MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.15, No.1, páginas 345-352.
Recibido 01-08-2023. Aceptado 01-08-2024.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v15n1/ilnali

DOMINACIÓN A DISTANCIA k EN GRÁFICAS

ILÁN A. GOLDFEDER, NAHID YELENE JAVIER NOL Y LIZZETH ARIADNA SÁNCHEZ SOLÍS

Resumen. El problema de determinar el número de dominación de una gráfica G ha sido ampliamente estudiado y se han derivado muchas variantes. Entre éstas, está el número de dominación a distancia k de una gráfica G. Este trabajo está dedicado a presentar este concepto y mostrar algunos resultados al respecto en las trayectorias y mallas.

1. Introducción

En la figura 1 (a) aparece la distribución de un museo, donde las líneas representan pasillos de exhibición y los puntos representan sitios en los que se confluyen dichos pasillos. La administración desea colocar puestos de asistencia para quienes visitan el museo en los puntos de confluencia de los pasillos. Colocar uno puesto en cada punto es excesivo y consideran que recorrer a lo más dos pasillos sería una distancia adecuada para llegar a uno. ¿Cuál es el menor número de puestos que se requieren colocar? La

(a) Plano del museo (b) Puestos de asistencia a distancia dos

Figura 1. Puntos de asistencia en un museo

respuesta es dos. Con uno solo no basta para que cualquier visitante recorra *a lo más* dos pasillos para encontrar un puesto de asistencia, pero con dos sí es posible, como se muestra en la figura 1 (b).

El problema anterior es un ejemplo de lo que se conoce como *dominación a distancia* k. Pese a que puede parecer un problema «sencillo», en términos matemáticos y computacionales es un problema muy difícil, lo que vuelve su estudio relevante.

2. Definiciones básicas

Una *gráfica* G es una pareja ordenada $(V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito y no vacío, los *vértices* de la gráfica, y $A(G)$ es un conjunto de parejas no ordenadas de vértices, las *aristas* de la gráfica.

Dados dos vértices u y v en una gráfica G, u y v son *adyacentes* o u es *vecino* de v si $\{u, v\} \in A(G)$. La *vecindad* de u es el conjunto de todos los vecinos de u y se denota como $N(u)$.

Dados dos vértices u y v en una gráfica G, una *trayectoria* o una (u, v)-trayectoria es una sucesión de vértices $P = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$ que empieza en u y termina en v (es decir, $x_0 = u$ y $x_k = v$) tal que cualesquiera dos vértices consecutivos son adyacentes y su *longitud* se define y denota como $l(P) = k$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C69, 05C12.
Palabras clave. Gráficas, dominación, número de dominación.

La *distancia* entre dos vértices u y v en una gráfica conexa[1] G, se denota por $d_G(u,v)$ o simplemente $d(u,v)$, es la menor de las longitudes de entre todas las posibles (u,v)-trayectorias en G. Si $S \subseteq V(G)$, la *distancia* de u a S es la mínima $d(u,w)$, para todo $w \in S$, y se denota como $d(u,S)$.

3. Problema

Un *conjunto dominante* de una gráfica G es un conjunto S de vértices de G tal que todo vértice que no está en S tiene un vecino en S. En particular, el conjunto de los vértices $V(G)$ es un conjunto dominante de G. Lo interesante es preguntarse *cuáles* son los conjuntos dominantes con el menor número de elementos y cuál es este valor. Así, se define el *número de dominación* de G como la cardinalidad de un conjunto dominante con el menor número de elementos y se denota por $\gamma(G)$. Este concepto está motivado por problemas de varios tipos, entre ellos problemas con piezas de ajedrez y ya aparece aparece definido en los libros de Claude Berge [1] y Øystein Ore [7].

En 1975, Amram Meir y John W. Moon [6] combinaron los conceptos de distancia y dominación en gráficas e introdujeron el concepto de dominación a distancia k en una gráfica (ellos le llamaron k-cubiertas). Dado $k \geq 1$, un conjunto S es un *conjunto dominante a distancia* k en G si para todo vértice que no está en S, éste se encuentra a distancia k de algún vértice de S, es decir, que para todo vértice $v \in V(G) \setminus S$, se tiene que $d(v,S) \leq k$. El *número de dominación a distancia* k, denotado por $\gamma_k(G)$, es la mínima de las cardinalidades de entre todos los conjuntos dominantes a distancia k. Note que si $k = 1$, entonces $\gamma_1(G) = \gamma(G)$.

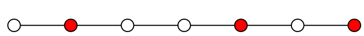


Figura 2. Los vértices de color rojo forman un conjunto dominante a distancia 1 mínimo en P_7

Por ejemplo, si $G = P_7$ (véase la figura 2), la trayectoria de orden 7 y longitud 6, para $k = 1$ un conjunto dominante puede ser $S = V(P_7)$, el cual es de orden 7, pero no es un conjunto mínimo, ya que si retiramos cualquier vértices de S, el conjunto restante sigue siendo dominante. Los tres vértices de color rojo que se muestran en la figura 2 forman un conjunto dominante de P_7, la pregunta que falta por hacernos es si es un conjunto dominante mínimo. Dicho de otra forma, ¿podemos dominar P_7 con sólo dos vértices? Si ponemos en el conjunto dominante a alguno de los extremos, véase figura 3 (a), éste dominará a su vecino, pero nos faltarán cinco vértices por considerar y con un sólo vértice no es posible dominarlos. Concluimos que en el conjunto dominante no nos conviene considerar a los extremos. Pero dado que alguien debe dominar a los extremos, necesariamente los vecinos de ambos extremos deben estar en S, véase la figura 3 (b). Así, faltaría que alguien domine al vértice de en medio. Por lo tanto, dos vértices no son suficientes para dominar a distancia uno a los vértices P_7 y el conjunto dominante mínimo es de cardinalidad tres.

(a) Si consideramos a un extremo en el conjunto dominante faltaría por dominar a los 5 vértices de la derecha, lo cual no es posible con un vértice

(b) Los vecinos de los extremos deben estar en el conjunto dominante de P_7

Figura 3. Dos vértices (de color rojo) no forman un conjunto dominante a distancia 1 mínimo en P_7

[1]Esto significa, intuitivamente, que la gráfica está formada por una sola pieza.

El razonamiento previo muestra la forma en cómo usualmente se aborda este problema, por un lado se muestra un conjunto dominante de cierta cardinalidad y, por el otro, se argumenta porqué con menos vértices no es posible dominar a todos. Sin embargo, esto último puede llegar a ser muy complicado.

En el siguiente ejemplo consideramos $G = C_7$ y $k = 2$ los dos vértices de color rojo que se muestran en la figura 4 forman un conjunto dominante a distancia dos de C_7, dicho conjunto es de cardinalidad mínima, porque no es posible dominar a distancia dos a todos los vértices del ciclo con un solo vértice ya que quedarían dos vértices sin ser dominados a distancia dos. Por lo tanto, el conjunto dominante mínimo es de cardinalidad dos.

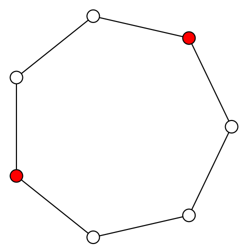


FIGURA 4. Un conjunto dominante a distancia dos de cardinalidad mínima del ciclo C_7

Se conocen los números de dominación a distancia k de muy pocas familias de gráficas y determinar dicho valor para gráficas en general no es sencillo. Uno de los primeros resultados es el siguiente.

PROPOSICIÓN 1 (A. Klobučar [5]). *Para* $k \geq 1$, $\gamma_k(C_n) = \gamma_k(P_n) = \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$.

Demostración. Primero, dada una trayectoria P_n para algún n, mostraremos un conjunto dominante a distancia k en dicha gráfica. Para ello, obsérvese la figura 3. Cada uno de los vértices en rojo y uno más escogido apropiadamente de la parte que dice resto forman un conjunto dominante a distancia k en P_n formado por $\lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$ vértices. Por lo tanto, $\gamma_k(P_n) \leq \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$.

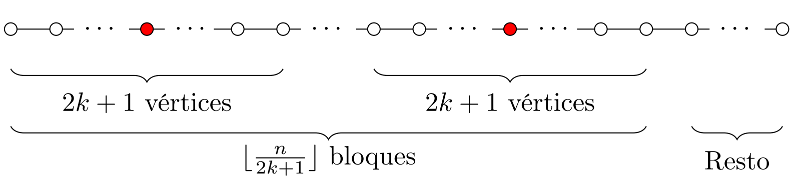


FIGURA 5. La dominación a distancia k en P_n

Por otro lado, que cada vértice domina a distancia k, cada vértice en P domina a lo más a $2k+1$ vértices (k vértices a cada uno de los dos lados del vértices además de él mismo). Por lo tanto, $\gamma_k(P_n) \geq \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$.

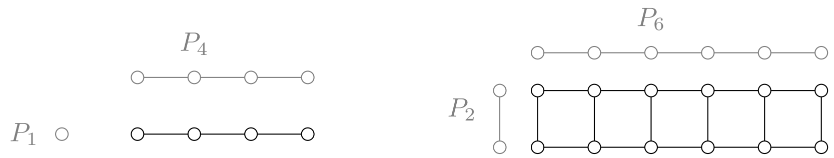
De las dos desigualdades previas, se sigue que $\gamma_k(P_n) = \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$.

Finalmente, para el caso del ciclo C_n se usa el mismo argumento. $\square$

Otra familia de gráficas para las cuales parecería asequible determinar su número de dominación usual y de dominación a distancia k son las mallas, que son el producto cartesiano de dos trayectorias. El *producto cartesiano* $G \square H$ de dos gráficas G y H es la gráfica con conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ y en la que dos vértices (g_1, h_1) y (g_2, h_2) son adyacentes si $g_1 = g_2$ y $h_1 h_2$ es una arista en H o si $h_1 = h_2$ y $g_1 g_2$ es una arista en G. A la gráfica $P_n \square P_m$ se la conoce como *malla de n por m*.

Para ilustrar la definición de producto cartesiano de gráficas, mostramos los dos siguientes ejemplos. Considere $G_1 = P_1$ y $H_1 = P_4$, véase la figura 6 (a), y $G_2 = P_2$

y $H_2 = P_6$, véase la figura 6 (b). Observe que $P_1 \square P_4$ coincide con P_4 y, en general, $P_1 \square P_m$ coincide con P_m.



(a) $P_1 \square P4$ (b) $P_2 \square P6$

FIGURA 6. Producto cartesiano de $P_1 \square P_4$ y $P_2 \square P_6$

Sin embargo, pese a que las mallas pueden parecer una familia de gráficas relativamente sencillas, se conocen pocos resultados al respecto. Durante el taller, los participantes trabajaron en encontrar conjuntos dominantes a distancia k en mallas $P_n \square P_m$, para distintos valores de k, n y m, y a argumentar por qué serían conjuntos mínimos. En particular, dichos ejemplos aportan cotas superiores para dichos valores.

4. TABLAS

En la tabla 1 aparecen los valores encontrados en el taller de la dominación usual (o a distancia uno), mientras en la tabla 2 aparecen dichos valores con respecto a las fórmulas conocidas (véase [3]).

TABLA 1. Valores de la dominación a distancia uno de $P_m \square P_n$ con $1 \leq m, n \leq 9$ hallados en el taller

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	1	2	2	3	3	4	4	5	6
3	1	2	3	4	4	6	6	7	8
4	2	3	4	4	6	7	7	9	10
5	2	3	4	6	7	9	10	12	13
6	2	4	6	7	9	10	11	13	15
7	3	4	6	7	10	11	12	15	17
8	3	5	7	9	12	13	15	17	20
9	3	6	8	10	13	15	17	20	22

TABLA 2. Valores de la dominación a distancia uno de $P_m \square P_n$ con $1 \leq m, n \leq 9$ conocidos

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	1	2	2	3	3	4	4	5	6
3	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4	2	3	4	4	6	7	7	8	10
5	2	3	4	6	7	8	9	11	12
6	2	4	5	7	8	10	11	12	14
7	3	4	6	7	9	11	12	14	16
8	3	5	7	8	11	12	14	16	18
9	3	6	8	10	12	14	16	18	20

TABLA 3. Valores de la dominación a distancia dos de $P_m \square P_n$ con $1 \leq m \leq 7$ y $1 \leq n \leq 9$ halladas en el taller

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
2	1	1	1	2	2	2	2	3	3
3	1	1	1	2	2	2	3	3	4
4	2	2	2	3	3	4	4	4	5
5	2	3	3	3	4	4	4	5	6
6	2	3	3	4	4	4	6	6	7
7	2	3	4	4	5	6	7	7	8

TABLA 4. Valores de la dominación a distancia tres de $P_m \square P_n$ con $1 \leq m \leq 6$ y $1 \leq n \leq 12$ halladas en el taller

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3
3	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
4	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4
5	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
6	1	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	6

TABLA 5. Valores de la dominación a distancia cuatro de $P_m \square P_n$ con $1 \leq m \leq 6$ y $1 \leq n \leq 12$ halladas en el taller

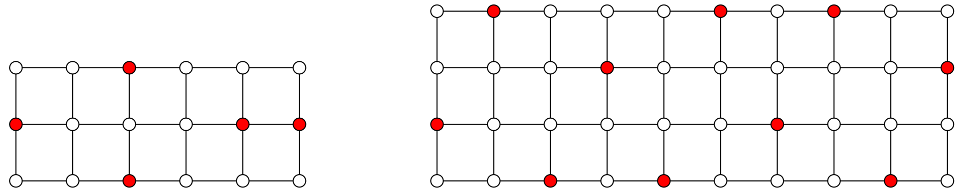
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
4	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
5	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
6	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4

5. Resultados conocidos

Los resultados previos coinciden en algunos casos con lo poco que se sabe al respecto (resultados que los participantes no conocían). Entre ellos, presentamos los números de dominación usual para $P_n \square P_m$, con $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y los números de dominación a distancia k para $P_n \square P_m$ con $m \in \{1, 2, 3\}$. Nótese que en las tablas 3, 4, 5 y 6, para los valores que corresponden a $m \in \{4, 5, 6\}$ no se conocen fórmulas publicadas.

TEOREMA 2 (M. S. Jacobson y L. F. Kinch [4]). *Se tiene que:*

a) $\gamma(P_1 \square P_n) = \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$, $n \geq 1$
b) $\gamma(P_2 \square P_n) = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$, $n \geq 1$
c) $\gamma(P_3 \square P_n) = \lfloor \frac{3n+4}{4} \rfloor$, $n \geq 1$
d) $\gamma(P_4 \square P_n) = \begin{cases} n+1, & \textit{si } n \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9\} \\ n, & \textit{en otro caso con } n \geq 4. \end{cases}$



(a) Conjunto dominante mínimo de $P_3\square P_6$

(b) Conjunto dominante mínimo de $P_4\square P_9$

FIGURA 7. Conjuntos dominantes mínimos a distancia uno de $P_3\square P_6$ y $P_4\square P_9$

Para ilustrar el teorema 2 (c) y (d), veamos los siguientes ejemplos. La figura 7 (a) muestra una solución óptima de $P_3\square P_6$. En este caso, $\gamma(P_3\square P_6) = 5$. El inciso (b) de la figura 7 muestra una solución óptima de $P_4\square P_9$, por lo que $\gamma(P_4\square P_9) = 10$.

TEOREMA 3 (T. Y. Chang y Clark [2]). *Se tiene que:*

(a) $\gamma(P_5\square P_m) = \begin{cases} \lfloor \frac{6k+6}{5} \rfloor, & \textit{si } m \in \{2,3,5,6,9\} \\ \lfloor \frac{6m+8}{5} \rfloor, & \textit{en otro caso con } m \geq 1 \end{cases}$

(b) $\gamma(P_6\square P_m) = \begin{cases} \lfloor \frac{10m+10}{7} \rfloor, & \textit{si } m \in \{2,3\} \textit{ o } m \equiv 1 \text{ mód } 7 \textit{ con } m \geq 1 \\ \lfloor \frac{10m+12}{7} \rfloor, & \textit{en otro caso con } m \geq 2. \end{cases}$

Del teorema 1, se sigue que para $k \geq 1$ y $n \geq 2$,

$$\gamma_k(P_1\square P_n) = \gamma_k(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil.$$

TEOREMA 4 (Klobučar [5]). *Se tiene que:*

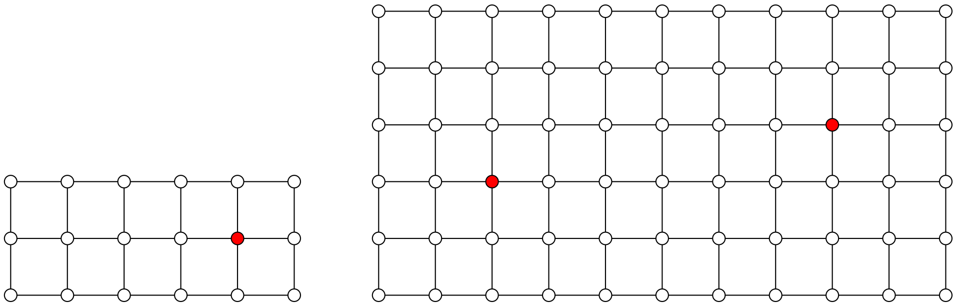
(a) Para $k \geq 1$ *y* $n \geq 2$, $\gamma_k(P_2\square P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2k}+1, & \textit{si } n \equiv 0 \text{ mód } 2k \\ \lceil \frac{n}{2k} \rceil, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$

(b) Para $k \geq 2$ *y* $n \geq 2$, $\gamma_k(P_3\square P_n) = \lceil \frac{n}{2k-1} \rceil$.

TABLA 6. Valores de dominación a distancia cinco de $P_m\square P_n$ con $1 \leq m \leq 6$, $1 \leq n \leq 12$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
4	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
5	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
6	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3

Para ilustrar la tabla 6 presentamos el siguiente ejemplo el cual muestra una solución óptima del conjunto dominante a distancia cinco del producto cartesiano de $P_3\square P_6$ y $P_6\square P_{11}$, véase la figura 8.



(a) Conjunto dominante mínimo a distancia 5 de $P_3 \square P_6$

(b) Conjunto dominante mínimo a distancia 5 de $P_6 \square P_{11}$

FIGURA 8. Conjuntos dominantes mínimos a distancia cinco de $P_3 \square P_6$ y $P_6 \square P_{11}$

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a los estudiantes que participaron en el equipo que desarrollo el trabajo presente: Luis Macip Hernández y Patricia Leilani Najera Bahena de la Unidad Cuajimalpa y Eduardo Olivares Sotelo y Luis Antonio Ríos Urzúa de la Unidad Iztapalapa, ambas unidades de la Universidad Autónoma Metropolitana. El primer autor fue apoyado por el proyecto CONAHCYT FORDECYT PRONACES/39570/2020 y el apoyo CONAHCYT 852562. La organización del Quinto Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas fue apoyada con recursos aportados por las unidades Cuajimalpa e Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, así como por el CONAHCYT por medio del proyecto CB-47510664.

REFERENCIAS

[1] Berge, C., The theory of graphs and its applications, Methuen & Co. y John Wiley & Sons, 1962.

[2] Chang, T. Y., Clark, W. E., *The domination numbers of the* $5 \times n$ *and* $6 \times n$ *grids graphs*, J. Graph Theory. 17 (1993) 81–107.

[3] Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., Henning, M. A., Domination in graphs—core concepts, Springer, 2023.

[4] Jacobson, M. S. y Kinch, L. F., *On the domination number of products of graphs: I*, Ars. Combin. 18 (1984) 33–34.

[5] Klobučar, A., *On the k-dominating number of Cartesian products of two paths.* Math. Slovaca 55 (2005), No. 2, 141–154.

[6] Meir A., Moon J.W., *Relations between packing and covering numbers of a tree*, Pacific J. Math. 61 (1975) 225–233.

[7] Ore, Ø., Theory of graphs, American Mathematical Society, 1963.

Ilán A. Goldfeder:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: `igoldfeder@izt.uam.mx`

Nahid Yelene Javier Nol:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: nahid@xanum.uam.mx

Lizzeth Ariadna Sánchez Solís:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: lizzeth.sanchez@cua.uam.mx