MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.15, No.1, páginas 353-364.
Recibido 01-08-2023. Aceptado 01-08-2024.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v15n1/sraasm

POLICÍAS Y LADRONES EN GRÁFICAS

SEBASTIÁN FRANCO MARTÍNEZ, AARÓN RODRÍGUEZ GONZÁLEZ PACHECO, RAÚL GONZÁLEZ PÉREZ, SAC-NICTÉ DAMAYANTI SALAS REYES Y MIGUEL TECPA-GALVÁN

Resumen. En este trabajo se estudió el juego de Policías y Ladrones en gráficas, el cual es un juego bipersonal por turnos en los que ambos jugadores mueven sus fichas a lo largo de los vértices de una gráfica y cuyo objetivo para el jugador policía es capturar las fichas del jugador ladrón, mientras que el objetivo de este último es evitar ser capturado. Se elaboró un análisis de este juego, proponiendo estrategias ganadoras para ambos jugadores, así como su relación con estructuras conocidas en gráficas, como los conjuntos dominantes. Finalmente, se estudia el juego en algunas operaciones de gráficas.

1. Introducción

Un juego de *Policías y ladrón* en una gráfica G consiste en un juego bipersonal por turnos. Uno de los dos jugadores, al que llamaremos *Policía*, tiene a su disposición un conjunto de fichas colocadas en los vértices de G, los cuales representan policías; el segundo jugador llamado en lo consecuente *Ladrón*, tiene una única ficha que representa un ladrón. El objetivo del juego es mover a los policías y al ladrón a lo largo de la gráfica por turnos. El jugador Policía gana el juego si es posible capturar a la ficha del ladrón, mientras que el jugador Ladrón gana si siempre es posible escapar de los policías.

Esta clase de juegos fueron introducidos en los años 80's por Nowakoski y Winkler [6] al considerar únicamente una ficha por cada jugador. Sin embargo, debido a sus aplicaciones en diversas áreas de ciencias de la computación, matemáticas discretas e inteligencia artificial, estos juegos se han refinado y adaptado a diversos escenarios, dando lugar a muchos resultados y definiciones relacionados con ellos, así como su estudio en diversas familias particulares de gráficas y gráficas dirigidas (véanse los libros [2] y [3] referentes a estos juegos).

Es importante mencionar que las reglas iniciales del juego determinan la complejidad del mismo y que una misma gráfica puede tener una estrategia ganadora para uno u otro jugador al hacer variar ligeramente las reglas del juego. Aunque nos basamos originalmente en los juegos propuestos en [1] y [6], para fines de este trabajo hicimos modificaciones y adecuaciones a la reglas originales con el objetivo de volver más general el juego. Dichas reglas son las siguientes.

1. Ambos jugadores conocen en todo momento la posición de todas las fichas y tienen conocimiento de la gráfica G.
2. Las fichas, tanto de policías como de ladrón, sólo se pueden mover hacia algún vértice adyacente al vértice en el que se encuentran.
3. El jugador Policía es el primero en colocar sus fichas en los vértices de la gráfica.
4. El jugador Ladrón moverá al empezar el juego.
5. En el turno del jugador Policía, este está obligado a mover al menos una de sus fichas, pero no es necesario que mueva todas ellas.
6. El jugador Ladrón siempre debe mover su ficha en su turno.
7. Si en algún turno al menos una de las fichas de policía está en el mismo vértice que la ficha del ladrón, entonces Policía gana. Si en ningún turno esto es posible, entonces Ladrón gana.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C57, 05C70, 05C76.
Palabras clave. Policías y ladrones, Juegos en gráficas, Operaciones en gráficas.

Debido a que el jugador Policía siempre puede ganar el juego si tiene suficientes fichas, definimos el *número de policía* de una gráfica G, denotado por $p(G)$, como el mínimo número de policías que se necesitan para que el jugador P tenga una estrategia ganadora. Si $p(G) = 1$, diremos que la gráfica es *de policía*. Si $p(G) \geq 2$, diremos que la gráfica es *de ladrón*.

En este trabajo exploraremos este juego de *Policías y ladrones* en algunas operaciones en gráficas, así como algunas cotas del número de policía de una gráfica con otros parámetros conocidos de la misma. Los resultados aquí expuestos fueron obtenidos por alumnos de diversas instituciones durante la semana del V Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas (TOMMAD), llevado a cabo en Mineral del Chico, Hidalgo, en junio de 2023.

2. Conceptos básicos

Todas las gráficas consideradas en este trabajo son simples. Para definiciones y notación no especificadas aquí usaremos [4]. Dada una gráfica G, usaremos la notación $V(G)$ y $E(G)$ para el conjunto de vértices y aristas de G, respectivamente. Una gráfica es *vacía* si no tiene aristas. Si $x \in V(G)$, el conjunto de vecinos de x será denotada por $N(x)$, mientras que su *vecindad cerrada* $N(x) \cup \{x\}$ será denotada por $N[x]$. Si S es un conjunto de vértices, la *vecindad de* S, denotada por $N(S)$ se define como $(\cup_{x \in S} N(x)) \setminus S$, mientras que la *vecindad cerrada de* S, denotada por $N[S]$, se define como $\cup_{x \in S} N[x]$.

Dada una gráfica G, diremos que un conjunto de vértices es *independiente en* G si no hay dos vértices distintos en el conjunto que sean adyacentes. Al máximo número de vértices en un conjunto independiente le llamaremos el *número de independencia de* G y lo denotaremos por $\alpha(G)$. A un conjunto independiente con $\alpha(G)$ elementos le llamaremos *máximo*. Un conjunto independiente, digamos S, es *maximal* si no está contenido propiamente en algún otro conjunto independiente. Si G es una gráfica, definimos el *número inferior de independencia de* G, denotado como $\alpha i(G)$, como $\text{mín}\{|S| : S \text{ es un conjunto independiente maximal en } G\}$

Una *cubierta* en una gráfica G es un conjunto de vértices, digamos S, tales que toda arista de la gráfica tiene como extremo a uno de los vértices en S. Al mínimo número de vértices en una cubierta se le llama el número de cubiertas de G y se denota por $\beta(G)$.

Dada una gráfica G y $D \subseteq V(G)$, diremos que D es *dominante en* G si para todo $x \in V(G) \setminus D$ existe $w \in D$ tal que $xw \in E(G)$. Al cardinal del conjunto dominante más pequeño en G se le conoce como el *número de dominación de* G y se denota por $\gamma(G)$. Se sabe que en toda gráfica G se satisface que $\gamma(G) \leq \alpha(G)$ y que si G no tiene vértices aislados, entonces $\gamma(G) \leq \beta(G)$ (véase [5]).

Un *camino* en una gráfica es una sucesión de vértices $C = (x_0, \ldots, x_n)$ tales que vértices consecutivos son adyacentes. La *longitud* del camino, denotada por $l(C)$, se define como n. Si el camino no repite vértices, diremos que es una *trayectoria*. Si el primer y último vértice del camino son iguales y, salvo dichos vértices, no repite otros vértices, diremos que C es un *ciclo*. A un ciclo de longitud k le diremos k*-ciclo*.

Dado un natural no nulo n, la *gráfica trayectoria de longitud* n, denotada por P_n, se define como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $\{x_0, \ldots, x_n\}$ y conjunto de aristas es $\{x_i x_{i+1} : i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$. Si $n \geq 3$, la *gráfica ciclo de longitud* n, denotada por C_n, se define como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $\{x_0, \ldots, x_n\}$ y conjunto de aristas es $\{x_i x_{i+1} : i \in \{0, \ldots, n\}\}$, donde los índices son tomados módulo n.

Sean G y H dos gráficas. La *unión de* G *y* H, denotada por $G \cup H$, se define como la gráfica tal que $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ y $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. Si además, G y H tienen al menos un vértice en común, entonces la *intersección de* G *y* H, denotada por $G \cap H$, es la gráfica tal que $V(G \cap H) = V(G) \cap V(H)$ y $E(G \cap H) = E(G) \cap E(H)$.

Dadas dos gráficas ajenas en vértices, digamos G y H, la *suma de G y H*, denotada por $G + H$, es la gráfica definida por: $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ y $E(G+H) = \{gh : g \in V(G),\ \ h \in V(H)\} \cup E(G) \cup E(H)$.

Sean dos gráficas G y H ajenas en vértices. El *producto cartesiano de G y H*, denotado por $G \times H$, es la gráfica tal que $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ y dos vértices, digamos (x, u) y (z, v) son adyacentes en $G \times H$ si y si y sólo si:

i) $x = z$ y $uv \in E(H)$ o

ii) $u = v$ y $xz \in E(G)$

Dado un vértice $x \in V(G)$, el *nivel de x en $G \times H$*, denotado por H_x es la subgráfica inducida en $G\times H$ por el conjunto de vértices $\{(u, v) \in V(G\times H) \colon u = x\}$. Análogamente, si $z \in V(H)$, el *nivel de z en $G \times H$*, denotado por G_z es la subgráfica inducida en $G \times H$ por el conjunto de vértices $\{(u, v) \in V(G \times H) \colon v = z\}$. Un resultado conocido de la teoría establece que si $x \in V(G)$, entonces H_x es isomorfa a H y análogamente, si $z \in V(H)$, entonces G_z es isomorfa a G.

La *composición* de una gráfica G respecto de una familia de gráficas ajenas dos a dos, digamos $\{H_v : v \in V(G)\}$, y la cual será denotada por $G[H_v]$, es la gráfica tal que $V(G[H_v]) = \cup_{v\in V(G)}V(H_v)$ y cuyo conjunto de aristas es

$$E(G[H_v]) = \big(\cup_{v\in V(G)}E(H_v)\big) \cup \{xz : x \in V(H_u), z \in V(H_v) \text{ y } uv \in E(G)\}$$

A la gráfica G le llamaremos *base de la composición*, mientras que si $v \in V(G)$, a la gráfica H_v le llamaremos *sumando de v*.

Consideremos una gráfica G en la que está realizándose un juego de *Policías y ladrón*. Denotaremos por A_n al conjunto de vértices que tienen una ficha de Policía al final del n-ésimo turno y por r_n al vértice en el que está la ficha de Ladrón al final del n-ésimo turno. Para fines prácticos, A_0 y r_0 denotarán las posiciones iniciales de Policía y Ladrón, respectivamente. Cuando no es necesario especificar el turno, usaremos simplemente la notación C y r, respectivamente.

Nótese que Policía gana si y sólo si $r_n \in A_n$ para algún natural n. También nótese que $A_n = A_{n+1}$ cuando n es par (pues Policía no mueve sus fichas durante el turno $n + 1$) y $r_n = r_{n+1}$ cuando n es impar (pues Ladrón no mueve sus fichas durante el turno $n + 1$).

3. Parámetros conocidos en gráficas

Los siguientes resultados fueron propuestos por algunos de los alumnos participantes en el TOMMAD 2023 mediante el uso de estructuras conocidas en gráficas.

Lema 1. *Si G es una gráfica, entonces $p(G) \leq \alpha i(G)$.*

Demostración. Consideramos un conjunto independiente maximal de cardinalidad mínima, digamos S. El jugador Policía colocará una ficha en cada vértice de S, es decir, $A_0 = S$. En el turno de Ladrón, si $r_1 \notin A_0$, entonces r_1 debe ser adyacente al menos a un vértice en A_1, pues dicho conjunto es independiente maximal. En tal caso, si $x \in A_1$ es vecino de r_1, entonces Policía puede mover su ficha de x hacia r_1 y capturar la ficha de Ladrón. Así, el jugador Policía tiene estrategia ganadora usando $\alpha i(G)$ fichas, por lo que $p(G) \leq \alpha i(G)$. □

Lema 2. *Si G es una gráfica arbitraria, entonces $p(G) \leq \gamma(G)$.*

Demostración. Sea D un conjunto dominante de cardinalidad mínima en G y supongamos que el jugador Policía coloca sus fichas en D, es decir, $A_0 = D$. En el turno de Ladrón, el vértice r_1 es adyacente al menos a un vértice en A_1, digamos x. En tal caso, en el segundo turno el jugador Policía puede mover la ficha en x sobre r_1 y capturar la ficha de Ladrón. Así, el jugador Policía tiene una estrategia ganadora usando $\gamma(G)$ fichas, por lo que $p(G) \leq \gamma(G)$. □

Corolario 3. *Si G es una gráfica sin vértices aislados, entonces*

a) $p(G) \leq \beta(G)$ y

b) $p(G) \leq \alpha(G)$.

Demostración. Se sigue del lema 2 y del hecho de que $\gamma(G) \leq \alpha(G)$ y que $\gamma(G) \leq \beta(G)$ cuando G no tiene vértices aislados. □

Los siguientes resultados son familias de gráficas en las que Policía gana usando una única ficha.

Lema 4. *Para todo $l \geq 2$ se satisface que $p(P_l) = 1$.*

Demostración. Sea $P_l = (v_0, v_1, ..., v_l)$. Coloquemos un policía en v_0 y en el i-ésimo turno de Policía, movemos su ficha del vértice v_{i-1} hacia v_i, de esta forma, con cada turno vamos restringiendo la subgráfica accesible para el Ladrón a una subgráfica P_{l-i}. De este modo, en a lo más $l-2$ turnos se logra atrapar al ladrón. Por tanto $p(P_l) = 1$. □

Lema 5. *Si G es un árbol, entonces $p(G) = 1$.*

Demostración. Para esta demostración, basta ver que en cada turno de Policía, si $(x_0, \ldots, x_n)$ denota la única Cr-trayectoria en G, entonces Policía puede mover su ficha de x_0 hacia x_1. Dado que G es un árbol, eventualmente Policía logra capturar a Ladrón con esta estrategia. □

En algunos casos, será necesario el uso de más de una ficha para que Policía tenga una estrategia ganadora.

Lema 6. *Sea $l \in \mathbb{N}$. Si $l = 3$, entonces $p(C_l) = 1$ y para todo $l \geq 4$ se satisface que $p(C_l) = 2$.*

Demostración. Claramente, si $l = 3$ se tiene que C_l es una gráfica completa con tres vértices, en la cual $\gamma(C_l) = 1$. Por el lema 2, se concluye que $p(C_l) = 1$. Ahora supongamos que $l \geq 4$ y que $C = (v_0, \ldots, v_l)$.

Coloquemos dos policías en vértices adyacentes, digamos $A_0 = \{v_0, v_1\}$. En el i-ésimo turno de Policía, este jugador moverá la ficha en el vértice v_i hacia v_{i+1}, mientras que la ficha colocada en v_0 permanecerá fija. De esta forma el jugador Policía captura la ficha de Ladrón en a lo mucho $l-1$ de sus turnos, por lo que $p(C_l) \leq 2$.

Por otro lado, si Policía tiene una única ficha colocada en C_l, digamos en el vértice en v_k, el Ladrón puede colocar su ficha en v_{k+1}, donde los índices son tomados módulo l. En el primer turno Ladrón se mueve a v_{k+2}. Policía sólo se puede mover a v_{k+1} o a v_{k-1}. En el primer caso, Ladrón se puede mover a v_{k+3} o en el segundo caso hacia v_{k+1}. Nótese que como $l \geq 4$, entonces en cada turno de Ladrón se tiene que $d(r, C) = 2$, por lo que Ladrón tiene estrategia ganadora. Con ello, $p(C_l) = 2$. □

4. Estrategias ganadoras

En esta sección veremos algunas estrategias ganadoras tanto para Ladrón como para Policía. Más aún, caracterizaremos las estrategias ganadoras de Ladrón y, con ello, podremos caracterizar las estrategias ganadoras de Policía.

4.1. Sobre la estrategia ganadora de Ladrón. Dada una gráfica G en la que se realiza un juego de *Policías y ladrones*, diremos que Ladrón *está seguro al inicio del n-ésimo turno* si (i) n es par y $r_{n-1} \notin N[A_{n-1}]$ o (ii) n es impar y existe $x \in N(r_{n-1})$ tal que $x \notin N[A_{n-1}]$. Notemos que la idea anterior refleja la noción de seguridad para Ladrón en el turno n.

Lema 7. *Sea G una gráfica en el que se realiza un juego de Policía y ladrón. Si Ladrón está seguro al inicio del n-ésimo turno, entonces existe una manera de jugar de tal forma que en el siguiente movimiento de Policía, este no puede capturar la ficha de Ladrón.*

Demostración. Es importante recordar que r_{n-1} indica el vértice en el que se encuentra la ficha de Ladrón al inicio del turno n y A_{n-1} es el conjunto de vértices en los que están las fichas de Policía al inicio del turno n. Análogamente r_n indica el vértice en el que se encuentra la ficha de Ladrón al final del turno n y A_n es el conjunto de vértices en los que están las fichas de Policía al final del turno n. La demostración la realizaremos por casos respecto a n.

- **Caso 1**. n es par.
  En este caso, el jugador que debe mover en el turno n es Policía. Ya que Ladrón está seguro al inicio de este turno, entonces $r_{n-1} \notin N[A_{n-1}]$, por lo que sin importar el movimiento de Policía, no es posible que $r_n \in A_n$, concluyendo que Policía no puede capturar la ficha de Ladrón en el turno n.
- **Caso 2**. n es impar.
  En este caso, el jugador que debe mover en el turno n es Ladrón. Como Ladrón está seguro al inicio de este turno, entonces existe $x \in N(r_{n-1})$ tal que $x \notin N[A_{n-1}]$. Si movemos en este turno la ficha de Ladrón hacia el vértice x entonces $r_n = x$ y, en particular, por elección de x, $r_n \notin N[A_n]$. Debido a que $n+1$ es par, Policía debe mover en este turno, pero por lo mostrado en el caso anterior, Policía no puede capturar durante su turno a la ficha de Ladrón.

Por los casos antes mencionados, existe una manera de jugar de Ladrón de tal forma que en el siguiente movimiento de Policía, este no puede capturar la ficha de Ladrón. □

Con lo anterior podemos caracterizar la estrategia ganadora de Ladrón mediante la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 8. *Sea G una gráfica en el que se realiza un juego de Policías y ladrón. Ladrón tiene una estrategia ganadora si y sólo si Ladrón puede estar seguro al inicio de cualquier turno.*

Demostración. Si Ladrón está seguro al inicio de cualquier turno, es claro que, por el lema 7, se sigue que Ladrón tiene una estrategia ganadora, por lo que mostraremos que si Ladrón tiene una estrategia ganadora, es porque está seguro al inicio de cualquier turno.

Consideremos un turno arbitrario n y dos posibles casos para n.

- **Caso 1**. n es par.
  En este caso, el jugador que debe mover es Policía. Suponiendo que Ladrón ha jugado usando su estrategia ganadora, no es posible que al final de este turno Policía capture la ficha de Ladrón, ello implica que al inicio de este turno r_{n-1} no puede estar ocupada por una ficha de Policía, es decir, $r_{n-1} \notin A_{n-1}$ y, además, no puede ser vecina de ninguna ficha de Policía pues de lo contrario, Policía puede capturarlo en ese turno, por lo que $r_{n-1} \notin N(A_{n-1})$, concluyendo que $r_{n-1} \notin N[A_{n-1}]$.
- **Caso 2**. n es impar.
  En este caso, el jugador que debe mover es Ladrón. Debido a que Ladrón tiene una estrategia ganadora, existe un vecino de r_{n-1}, digamos w, hacia la cual puede mover su ficha de tal manera que: (i) Policía no captura a la ficha de Ladrón al final del turno n y (ii) Policía no puede atrapar la ficha de Ladrón al final del turno $n+1$. Así, por (i) podemos garantizar que $w \notin A_{n-1}$ y por (ii) se sigue que $w \notin N(A_{n-1})$. Con ello, w es un vecino de r_{n-1} tal que $w \notin N[A_{n-1}]$.

De los casos anteriores, y por definición, se concluye que Ladrón está a salvo al inicio del n-ésimo turno. Como n fue arbitrario, concluimos nuestra demostración. □

Como una aplicación de la proposición anterior se tiene el siguiente resultado.

COROLARIO 9. *Si G es una gráfica sin 3-ciclos y sin 4-ciclos, entonces se satisface que $p(G) \geq \delta(G)$.*

Demostración. Primero mostraremos la siguiente afirmación

- **Afirmación 1.** Si S es un conjunto de vértices con menos de $\delta(G)$ elementos, entonces para todo $x \in V(G)$, $N(x) \nsubseteq N[S]$.

  Procederemos por contradicción y supondremos que $N(x) \subseteq N[S]$. Sean $w_1, \dots, w_n$ los vecinos de x que se encuentran en $N(S)$ y $w'_1, \dots, w'_m$ los vecinos de x en S. Nótese que $\delta(G) \leq n + m$. Ahora, por definición de $N[S]$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe $t_i \in S$ tal que $w_i t_i \in E(G)$. Notemos que, como G no tiene 3-ciclos, entonces para toda $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$ se cumple que $t_i \neq w'_j$. Más aún, como G no tiene 4-ciclos, entonces para toda $i, j \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $t_i \neq t_j$ si $i \neq j$. Con lo anterior, podemos concluir que $t_1, \dots, t_n, w_1 \dots, w_m$ son vértices distintos en S, por lo que $n + m \leq |S|$, sin embargo, por suposición sabemos que $|S| < \delta(G)$, lo cual no es posible pues $\delta(G) \leq n+m$ como habíamos hecho notar. Así podemos concluir que para todo $x \in V(G)$, $N(x) \nsubseteq N[S]$.

Retomando la demostración del corolario, supongamos que Policía tiene menos de $\delta(G)$ fichas en juego y mostraremos que Ladrón tiene una estrategia ganadora mediante el uso de la proposición 8. Al inicio del juego, como A_0 tiene menos de $\delta(G)$ elementos, entonces la afirmación 1 implica, en particular, que $V(G) \neq N[A_0]$, por lo que existe un vértice x para el cual $x \notin N[A_0]$. Ladrón colocará su ficha en x para iniciar el juego. Note que, por la afirmación 1, podemos considerar un vecino de x, digamos x', tal que $x' \notin N[A_0]$. Así Ladrón está a salvo al inicio del turno 1 y puede mover su ficha de x hacia x'. Con ello, $r_1 = x'$ y como Policía no mueve sus fichas en este turno, entonces $A_1 = A_0$, así, en el turno 2 se tiene que $r_1 \notin N[A_1]$, por lo que Ladrón está seguro al inicio del turno 2.

Nuevamente, por la afirmación 1, se tiene que x' tiene un vecino, digamos x'' tal que $x'' \notin N[A_1]$, por lo que Ladrón está seguro al inicio del turno 3 y desplazando su ficha de x' hacia x'', estará seguro al inicio del turno 4. Continuando de esta manera podemos concluir, gracias a la proposición 8, que Ladrón tiene una estrategia ganadora si Policía tiene menos de $\delta(G)$ fichas, por lo que $\delta(G) \leq p(G)$. □

4.2. Sobre la estrategia ganadora de Policía. A pesar de que la proposición 8 caracteriza la estrategia ganadora de Ladrón y, por consiguiente, a la estrategia ganadora de Policía, nosotros propondremos la caracterización de la estrategia de Policía de una manera más intuitiva pensando que, si a partir de cierto turno, Policía puede aproximar cada vez más sus fichas hacia Ladrón, entonces éste último terminará siendo capturado. Con esto en mente, tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 10. *Sea G una gráfica en el que se realiza un juego de Policía y ladrón. Policía tiene una estrategia ganadora si y solo si existe un turno n a partir del cual existe una manera de jugar de Policía de tal forma que para toda $m \geq n$, $d(r_{m+1}, A_{m+1}) < d(r_m, A_m)$.*

Demostración. Primero mostraremos que si Policía tiene una estrategia ganadora, entonces a partir de cierto turno n existe una manera de jugar de Policía de tal forma que si $m \geq n$, $d(r_{m+1}, A_{m+1}) < d(r_m, A_m)$. Debido a que Policía tiene una estrategia ganadora, éste logra capturar a la ficha de Ladrón en algún turno k. Notemos que en dicho caso, $r_k \in A_k$ y por consiguiente, $d(r_k, A_k) = 0$. Sin embargo, en el turno anterior Policía aún no había capturado la ficha de Ladrón, por lo que $r_{k-1} \notin A_{k-1}$, es decir, $d(r_{k-1}, A_{k-1}) \neq 0$. En particular, $d(r_k, A_k) < d(r_{k-1}, A_{k-1})$, mostrando lo deseado.

Ahora mostraremos la otra condicional. Para ello, como existe un turno n a partir del cual hay una manera de jugar de Policía tal que $d(r_{m+1}, A_{m+1}) < d(r_m, A_m)$ si $m \geq n$, se tiene que a lo mucho en una cantidad finita de pasos obtenemos que $d(r_t, A_t) = 0$ para alguna $t \geq n$, por lo que si Policía juega de dicha manera, gana el juego. □

5. Operaciones en gráficas

En esta última sección abordaremos el juego de Policías y Ladrón en algunas operaciones de gráficas.

5.1. Unión de gráficas.

Proposición 11. *Si G y H son dos gráficas ajenas en vértices, entonces se satisface que $p(G \cup H) = p(G) + p(H)$.*

Demostración. Primero mostraremos que $p(G \cup H) \leq p(G)+p(H)$. Para ello el jugador Policía colocará $p(G)+p(H)$ fichas en $G \cup H$ poniendo $p(G)$ fichas en G y $p(H)$ fichas en H. Debido a que Ladrón sólo puede colocar su ficha en G o en H, entonces Policía tiene una estrategia ganadora en la gráfica que Ladrón ponga su ficha, por lo que bastan $p(G) + p(H)$ fichas de Policía para que este tenga una estrategia ganadora y así $p(G \cup H) \leq p(G) + p(H)$.

Ahora mostraremos que no es posible que $p(G \cup H) < p(G) + p(H)$. Supongamos que Policía tiene menos de $p(G) + p(H)$ fichas en $G \cup H$. Dado que Policía coloca primero sus fichas, entonces en G o en H debe haber menos de $p(G)$ fichas o menos de $p(H)$ fichas, respectivamente. Supongamos sin pérdida de generalidad que Policía tiene menos de $p(G)$ fichas en G. En tal caso, Ladrón puede colocar su ficha en G y realizar todo el juego solamente en dicha gráfica.

Debido a que en G hay menos de $p(G)$ policías, Ladrón tiene una estrategia ganadora en G, la cual también es una estrategia ganadora en $G \cup H$. Así, Policía no tiene una estrategia ganadora en $G \cup H$ usando menos de $p(G) + p(H)$ fichas, por lo que $p(G \cup H) = p(G) + p(H)$. □

Como una consecuencia directa de lo anterior, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 12. *Sean G una gráfica y $\{H_i\}_{i=1}^k$ la familia de sus componentes conexas. El número de policía de G está determinado por:*

$$p(G) = \sum_{i=1}^{k} p(H_i).$$

Demostración. Para esta demostración procederemos por inducción sobre el número de componentes conexas de la gráfica. Si G tiene una única componente conexa, entonces $G = H_1$ y con ello $p(G) = \sum_{i=1}^{1} p(H_i)$.

Ahora supondremos que si G' es una gráfica con n componentes conexas $H_1', \ldots, H_n'$, entonces $p(G') = \sum_{i=1}^{n} p(H_i')$. Para el paso inductivo consideremos una gráfica con $n+1$ componentes conexas $H_1, \ldots, H_{n+1}$. Si consideramos la gráfica G' que consta de las componentes conexas $H_1, \ldots, H_n$, entonces por hipótesis de inducción sobre G' se tiene que $p(G') = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)$. Luego, por la proposición 11 se sigue que

$$\begin{aligned} p(G' \cup H_{n+1}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} p(H_i) + p(H_{n+1}) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} p(H_i) \end{aligned}$$

Pero $G = G' \cup H_{n+1}$, concluyendo que $p(G) = \sum_{i=1}^{n+1} p(H_i)$. □

Ahora analizaremos el juego en la unión de gráficas que no son ajeas en vértices.

Proposición 13. *Si G y H son dos gráficas conexas con al menos un vértice en común, entonces:*

$$p(G \cup H) \leq \max\{p(G), p(H)\} + |V(G) \cap V(H)|$$

Demostración. Sean G y H dos gráficas conexas con al menos un vértice en común. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p(G) \geq p(H)$, y sea $k = |V(G) \cap V(H)|$. Para la estrategia de Policía colocamos $p(G)$ policías en G y luego ponemos k policías en los vértices de la intersección de G y H. Estas últimas fichas no se moverán a lo largo del juego, de este modo podemos asegurar que Ladrón no se podrá colocar en algún vértice de la intersección y que se quedará restringido a moverse en la subgráfica G o en H.

Si Ladrón se posiciona en G, podemos usar los $p(G)$ policías para capturarlo. Si Ladrón coloca su ficha en H, podemos mover sólo $p(H)$ de las $p(G)$ fichas de Policía colocadas en G hacia H y usar la estrategia ganadora de Policía en H para capturar al ladrón. Así Policía tiene una estrategia ganadora en $G \cup H$ usando $p(G) + k$ fichas, concluyendo que $p(G \cup H) \leq \text{máx}\{p(G), p(H)\} + |V(G) \cap V(H)|$. □

Es importante señalar que la desigualdad anterior no necesariamente es justa. Por ejemplo, si G y H son árboles con un único vértice en común, entonces la proposición 13 indicaría que $p(G \cup H) \leq 2$. Sin embargo, como $G \cup H$ es un árbol, entonces $p(G \cup H) = 1$, mostrando la desigualdad estricta de la proposición anterior.

Más aún, bajo ciertas condiciones, podemos mejorar la cota anterior.

Proposición 14. *Si G y H son dos gráficas conexas con al menos un vértice en común tales que $G \cap H$ tiene un vértice dominante, entonces:*

$$p(G \cup H) \leq \text{máx}\{p(G), p(H)\} + 1$$

Demostración. Sean G y H dos gráficas conexas y no ajenas tal que $p(G) \geq p(H)$ y v un vértice dominante en $G \cap H$. Para la estrategia ganadora de Policía colocamos un policía en v, el cual no se moverá en todo el juego. De este modo restringimos al ladrón a moverse sólo en G o en H pues al intentar moverse de G hacia H o al revés, sería atrapado por el policía que se encuentra en v.

Al igual que en la proposición anterior, si el ladrón se posiciona en G, podemos usar los $p(G)$ policías para capturarlo. Si Ladrón coloca su ficha en H, podemos mover sólo $p(H)$ de las $p(G)$ fichas de Policía colocadas en G hacia H y usar la estrategia ganadora de Policía en H para capturar al ladrón. Así Policía tiene una estrategia ganadora en $G \cup H$ usando $p(G) + 1$ fichas, concluyendo que $p(G \cup H) \leq \text{máx}\{p(G), p(H)\} + 1$. □

5.2. Suma de gráficas.

Proposición 15. *Si G y H son dos gráficas, entonces $p(G + H) \leq 2$.*

Demostración. Por definición de suma de gráficas, cualquier vértice en H domina a G y cualquier vértice en G domina a H, por lo que $\gamma(G + H) \leq 2$. Por el lema 2, se tiene que $p(G + H) \leq \gamma(G + H)$, concluyendo que $p(G + H) \leq 2$. □

Es importante mencionar que la cota anterior puede ser justa en algunos casos, como en el siguiente lema.

Lema 16. *Si G y H son ciclos de longitud al menos 4, entonces $p(G + H) = 2$.*

Demostración. Procederemos por contradicción y supondremos que $p(G + H) = 1$ y, sin pérdida de generalidad, Policía coloca su única ficha en G. Ladrón puede colocar también su única ficha en G de tal modo que tenga una estrategia ganadora en G. Si Policía mueve su ficha dentro de G, entonces Ladrón puede mover su ficha en G siguiendo su estrategia ganadora. Si Policía mueve su ficha de G hacia H, Ladrón puede mover su ficha también hacia H de tal forma que se mantenga a distancia 2 de la ficha de Policía. La situación en el caso de que Policía mueva su ficha en H o que la mueva de H hacia G puede ser resuelta por Ladrón de manera análoga y garantizar que su ficha no sea capturada. Con ello, Policía no puede capturar a Ladrón. □

De igual forma, la cota del lema 15 puede ser estricta bajo ciertas circunstancias.

Lema 17. *Sean G y H gráficas. Si G o H tiene un vértice dominante, entonces $p(G + H) = 1$.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, supongamos que $v \in V(G)$ es dominante en G. Notemos que $\{v\}$ es un conjunto dominante de $G + H$, por lo que de acuerdo al lema 2, $p(G + H) \leq \gamma(G + H) = 1$. Por tanto $p(G + H) = 1$ □

5.3. Composición.

PROPOSICIÓN 18. *Sean G una gráfica conexa no trivial y $\{H_v : v \in V(G)\}$ una familia de gráficas ajenas dos a dos. Si G es una gráfica de policías, entonces* $p(G[H_v]) \leq 2$.

Demostración. Para esta probar este resultado mostraremos una estrategia ganadora para Policía usando sólo dos fichas de Policía a las que llamaremos x_G y z_G. Dado que Policía tiene en G una estrategia ganadora con una sola ficha, dicha estrategia en G inicia colocando una ficha de Policía, digamos x, en un vértice w. Así, considerando ahora la gráfica $G[H_v]$, colocaremos a x_G en cualquier vértice de H_w.

La idea del vértice x_G en $G[H_v]$ será replicar los movimientos de la estrategia ganadora de x en G, es decir, si parte de la estrategia en G es mover la ficha x de un vértice r hacia un vértice s, entonces Policía replicará esta estrategia moviendo a x_G de algún vértice de H_r hacia cualquier vértice de H_s.

La segunda ficha z_G la colocaremos en cualquier vértice de la gráfica $H_{w'}$, donde w' es cualquier vecino de w en G. Esta ficha, en el turno $n+2$, siempre se moverá a la posición que tenía la ficha x_G en el turno n. Notemos que esto siempre será posible por la definición de $G[H_v]$ y la posición inicial de z_G.

Nótese que, con esta estrategia las fichas de Policía, en cada turno, estarán colocadas en dos subgráficas distintas H_s y H_t, pero con la peculiaridad de que s y t son vecinos en G. Así, la ficha de Ladrón no puede estar en una subgráfica H_s si x_G está en dicha subgráfica, pues en el siguiente turno sería capturada por la ficha z_G. Análogamente Ladrón no puede colocar su ficha en H_s si z_G está en dicha subgráfica.

Si en un turno n Ladrón mueve su ficha de una subgráfica H_s hacia otra subgráfica H_t ($s \neq t$) en $G[H_v]$, puede pensarse como una jugada que Ladrón realiza al mover una ficha de s hacia t en la gráfica G. En tal caso, en el turno $n+1$ Policía puede mover su ficha x_G replicando su estrategia ganadora en G y asegurar que la distancia de sus fichas hacia la ficha de ladrón en $G[H_v]$ se reduce (proposición 10).

Por otro lado, si en el turno n Ladrón mueve su ficha colocada en algún vértice de H_r hacia otro vértice de H_r, entonces en el turno $n+1$ Policía moverá su ficha x_G de tal forma que reduzca su distancia respecto a la ficha de Ladrón en $G[H_v]$. En cualquier caso, gracias a la proposición 10, se tiene que Policía tiene una estrategia ganadora en $G[H_v]$. $\square$

Es importante recalcar que la cota superior de la proposición anterior puede ser justa. En el caso de que G sea la gráfica completa de orden 2 y $\{H_v : v \in V(G)\}$ es una familia de ciclos de longitud 4, entonces el lema 16 nos garantiza que $G[H_v]$ no es una gráfica de policía y, en particular, $p(G[H_v]) = 2$.

Con la idea de la proposición 18 en mente, se realizó un estudio del comportamiento de la estrategia ganadora de Policía en la composición de gráficas cuando la base G no necesariamente es de policía. A partir de dicho estudio se conjeturó de manera inicial que se requerían a lo mucho $p(G)+1$ policías para obtener una estrategia ganadora en la composición. Sin embargo, no se logró obtener una demostración formal de dicha idea, por lo que tenemos el siguiente problema abierto.

PROBLEMA ABIERTO 1. *Si G es una gráfica y $\{H_v : v \in V(G)\}$ es una familia de gráficas ajenas en vértices dos a dos, entonces* $p(G[H_v]) \leq p(G) + 1$.

5.4. Producto cartesiano. En el caso del producto cartesiano de dos gráficas, digamos G y H, se usó fuertemente que los niveles son isomorfos a G o H. Así, un juego de Policía y Ladrón se está realizando en $G \times H$ puede verse como un juego simultáneo en las dos gráficas G y H.

Por ejemplo, si la ficha de Ladrón está en un vértice (x, u), entonces dicha ficha sólo se podrá mover a algún vecino de dicho vértice, digamos (z, v). Según la definición de producto cartesiano hay dos posibilidades. Si x y z son vecinos en G, entonces la jugada de Ladrón en $G \times H$ puede interpretarse como si Ladrón hubiera movido su ficha en G de x hacia z. Análogamente, si u y v son vecinos en H, entonces la jugada de Ladrón en $G \times H$ puede interpretarse como si hubiese movido su ficha de u hacia v en H. La situación con las jugadas de Policía son análogas.

PROPOSICIÓN 19. *Si* $n, m \in \mathbb{N}$, *entonces* $p(P_n \times P_m) \leq 2$

Demostración. Supongamos que $P_n = (x_0, \dots, x_n)$ y que $P_m = (z_0, \dots, z_m)$. Para fines de simplificar notación, denotamos a P_n como G y a P_m como H. Mostraremos que con dos fichas el jugador Policía tiene una estrategia ganadora.

Iniciamos colocando una ficha de Policía, digamos C_1, en (x_0, z_0) y la otra ficha C_2 en (x_n, z_m). Dado que Policía tendrá estrategia ganadora, será indistinto dónde coloque Ladrón su ficha. Primero, Policía moverá C_1 recorriendo el nivel H_{x_0} (el cual es isomorfo a P_m) hasta que C_1 esté en el mismo nivel G_{z_i} que la ficha de Ladrón, a la que llamaremos r. A partir de este punto, si Ladrón mueve su ficha de un nivel G_{z_k} hacia $G_{z_{k'}}$, entonces Policía moverá igualmente su ficha C_1 en la misma dirección para garantizar que C_1 y r estén siempre en el mismo nivel isomorfo a G. En otro caso, no moverá a la ficha C_1, pero sí deberá mover la ficha C_2 (es importante tener en consideración la regla 5 del juego) como lo indicaremos a continuación. Una vez que C_1 y r están en el mismo nivel G_{z_i}, Policía empezará a mover su ficha C_2 recorriendo el nivel G_{z_m} (el cual es isomorfo a P_n) hasta que C_2 y r estén en el mismo nivel isomorfo a H.

En resumen, es posible que en algún turno del juego la ficha C_1 y r estén en el mismo nivel G_{z_i} y simultáneamente C_2 y r estén en el mismo nivel H_{x_j}. A esta propiedad le llamaremos *propiedad de permanencia*.

Esto último, intuitivamente hablando, podemos verlo como que Ladrón tiene su ficha r en el vértice x_j de la gráfica G y Policía tiene su ficha C_1 en x_0 de dicha gráfica. Y simultáneamente Ladrón tiene su ficha r en z_i de la gráfica H y Policía tiene su ficha C_2 en z_m de dicha gráfica.

En este punto, Policía moverá sus fichas de acuerdo a lo siguiente:

Si r está en un vértice (x_j, z_i) y se mueve hacia $(x_{j'}, z_i)$, es decir, se mueve dentro del nivel G_{z_i}, entonces Policía moverá su ficha C_1 dentro del nivel G_{z_i} aproximándose a r y reduciendo o manteniendo la distancia entre C_1 y r en G_{z_i} (esto es lo mismo que una jugada de Policía y Ladrón en la gráfica G, donde Policía tiene estrategia ganadora). Además, Policía moverá su ficha C_2 hacia el mismo nivel $H_{x_{j'}}$ al que Ladrón movió su ficha. Esto garantiza que la distancia ente C_2 y r se mantiene y, además, estas nuevas posiciones de las fichas tienen la propiedad de permanencia.

De manera análoga, si r se mueve hacia $(x_j, z_{i'})$, es decir, se mueve dentro del nivel H_{x_j}, entonces Policía moverá su ficha C_2 dentro del nivel H_{x_j} aproximándose a r y reduciendo o manteniendo la distancia entre C_2 y r en H_{x_j} (esto es lo mismo que una jugada de Policía y Ladrón en la gráfica H, donde Policía tiene estrategia ganadora). Además, Policía moverá su ficha C_1 hacia el mismo nivel $H_{z_{i'}}$ al que Ladrón movió su ficha. Esto garantiza que C_1 y r mantienen su distancia y, además, que las posiciones de las fichas tienen la propiedad de permanencia.

Notemos que las jugadas anteriores de policía nos garantizan que se preserva la propiedad de permanencia, pero en cada turno de Policía, sus fichas reducen o conservan su distancia respecto de r. Sin embargo, con esta estrategia, a partir de cierto punto la ficha r sólo podrá moverse en el nivel G_{z_0} o en el nivel H_{x_n} y eventualmente ser capturado a lo más en el vértice (x_n, z_0). □

Con la idea de la proposición 19 conjeturamos que se requerían a lo mucho $p(G) + p(H)$ policías para obtener una estrategia ganadora en el producto cartesiano de G y H, pero por cuestiones de tiempo no se logró obtener una demostración formal de dicha idea, por lo que tenemos el siguiente problema abierto.

PROBLEMA ABIERTO 2. *Si G y H son gráficas conexas y ajenas en vértices, entonces* $p(G \times H) \leq p(G) + p(H)$.

AGRADECIMIENTOS. Los autores desean agradecer a los coordinadores del V Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas por el espacio y los recursos puestos a disposición para la elaboración del trabajo presentado, así como la oportunidad para el acercamiento a alumnos de licenciatura a temas de investigación en Matemáticas Discretas. Además, se agradece el apoyo de CONAHCYT mediante el proyecto CB-47510664. Miguel Tecpa-Galván está realizando una estancia posdoctoral en la Universidad Autónoma Metropolitana en el proyecto CONAHCYT FORDECYT-PRONACES/39570/2020.

Referencias

[1] M. Aigner & M. Fromme. *A game of cops and robbers*, Discrete. App. Math., 8, no. 1, 1–11, 1984.
[2] A. Bonato. An invitation to Pursuit-Evasion Games and Graph Theory. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 2022.
[3] A. Bonato & R.J. Nowakowski. The game of Cops and Robbers in Graphs. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 2022.
[4] G. Chartrand & P. Zhang. Chromatic Graph Theory. Discrete Math. Appl., CRC Press. Boca Raton, Florida, 2009.
[5] W. Haynes, S. Hedetniemi & P. Slater. Fundamentals of domination in graphs. CRC Press. Boca Raton, Florida, 1998.
[6] R. Nowakowski & P. Winkler, *Vertex-to-vertex pursuit in a graph*, Discrete Math., 43, 2-3, 235–239, 1983.

Sebastián Franco Martínez:
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: `sebastian.franco@cua.uam.mx`

Aarón Rodríguez González Pacheco
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias.
Circuito de la Investigación Científica, Ciudad Universitaria
Alcaldía Coyoacán, C.P. 04510 Ciudad de México, México
e-mail: `aaronrgp@ciencias.unam.mx`

Raúl González Pérez
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: `raul.gonzalez@cua.uam.mx`

Sac-Nicté Damayanti Salas Reyes
Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ciencias.
Investigación Científica, Ciudad Universitaria
Alcaldía Coyoacán, C.P. 04510 Ciudad de México, México
e-mail: `nictesalas@ciencias.unam.mx`

Miguel Tecpa-Galván
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1ª sección
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: miguel.tecpa@ciencias.unam.mx