aparece en las sucesiones de Prüfer asociadas a la sucesión σ . Sea

$\tau = (d_1, d_2, \dots, d_{r-1} \dots d_{n-1})$ una sucesión arbórea. Entonces la subgráfica H_r de $P_\sigma(n)$ es isomorfa a $P_\tau(n-1)$.

Demostración. Sea $\Theta : V(H_r) \rightarrow V(P_\tau(n-1))$ dada por la regla de correspondencia $\Theta((x_1, x_2, \dots, x_{n-3}, r)) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-3})$. Por el teorema 2, las imágenes de la función Θ serán una sucesión de Prüfer, por lo que Θ está bien definida y claramente es una función biyectiva. Si dos sucesiones de Prüfer u y v son adyacentes en H_r entonces existen dos entradas i y j , con $i \neq j \neq r$ en las que difieren y la diferencia entre los valores de esas entradas es 1, por lo que $\Theta(u)$ y $\Theta(v)$ serán adyacentes en $P_\tau(n-1)$ pues tienen los mismos valores en cada entrada $k = 1, 2, \dots, n-3$. Análogamente y por el mismo argumento si $\Theta(u)$ y $\Theta(v)$ son adyacentes en P_τ , entonces u y v serán adyacentes en la subgráfica H_r de $P_\sigma(n)$. Por lo tanto, Θ es un isomorfismo. \square

TEOREMA 8. *Sea $n \geq 4$ un entero y σ una sucesión arbórea. La gráfica $P_\sigma(n)$ es una gráfica conexa.*

Demostración. Para $n = 4$ las únicas sucesiones arbóreas posibles son $(3, 1, 1, 1)$ y $(2, 2, 1, 1)$ y las gráficas de sucesiones de Prüfer se pueden ver en la figura 4.

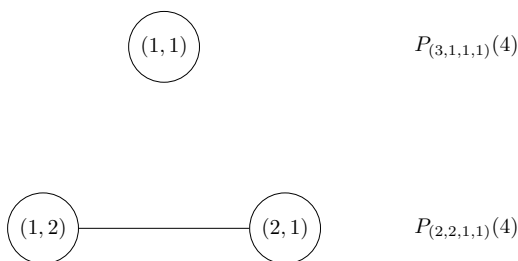


FIGURA 4. Las gráficas $P_{(3,1,1,1)}(4)$ y $P_{(2,1,1,1)}(4)$

Procederemos por inducción suponiendo que para un entero $m \geq 4$ y para cualquier sucesión arbórea λ , la gráfica $P_\lambda(m)$ es conexa. Probaremos que $P_\sigma(m+1)$ es conexa para cualquier sucesión arbórea σ .

Sea r el entero más grande que aparece en las sucesiones de Prüfer asociadas a σ y sean u y v dos sucesiones de Prüfer en $P_\sigma(m+1)$. Si en ambas sucesiones la última entrada es r entonces u y v pertenecen a la subgráfica H_r de $P_\sigma(m+1)$. Por el lema 7 la subgráfica H_r es isomorfa a $P_\tau(m)$ y por hipótesis de inducción es conexa, por lo que existe una uv -trayectoria en H_r y por lo consiguiente en $P_\sigma(m+1)$.

Por otro lado si en u la última entrada tiene un valor $k \neq r$ entonces por el lema 6 existe una sucesión u_1 adyacente a u en $P_\sigma(m+1)$ tal que la última entrada de u_1 es $k+1$. Este proceso se puede repetir obteniendo una trayectoria $u, u_1, u_2, \dots, u_{r-k}$ donde la última entrada de u_{r-k} tiene el valor de r . Si la última entrada de la sucesión v es r entonces por el caso anterior existe una $u_{r-k}v$ -trayectoria y por lo consiguiente existe una uv trayectoria en $P_\sigma(m+1)$. Si el valor de la última entrada de v es $\ell \neq r$ entonces podemos encontrar una trayectoria $v, v_1, v_2, \dots, v_{r-\ell}$ tal que el valor de la última entrada de $v_{r-\ell}$ es r y por el caso anterior existe una $u_{r-k}v_{r-\ell}$ -trayectoria y por lo tanto una uv -trayectoria en $P_\sigma(m+1)$. Por lo tanto $P_\sigma(m+1)$ es conexa. \square

La conexidad de $P_\sigma(n)$ nos garantiza que los algoritmos heurísticos puedan transitar por todo el espacio de búsqueda usando el movimiento que define a las aristas de la gráfica. Finalmente mientras construíamos diversos ejemplos, en todas las instancias de la gráfica, ésta fue hamiltoniana. Por ello planteamos la siguiente conjetura:

CONJETURA 9. *Sean n un entero y σ una sucesión arbórea. La gráfica $P_\sigma(n)$ es hamiltoniana.*

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de las unidades Cuajimalpa e Iztapalapa, por los recursos aportados para la realización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas 2023, al CONAHCyT, proyecto CB-47510664, y al árbitro anónimo.

REFERENCIAS

- [1] Prüfer, H. (1918). Neuer beweis eines satzes uber per mutationen. Archiv derMathematik und Physik, 27, 742-744.
- [2] Moon, J.W. (1970) Counting labelled trees. From lectures delivered to the Twelfth Biennial Seminar of the Canadian Mathematical Congress (Vancouver, 1969) Canadian Mathematical Monographs, No. 1 Canadian Mathematical Congress, Montreal, Que.
- [3] Fresán-Figueroa, J., y Rivera-Campo, E. /2017). On the fixed degree tree graph. Journal of Information Processing, 25, 616-620.

Julián A. Fresán Figueroa

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 CDMX, México
e-mail: jfresan@cua.uam.mx

Tania Jiménez Alvarado

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1^a sección
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2183011209@titlani.uam.mx

Aldo Lozano Piña

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 CDMX, México
e-mail: aldo.lozano@cua.uam.mx

Oswaldo Padilla Morales

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1^a sección
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2203008915@titlani.uam.mx

Maximiliano Ramírez Mejía

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1^a sección

Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México

e-mail: cbi2184053289@titlani.uam.mx