

# mixba'al

Revista Metropolitana de Matemáticas

[www.doi.org/1024275/uami/dcbi/mix/2024](http://www.doi.org/1024275/uami/dcbi/mix/2024)

ISSN: 2007-7874



*Revista de divulgación e investigación del Departamento de Matemáticas de la UAM-I, dedicada a promover las ideas y la creación de todos aquellos interesados en el quehacer matemático.*



Vol. 15, No.1, enero-diciembre del 2024



# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

## Directorio

**José Antonio de los Reyes Heredia**  
Rector General.

**Verónica Medina Bañuelos**  
Rectora Unidad Iztapalapa.

**Román Linares Romero**  
Director de CBI, UAM-Iztapalapa.

**Raúl Montes de Oca Machorro**  
Jefe del Departamento de Matemáticas,  
UAM-Iztapalapa.

**Coordinador Editorial**  
**Mario Pineda Ruelas**  
mpr@xanum.uam.mx

## Comité Editorial

**Elsa Baez Juárez**  
ebaez@cua.uam.mx

**Shirley Bromberg Silverstein**  
stbsster@gmail.com

**Judith Campos Cordero**  
judith@ciencias.unam.mx

**Martín Celli Siboni,**  
celli@xanum.uam.mx

**Pedro L. del Ángel Rodríguez**  
luis@cimat.mx

**Begoña Fernández**  
bff@ciencias.unam.mx

**Silvia Gavito Ticozzi**  
sgt@correo.azc.uam.mx

**Gustavo Izquierdo Buenrostro**  
iubg@xanum.uam.mx

**L. Héctor Juárez Valencia**  
hect@xanum.uam.mx

**Jorge A. León Vázquez**  
jleon@ctrl.cinvestav.mx

**Roberto Quezada Batalla**  
roqb@xanum.uam.mx

**Edith Corina Sáenz Valadez**  
ecsv@ciencias.unam.mx

**Martha L. Shaid Sandoval Miranda**  
marlisha@gmail.com

**Ekaterina Todorova**  
todorova@cimat.mx

**Luis Miguel Villegas Silva**  
villegas63@gmail.com

---

**Editor web Pedro Iván Blanco Boa**  
ivanblc@gmail.com

**Diseño logo Michael Rivera Arce**  
**Portada archivo histórico de la UAM**

MIXBA'AL. Vol. 15, No. 1, enero-diciembre de 2024, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Alcaldía Tlalpan, C.P. 14387, CDMX, México y Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, No. 186, Col. Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Tel. 5804 4658. Página electrónica de la revista: <http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revistamixba-al/>

Correos electrónicos: mixbaal2009@gmail.com, mixb@xanum.uam.mx. Coordinador Editorial Mario Pineda Ruelas. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No. 04-2023-07031 1572300-102, ISSN: 2007-7874, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número Mario Pineda Ruelas, Departamento de Matemáticas, edificio AT, oficina 318. División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco No. 186, Colonia Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Fecha de última modificación 30 de agosto de 2024. Tamaño del archivo 21.3 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

## **Presentación**

Queridos lectores. Este número de MIXBA'AL tiene un significado muy especial para los que trabajamos en la UAM-Iztapalapa porque cumplimos 50 años de vida, 50 años de trabajo intenso que nos ha llevado a convertirnos en una de las universidades públicas más importantes de México. El 30 de septiembre de 1974 la UAM-Iztapalapa abre sus puertas a la sociedad. Tenemos retos, sí, pero de eso vivimos, de los retos que nos impone el día a día. La foto de la portada nos ilustra un inicio difícil y que gracias a todos los que han confiado en nosotros, estamos aquí, trabajando para la sociedad.

Larga vida a la educación pública... larga vida a la UAM.



## CONTENIDO

---

- 7 Presentación
- 9 *Introducción al cálculo fraccionario. Una aplicación a la ley de enfriamiento de Newton*  
Lozada Coronel J. Gutiérrez Corona J.N. Quezada Téllez L.A.
- 37 *Subastas como juegos con información completa e incompleta*  
Teresa Pérez Muñoz
- 51 *El Programa de Langlands y su aplicación al problema inverso de la Teoría de Galois*  
Adrián Zenteno
- 67 *Una nota acerca de la derivada de  $f(x) = x^\alpha$ , cuando  $\alpha \neq 0$*   
Belem Garcés Martínez y Victor C. García Hernández
- 73 *La fórmula de Leibniz y el truco favorito de Feynman*  
Eusebio Ariza García, Luis Arteaga, Jhon Duta, Edwin Hurtado, Ray Moya, Manuel Muñoz
- 95 *On the coefficients of the polynomial induced by reciprocal roots revisited*  
Jorge E. Macías Díaz, Brian Villegas Villalpando
- 99 *El movimiento browniano*  
David Márquez Carreras
- 125 *Las matemáticas babilónicas de 4000 años*  
Gabriel López Garza
- 139 *Una versión del método de Kudryashov para la solución de algunas EDPS no lineales que surgen en la física matemática*  
Oswaldo González-Gaxiola
- 151 *Distribuciones de probabilidad y regiones condicionantes*  
Luis Rincón, Emmanuel Delgadillo
- 169 *A new proof of Ionesco-Weitzenbock's inequality, using a linear map*  
Martin Celli
- 171 *Automatización y su impacto en el quehacer matemático*  
Patricia Saavedra Barrera
- 175 *Ondas hiperbólicas, dispersivas y no lineales*  
Jesús Adrián Espínola Rocha
- 311 *Presentación del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas*
- 313 *Coloraciones distinguidas en gráficas*

Diego González-Moreno, Emilio Licea, Lizeth Machorro, Amanda Montejano, Marcos Nolasco, Leticia Ramírez

319 *Coloraciones robustas de gráficas*

Gabriela J. Blanco, Karen Miranda, Mika Olsen, Axel Prestegui Ramos, Nadia Vasqu ez

337 *La gráfica de sucesiones de Pr ufer*

Julián A. Fres n Figueroa, Tania Jiménez Alvarado, Aldo Lozano Pi na, Osvaldo Padilla Morales, Maximiliano Ramírez Mejía

345 *Dominación a distancia  $k$  en gráficas*

Ilán A. Goldfeder, Nahid Yelene Javier Nol, Lizzeth Ariadna Sánchez Solís

353 *Policías y ladrones en gráficas*

Sebastián Franco Martínez, Aarón Rodríguez González Pacheco, Raúl González Pérez, Sac-Nicté Damayanti Salas Reyes, Miguel Tecpa- Galván

## A LOS AUTORES

**MIXBA'AL**, Revista Metropolitana de Matemáticas, es una revista de publicación anual de divulgación e investigación en matemáticas en el sentido más amplio, concebida con el propósito de apoyar la comunicación entre la comunidad matemática de habla hispana. Los artículos sometidos, pueden ser trabajos de investigación o trabajos que presenten de manera original algún tema de las matemáticas, por ejemplo, demostraciones nuevas de resultados conocidos; artículos panorámicos sobre un área de investigación; la presentación distinta de algún tema vinculado a la docencia; aplicaciones o aspectos lúdicos de las mismas, entre otros.

Los trabajos sometidos deben estar escritos en español impecable; eventualmente podrán aceptarse trabajos en inglés. Éstos deben ser enviados a cualquiera de los editores en formato pdf y en un plazo no mayor a un mes, el comité editorial decidirá si el trabajo es acorde a la línea editorial de la revista; en caso que así sea, se enviará a arbitraje.

Cuando un trabajo reciba arbitraje favorable, se le comunicará al autor y en un plazo no mayor a tres semanas, deberá reenviarlo al editor responsable, atendiendo las sugerencias del árbitro y en el formato oficial que la revista le proporcionará. El trabajo debe estar organizado de la siguiente forma: título, resumen no mayor a 100 palabras, clasificación de la AMS 2020, palabras clave, introducción y en seguida el desarrollo del mismo. Para someter un artículo a la revista, es recomendable enviarlo en el formato oficial de **MIXBA'AL**.



## INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO FRACCIONARIO. UNA APLICACIÓN A LA LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

LOZADA-CORONEL J., GUTIÉRREZ-CORONA J. N., QUEZADA-TÉLLEZ L. A.

RESUMEN. En este artículo, exploramos el fascinante mundo del cálculo fraccionario. Abordamos las definiciones esenciales de derivadas e integrales fraccionarias, desde un enfoque intuitivo hasta las formulaciones modernas. Nos centramos en la aplicación clásica de la ley de enfriamiento de Newton, empleando el cálculo fraccionario para describir con precisión su dinámica. Además, examinamos cómo la derivada fraccionaria modela el enfriamiento en función del tiempo y ofrece una comprensión más profunda de la transferencia de calor, incluso en casos no exponenciales. Exploramos ecuaciones diferenciales fraccionarias y su resolución mediante la transformada de Laplace, ilustrando su versatilidad en este tipo de problemas.

### 1. INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario es una rama fascinante y poderosa del análisis matemático que extiende los conceptos de diferenciación e integración más allá de los números enteros [32]. Si ya estás familiarizado con el cálculo integral y diferencial, estás a punto de descubrir una nueva dimensión de las matemáticas que puede sorprenderte.

Aunque el cálculo fraccionario ha sido objeto de estudio desde hace más de tres siglos, solo recientemente ha empezado a ganar mayor atención y reconocimiento en la comunidad matemática [16]. Una de las principales diferencias entre el cálculo fraccionario y el cálculo tradicional radica en que las derivadas y las integrales fraccionarias permiten describir el cambio y la acumulación a lo largo de intervalos no enteros [32]. Esto significa que podemos analizar sistemas que exhiben comportamientos intermedios, donde las tasas de cambio o acumulación varían de forma continua.

El cálculo fraccionario ha llevado a avances significativos en la resolución de problemas reales, también ha encontrado aplicaciones en áreas como la teoría del control, la mecánica de medios fractales, el procesamiento de señales, el modelado de fenómenos anómalos y la teoría de la probabilidad, por mencionar solo algunas [35].

A medida que nos adentremos en los aspectos fundamentales del cálculo fraccionario, exploraremos las derivadas y las integrales fraccionarias, sus propiedades básicas y cómo se relacionan con el cálculo tradicional [16]. Además, examinaremos algunas aplicaciones concretas y fascinantes de esta rama de las matemáticas.

### 2. HISTORIA

Los orígenes del cálculo fraccionario se remontan a los primeros intentos de matemáticos por generalizar los conceptos de diferenciación e integración a valores no enteros. Uno de los primeros indicios del cálculo fraccionario se encuentra en una carta histórica escrita el 30 de septiembre de 1695, en la cual el marqués de L'Hopital plantea a Leibniz una interesante pregunta: ¿qué sucedería si el exponente de la derivada fuera  $1/2$ ? La respuesta intuitiva de Leibniz en esa carta es reveladora, Leibniz responde: “esto conduciría aparentemente a una paradoja de la cual algún día serán extraídas consecuencias muy útiles” [21, 20]. En este mismo contexto, Leibniz proporciona una

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11A51, 11D45, 11R04, 11R11, 11R29.

*Palabras clave.* Cálculo fraccionario, derivadas fraccionarias, integrales fraccionarias, transformada de Laplace, ecuaciones diferenciales fraccionarias, ley de enfriamiento de Newton.

aproximación a lo que podría ser una derivada fraccionaria, utilizando como ejemplo la derivada  $1/2$  de  $x$ .

Más tarde, en el siglo XVIII, Euler estudió series infinitas y dio una definición para el factorial de un número no entero. Estas ideas fueron fundamentales para el desarrollo posterior del cálculo fraccionario [10]. En ese mismo siglo L'Hopital realizó contribuciones significativas al cálculo infinitesimal, incluyendo el estudio de las derivadas de órdenes no enteros [22]. Sus trabajos sentarían las bases teóricas para el cálculo fraccionario y allanaron el camino para futuras investigaciones. Es en ese mismo siglo cuando uno de los primeros trabajos relacionados con el cálculo fraccionario ve a luz, el texto de los matemáticos suizos Johann Bernoulli y su sobrino Daniel Bernoulli en el siglo XVIII. Johann Bernoulli examinó la función exponencial generalizada y su derivada fraccionaria [22, 5], mientras que Daniel Bernoulli investigó el problema de la cuerda vibrante con derivadas fraccionarias [5].

En el siglo XIX, el cálculo fraccionario se estableció como un campo de estudio independiente. A inicios de siglo, en 1812, Laplace mencionó la posibilidad de derivadas fraccionarias en su obra "Théorie Analytique des Probabilités" [19]. En 1819, Lacroix estudió integrales definidas y mencionó las integrales de orden fraccionario en su "Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" [18]. En 1822, Fourier mencionó la posibilidad de extender la derivada a órdenes fraccionarios en su obra "Théorie Analytique de la Chaleur" [11].

En 1823, el matemático noruego Niels Henrik Abel hizo una importante contribución al cálculo fraccionario cuando resolvió un problema de la tautócrona utilizando integrales definidas de orden no entero [1]. En el mismo año, publicó otro artículo donde presentó algunas propiedades de las integrales definidas [2].

Fue a finales del siglo XIX cuando otros matemáticos como Fourier, Lacroix y Laplace también hicieron contribuciones al estudio del cálculo fraccionario. El matemático polaco Grünwald presentó una definición de derivada fraccionaria en 1867 [13]. En 1868, Létnikov introdujo la noción de diferenciación de orden arbitrario [25].

Sin embargo, fue hasta el siglo XX cuando el cálculo fraccionario comenzó a recibir mayor atención. El matemático ruso Anatoly N. Kolmogorov introdujo el concepto de derivada fraccionaria como una generalización de la derivada convencional [17]. Sus investigaciones sentaron las bases teóricas para el desarrollo del cálculo fraccionario moderno.

Durante el siglo XXI, el cálculo fraccionario ha ganado popularidad y se ha convertido en un campo de investigación activo. Se han publicado numerosos libros y artículos científicos sobre el tema. Algunos libros importantes en el campo del cálculo fraccionario incluyen "Fractional Differential Equations" de Podlubny [35], "The Analysis of Fractional Differential Equations" de Diethelm [9], "Fractional Calculus for Scientists and Engineers" de Duarte [8], y "Fractional Order Systems and Controls" de Monje et al. [30].

El cálculo fraccionario ha encontrado aplicaciones en diversas áreas, algunas de estas aplicaciones incluyen el modelado de fenómenos de transporte en medios porosos [27], el análisis de sistemas dinámicos no lineales [42], el modelado de materiales viscoelásticos [6], y la descripción de procesos de difusión anómala [39].

Además, el cálculo fraccionario ha sido utilizado para estudiar el movimiento de partículas en medios de resistencia [38], el análisis de sistemas de control de orden fraccionario [30], y la aplicación de la nanotecnología [4].

En las últimas décadas, se han realizado numerosos avances en el campo del cálculo fraccionario. Investigadores como Anatoli A. Kilbas, Hari M. Srivastava, Juan J. Trujillo, Igor Baleanu y otros de talla internacional han contribuido significativamente a la teoría y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales fraccionarias [16, 41, 44, 3].

Además, se han desarrollado métodos numéricos eficientes para resolver ecuaciones fraccionarias, lo que ha permitido una mejor comprensión y aplicación del cálculo fraccionario en problemas del mundo real. Investigadores como Victor Tarasov han

propuesto métodos numéricos novedosos basados en la teoría de operadores fraccionarios para abordar problemas de mecánica clásica y cuántica [43].

La historia y el desarrollo del cálculo fraccionario demuestran su relevancia y aplicabilidad en el mundo científico. Desde los trabajos pioneros de Bernoulli y L'Hopital hasta las contribuciones modernas de Kolmogorov, Kilbas, Srivastava.

Al estudiar el cálculo fraccionario, nos adentramos en un nuevo mundo de posibilidades matemáticas, donde las derivadas e integrales fraccionarias nos permiten analizar y comprender fenómenos que van más allá de los modelos tradicionales basados en números enteros. A medida que exploremos los conceptos fundamentales y las aplicaciones del cálculo fraccionario, nos daremos cuenta de su importancia y utilidad en la resolución de problemas y en la descripción de sistemas dinámicos.

En los siguientes apartados de este artículo, nos centraremos en aplicaciones clásicas del cálculo fraccionario, específicamente en la ley de enfriamiento de Newton. A través de ejemplos y análisis, mostraremos cómo el cálculo fraccionario nos brinda una perspectiva más completa y precisa de estos fenómenos físicos, revelando propiedades y comportamientos que no pueden ser capturados completamente con el cálculo tradicional.

Al finalizar este artículo, esperamos que los lectores hayan adquirido una comprensión básica del cálculo fraccionario y sus aplicaciones. Además, deseamos despertar su curiosidad y motivación para explorar más a fondo este fascinante campo de las matemáticas, que continúa siendo objeto de investigación y desarrollo en la actualidad.

¡Comencemos nuestro viaje en el mundo del cálculo fraccionario y sus aplicaciones!

### 3. PRIMER ACERCAMIENTO AL CÁLCULO FRACCIONARIO

En esta sección, exploraremos el emocionante mundo del cálculo fraccionario al analizar las fórmulas generalizadas de la derivada  $n$ -ésima de funciones comunes, como  $\text{sen}(ax)$ ,  $\text{cos}(ax)$ ,  $(x - a)^k$  y  $e^{ax}$ . Nos enfocaremos especialmente en el caso en el que el valor de  $n$  se encuentra entre 0 y 1, y descubriremos cómo estas fórmulas se aplican en esta situación.

Comenzaremos estudiando la función exponencial  $e^{ax}$ . En el cálculo tradicional, la derivada  $n$ -ésima de  $e^{ax}$  se puede encontrar utilizando la regla de la cadena y la derivada de una función exponencial:

$$(1) \quad \frac{d^n e^{ax}}{dx^n} = a^n e^{ax}.$$

Esta fórmula nos brinda una manera sencilla también de calcular la derivada fraccionaria de  $e^{ax}$  cuando  $n$  es un número fraccionario entre 0 y 1. La ecuación (1) muestra esta relación.

A continuación, analicemos las funciones trigonométricas  $\text{sen}(ax)$  y  $\text{cos}(ax)$ . En el cálculo tradicional, la derivada  $n$ -ésima de estas funciones se puede obtener aplicando la regla de la cadena y la derivada de las funciones seno y coseno con las fórmulas  $\text{sen}(x + y)$  y  $\text{cos}(x + y)$ .

$$(2) \quad \frac{d^n \text{sen}(ax)}{dx^n} = a^n \text{sen}\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$(3) \quad \frac{d^n \text{cos}(ax)}{dx^n} = a^n \text{cos}\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Estas fórmulas también nos permiten calcular la derivada fraccionaria de  $\text{sen}(ax)$  y  $\text{cos}(ax)$  cuando  $n$  es un número fraccionario entre 0 y 1. La ecuación (2) representa la derivada fraccionaria de  $\text{sen}(ax)$ , mientras que la ecuación (3) muestra la derivada fraccionaria de  $\text{cos}(ax)$ .

Por último, consideremos la función polinómica  $(x - a)^k$ . En el cálculo tradicional, la derivada  $n$ -ésima de esta función se puede calcular utilizando la regla del producto y la regla de potencias:

$$(4) \quad \frac{d^n (x - a)^k}{dx^n} = \frac{k!}{(k - n)!} (x - a)^{k-n}.$$

Observamos que si  $n$  es un número fraccionario entre 0 y 1, la expresión en la ecuación (4) no tiene un significado directo utilizando la notación factorial. Para abordar esta generalización, se recurre a la función  $\Gamma(x)$ , conocida como función gamma, que está estrechamente relacionada con la notación factorial. La función gamma tiene la propiedad de que  $\Gamma(n + 1) = n!$  para números enteros positivos  $n$ .

Es importante destacar que la función gamma se define para valores reales positivos y puede extenderse a valores complejos. De esta manera, al utilizar la función gamma, podemos generalizar la expresión en la ecuación (4) para valores fraccionarios de  $n$  entre 0 y 1.

*Observación 1.* La relación entre la función gamma y los números factoriales se puede demostrar mediante la siguiente fórmula:

$$(5) \quad \Gamma(n + 1) = n!.$$

Esta relación establece que la función gamma generaliza la notación factorial y permite extender el concepto de factorial a valores fraccionarios y complejos.

La función gamma se define como:

$$(6) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{para } x > 0.$$

Se puede demostrar que la función gamma satisface la siguiente propiedad de recursividad:

$$(7) \quad \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad \text{para } x > 0.$$

Ahora, utilizando el método de integración por partes, consideremos la integral:

$$(8) \quad J_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt.$$

Realizando la sustitución  $u = t^n$  y  $dv = e^{-t} dt$ , obtenemos  $du = nt^{n-1} dt$  y  $v = -e^{-t}$ . Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$(9) \quad J_n = [-t^n e^{-t}]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt.$$

Observamos que el primer término de la derecha es igual a cero debido a la exponencial decreciente. Por lo tanto, tenemos:

$$(10) \quad J_n = nJ_{n-1}.$$

Aplicando esta relación recursiva sucesivamente, llegamos a:

$$(11) \quad J_n = n! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, sustituyendo  $J_n$  por su expresión original, obtenemos:

$$(12) \quad \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Este resultado muestra la relación entre la función gamma y los factoriales, ya que podemos escribir:

$$(13) \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

En resumen, al considerar las fórmulas generalizadas de la derivada  $n$ -ésima de funciones comunes como  $\sin(ax)$ ,  $\cos(ax)$ ,  $(x-a)^k$  y  $e^{ax}$ , podemos obtener resultados interesantes cuando  $n$  es un número fraccionario entre 0 y 1. Estas fórmulas básicas nos brindan un primer acercamiento al cálculo fraccionario, permitiéndonos generalizar las operaciones diferenciales y los resultados conocidos en el cálculo tradicional.

En las ecuaciones (1), (2), y (3), presentamos las derivadas fraccionarias de  $e^{ax}$ ,  $\sin(ax)$  y  $\cos(ax)$  respectivamente, cuando  $n$  es un número fraccionario entre 0 y 1. Además, en la ecuación (4), presentamos la generalización de la regla de potencias para la derivada fraccionaria de  $(x-a)^k$ . Si consideramos un orden  $\alpha$  de derivación siendo  $0 \leq \alpha \leq 1$  se obtiene:

$$(14) \quad \frac{d^\alpha e^{ax}}{dx^\alpha} = a^\alpha e^{ax},$$

$$(15) \quad \frac{d^\alpha \sin(ax)}{dx^\alpha} = a^\alpha \sin\left(ax + \frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

$$(16) \quad \frac{d^\alpha \cos(ax)}{dx^\alpha} = a^\alpha \cos\left(ax + \frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

$$(17) \quad \frac{d^\alpha (x-a)^k}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}.$$

Estas fórmulas son solo el comienzo de las posibilidades que ofrece el cálculo fraccionario. A medida que profundizamos en este campo, nos adentraremos en conceptos más avanzados y aplicaciones fascinantes que permiten describir y comprender fenómenos complejos en diversas disciplinas.

#### 4. INTEGRAL FRACCIONARIA DE RIEMANN-LIOUVILLE

La denominada integral fraccionaria de Liouville, también conocida como integral fraccionaria o integral de Riemann-Liouville, lleva el nombre de los matemáticos Bernard Riemann y Joseph Liouville, quienes hicieron importantes contribuciones al estudio de esta forma generalizada de la integral [32, 16, 35]. Esta generalización surgió como una extensión de la noción clásica de integración y permite calcular integrales de funciones en un contexto más amplio, incluyendo casos en los que el orden de la integral es un número fraccionario.

La integral fraccionaria es una generalización de la integral convencional de Riemann que permite extender el concepto de integración a valores no enteros. Una forma común de definir la integral fraccionaria es mediante la integral iterada de Cauchy, la cual se basa en la repetición de la integral convencional.

Consideremos una función  $f(x)$  y el operador integral convencional  $\int_a^x$ . La integral iterada de Cauchy de orden  $n$  de la función  $f(x)$  viene dada por la expresión:

$$(18) \quad I_a^n[f(t)] = \int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x f(t) dt^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t) (x-t)^{n-1} dt.$$

La ecuación (18) indica que la integral iterada de Cauchy de orden  $n$  de la función  $f(t)$  se obtiene aplicando  $n-1$  veces el operador integral convencional  $\int_a^x$  a la función  $f(t)$ .

Para el caso en que el orden de integración no sea un entero, Riemann y Liouville introdujeron el concepto de integral fraccionaria, esta integral se puede obtener de extender la integral fraccionaria de Cauchy a los reales.

**Definición 1** (Integral fraccionaria de Riemann-Liouville). Si  $f$  es una función integrable en el sentido de Lebesgue en  $(a, b)$  y  $\alpha \geq 0$  es el orden de integración, entonces la integral fraccionaria de Riemann-Liouville se define como:

$$(19) \quad {}_{RL}I_a^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha-1} dt,$$

donde  $b > x > a$ .

La ecuación (19) establece la relación entre la integral fraccionaria y la integral iterada de Cauchy. La presencia de la función gamma  $\Gamma(\alpha)$  en la expresión revela la necesidad de generalizar la noción de factorial en la integral a valores no enteros.

Es importante mencionar que la definición y propiedades de la integral fraccionaria han sido estudiadas por diversos investigadores. Algunas referencias relevantes incluyen los trabajos de Podlubny [35], Miller y Ross [29], y Diethelm [9].

*Observación 2.* La deducción de la fórmula de la integral iterada de Cauchy se puede realizar utilizando el teorema de Fubini, la fórmula de integración de la potencia e integrando de forma inductiva. La idea es aplicar la fórmula de la potencia e intercambiar el orden de integración para reducir el número de integrales de manera consecutiva.

Comenzaremos con el caso base para  $n = 1$ :

$$(20) \quad I_a^1[f(x)] = \int_a^x f(t) dt = \frac{1}{0!} \int_a^x f(t) (x-t)^0 dt.$$

Ahora, supongamos que la fórmula es válida para un valor de  $n$ :

$$(21) \quad I_a^n[f(x)] = \int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x f(t) dt^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t) (x-t)^{n-1} dt.$$

Queremos demostrar que también es válida para  $n+1$ , es decir:

$$(22) \quad I_a^{n+1}[f(x)] = \int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x f(t) dt^n = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x f(t) (x-t)^n dt.$$

Aplicando la fórmula de integración por partes sobre la hipótesis de inducción, tenemos:

$$(23) \quad I_a^{n+1}[f(x)] = \int_a^x I_a^n[f(x)] dx = \int_a^x \left( \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t f(u) (t-u)^{n-1} du \right) dt.$$

Intercambiando el orden de integración, obtenemos:

$$(24) \quad I_a^{n+1}[f(x)] = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \int_u^x f(u) (t-u)^{n-1} dt du.$$

Simplificando la notación, tenemos:

$$(25) \quad I_a^{n+1}[f(x)] = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(u) \left( \int_u^x (t-u)^{n-1} dt \right) du.$$

La integral interna se puede resolver utilizando la fórmula de la integral de potencia:

$$(26) \quad \int_u^x (t-u)^{n-1} dt = \frac{1}{n} (x-u)^n.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior, obtenemos:

$$(27) \quad I_a^{n+1}[f(x)] = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(u) \cdot \frac{1}{n} (x-u)^n du = \frac{1}{n!} \int_a^x f(u) (x-u)^n du.$$

Lo cual coincide con la fórmula de la integral iterada de Cauchy para  $I_a^{n+1}$ . Por lo tanto, hemos demostrado la fórmula por inducción.

*Observación 3.* En el contexto de la integral fraccionaria, existe una relación importante entre la derivada y la integral, establecida por el primer teorema fundamental del cálculo. Esta relación nos permite denotar al operador de integral fraccionaria como  ${}_R L I_a^\alpha$  y también como  ${}_R L D_a^{-\alpha}$ .

Esta relación entre la derivada y la integral también puede extenderse al caso de las integrales fraccionarias. Por lo tanto, cuando nos referimos al operador de integral fraccionaria, utilizamos la notación  ${}_R L I_a^\alpha$  para indicar su definición y uso. Sin embargo, es común encontrarse también con la notación alternativa  ${}_R L D_a^{-\alpha}$  para el operador de integral fraccionaria. Esta notación hace referencia a la relación entre la integral fraccionaria y la derivada, indicando que  ${}_R L I_a^\alpha$  es el inverso (o la potencia negativa) del operador de derivada  ${}_R L D_a^\alpha$ .

Ambas notaciones,  ${}_R L I_a^\alpha$  y  ${}_R L D_a^{-\alpha}$ , son ampliamente utilizadas en la literatura y en el campo de las matemáticas aplicadas para representar el operador de integral fraccionaria. Ambas formas son equivalentes y se utilizan de acuerdo a las preferencias o convenciones de cada autor o comunidad científica.

Es importante tener en cuenta esta relación entre la derivada y la integral, así como las diferentes notaciones utilizadas, ya que nos permiten interpretar y utilizar de manera adecuada el operador de integral fraccionaria en diferentes contextos y aplicaciones matemáticas.

**Ejemplo 1.** Calcular la integral  $\alpha$  de Riemann-Liouville de la función  $f(x) = c$ , con  $0 \leq \alpha \leq 1$ , desde  $a$  positivo. Para calcularla hacemos uso de la definición de integral fraccionaria de RL:

$$\begin{aligned} {}_R L D_a^{-\alpha} c &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x c(x-t)^{\alpha-1} dt \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{c(x-t)^\alpha}{\alpha} \right) \Big|_a^x \\ &= \frac{c(x-a)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{c(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.** Calcular la media integral fraccionaria de RL de la función  $f(x) = x$ , con  $a = 0$ . Para calcular la integral fraccionaria de  $x$  con exponente  $1/2$  y límite inferior  $a = 0$ , procedemos de la siguiente manera:

$${}_R L D_0^{-1/2} x = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x t(x-t)^{\frac{1}{2}-1} dt.$$

Primero, calculamos el valor de  $\Gamma(\frac{1}{2})$ . En este caso,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . Sustituyendo este valor en la integral y reordenando se obtiene:

$${}_R L D_0^{-1/2} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{t}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Hacemos el cambio de variable  $u = x - t$ , con lo que  $du = -dt$ , luego la integral se convierte en:

$${}_R L D_0^{-1/2} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u=x}^{u=0} \frac{x-u}{\sqrt{u}} dt.$$

Los pasos para resolver la integral se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}
{}_R L D_0^{-1/2} x &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^{u=x} \frac{x-u}{\sqrt{u}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^{u=x} \frac{x}{\sqrt{u}} - \sqrt{u} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^{u=x} x u^{-1/2} - u^{1/2} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( x \frac{u^{1/2}}{1/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_0^x \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 2x^{3/2} - \frac{2x^{3/2}}{3} \right) \\
&= \frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{4x\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

**Ejemplo 3.** Calcular la media integral fraccionaria de RL de la función  $f(x) = e^{bx}$ , con  $b \neq 0$ , desde  $a > 0$ . Primero, calculamos el valor de  $\Gamma(\frac{1}{2})$ . En este caso,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . Sustituyendo este valor en la integral y reordenando se obtiene:

$${}_R L D_a^{-1/2} e^{bx} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{e^{bt}}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Luego, se hace el cambio de variable  $u = \sqrt{x-t}$  con lo que  $du = -\frac{dt}{2\sqrt{x-t}}$ . Reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned}
{}_R L D_a^{-1/2} e^{bx} &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{x-a}}^0 2e^{b(x-u^2)} du \\
&= -\frac{2e^{bx}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{x-a}}^0 e^{-bu^2} du \\
&= -e^{bx} \int_{\sqrt{x-a}}^0 \frac{2e^{-bu^2}}{\sqrt{\pi}} du.
\end{aligned}$$

En la última integral, se puede hacer el cambio  $w = \sqrt{b}u$  de modo que  $du = dw/\sqrt{b}$ , que se reescribe:

$$\begin{aligned}
{}_R L D_a^{-1/2} e^{bx} &= -\frac{e^{bx}}{\sqrt{b}} \int_{\sqrt{b}\sqrt{x-a}}^0 \frac{2e^{-w^2}}{\sqrt{\pi}} dw \\
&= -\frac{e^{bx}}{\sqrt{b}} \left( \operatorname{erf}(0) - \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}) \right) \\
&= \frac{e^{bx}}{\sqrt{b}} \left( \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}) \right) \\
&= \frac{e^{bx} \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a})}{\sqrt{b}}.
\end{aligned}$$

Donde  $\operatorname{erf}(x)$  es la función error que se define como:

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

**Ejemplo 4.** Calcula la media integral de  $f(x) = \sqrt{x}$  con  $a = 0$ . Primero, calculamos el valor de  $\Gamma(\frac{1}{2})$ . En este caso,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . Sustituyendo este valor en la integral y reordenando se obtiene:

$${}_{RL}D_0^{-1/2}\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Se hace el cambio de variable  $u = \sqrt{x-t}/\sqrt{t}$ , con lo que  $u^2 = x/t - 1$  y  $t = x/(u^2 + 1)$ , luego el diferencial  $du$  es:

$$\begin{aligned} d(u^2) &= d\left(\frac{x}{t} - 1\right) \\ 2udu &= -\frac{x dt}{t^2} \\ dt &= -\frac{2t^2 u du}{x}. \end{aligned}$$

Reemplazando en la media integral se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_0^{-1/2}\sqrt{x} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{t=x} \frac{1}{u} \left(-\frac{2t^2 u du}{x}\right) \\ &= -2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u=\infty}^{u=0} \frac{1}{u} \left(\frac{x^2}{(u^2 + 1)^2}\right) \left(\frac{udu}{x}\right) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{(u^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{u}{2(u^2 + 1)}\right) \Big|_0^\infty + \left(\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) (\arctan(x)) \Big|_0^\infty \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}x}{2}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.** Calcule la media integral de RL de  $\sin(bx)$  y  $\cos(bx)$  con  $b \neq 0$  para  $a \rightarrow -\infty$ . Para eso usaremos un resultado previo obtenido del ejemplo 3, el cual dice que  ${}_{RL}D_a^{-1/2} e^{bx} = e^{bx} \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a})/\sqrt{b}$ , donde si  $a \rightarrow -\infty$ , se obtiene <sup>1</sup>:

$$(28) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2} e^{bx} = \frac{e^{bx}}{\sqrt{b}}.$$

Si consideramos la media integral desde  $a \rightarrow -\infty$  de  $e^{ibx}$ , reemplazando en (28) se puede reescribir como:

$$(29) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2} e^{ibx} = \frac{e^{ibx}}{\sqrt{ib}}.$$

Por la identidad de Euler, se sabe que  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ . Aplicando la identidad de Euler en la expresión (29), podemos expresar la media integral de la función exponencial en términos de senos y cosenos de la siguiente forma:

<sup>1</sup>Esto es debido a que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1$ .

$$(30) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2}(\cos(bx) + i\text{sen}(bx)) = \frac{(\cos(bx) + i\text{sen}(bx))}{\sqrt{ib}}.$$

Como la integral fraccionaria se define usando una integral, hereda las propiedades de linealidad de la misma, de modo que el primer miembro de (30) se puede separar. Adicionalmente, por la identidad de Euler se puede demostrar que  $i = e^{\pi i/2}$ , de modo que  $\sqrt{i} = \sqrt{e^{\pi i/2}} = e^{\pi i/4} = \cos(\pi/4) + i\text{sen}(\pi/4)$ . De modo que (30) se puede escribir como:

$$(31) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2}(\cos(bx)) + iD_{-\infty}^{-1/2}(\text{sen}(bx)) = \frac{(\cos(bx) + i\text{sen}(bx))}{\sqrt{b}(\cos(\pi/4) + i\text{sen}(\pi/4))}.$$

Luego, el segundo miembro de (31) se puede multiplicar y dividir por  $\cos(\pi/4) - i\text{sen}(\pi/4)$ , para obtener una fracción sin denominador complejo, esto último porque  $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ , de modo que se obtiene:

$$(32) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2}(\cos(bx)) + iD_{-\infty}^{-1/2}(\text{sen}(bx)) = \frac{(\cos(bx) + i\text{sen}(bx))(\cos(\pi/4) - i\text{sen}(\pi/4))}{\sqrt{b}(\cos^2(\pi/4) + \text{sen}^2(\pi/4))}.$$

Nótese que  $\cos^2(\pi/4) + \text{sen}^2(\pi/4) = 1$ . Adicionalmente, se puede observar también que  $(\cos(bx) + i\text{sen}(bx))(\cos(\pi/4) - i\text{sen}(\pi/4)) = (\cos(bx)\cos(\pi/4) + \text{sen}(bx)\text{sen}(\pi/4)) + i(\text{sen}(bx)\cos(\pi/4) - \cos(bx)\text{sen}(\pi/4)) = \cos(bx - \pi/4) + i\text{sen}(bx - \pi/4)$ , de tal manera que la expresión (32) se puede ver también de la siguiente manera:

$$(33) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2}(\cos(bx)) + iD_{-\infty}^{-1/2}(\text{sen}(bx)) = \frac{(\cos(bx - \pi/4) + i\text{sen}(bx - \pi/4))}{\sqrt{b}}.$$

Finalmente, igualando la parte real e imaginaria de (30) se obtiene lo que se quería:

$$(34) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2}\cos(bx) = \frac{\cos(bx - \pi/4)}{\sqrt{b}}.$$

$$(35) \quad {}_{RL}D_{-\infty}^{-1/2}\text{sen}(bx) = \frac{\text{sen}(bx - \pi/4)}{\sqrt{b}}.$$

Es importante observar cómo las expresiones (34) y (35) son las mismas que se obtendrían de usar las ecuaciones (16) y (15) para  $\alpha = -1/2$ .

En resumen, la integral fraccionaria se define utilizando la integral iterada de Cauchy y proporciona una generalización de la integral convencional a valores no enteros. La expresión de la integral fraccionaria está relacionada con la función gamma y su estudio ha sido abordado por varios investigadores en el campo del cálculo fraccionario.

## 5. DERIVADA FRACCIONARIA DE RIEMANN-LIOUVILLE

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es una herramienta poderosa para el cálculo de derivadas de orden fraccionario de funciones. Esta derivada generalizada se denota como  ${}_{RL}D_a^\alpha f(x)$ , donde  $\alpha$  es un número real y  $f(x)$  es una función adecuada. Su definición se basa en la integral fraccionaria de Riemann-Liouville que hemos discutido previamente. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville se plantea en la siguiente definición:

**Definición 2** (Derivada fraccionaria de RL). Si  $f$  es una función definida en  $(a, b)$ , entonces la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden  $\alpha$  viene dada por:

$$(36) \quad {}_{RL}D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

donde  $n-1 \leq \alpha \leq n$  para  $n = \lceil \alpha \rceil$  y  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma, que generaliza el concepto de factorial [33, 35, 16, 26, 24].

Esta definición establece una conexión entre la derivada fraccionaria y la integral fraccionaria, lo que permite extender la noción de derivada a órdenes fraccionarios.

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville ha encontrado aplicaciones en diversos campos, como el procesamiento de señales, la física matemática, la teoría del control y la mecánica de medios continuos. Por ejemplo, se ha utilizado en modelado de fenómenos anómalos de difusión, la descripción de la dinámica de sistemas complejos y la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Numerosos estudios se han centrado en la teoría y las aplicaciones de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville en los últimos años. Algunas referencias relevantes incluyen a Ortigueira [33], Podlubny [35], Kilbas et al. [16], Tenreiro Machado [26] y Li et al. [24]. Estos trabajos ofrecen una amplia cobertura de la teoría y las aplicaciones de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, y proporcionan recursos adicionales para aquellos interesados en explorar más.

**Ejemplo 6.** Calcular la media derivada de RL de la función  $f(x) = \sqrt{x}$  con  $a = 0$ . Se reemplaza en (36), primero se calcula  $\Gamma(1/2)$  lo que es  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_0^{1/2} \sqrt{x} &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha-1} \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{x-t}} dt \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{x-t}} dt \right). \end{aligned}$$

Nótese que el término a derivar es  $D_0^{-1/2} \sqrt{x}$  el cual ya fue calculado en el ejemplo 4, con lo que la expresión queda:

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_0^{1/2} \sqrt{x} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\sqrt{\pi x}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Es importante destacar que ese resultado coincide con el que se obtendría usando la fórmula (17).

**Ejemplo 7.** Calcular la media derivada de RL de la función  $f(x) = e^{bx}$  para  $b \neq 0$  con  $a > 0$ . Se reemplaza en (36), primero se calcula  $\Gamma(1/2)$  lo que es  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_a^{1/2} e^{bx} &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha-1} e^{bt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{e^{bt}}{\sqrt{x-t}} dt \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{e^{bt}}{\sqrt{x-t}} dt \right). \end{aligned}$$

Es notorio que lo que está dentro de la derivada es la expresión de la media integral de Liouville con  $a > 0$ , la cual se calculó en el ejemplo 3, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}
{}_R L D_a^{1/2} e^{bx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{bx} \operatorname{erf}(\sqrt{bx-ab})}{\sqrt{b}} \right) \\
&= \frac{e^{bx}}{\sqrt{b}} \frac{d}{dx} \left( \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}) \right) + \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}) \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{bx}}{\sqrt{b}} \right) \\
&= \frac{e^{bx}}{\sqrt{b}} \left( \frac{be^{ab-bx}}{\sqrt{\pi}\sqrt{b}\sqrt{x-a}} \right) + \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}) \left( \frac{be^{bx}}{\sqrt{b}} \right) \\
&= \frac{e^{ab}}{\sqrt{\pi}\sqrt{x-a}} + \sqrt{b}e^{bx} \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}).
\end{aligned}$$

Observe que, para el caso en que  $a \rightarrow -\infty$ , entonces  ${}_R L D_{-\infty}^{1/2} e^{bx} = \sqrt{b}e^{bx}$ , lo cual coincide con (14), que es el resultado obtenido de manera intuitiva como un primer acercamiento. De aquí pueden salir varios casos, por ejemplo, cuando  $b = 2$ , en cuyo caso  ${}_R L D_{-\infty}^{1/2} e^{2x} = \sqrt{2}e^{2x}$ .

*Observación 4.* Una propiedad interesante que vale la pena destacar acerca de la derivada fraccionaria de RL, como ya se pudo observar en los ejercicios anteriores, es que esta derivada puede concebirse como la derivada de orden  $n$  de la integral de orden  $n - \alpha$ . Es decir:

$${}_R L D_a^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha)-1} f(t) dt \right) = D^n D_a^{-(n-\alpha)} f(x).$$

Esto nos lleva a concluir que si deseamos calcular la derivada de orden  $\alpha$ , donde  $0 \leq \alpha \leq 1$  y  $\nu = 1 - \alpha$ , simplemente podemos elegir  $n = 1$ , lo que nos conduce a:

$$\begin{aligned}
{}_R L D_a^\alpha f(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(1-\alpha)-1} f(t) dt \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \right) \\
&= D D_a^{-\nu} f(x).
\end{aligned}$$

Particularmente, si se desea la media derivada de RL, entonces:

$${}_R L D_a^{1/2} f(x) = D D_a^{-(1/2)} f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \right).$$

Esto comprueba el comportamiento observado en los ejemplos 6 y 7.

**Ejemplo 8.** Calcular  ${}_R L D_{-\infty}^{1/2} \cos(bx)$  y  ${}_R L D_{-\infty}^{1/2} \sin(bx)$ . De acuerdo con la observación 4, es suficiente con derivar una vez la media integral de las funciones seno y coseno, las cuales ya fueron obtenidas previamente en el ejemplo 5. Es decir, simplemente podemos realizar lo siguiente:<sup>2</sup>

$${}_R L D_{-\infty}^{1/2} \cos(bx) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\cos(bx - \pi/4)}{\sqrt{b}} \right) = -\sqrt{b} \sin(bx - \pi/4) = \sqrt{b} \cos(bx + \pi/4).$$

$${}_R L D_{-\infty}^{1/2} \sin(bx) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin(bx - \pi/4)}{\sqrt{b}} \right) = \sqrt{b} \cos(bx - \pi/4) = \sqrt{b} \sin(bx + \pi/4).$$

**Ejemplo 9.** Calcular la media derivada de RL de  $f(x) = x$ , para  $a = 0$ . De acuerdo con la observación 4 basta con derivar  $D_0^{-1/2} x$ , esta última ya se cálculo en el ejemplo 2, es decir:

<sup>2</sup>En el resultado se utilizaron las identidades de desfase de ángulo entre senos y cosenos, que establecen que  $\sin(\theta - \pi/4) = \cos(\theta + \pi/4)$  y  $\cos(\theta - \pi/4) = \sin(\theta + \pi/4)$ .

$$\begin{aligned}
{}_{RL}D_0^{1/2}x &= \frac{d}{dx}D_0^{-1/2}x \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{4x\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi}}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}\right) \\
&= \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \\
&= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.
\end{aligned}$$

**Ejemplo 10.** Calcular la derivada de RL de orden  $\alpha$  con  $0 \leq \alpha \leq 1$  de la función constante  $f(x) = c$  desde  $a > 0$ . Usando el resultado enunciado en la observación 4 y el resultado obtenido del ejemplo 1, se puede obtener la derivada solicitada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
{}_{RL}D_a^\alpha c &= \frac{d}{dx}D_a^{-\alpha}c \\
&= \frac{d}{dx}D_a^{-\alpha}c \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{c(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\
&= \frac{\alpha c(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)(x-a)^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Es importante resaltar que la derivada fraccionaria de orden  $\alpha$  de RL con  $0 \leq \alpha \leq 1$  de una constante, no es cero.

## 6. DERIVADA FRACCIONARIA DE CAPUTO

La derivada fraccionaria de Caputo, propuesta por el físico matemático italiano Michele Caputo en 1969, es una extensión del concepto de derivada a orden fraccionario. A diferencia de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, la derivada de Caputo sigue un enfoque distinto. En la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, primero se integra y posteriormente se deriva, por otro lado, en la derivada fraccionaria de Caputo ocurre el proceso inverso: se deriva primero y posteriormente se integra. Esta diferencia en el orden de las operaciones tiene implicaciones significativas en la interpretación y aplicaciones de estas derivadas, permitiendo una mejor comprensión física de las condiciones iniciales en diversos problemas aplicados [6]. La derivada de Caputo de orden  $\alpha$  se plantea en la siguiente definición:

**Definición 3** (Derivada fraccionaria de Caputo). Si  $f$  es una función definida en  $[a, b]$ , entonces la derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$  es:

$$(37) \quad {}_C D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} f(t) dt.$$

Donde  $n-1 \leq \alpha \leq n$  para  $n = \lceil \alpha \rceil$  [6, 33, 35, 16, 26, 24].

La derivada fraccionaria de Caputo ha sido ampliamente utilizada en diversos campos de la ciencia y la ingeniería, incluyendo la física, la mecánica de medios continuos, la teoría de control, entre otros [9, 35, 27]. Su enfoque inverso en el proceso

de derivación e integración proporciona ventajas prácticas en el modelado y solución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales no locales o históricas.

La diferencia fundamental entre la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la derivada fraccionaria de Caputo radica en el tratamiento de las condiciones iniciales. En el caso de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, las condiciones iniciales se expresan en términos de integrales, lo que puede llevar a dificultades en la interpretación física y la solución de problemas. Por otro lado, la derivada fraccionaria de Caputo utiliza las condiciones iniciales en forma de derivadas de orden entero, lo que facilita su interpretación y manejo [9, 35].

En resumen, la derivada fraccionaria de Caputo, al invertir el orden de la derivación e integración en comparación con la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, ofrece un enfoque alternativo y más conveniente para el modelado y la solución de problemas con condiciones iniciales históricas. Su utilización en diversos campos ha demostrado su capacidad para describir fenómenos complejos y proporcionar una herramienta poderosa para el análisis de sistemas con memoria.

A continuación se muestran algunos ejemplos puntuales de derivadas fraccionarias de tipo Caputo para ilustrar la obtención de las mismas.

**Ejemplo 11.** Calcula la derivada de orden  $\alpha$  con  $0 \leq \alpha \leq 1$  tipo Caputo de  $f(x) = c$ . Basta con tomar la definición de la derivada fraccionaria de tipo Caputo con  $n = 1$ , y reemplazar, es decir:

$$\begin{aligned} {}_C D_a^\alpha c &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha-1} \frac{d}{dt}(c) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} 0 dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x 0 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se puede apreciar cómo a diferencia de la derivada fraccionaria de RL, en el sentido de Caputo la derivada fraccionaria de una constante, es cero, mientras que en el sentido de RL, no.

*Observación 5.* La derivada de Caputo, al igual que la derivada de RL, se puede expresar como una combinación de una derivada entera y una integral fraccionaria. Sin embargo, en el caso de la derivada de Caputo, se aplica primero la derivada  $n$  y luego la integral de orden  $n - \alpha$ , donde  $\alpha$  representa el orden fraccionario deseado de la derivada. Esta secuencia de operaciones asegura que el operador final tenga el orden fraccionario  $\alpha$ , esto es:

$$\begin{aligned} {}_C D_a^\alpha f(x) &= D_a^{-(n-\alpha)} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} f(t) dt. \end{aligned}$$

Esto permite facilitar el cálculo de muchas derivadas fraccionarias, por ejemplo, para la media derivada de Caputo se puede hacer considerando  $n = 1$ , de forma que se obtiene:

$$(38) \quad {}_C D_a^{1/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_a^x (x-t)^{-1/2} \frac{d}{dt} f(t) dt$$

$$(39) \quad = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

**Ejemplo 12.** Calcular la media derivada de Caputo para la función  $f(x) = e^{bx}$ , desde un valor  $a$ . Se reemplaza  $f(x) = e^{bx}$  en (38), con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_C D_a^{1/2} e^{bx} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{b e^{bt}}{\sqrt{x-t}} dt \\ &= b \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{e^{bt}}{\sqrt{x-t}} dt \\ &= b D_a^{-1/2} e^{bx}. \end{aligned}$$

Pero en el segundo miembro sale la media integral de  $e^{bx}$  que ya hicimos en el ejemplo 3. De modo que al reemplazarla se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_C D_a^{1/2} e^{bx} &= b \frac{e^{bx} \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a})}{\sqrt{b}} \\ &= \sqrt{b} e^{bx} \operatorname{erf}(\sqrt{b}\sqrt{x-a}). \end{aligned}$$

Se puede observar la diferencia con la derivada de RL. Un resultado al menos curioso para la función exponencial es que:  ${}_C D_{-\infty}^{1/2} e^{bx} = {}_{RL} D_{-\infty}^{1/2} e^{bx} = \sqrt{b} e^{bx}$ , es decir, ambos en el caso que  $a \rightarrow -\infty$  coinciden con lo mostrado en (14).

Otras funciones interesantes para poner a prueba con la derivada fraccionaria de Caputo son aquellas que están definidas mediante integrales definidas. Esto se debe a que, al ser un operador en el que primero se deriva y luego se integra, resulta particularmente fácil para funciones como  $\operatorname{Si}(x)$ <sup>3</sup> y  $\operatorname{erf}(x)$ . Estas funciones podrían ser evaluadas y analizadas con facilidad utilizando la derivada fraccionaria de Caputo.

**Ejemplo 13.** Calcular la media derivada de Caputo de la función error, con  $a > 0$ . Basta con aplicar (38) sobre la función error.

$$\begin{aligned} {}_C D_a^{1/2} \operatorname{erf}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \left( \frac{1}{\sqrt{x-t}} \cdot \frac{d(\operatorname{erf}(t))}{dt} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \left( \frac{1}{\sqrt{x-t}} \cdot \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_a^x \left( \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{x-t}} \right) dt. \end{aligned}$$

Se puede observar cómo la media derivada de Caputo de la función error también se puede expresar como una integral definida pues no tiene primitiva elemental. En la figura 1 se muestra una gráfica de esta función considerando  $a \rightarrow 0$ .

**Ejemplo 14.** Calcular la media integral de Caputo de la función  $\operatorname{Si}(x)$  con  $a > 0$ . Se reemplaza en (38) y se obtiene:

---

<sup>3</sup>La función  $\operatorname{Si}(x)$  se llama integral seno y se usa en diversas áreas de las matemáticas y la física. Se define como  $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ . Esta función aparece en problemas relacionados con la propagación de ondas, la mecánica cuántica, la teoría de control y otros campos de la física y la ingeniería. También es de interés en el estudio de funciones especiales y teoría de funciones complejas.

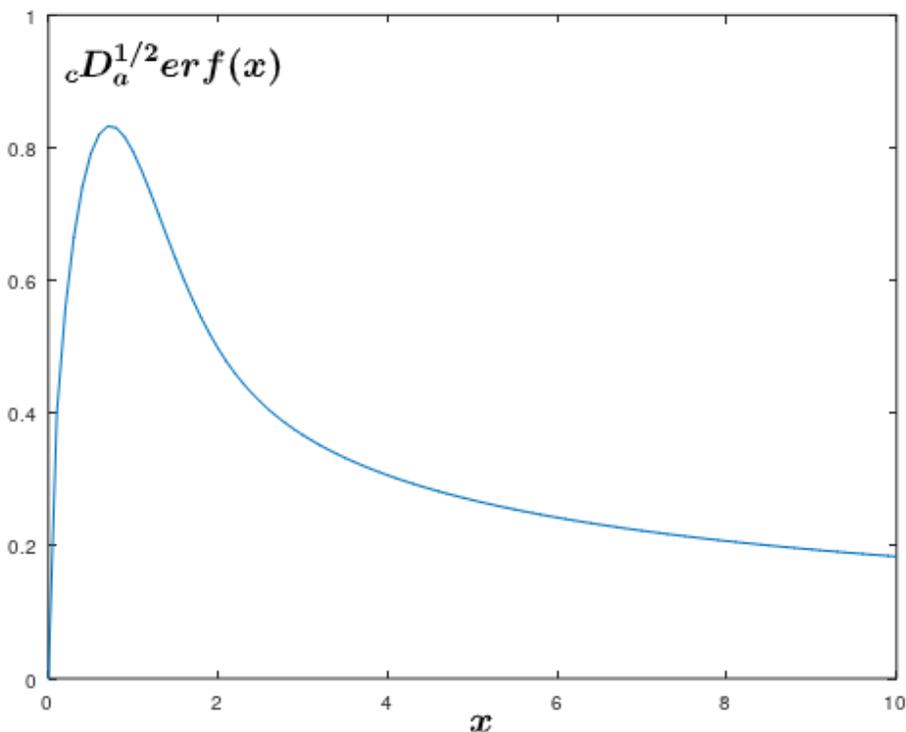


FIGURA 1. Gráfica de la media derivada de Caputo de la función error cuando  $a \rightarrow 0$ . La imagen es de autoría propia realizada en Julia.

$$\begin{aligned}
 {}_C D_a^{1/2} \text{Si}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \left( \frac{1}{\sqrt{x-t}} \cdot \frac{d(\text{Si}(t))}{dt} \right) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \left( \frac{1}{\sqrt{x-t}} \cdot \frac{\text{sen}(t)}{t} \right) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \left( \frac{\text{sen}(t)}{t\sqrt{x-t}} \right) dt.
 \end{aligned}$$

Es notorio, al igual que en el ejemplo anterior, la media derivada de Caputo de la función  $\text{Si}(x)$  también se puede expresar como una integral definida pues no tiene primitiva elemental, una gráfica de esta figura se muestra en la figura 2 para el caso  $a \rightarrow 0$ .

**Ejemplo 15.** Calcular la derivada fraccionaria de orden  $\alpha$  con  $0 \leq \alpha \leq 1$  tipo Caputo de la función  $f(x) = x$ . Se aplica la definición de la derivada fraccionaria de tipo Caputo sobre  $x$ . Como el orden de la derivada está entre 0 y 1 se toma  $n = 1$ , esto es:

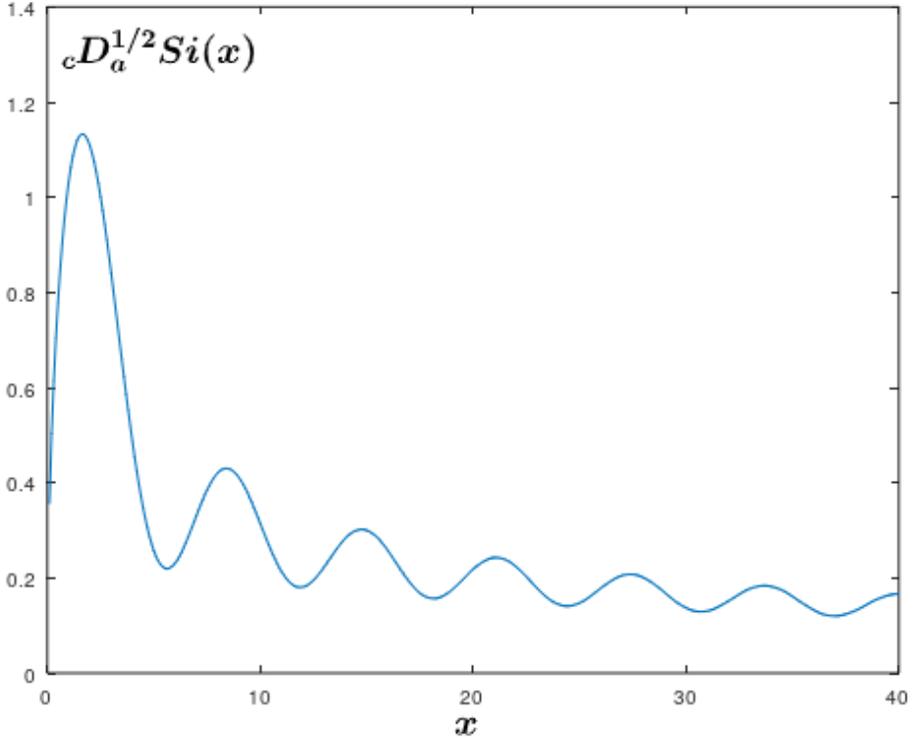


FIGURA 2. Gráfica de la media derivada de Caputo de la función integral del seno cuando  $a \rightarrow 0$ . La imagen es de autoría propia realizada en Julia.

$$\begin{aligned}
 {}_c D_a^\alpha x &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha-1} \frac{dt}{dt} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( -\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \Big|_a^x \\
 &= \left( \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right) \Big|_x^a \\
 &= \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Si se toma  $a = 0$ , la expresión queda como:  ${}_c D_0^\alpha x = \frac{(x-0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ . En la Figura 3 se puede apreciar el comportamiento para distintos valores de  $\alpha$ .

## 7. TRANSFORMADA DE LAPLACE EN DERIVADAS FRACCIONARIAS

La transformada de Laplace es una poderosa herramienta matemática utilizada en el estudio de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos. Hasta ahora, hemos explorado las definiciones y algunos ejemplos puntuales de las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo. En esta sección, abordaremos cómo la transformada de Laplace se relaciona con las derivadas fraccionarias y cómo puede ser aplicada para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias.

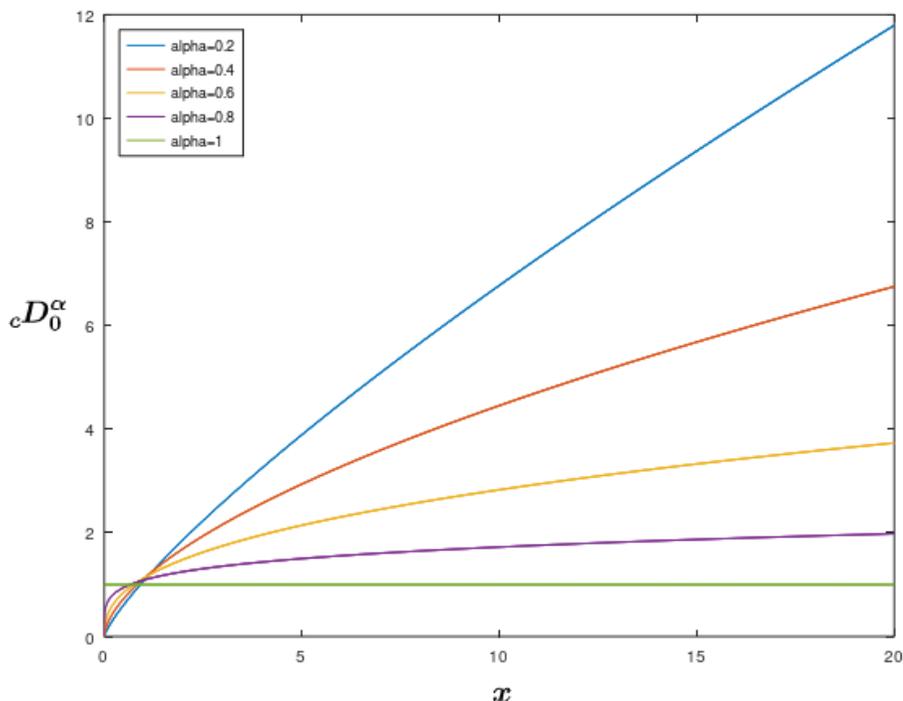


FIGURA 3. Gráfica de la derivada fraccionaria de Caputo de la función  $x$  tomando  $a = 0$ , se puede apreciar el comportamiento de la derivada para algunos valores de  $\alpha$  entre 0 y 1. La imagen es de autoría propia realizada en Julia.

La transformada de Laplace de una función  $f(t)$  viene dada por la siguiente definición:

**Definición 4 (Transformada de Laplace de  $f$ ).** Si  $f$  es una función que está definida para  $t \geq 0$ , entonces la transformada de Laplace de  $f$  es la función  $F$  dada por:

$$(40) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

siempre que la integral exista y en donde  $s$  es un número complejo para el cual  $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-st} f(t) dt$  converge.

La transformada de Laplace nos permite cambiar el dominio de una función  $t$  (que normalmente representa el tiempo en problemas de aplicación) al dominio complejo  $s$ , lo que simplifica el análisis y resolución de ecuaciones diferenciales.

En el contexto de las derivadas fraccionarias, la transformada de Laplace también se extiende para abarcar estas operaciones. Para comenzar, la transformada de Laplace de la integral fraccionaria de RL se define como muestra la siguiente definición:

**Definición 5 (Transformada de Laplace de la integral fraccionaria de RL).** Si  $f(t)$  es una función definida para  $t \geq 0$ , entonces la transformada de Laplace integral fraccionaria de RL es:

$$(41) \quad \mathcal{L}\{{}_{RL}I_a^{\alpha} f(t)\} = \mathcal{L}\{{}_{RL}D_a^{-\alpha} f(t)\} = s^{-\alpha} F(s),$$

con  $\alpha \in (0, 1)$  siendo el orden de integración.

Este resultado se puede deducir directamente de aplicar la transformada de Laplace sobre la integral fraccionaria.

De igual manera, resulta interesante preguntarse si la transformada de Laplace se puede aplicar sobre las derivadas fraccionarias vistas hasta ahora: la respuesta es sí. Para las transformadas de Laplace de las derivadas fraccionarias de RL y Caputo podemos plantear las siguientes definiciones:

**Definición 6** (Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de RL). Si  $f(t)$  es una función definida para  $t \geq 0$ , entonces la transformada de Laplace derivada fraccionaria de orden  $\alpha$  de RL es:

$$(42) \quad \mathcal{L}\{ {}_{RL}D_a^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(\alpha-k-1)}(0),$$

donde  ${}_{RL}D_a^\alpha$  es la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden  $\alpha$  para  $n-1 \leq \alpha \leq n$  y  $f^{(\alpha-k-1)}(0)$  representa las derivadas fraccionarias de  $f(t)$  evaluadas en  $t = 0$ .

Esta ecuación presenta una limitación en cuanto a las condiciones iniciales necesarias, ya que éstas deben ser de orden fraccionario. Sin embargo, a su vez, esto nos conduce a una interesante línea de investigación conocida como ecuaciones diferenciales fraccionarias. Para la derivación fraccionaria de Caputo se tiene la siguiente definición:

**Definición 7** (Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo). Si  $f(t)$  es una función definida para  $t \geq 0$ , entonces la transformada de Laplace derivada fraccionaria de orden  $\alpha$  de Caputo viene dada por:

$$(43) \quad \mathcal{L}\{ {}_C D_a^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

Donde  ${}_C D_a^\alpha$  es la derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$ , para  $n-1 \leq \alpha \leq n$  con  $n = \lceil \alpha \rceil$  y  $f^{(k)}(0)$  representa las derivadas de  $f(t)$  evaluadas en  $t = 0$ .

Lo que resulta fascinante y altamente beneficioso de la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo es que las condiciones iniciales utilizadas involucran derivadas elementales de orden entero que tienen interpretaciones físicas conocidas. Este hecho es sumamente relevante en el contexto de las aplicaciones de los operadores fraccionarios.

La transformada de Laplace en derivadas fraccionarias es un tema activo de investigación y tiene aplicaciones en diversos campos, como la física, la ingeniería, la biología y la economía. La capacidad de analizar y resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias utilizando la transformada de Laplace proporciona una herramienta invaluable para comprender sistemas complejos y fenómenos no lineales [35, 16, 29].

Estos avances y descubrimientos recientes siguen enriqueciendo nuestra comprensión de las derivadas fraccionarias y su relación con la transformada de Laplace, y ofrecen nuevas oportunidades para resolver problemas en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. Los siguientes ejemplos ayudarán a ilustrar cómo se utiliza la transformada de Laplace en las derivadas fraccionarias de RL y Caputo:

**Ejemplo 16** (Derivada fraccionaria de Caputo). Dada la función  $f(t) = t + 1$  y una derivada fraccionaria de RL de orden  $\alpha = \frac{1}{2}$ , la cual denotamos como  ${}_C D_0^{\frac{1}{2}}$ , la condición inicial para este ejemplo es  $f(0) = 1$ . La transformada de Laplace de  ${}_C D_0^{\frac{1}{2}} f(t)$  es:

$$\mathcal{L}\{ {}_C D_0^{\frac{1}{2}} f(t) \} = s^{\frac{1}{2}} F(s) - s^{-\frac{1}{2}} f(0).$$

Por el orden de la derivada se toma  $n = 1$ , sustituyendo  $f(t) = t + 1$  y  $f(0) = 1$ , y dado que  $F(s) = \mathcal{L}(t + 1) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}_C D_0^{\frac{1}{2}}(t + 1)\} &= s^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right) - s^{-1/2} \cdot (1) \\ &= s^{-3/2} + s^{-1/2} - s^{-1/2} \\ &= \frac{1}{s\sqrt{s}}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 17** (Derivada fraccionaria de RL). Ahora consideremos la función  $g(t) = \sqrt{t}$  y una derivada fraccionaria de RL de orden  $\alpha = \frac{1}{2}$ , que denotamos como  ${}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}$ . Las condiciones iniciales son  $g(0) = 0$  y  ${}_{RL}D_0^{-\frac{1}{2}}g(0) = 0$ . La transformada de Laplace de  ${}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}g(t)$  se calcula considerando  $n = 1$ , esto es:

$$\mathcal{L}\{{}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}g(t)\} = s^{\frac{1}{2}}G(s) - s^0 {}_{RL}D_0^{-\frac{1}{2}}g(0).$$

Sustituyendo  $g(t) = \sqrt{t}$ ,  $g(0) = 0$ ,  ${}_{RL}D_0^{-\frac{1}{2}}g(0) = 0$  y dado que  $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}\} &= s^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} - 1 \cdot 0 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s}. \end{aligned}$$

Antes de adentrarnos en el estudio de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, es relevante presentar algunas definiciones y proposiciones que resultan fundamentales para comprender este tema. Entre ellas, se destacan la función de Mittag-Leffler de dos parámetros  $E_{\alpha,\beta}$  y su transformada de Laplace. Estas herramientas serán de gran utilidad en nuestro análisis y abordaje de las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

**Definición 8** (Función de Mittag-Leffler). La función de Mittag-Leffler de dos parámetros  $E_{\alpha,\beta}$  se define mediante la siguiente serie infinita:

$$(44) \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

en donde  $z$  es una variable compleja y  $\alpha, \beta$  son constantes complejas con parte real positiva. Algunos casos particulares de la función de Mittag-Leffler son:

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= e^z. \\ E_{0,1}(z) &= \frac{1}{1-z}. \\ E_{2,1}(z) &= \cosh\sqrt{z}. \end{aligned}$$

La función de Mittag-Leffler tiene un papel importante en el análisis y la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias, y sus propiedades especiales en casos particulares la hacen especialmente valiosa en diversas aplicaciones matemáticas y físicas.

**PROPOSICIÓN 9.** Sean  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Entonces para  $t > 0$  y de acuerdo con [34] se cumple que:

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^\alpha)\right\}(s) = \frac{k!s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}},$$

con  $[s] > |a|^{1/\alpha}$ , donde  $[s]$  representa la parte entera de  $s$ . En consecuencia,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \right\} (s) = t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha).$$

**Ejemplo 18.** Resuelva la siguiente ecuación diferencial fraccionaria usando la transformada de Laplace:  ${}_C D_0^{3/2} y(x) - y(x) = \delta(x)^4$  con  $y(0) = y'(0) = 0$ . Se aplica la transformada de Laplace a toda la ED, aplicando la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}_C D_0^{3/2} y(x)\} - \mathcal{L}\{y(x)\} &= \mathcal{L}\{\delta(x)\} \\ s^{3/2} Y(s) - Y(s) &= 1 \\ Y(s) \cdot (s^{3/2} - 1) &= 1 \\ Y(s) &= \frac{1}{s^{3/2} - 1}. \end{aligned}$$

Luego, se aplica la transformada inversa de Laplace a  $Y(s)$  con lo que se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{3/2} - 1} \right\}.$$

Por la proposición 9 tomando  $a = 1, k = 0, \alpha = \beta = 3/2$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{3/2} - 1} \right\} \\ &= x^{3/2 \cdot 0 + 3/2 - 1} E_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(0)} \left( 1 \cdot x^{3/2} \right) \\ &= x^{1/2} E_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(0)} \left( x^{3/2} \right) \\ &= \sqrt{x} E_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}^{(0)} \left( x\sqrt{x} \right) \\ &= \sqrt{x} E_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} \left( x\sqrt{x} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, la solución es<sup>5</sup>:

$$y(x) = \sqrt{x} E_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} \left( x\sqrt{x} \right).$$

## 8. INTERPRETACIÓN FÍSICA Y GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA FRACCIONARIA

La interpretación física de la derivada fraccionaria se relaciona con su aplicación en fenómenos físicos y sistemas dinámicos. Una interpretación común es considerarla como una medida de la memoria o “influencia a largo plazo” que una variable tiene sobre otra. Mientras que la derivada de orden entero se enfoca en la influencia instantánea, la derivada fraccionaria considera la influencia acumulada a lo largo del tiempo [36]. Esto resulta especialmente útil en sistemas no Markovianos, donde las variables pueden tener una dependencia temporal compleja y retener información de su historia pasada. Además, la derivada fraccionaria se utiliza para modelar fenómenos de difusión en medios heterogéneos o no lineales, proporcionando un enfoque más preciso para describir la propagación de partículas en sistemas con comportamientos no lineales o aleatorios [7].

Por otro lado, la interpretación geométrica de la derivada fraccionaria se centra en su capacidad para describir características de curvas y superficies. En este contexto, se considera como una medida de la “rugosidad” o “aspereza” de una curva. Mientras que la derivada de orden entero captura las variaciones locales de una curva, la derivada fraccionaria proporciona información sobre las variaciones a diferentes escalas

<sup>4</sup>Donde  $\delta(x)$  es la función delta de Dirac.

<sup>5</sup>En lo sucesivo, escribiremos  $E_{\alpha, \beta}^{(0)} = E_{\alpha, \beta}$  para referirnos a la derivada 0 de la función de Mittag-Leffler.

y niveles de detalle, permitiendo caracterizar y cuantificar la complejidad estructural de objetos geométricos. Esta interpretación encuentra aplicaciones en el estudio de fractales y estructuras autosemejantes, donde la derivada fraccionaria se utiliza para medir el grado de autosemejanza y describir la estructura fractal de objetos en diversas disciplinas científicas [42, 28].

En conclusión, la derivada fraccionaria presenta interpretaciones físicas y geométricas fundamentales que tienen importantes implicaciones en la comprensión de varios fenómenos y la descripción de estructuras en diversas áreas científicas. Su capacidad para capturar influencias a largo plazo en sistemas dinámicos, así como su habilidad para caracterizar la rugosidad y autosemejanza en objetos geométricos, la convierten en una herramienta invaluable en campos como la física, la biología, la química y otras disciplinas científicas donde se busca un mayor nivel de precisión y detalle en el análisis de fenómenos y estructuras.

## 9. LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

La ley del enfriamiento de Newton es un principio fundamental en la física que describe la pérdida de calor de un objeto en contacto con un ambiente más frío con el tiempo, siendo ampliamente estudiado en diversas áreas como la meteorología y la ingeniería. Sin embargo, en las últimas décadas, ha surgido un campo emocionante de investigación que involucra la derivada fraccionaria en la ley del enfriamiento de Newton [31]. La derivada fraccionaria, que extiende el concepto tradicional de derivada a órdenes fraccionarios, permite capturar fenómenos más complejos que no se explican completamente con la derivada clásica. La ley del enfriamiento de Newton fraccionaria proporciona una nueva perspectiva y comprensión más profunda de la disipación de calor en sistemas físicos, modelando situaciones donde la velocidad de enfriamiento presenta comportamientos intermedios y más sofisticados [40]. En esta sección se exploran las aplicaciones y consecuencias de la ley del enfriamiento de Newton fraccionaria, analizando cómo la inclusión de la derivada fraccionaria afecta el comportamiento térmico de objetos en su entorno [40]. Se abordan enfoques matemáticos y físicos para resolver y comprender las ecuaciones diferenciales fraccionarias asociadas con esta ley, y se examinan las diferencias con las soluciones clásicas [14, 12, 37, 23].

**Ley de enfriamiento de Newton.** En un cuerpo que se está enfriando, la tasa de cambio de la temperatura  $T(t)$  con respecto al tiempo  $t$  es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo  $T(t)$  y la temperatura  $T_A$  del entorno en el que se encuentra. Esto es:

$$(45) \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_A),$$

donde  $k < 0$  es una constante de proporcionalidad.

Resolvemos la ecuación (45) por el método de resolución de factor integrante para ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= kT - kT_A, \\ \frac{dT}{dt} - kT &= -kT_A. \end{aligned}$$

El factor integrante es  $\mu = e^{\int -k dt} = e^{-kt}$ , multiplicando ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dT}{dt} - kT \right) e^{-kt} &= (-kT_A) e^{-kt}, \\ \frac{d}{dt} T e^{-kt} &= -kT_A e^{-kt}. \end{aligned}$$

Integrando ambos miembros respecto a  $t$ :

$$\int \frac{d}{dt} T e^{-kt} dt = \int -k T_A e^{-kt} dt$$

$$T e^{-kt} = T_A e^{-kt} + c_1$$

$$T = \frac{T_A e^{-kt} + c_1}{e^{-kt}}$$

$$T = T_A + c_1 e^{kt}.$$

Ahora, imponemos las siguientes condiciones iniciales  $T(0) = T_0, T(t_0) = a$  para encontrar el valor de las constantes  $c_1$  y  $k$ . Primero haciendo  $T(0) = T_0$ :

$$T_0 = T_A + c_1 e^0$$

$$T_0 = T_A + c_1$$

$$c_1 = T_0 - T_A.$$

Por otra parte, ahora aplicando la condición  $T(t_0) = a$  se tiene que:

$$a = T_A + c_1 e^{kt_0}$$

$$a = T_A + (T_0 - T_A) e^{kt_0}$$

$$a - T_A = (T_0 - T_A) e^{kt_0}$$

$$e^{kt_0} = \frac{a - T_A}{T_0 - T_A}$$

$$\ln(e^{kt_0}) = \ln\left(\frac{a - T_A}{T_0 - T_A}\right)$$

$$kt_0 = \ln\left(\frac{a - T_A}{T_0 - T_A}\right)$$

$$k = \frac{1}{t_0} \ln\left(\frac{a - T_A}{T_0 - T_A}\right).$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación diferencial ordinaria es:

$$T = T_A + (T_0 - T_A) e^{\frac{1}{t_0} \ln\left(\frac{a - T_A}{T_0 - T_A}\right) t},$$

donde  $T_A$  representa la temperatura del medio que rodea al objeto,  $T_0$  la temperatura inicial y  $a$  el valor de la temperatura después de haber transcurrido un tiempo  $t_0$ .

**Ejemplo 19** (Enfriamiento de una barra metálica). Supongamos que una barra metálica a una temperatura de  $50^\circ F$  se pone en un cuarto a una temperatura de  $5^\circ F$ . Después de 10 minutos la temperatura de la barra es  $25^\circ F$ . Vamos a calcular el tiempo que tarda la barra en llegar a una temperatura de  $10^\circ F$ . Por una parte las condiciones iniciales son:  $T_0 = 50, T_A = 5, t_0 = 10, a = 25$ . Reemplazando en la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$T = 5 + 45 e^{\frac{1}{10} \ln\left(\frac{4t}{9}\right)}.$$

Para saber cuánto tiempo tardará la barra en llegar a una temperatura de  $10^\circ F$  igualamos la ecuación anterior a 10:

$$5 + 45 e^{\frac{1}{10} \ln\left(\frac{4t}{9}\right)} = 10.$$

Despejando  $t$  tenemos que  $t \approx 27$  minutos.

Ahora tratemos el caso fraccionario, por lo cual haremos uso de las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Consideremos el siguiente problema de valor inicial análogo

a la ley de enfriamiento de Newton pero en su versión fraccionaria<sup>6</sup>.

$$\begin{aligned} {}_C D_t^\alpha T(t) - kT(t) &= -kT_A, t > 0, p = [\alpha] + 1 \\ T^n(0) &= T_n, T_n \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2 \dots p-1. \end{aligned}$$

Calculando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial fraccionaria:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}_C D_t^\alpha T(t) - kT(t)\} &= \mathcal{L}\{-kT_A\} \\ \mathcal{L}\{{}_C D_t^\alpha T(t)\} - k\mathcal{L}\{T(t)\} &= -kT_A \mathcal{L}\{1\} \\ s^\alpha T(s) - \sum_{i=0}^{p-1} s^{\alpha-i-1} T^i(0) - kT(s) &= -\frac{kT_A}{s}. \end{aligned}$$

Despejando  $T(s)$  y considerando las condiciones iniciales resulta:

$$T(s) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - k} T_i - \frac{kT_A}{s(s^\alpha - k)}.$$

Pero notemos que:

$$T(s) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - k} T_i = \sum_{i=0}^{p-1} \mathcal{L}\{t^i E_{\alpha, i+1}(kt^\alpha)\}(s).$$

Obteniendo la transformada inversa de Laplace de  $T(s)$ :

$$\begin{aligned} T(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - k} T_i - \frac{kT_A}{s(s^\alpha - k)} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - k} T_i \right\} - kT_A \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^\alpha - k)} \right\}. \end{aligned}$$

Usando las fórmulas para la transformada inversa de Laplace se obtiene:

$$T(t) = \sum_{i=0}^{p-1} T_i t^i E_{\alpha, i+1}(kt^\alpha) - kT_A t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(kt^\alpha).$$

Ahora, supongamos que  $T(0) = 50, T_A = 5, k = -0,08$ .

Caso  $\alpha = \frac{1}{3}$ :

$$T(t) = 50E_{\frac{1}{3}, 1}(-0,08t^{\frac{1}{3}}) + 0,4t^{\frac{1}{3}}E_{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}}(-0,08t^{\frac{1}{3}}) = y_1.$$

Caso  $\alpha = \frac{1}{2}$ :

$$T(t) = 50E_{\frac{1}{2}, 1}(-0,08t^{\frac{1}{2}}) + 0,4t^{\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(-0,08t^{\frac{1}{2}}) = y_2.$$

Caso  $\alpha = \frac{3}{4}$ :

$$T(t) = 50E_{\frac{3}{4}, 1}(-0,08t^{\frac{3}{4}}) + 0,4t^{\frac{3}{4}}E_{\frac{3}{4}, \frac{7}{4}}(-0,08t^{\frac{3}{4}}) = y_3.$$

Caso  $\alpha = 1$ :

$$T(t)E = 5 + 45e^{-0,08t} = y_4.$$

En la figura 4 se representa gráficamente cada una de las soluciones anteriores usando el software Julia [15].

<sup>6</sup>En este caso, el subíndice  $t$  en  ${}_C D_t^\alpha$  hace referencia a que la derivada fraccionaria es con respecto al tiempo.

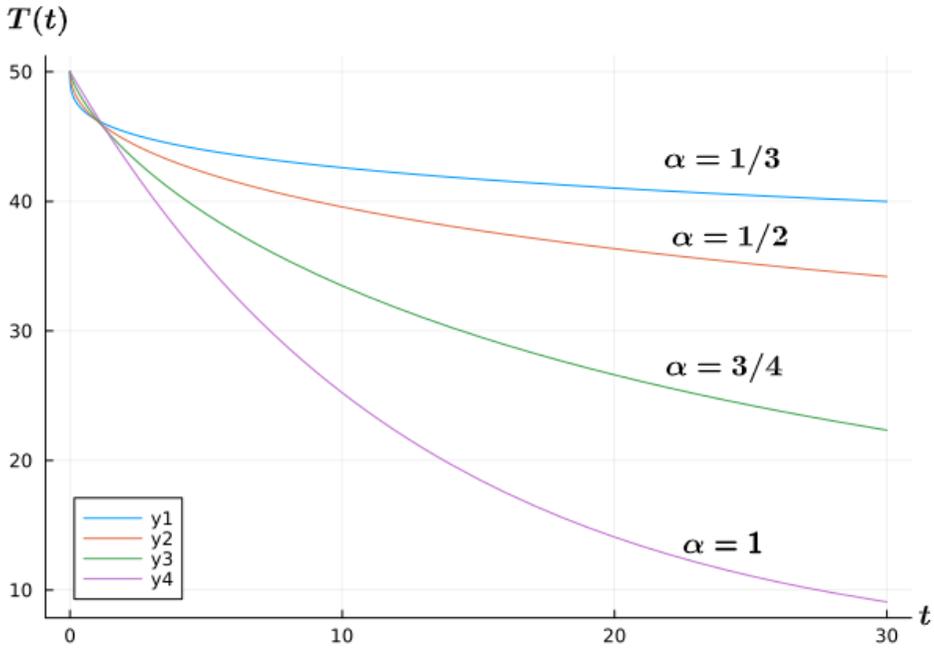


FIGURA 4. Gráfica de cada una de las soluciones obtenidas en el ejemplo 19 para el problema de la ley de enfriamiento de Newton en su versión fraccionaria. La imagen es de autoría propia realizada en Julia.

## 10. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En esta sección, analizaremos los resultados obtenidos en el ejemplo del enfriamiento de una barra metálica utilizando la ley de enfriamiento de Newton fraccionaria. En la Figura 4, se presentan las gráficas de las soluciones obtenidas para diferentes valores de  $\alpha$ .

Se observa que a medida que  $\alpha$  se acerca a 1, las soluciones fraccionarias se aproximan a la solución clásica de la ecuación diferencial ordinaria. Esto tiene sentido, ya que cuando  $\alpha$  tiende a 1, la derivada fraccionaria se convierte en la derivada ordinaria, y la ley de enfriamiento de Newton fraccionaria se reduce a la forma clásica.

Por otro lado, cuando  $\alpha$  toma valores más bajos, las soluciones presentan comportamientos más complejos y sofisticados. Esto es especialmente evidente en la gráfica con  $\alpha = \frac{1}{3}$ , donde se observa un comportamiento más abrupto y una tasa de enfriamiento más lenta en comparación con las otras soluciones.

Es interesante notar que la inclusión de la derivada fraccionaria en la ley de enfriamiento de Newton permite modelar sistemas con tasas de enfriamiento no lineales y fenómenos de disipación de calor más complejos. Esta capacidad de capturar comportamientos intermedios entre la disipación exponencial y lineal es crucial en aplicaciones donde el enfriamiento sigue patrones no convencionales.

En resumen, la ley de enfriamiento de Newton fraccionaria ofrece una herramienta poderosa y versátil para estudiar y modelar problemas de disipación de calor en diversos sistemas físicos. La combinación de las herramientas del cálculo fraccionario con la ley clásica de enfriamiento de Newton abre nuevas posibilidades para comprender y controlar procesos térmicos en la naturaleza y la tecnología moderna.

## 11. CONCLUSIONES

En este trabajo, hemos explorado la aplicación de la derivada fraccionaria en la ley del enfriamiento de Newton, un principio fundamental en la física que describe cómo un objeto en contacto con un medio ambiente más frío pierde calor con el tiempo. Además, este trabajo ha ofrecido una introducción al cálculo fraccionario, una extensión del cálculo tradicional que permite capturar fenómenos más complejos que no se explican completamente con la derivada clásica.

Nuestros resultados muestran que la ley de enfriamiento de Newton fraccionaria ofrece una perspectiva novedosa y profunda para entender los procesos de enfriamiento en diversos sistemas físicos. La capacidad de modelar tasas de enfriamiento no lineales y fenómenos más complejos es crucial para aplicaciones en ingeniería, ciencia de materiales y otros campos.

Además, hemos comparado cómo las soluciones fraccionarias se aproximan a las solución clásica de orden entero cuando  $\alpha$  tiende a 1, lo que resalta la versatilidad de la ley de enfriamiento de Newton fraccionaria para abarcar tanto casos convencionales como situaciones más especializadas.

En conclusión, la inclusión de la derivada fraccionaria en la ley de enfriamiento de Newton ofrece una perspectiva más amplia y compleja en la modelación y comprensión de procesos de enfriamiento. Este enfoque, junto con la introducción al cálculo fraccionario, representa una herramienta valiosa para estudiar sistemas térmicos en situaciones donde las aproximaciones clásicas no son suficientes.

**AGRADECIMIENTOS.** Los autores desean expresar su agradecimiento a CONAHCYT, a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, y a la Escuela Superior de Apan (ESAp), donde se escribió el artículo, así como a los árbitros anónimos de la revista. También agradece a la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Básicas e Ingeniería.

## REFERENCIAS

- [1] Abel, N. H. (1839). *Resolution d'un problème de mécanique*. Oeuvres Complètes, tomo premier, 27-30. Gröndah, Christiana.
- [2] Abel, N. H. (1839). *Sur quelques intégrales définies*. Oeuvres Complètes, tomo second, 93-102. Gröndah, Christiana.
- [3] Baleanu, D. (2012). *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*. World Scientific, 3(2), 1650002. doi: 10.1142/S2010326316500025.
- [4] Baleanu, D., Günevec, Z. B., & Tenreiro Machado, J. A. (2010). *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*. Springer.
- [5] Bernoulli, J., & Bernoulli, D. (1713). *Ars conjectandi*. Thurneysen Brothers. Basel, Switzerland.
- [6] Caputo, M. (1969). *Elasticità e Dissipazione*. Zanichelli.
- [7] Chechkin, A., Gonchar, V., Korabel, N., & Sushko, Y. (2003). *Introduction to the Theory of Random Processes*. Nauka.
- [8] Duarte, O. M. (2011). *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*. Springer.
- [9] Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer.
- [10] Euler, L. (1738). *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, V, 36-57. San Petersburgo.
- [11] Fourier, J. B. J. (1822). *Théorie Analytique de la Chaleur*, 561-562. Chez Firmin Didot, Père et fils, Paris.
- [12] García, A., & Patel, K. (2022). *Advances in Fractional Heat Transfer and Applications*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 190, 1210-1225.
- [13] Grünwald, A. K. (1867). *Ueber, Begrenzte, Derivationen und Deren Anwendung*. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 12, 441-480.
- [14] Johnson, M., & White, B. (2020). *Solving Fractional Heat Equations Using Fourier Transform Methods*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 483(2), 123485.
- [15] Julia Computing. *The Julia Programming Language*. Recuperado de <https://julialang.org/> (Acceso en línea).
- [16] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier.
- [17] Kolmogorov, A. N. (1950). *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsea Publishing Company. Providence, RI.

- [18] Lacroix, S. F. (1819). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, Second edition*, 409-410. Courcier, Paris.
- [19] Laplace, P. S. (1812). *Théorie Analytique des Probabilités*, 1-66, 67-163. M. V. Councier, Libraire pour les Mathématiques, Paris.
- [20] Leibniz, G. W. (1832). *Cuarta carta a Wallis. Oeuvres completes*, III, 105. Paris.
- [21] Leibniz, G. W. (1859). *Mathematische Schriften*. Verlag von A. Asher & Comp. Berlin.
- [22] L'Hôpital, M. de. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Chez Louis Roulland. Paris, France.
- [23] Li, X., & Wang, Y. (2018). *Advances in Fractional Newton's Cooling Law*. Applied Mathematics Letters, 76, 28-33.
- [24] Li, Y., & Wang, Y. (2020). *Recent Advances in Fractional Calculus and Its Applications*. Complexity, 2020, 1-2. doi: 10.1155/2020/8818349.
- [25] Letnikov, A. V. (1868). *Theory of Differentiation of an Arbitrary Order*. Mat. Sb., 3, 1-68.
- [26] Machado, J. A. T. (2020). *Fractional Calculus: Fundamentals, Methods, and Applications*. Entropy, 22(12), 1372.
- [27] Mainardi, F. (2010). *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. Imperial College Press.
- [28] Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman.
- [29] Miller, K. S., & Ross, B. (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley.
- [30] Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., & Feliu-Batlle, V. (2010). *Fractional Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*. Springer-Verlag London Limited.
- [31] Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Royal Society, 1, 1-72.
- [32] Oldham, K. B., & Spanier, J. (2006). *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Elsevier.
- [33] Ortigueira, M. D. (2021). *Fractional Calculus: Fundamentals and Applications*. arXiv preprint arXiv:2103.02221.
- [34] Petráš I. (2011). *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*, Springer Science & Business Media.
- [35] Podlubny, I. (1998). *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Academic Press.
- [36] Podlubny, I. (2002). *Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation*. Fractional Calculus and Applied Analysis, 5(4), 367-386. De Gruyter.
- [37] Rosales García, J., & López, R. (2015). *Fractional Newton's Cooling Law*. Journal of Fractional Calculus and Applied Mathematics, 9(2), 87-92.
- [38] Rosales García, J. J., Guía Calderón, M., Martínez Ortiz, J., & Baleanu, D. (2013). *Motion of a Particle in a Resisting Medium Using Fractional Calculus Approach*. Proceedings of the Romanian Academy, 14(1), 42-47.
- [39] Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers.
- [40] Smith, J., & Brown, A. (2019). *Fractional Heat Transfer: Applications and Perspectives*. Journal of Heat Transfer, 141(8), 081010.
- [41] Srivastava, H. M., Saxena, R. K., & Mathai, A. M. (1989). *Univalent Functions, Fractional Calculus, and Their Applications*. Halsted Press. New York, NY.
- [42] Tarasov, V. E. (2010). *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. Springer.
- [43] Tarasov, V. E. (2015). *Fractional Dynamics of Classical and Quantum Systems*. Nonlinear Dynamics, 79(2), 1843-1862. Springer. doi: 10.1007/s11071-014-1865-8.
- [44] Trujillo, J. J. (2010). *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*. Imperial College Press. London, UK.

*Lozada-Coronel J.*

Escuela Superior de Apan,  
 Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.  
 Carretera Apan-Calpulalpan Km. 8,  
 Colonia Chimalpa Tlalayote, Apan, Hidalgo; C.P. 43900.  
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1704-9743>  
 e-mail: [josue\\_lozada@uaeh.edu.mx](mailto:josue_lozada@uaeh.edu.mx)

*Gutiérrez-Corona J. N.*

Departamento de Física y Matemáticas,  
Universidad Iberoamericana, Ciudad de México.  
Prolongación Paseo de Reforma 880.  
Lomas de Santa Fe, México, C.P. 01219, Ciudad de México.  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1765-3206>  
e-mail: A2281332@correo.uia.mx

*Quezada-Téllez L. A.*

Escuela Superior de Apan,  
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.  
Carretera Apan-Calpulalpan Km. 8,  
Colonia Chimalpa Tlalayote, Apan, Hidalgo; C.P. 43900.  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9262-9951>  
e-mail: luis\_quezada@uaeh.edu.mx

## SUBASTAS COMO JUEGOS CON INFORMACIÓN COMPLETA E INCOMPLETA

TERESA PÉREZ MUÑOZ

RESUMEN. Las subastas son una de las principales aplicaciones de la teoría de juegos. En 2020 fue otorgado el Premio Nobel de Economía a Paul Milgrom y Robert Wilson por sus contribuciones a las subastas. En este artículo, se presentarán tres ejemplos de subastas con dos jugadores o jugadoras, en los cuales, la valoración que cada participante atribuye al bien subastado podría considerarse pública o privada. Cuando la valoración es pública el juego se considera de información completa y se determinará el equilibrio de Nash o el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Sin embargo, si la valoración es privada, el juego se considera de información incompleta y se obtendrá el equilibrio bayesiano de Nash.

### 1. INTRODUCCIÓN

Una *subasta* es un mecanismo de venta o compra, caracterizado por un conjunto de reglas por el cual se determina la asignación de recursos y su precio en función de las *pujas* (una puja es lo que se está dispuesto a dar, cantidad de dinero, por un producto) de las o los participantes [1], [2], [4], [5], [7], [8], [10]. Los participantes en una subasta son el vendedor o vendedora y el o los compradores, a los cuales denominaremos *jugadores o jugadoras* y a la subasta en cuestión *juego*. La *valoración* de un artículo para un comprador o compradora es el precio más alto que se está dispuesto a pagar por el mismo.

El plan de acción destinado a lograr un objetivo específico se define como *estrategia*. Una *estrategia pura* para un jugador o jugadora es un plan de acción determinista, sin embargo, también se podrían tomar acciones de forma estocástica o aleatoria, lo cual nos conduciría a *estrategias mixtas* [1], [6], [9], [10], [11].

En términos generales podríamos describir una subasta como un juego en el cual los compradores de un bien expresan su disposición a pagar por éste mediante pujas y el resultado del juego queda completamente determinado por la información suministrada en forma de pujas y la valoración que cada jugador o jugadora tienen por el bien. Así, cada resultado del juego determinará la ganancia final para cada participante, la cual dependerá de si recibe o no el bien, y en caso de recibirlo, su beneficio neto dependerá del valor que dicho participante atribuya al bien [2], [5], [8].

La valoración que cada participante atribuye al bien subastado podría considerarse pública o privada. Cuando la información es pública, es decir, es del dominio de todos los jugadores o jugadoras, se podrá determinar el equilibrio de Nash si el juego está en forma normal y el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos si tenemos la representación del juego en forma extensiva [1], [6], [10], [11]. Sin embargo, cuando la información es privada, es decir, no todas las jugadoras o jugadores la conocen, el juego se considera un juego con información incompleta [1], [6], [10], [11]. Los juegos con información incompleta se pueden estudiar mediante técnicas probabilísticas como la fórmula de Bayes [1], [3], [6], [10], [11].

John Harsanyi desarrolló el análisis de juegos con información incompleta y en 1994 recibió el Premio Nobel por este análisis [3].

---

2010 *Mathematics Subject Classification*. 11A51, 11D45, 11R04, 11R11, 11R29.

*Palabras clave*. Juegos, Equilibrio de Nash, Equilibrio bayesiano de Nash, Subastas.

El concepto más importante en la teoría de juegos es el de equilibrio de Nash o el equilibrio bayesiano de Nash, pues éste permite estabilizar en un sentido apropiado un juego [1], [4], [6], [10], [11]. Por lo que es adecuado, para un buen entendimiento de esta teoría, conocer las condiciones para garantizar la existencia de equilibrios de Nash, así como las técnicas para su determinación y/o aproximación.

En este trabajo abordaremos ejemplos de subastas con dos jugadores o jugadoras; a estos juegos se les llama *bipersonales*.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2, se estudian juegos con información completa. Se presentan dos aplicaciones a subastas. Posteriormente, en la Sección 3 se analizan juegos con información incompleta mediante un ejemplo aplicado a subastas. Finalmente, la Sección 4 constituye las conclusiones.

## 2. JUEGOS CON INFORMACIÓN COMPLETA

En esta sección consideraremos una subasta como un juego con información completa, *no cooperativo* [1], [6], [10], [11], y las decisiones que tomen los o las jugadoras serán de manera independiente y simultánea [1], [6], [10], [11]. Además, ambos jugadores o jugadoras conocerán las estrategias que pueden seguir y cada uno tratará de maximizar su utilidad, es decir, se supondrá que las o los jugadores son *racionales* [1], [6], [10] [11].

**2.1. Juegos en forma normal.** Un juego finito bipersonal en forma normal con información completa se compone de los siguientes elementos:

- Un conjunto de jugadores o jugadoras  $J = \{1, 2\}$ .
- Un conjunto de acciones o estrategias puras para cada jugador o jugadora  $i$ ,  $i = 1, 2$ . Denotaremos a estos conjuntos como:  $S_i$ ,  $i = 1, 2$  y supondremos que son finitos.
- Un conjunto de funciones de pagos,  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ , donde

$$u_i : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ para cada } i \in J.$$

**Definición 1.** Un *equilibrio de Nash (EN)* para un juego bipersonal en estrategias puras es una pareja de estrategias  $s^* = (s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$  tal que

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \text{ para toda } s_1 \in S_1$$

y

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2) \text{ para toda } s_2 \in S_2.$$

**2.1.1. Aplicación a subastas.** Raúl y Pedro son los únicos participantes en una subasta en sobre cerrado por una pintura al óleo. Ambos están dispuestos a realizar una única puja de forma simultánea por 1000 ó 2000 pesos. Se da la pintura al jugador que haya pujado la cantidad mayor, y en caso de empate se decide en un volado quién se la lleva. El ganador paga la puja que ha realizado.

De acuerdo a lo anterior, se puede ver a la subasta como un juego con los siguientes elementos:

- Jugadores:  $J_1 \equiv$  Raúl,  $J_2 \equiv$  Pedro.
- Estrategias puras:

$$S_1 = S_2 = \{1000, 2000\}.$$

- Valoración del objeto: Los dos jugadores saben que Raúl valora la pintura en 3000 pesos y Pedro en 1500 pesos, entonces:

$$v_1 = 3000 \text{ y } v_2 = 1500.$$

- Utilidad o pago: Los pagos para cada jugador tendrán que ver con la combinación de estrategias y sus valoraciones respectivas. Si un jugador puja más que el otro, es decir,  $s_i > s_j$ , entonces el jugador  $i$  pagará su puja y su ganancia será  $v_i - s_i$ , en caso contrario su ganancia será 0. Si los jugadores pujan la

misma cantidad,  $s_i = s_j$ , considerando que las valoraciones son independientes se tiene que  $p(v_i|v_j) = p(v_i)$ ; en caso de empate se decide en un volado, por tanto,  $p(v_i) = 1/2$ . De esta manera, las funciones de pago estarán dadas por las ecuaciones (1) y (2):

$$(1) \quad u_1(s_1, s_2; v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & s_1 < s_2 \\ \frac{v_1 - s_1}{2} & s_1 = s_2 \\ v_1 - s_1 & s_1 > s_2 \end{cases}$$

$$(2) \quad u_2(s_1, s_2; v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & s_2 < s_1 \\ \frac{v_2 - s_2}{2} & s_2 = s_1 \\ v_2 - s_2 & s_2 > s_1 \end{cases}$$

En el Cuadro 1 se representa el juego en forma normal, el cual se compone de los jugadores, las decisiones (estrategias) y los pagos.

Considerando las estrategias y valoraciones se determinan las utilidades para cada jugador de acuerdo con las ecuaciones (1) y (2). Las primeras entradas del juego en forma normal representan los pagos para Raúl y las segundas entradas los pagos para Pedro.

Por ejemplo, si Raúl puja 2000 y Pedro puja 2000, entonces  $s_1 = s_2 = 2000$ , de la ecuación (1), como Raúl valora la pintura en 3000 pesos, entonces su ganancia será:  $(3000 - 2000)/2 = 500$ . Por otro lado, Pedro valora la pintura en 1500 pesos, de la ecuación (2), su pago será:  $(1500 - 2000)/2 = -250$ .

		Pedro	
		1000	2000
Raúl	1000	<u>1000</u> , <u>250</u>	0 , -500
	2000	<u>1000</u> , <u>0</u>	<u>500</u> , -250

CUADRO 1. Juego en forma normal.

Para determinar la solución del juego, analizaremos la mejor respuesta para cada jugador. Las mejores respuestas se subrayarán en el Cuadro 1. Suponiendo que Pedro decide pujar 1000 (observamos la columna que corresponde a 1000 para Pedro), Raúl podría pujar 1000 ó 2000, en ambos casos su ganancia sería de 1000 pesos. Si Pedro decide pujar 2000, a Raúl le conviene pujar 2000, pues su ganancia sería de 500 pesos, si pujara 1000 su pago sería 0.

Suponiendo que Raúl puja 1000 (observamos la fila que corresponde a 1000 para Raúl), a Pedro le conviene pujar 1000, pues su ganancia sería de 250 pesos, si pujará 2000 perdería 500 pesos. Si Raúl decide pujar 2000 a Pedro le conviene pujar 1000, pues su ganancia sería de 0, sin embargo, si puja 2000 perdería 250 pesos.

El o los equilibrios de Nash serán la combinación de estrategias puras que tengan ambas entradas subrayadas. Por tanto, del Cuadro 1, podemos observar que hay dos equilibrios de Nash.

$$EN = \{(1000, 1000), (2000, 1000)\}$$

De los equilibrios de Nash se puede observar que Raúl puede pujar 1000 ó 2000 pesos, en ambos casos no perderá; sin embargo, Pedro al tener una valoración menor por la pintura le conviene pujar 1000 pesos.

**2.2. Juego en forma extensiva.** Los *juegos dinámicos* con información completa son aquellos en los que las o los jugadores pueden tomar decisiones en distintos instantes del tiempo y donde cada jugador o jugadora conoce las funciones de pagos de todos los jugadores o jugadoras. Su forma de representación natural es la extensiva [1], [6], [10], [11]. La *forma extensiva* de un juego representa la información con la que cuenta cada jugador o jugadora en el momento de tomar una decisión. Además, cada juego en forma extensiva se puede representar mediante un juego en forma normal, en el cual las o los jugadores eligen de manera simultánea sus estrategias [10]. A este tipo de juegos les podremos determinar su equilibrio de Nash y su *equilibrio de Nash perfecto en subjuegos* (ENPS), el cual es una adecuación y mejora con respecto al EN [1], [6], [10], [11].

Un *juego en forma extensiva* se compone de los siguientes elementos:

- Un conjunto de jugadoras o jugadores  $J = \{1, 2\}$ .
- Un conjunto no vacío y finito de nodos  $X$ . Un nodo representa una posible situación del juego. Hay un nodo inicial u origen ( $O$ ), nodos de decisión y nodos terminales ( $T(X)$ ).

Sea

$$\begin{aligned} \sigma : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto \sigma(x) \end{aligned}$$

$\sigma(O) = O$  y para  $x \neq O$ ,  $\sigma(x)$  es el nodo inmediatamente predecesor de  $x$ .

- Un conjunto  $A$  de todas las posibles acciones para cualquier nodo de decisión (no terminal) distinto del origen.

$$\begin{aligned} \alpha : X - \{O\} &\rightarrow A \\ x &\mapsto \alpha(x) \end{aligned}$$

La función  $\alpha$  hace corresponder a cada nodo aquella acción  $\alpha(x)$  que lleva desde el nodo inmediato predecesor  $\sigma(x)$  al nodo  $x$ .

- Un conjunto de nodos de decisión  $X_i$  para cada jugador o jugadora  $i$ , en los que el jugador  $i$  tienen que elegir una acción.

$$\bigcup_{i \in J} X_i = D(x)$$

$\forall i, j \in J$ , con  $i \neq j$ , se verifica que  $X_i \cap X_j = \emptyset$ .

- Una familia de conjuntos de información<sup>1</sup>  $H$  y una función  $h$  que asigna a cada nodo  $x$  un conjunto de información  $h(x)$  al que pertenece.

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow H \\ x &\mapsto h(x). \end{aligned}$$

- Una función de pagos  $u$ , en donde  $u_i(x)$  indica el pago o utilidad que recibe el jugador o jugadora  $i$  si se ha alcanzado el nodo terminal  $x$ .

$$\begin{aligned} r : T(X) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto u(x) = (u_1(x), u_2(x)). \end{aligned}$$

Por tanto, un *juego en forma extensiva*  $\Gamma$  está compuesto de los siguientes elementos:

$$\Gamma = \{J, (X, \sigma), (A, \alpha), \{X_i\}_{i \in J}, (A(h))_{h \in H}, u\}.$$

**Definición 2.** Dado un juego  $\Gamma$  con información completa en forma extensiva, y un nodo de decisión  $x$  de  $\Gamma$ , decimos que  $\Gamma'$  es un *subjuego* de  $\Gamma$  con inicio en  $x$  si  $\Gamma'$  es una parte de  $\Gamma$  que cumple con lo siguiente:

<sup>1</sup>En general, un conjunto de información es un conjunto de nodos de decisión para el mismo jugador o jugadora. Cuando una jugadora o jugador está en un conjunto de información no sabe en cuál de los nodos pertenecientes a dicho conjunto se encuentra [1], [6], [10], [11].

1. Contiene al nodo  $x$  y a todos los nodos que siguen a  $x$ , y sólo a ellos.
2. El nodo  $x$  es un conjunto de información unitario.
3. No rompe ningún conjunto de información.

El siguiente teorema se puede consultar en el libro [1].

**TEOREMA 3.** *Un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) es un equilibrio de Nash en el que el comportamiento especificado en cada subjuego es un equilibrio de Nash para el subjuego. Además, todo juego dinámico finito tiene un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.*

**2.2.1. Aplicación a subastas.** Se subasta un billete de 1000 pesos entre Raúl y Pedro. Se juega por turnos, Raúl empezará el juego. Aquél a quien le toca jugar puede pasar (P), o pujar con 300 pesos más que el anterior (suponiendo que los tiene). Si un jugador decide pasar, ya no puede pujar en una jugada posterior. Gana el último en pujar (se lleva el billete). Si ninguno ha pujado se llevan 500 pesos cada uno. Ambos jugadores deberán pagar su última puja y ambos saben que tienen solamente 900 pesos.

Esta subasta la podemos representar como un juego con información completa en forma extensiva mediante un diagrama de árbol (Figura 1).

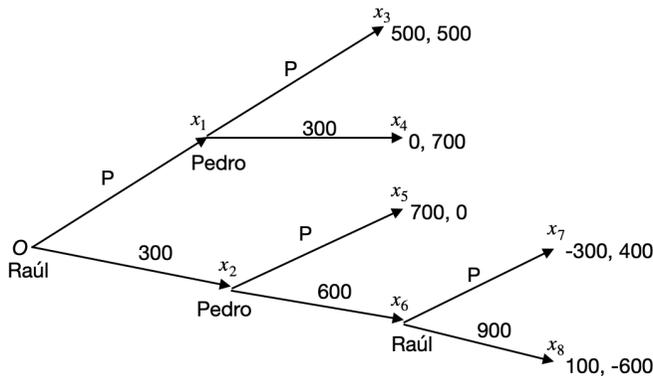


FIGURA 1. Juego en forma extensiva.

De acuerdo a la descripción de juegos en forma extensiva, se puede ver a la subasta como un juego con los siguientes elementos:

- Jugadores:  $J_1 \equiv$  Raúl,  $J_2 \equiv$  Pedro.
- El conjunto de nodos:

$$X = \{O, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}.$$

La función  $\sigma$  de predecesores:

$$\begin{aligned} \sigma(O) &= O \\ \sigma(x_1) &= \sigma(x_2) = O, \\ \sigma(x_3) &= \sigma(x_4) = x_1, \\ \sigma(x_5) &= \sigma(x_6) = x_2, \\ \sigma(x_7) &= \sigma(x_8) = x_6. \end{aligned}$$

- El conjunto de acciones  $A$  es:

$$A = \{P \text{ (pasar)}, 300 \text{ (pujar 300)}, 600 \text{ (pujar 600)}, 900 \text{ (pujar 900)}\}.$$

La función  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}\alpha(x_1) &= \alpha(x_3) = \alpha(x_5) = \alpha(x_7) = P, \\ \alpha(x_2) &= \alpha(x_4) = 300, \\ \alpha(x_6) &= 600, \\ \alpha(x_8) &= 900.\end{aligned}$$

- El conjunto de nodos de decisión para los jugadores:

$$(3) \quad X_1 = \{O, x_6\},$$

$$(4) \quad X_2 = \{x_1, x_2\}.$$

- El conjunto de todos los conjuntos de información:

$$H_1 = \{\{O\}, \{x_6\}\},$$

$$H_2 = \{\{x_1\}, \{x_2\}\}.$$

Por tanto,

$$H = \{\{O\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_6\}\}.$$

El conjunto de acciones disponibles en cada conjunto de información:

$$A(\{O\}) = \{P, 300\},$$

$$A(\{x_1\}) = \{P, 300\},$$

$$A(\{x_2\}) = \{P, 600\},$$

$$A(\{x_6\}) = \{P, 900\}.$$

- Los nodos terminales y sus pagos:

$$r(x_3) = (500, 500),$$

$$r(x_4) = (0, 700),$$

$$r(x_5) = (700, 0),$$

$$r(x_7) = (-300, 400),$$

$$r(x_8) = (100, -600).$$

Para representar el juego en forma normal se considera que ambos jugadores tienen dos nodos en su conjunto de nodos de decisión (véase las ecuaciones (3) y (4) y la Figura 2), debido a esto, las estrategias para ambos jugadores tienen dos entradas. Raúl tendrá las estrategias  $\{(P - P), (P - 900), (300 - P), (300 - 900)\}$  y Pedro  $\{(P - P), (P - 600), (300 - P), (300 - 600)\}$ . Nótese, por ejemplo, que la notación 300-900 significa que en su primera elección Raúl elige pujar 300 y en su segunda elección pujar 900.

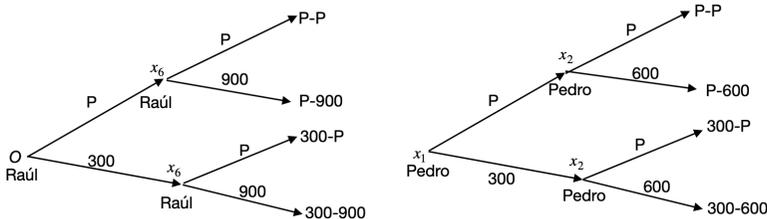


FIGURA 2. Decisiones para cada jugador.

Si Raúl decide pasar en su primera elección y Pedro decide pasar en su primera elección el pago será 500 pesos cada uno, es decir, la combinación de estrategias (P-P, P-P), (P-P, P-600), (P-900, P-P) y (P-900, P-600) tienen pagos de 500 pesos para

cada uno. Por otro lado, si Raúl decide pasar en su primera elección y Pedro decide pujar 300 pesos, Raúl tendrá un pago de 0 pesos y Pedro ganará 700 pesos, es decir, la combinación de estrategias (P-P, 300-P), (P-P, 300-600), (P-900, 300-P) y (P-900, 300-600) hará ganar solamente a Pedro.

Si Raúl decide pujar 300 pesos en su primera elección (nodo O), Pedro podría pujar o pasar. Si Pedro decide pasar Raúl ganará 700 pesos después de pagar su puja, es decir, la combinación de estrategias (300-P, P-P), (300-P, 300-P), (300-900, P-P) y (300-900, 300-P) le hará ganar solamente a Raúl. Si Pedro decide pujar después de que Raúl pujó 300 pesos, Pedro tiene que pujar 300 pesos más, es decir 600 pesos, en este caso Raúl podría decidir pujar o pasar. Si Raúl decide pasar, tendrá que pagar su primera puja y no se llevará el billete, Pedro pagaría su puja y se llevaría 400 pesos. La combinación de estrategias (300-P, P-600) y (300-P, 300-600) hace ganar a Pedro. Sin embargo, si Raúl decide pujar, tendría que pujar 300 pesos más, es decir, 900 pesos. En este caso, Raúl gana 100 pesos después de pagar su puja (pues ganaría el billete) y Pedro tendría que pagar su última puja, es decir, pierde 600 pesos.

De esta manera, el juego en forma normal está representado en el Cuadro 2.

		Pedro			
		P-P	P-600	300-P	300-600
Raúl	P-P	500 , 500	500 , 500	0 , <u>700</u>	0 , <u>700</u>
	P-900	500 , 500	<u>500</u> , 500	0 , <u>700</u>	0 , <u>700</u>
	300-P	<u>700</u> , 0	-300 , <u>400</u>	<u>700</u> , 0	-300 , <u>400</u>
	300-900	<u>700</u> , <u>0</u>	100 , -600	<u>700</u> , <u>0</u>	<u>100</u> , -600

CUADRO 2. Juego en forma normal.

Para determinar el equilibrio de Nash, subrayamos en el Cuadro 2 las mejores respuestas en el juego en forma normal para cada jugador. Si Pedro decide P-P, a Raúl le conviene elegir 300-P ó 300-900, pues tendrá una ganancia de 700 pesos (primeras entradas por columna del juego en forma normal), mientras que si elige P-P ó P-900 obtendrá una ganancia de 500 pesos. Si Raúl decide P-P, a Pedro le conviene elegir 300-P ó 300-600 (segundas entradas por fila de la matriz de pagos), pues tendrá una ganancia de 700 pesos.

De esta manera, subrayamos las respuestas óptimas para ambos jugadores y los equilibrios de Nash son la combinación de estrategias que tenga ambas respuestas subrayadas. Por tanto, hay dos equilibrios de Nash:

$$EN = \{(300 - 900, P - P), (300 - 900, 300 - P)\}$$

Por otro lado, el algoritmo de inducción hacia atrás o algoritmo de Zermelo [1], [6], [10], [11] permite determinar los ENPS (véase el Teorema 3).

Los subjuegos en la Figura 3, de acuerdo a la Definición 2 son tres. Los nodos que cada subjuego tiene son:

- subjuego 1:  $\{x_1, x_3, x_4\}$ ,
- subjuego 2:  $\{x_6, x_7, x_8\}$ ,
- subjuego 3:  $\{x_2, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ .

De acuerdo al Teorema 3 y al algoritmo de Zermelo, el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos se compone de las mejores respuestas al podar el árbol.

El árbol se poda del final al principio, empezando por los subjuegos más pequeños hasta llegar al origen. En cada vértice se observa el jugador que decide y se elegirá la rama que mayor pago le genere. En la Figura 3, en el nodo  $x_1$  Pedro decidirá; si elige

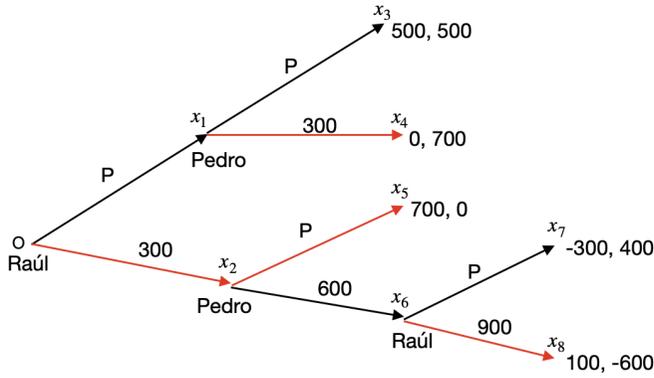


FIGURA 3. ENPS.

P, su pago será de 500 y si elige 300, su pago será de 700, por ello, elegirá 300, esta rama se pinta de rojo y se poda el árbol (Figura 4). En el nodo  $x_6$  Raúl decide; si elige P su pago será -300 y si elige 900 su pago será 100, por tanto, elegirá 900, se pinta la rama de rojo y se poda el árbol. Después de podar los subjugos 1 y 2 se tiene la Figura 4.

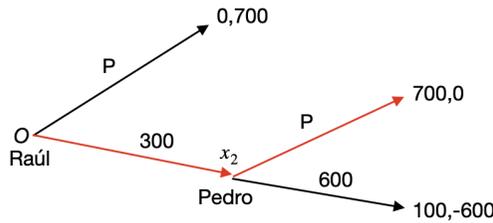


FIGURA 4. Diagrama de árbol podando los subjugos 1 y 2.

Posteriormente, considerando el nodo  $x_2$  (nodo de elección para Pedro) si Pedro elige P, su pago será de 0 y si elige 600, su pago será de -600, por tanto, elegirá P, se pinta la rama de rojo y se poda el árbol. La Figura 5 representa el árbol después de haber podado los tres subjugos.

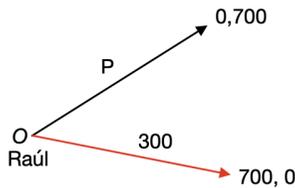


FIGURA 5. Diagrama de árbol podando los subjugos 1, 2 y 3.

En el nodo inicial, Raúl elige, si puja P su pago será de 0 y si puja 300 su pago será de 700, por tanto, elegirá pujar 300. Se pinta la rama que elegirá de rojo terminando el algoritmo de inducción hacia atrás.

La Figura 3 muestra en color rojo todos los caminos de las mejores respuestas que componen al ENPS:

$$ENPS = \{(300 - 900, 300 - P)\}.$$

Observe que en este ejemplo de subasta, el  $ENPS \subseteq EN$ , por tanto, como se mencionó, se puede pensar al ENPS como un equilibrio refinado.

### 3. JUEGOS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA

En las secciones anteriores hemos supuesto que la información es completa, es decir, toda la información para describir el juego es de dominio público. En esta sección analizaremos una subasta vista como un juego con información incompleta, por tanto, existirá alguna información que será privada.

Harsanyi notó que cuando se estudian juegos con información incompleta, y se tiene incertidumbre sobre las preferencias de los jugadores o jugadoras, pueden modelarse conjuntamente a base de definir las utilidades de los jugadores o jugadoras directamente en el espacio de estrategias [3].

Los *juegos bayesianos estáticos* se proponen modelizar aquellas situaciones de naturaleza estática en que cada jugador  $i$  tiene un conjunto de acciones disponibles  $A_i$ , pero además algunos o todos los jugadores o jugadoras disponen de alguna información privada, y las preferencias de cada jugador o jugadora dependen, no sólo de las acciones decididas por todos los jugadores o jugadoras, sino también de la información privada de los jugadores o jugadoras. En estos juegos determinaremos el *equilibrio bayesiano de Nash* (EBN) y seguiremos de cerca el libro de Fujiwara [3]. El EBN será un EN en caso de que la información privada se reduzca a nada [1], [2], [3], [6], [8], [10], [11].

Un *juego bayesiano estático* se compone de los siguientes elementos:

- Un conjunto de jugadoras o jugadores  $J = \{1, 2\}$
- Un conjunto de acciones finito y no vacío  $A_i$  para cada jugadora o jugador  $i$ .
- Un conjunto de estrategias  $S_i$ , las cuales dependen de  $A_i$ .
- Un conjunto de valoraciones  $V_1 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , y  $V_2 = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ , donde  $v_1$  y  $v_2$  son variables aleatorias concentradas en los conjuntos  $V_1$  y  $V_2$  respectivamente, con función de probabilidad conjunta dada por

$$p(b_j, c_k) := p(v_1 = b_j, v_2 = c_k), \quad j = 1, \dots, n \text{ y } k = 1, \dots, m.$$

- Los pagos  $u_i$ .

Por tanto, un *juego bayesiano bipersonal*  $G_B$  queda determinado de la siguiente manera:

$$G_B = \{J; A_1, A_2; S_1, S_2; V_1, V_2; u_1, u_2\}.$$

La siguiente definición es tomada del libro [3] páginas 136-137.

**Definición 4.** En el juego bayesiano bipersonal, el perfil estratégico  $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ , es un *equilibrio bayesiano de Nash* si

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m u_1(s_1^*(b_j), s_2^*(c_k); b_j, c_k) p(b_j, c_k) \geq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m u_1(s_1(b_j), s_2^*(c_k); b_j, c_k) p(b_j, c_k)$$

$\forall s_1 \in S_1$ , y

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m u_2(s_1^*(b_j), s_2^*(c_k); b_j, c_k) p(b_j, c_k) \geq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m u_2(s_1^*(b_j), s_2(c_k); b_j, c_k) p(b_j, c_k)$$

$\forall s_2 \in S_2$ .

NOTA 5. Se sugiere a la lectora o lector revisar el Lema 6.1, p. 137 del libro de Fujiwara [3]. En este Lema se presenta una forma equivalente de establecer las desigualdades de la definición 4. En esta forma equivalente, en lugar de utilizar la probabilidad conjunta  $p(b_j, c_k)$ , se utilizan las probabilidades condicionales:

$$p(v_1 = b_j \mid v_2 = c_k)$$

y

$$p(v_2 = c_k \mid v_1 = b_j).$$

Estas probabilidades condicionales se obtienen mediante la regla de Bayes, por lo cual, se justifica el nombre de equilibrio bayesiano de Nash.

**3.1. Aplicación a subastas.** Raúl y Pedro acuden a comprar una pieza de arte a una subasta que tiene las siguientes reglas:

- Entregarán en sobre cerrado su puja o licitación que puede ser 1000 o 2000 pesos.
- El licitante a quien se adjudique el objeto ha de pagar la puja que hizo.
- Se adjudica el objeto a aquel licitante que escribió la puja más alta. Si las pujas son iguales, se adjudica a uno de ellos, al azar, con probabilidad  $1/2$ .
- Raúl tiene una valoración (cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar por la pieza) de 1500 pesos, que es de dominio público.
- Pedro tiene dos posibles valoraciones privadas, 1500 ó 3000 pesos, que sólo él conoce, pero a las cuales los demás atribuyen probabilidades iguales.

De acuerdo a lo anterior podemos describir a los elementos de la subasta con información incompleta como:

- Jugadores:  $J_1 \equiv$  Raúl y  $J_2 \equiv$  Pedro.
- Acciones:

$$A_1 = A_2 = \{1000, 2000\}.$$

- Estrategias de Raúl:

$$S_1 = \{1000, 2000\}.$$

- Estrategias de Pedro:

$$S_2 = \{(x_1, x_2), x_1 \in A_2 \text{ y } x_2 \in A_2\}.$$

Pedro puja  $x_1$  si su valoración es 1500 y puja  $x_2$  si su valoración es 3000.

- Valoraciones:

$$V_1 = \{1500\}, \quad V_2 = \{1500, 3000\}.$$

Probabilidades de acuerdo a  $V_i$ :

$$p(v_1 = 1500) = 1,$$

$$p(v_2 = 1500) = p(v_2 = 3000) = \frac{1}{2}.$$

Probabilidad conjunta:

$$p(v_1 = 1500, v_2 = 1500) = \frac{1}{2},$$

$$p(v_1 = 1500, v_2 = 3000) = \frac{1}{2}.$$

- Pagos:

$$(5) \quad u_1(a_1, a_2; v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & a_1 < a_2 \\ \frac{v_1 - a_1}{2} & a_1 = a_2 \\ v_1 - a_1 & a_1 > a_2 \end{cases}$$

$$(6) \quad u_2(a_1, a_2; v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & a_2 < a_1 \\ \frac{v_2 - a_2}{2} & a_2 = a_1 \\ v_2 - a_2 & a_2 > a_1 \end{cases}$$

La representación del juego en forma normal ante la combinación de estrategias para cada jugador y ante las posibles valoraciones de los jugadores queda representada de la siguiente manera:

- Considerando la valoración de Raúl  $v_1 = 1500$ , la valoración de Pedro  $v_2 = 1500$  y las ecuaciones (5) y (6) tenemos el juego en forma normal para la combinación

de estrategias de cada jugador.

Por ejemplo, si  $s_1 = 1000$  y  $s_2 = 1000$ , entonces los pagos son los siguientes:

$$\text{para Raúl: } u_1 = \frac{1500 - 1000}{2} = 250, \text{ y}$$

$$\text{para Pedro: } u_2 = \frac{3000 - 1000}{2} = 500.$$

		Pedro	
		1000	2000
Raúl	1000	250, 500	0, 0
	2000	-500, 0	-250, 0

CUADRO 3. Juego en forma normal considerando  $v_1 = 1500$  y  $v_2 = 1500$ .

- Considerando la valoración de Raúl  $v_1 = 1500$ , la valoración de Pedro  $v_2 = 3000$  y las ecuaciones (5) y (6) tenemos el juego en forma normal para la combinación de estrategias de cada jugador.

Por ejemplo, si  $s_1 = 2000$  y  $s_2 = 2000$ , entonces los pagos son los siguientes:

$$\text{para Raúl: } u_1 = \frac{1500 - 2000}{2} = -250, \text{ y}$$

$$\text{para Pedro: } u_2 = \frac{3000 - 2000}{2} = 500.$$

		Pedro	
		1000	2000
Raúl	1000	250, 1000	0, 1000
	2000	-500, 0	-250, 500

CUADRO 4. Juego en forma normal considerando  $v_1 = 1500$  y  $v_2 = 3000$ .

Para representar el juego en forma normal considerando las probabilidades de acuerdo a  $V_i$ , debemos de recordar que Pedro deberá de pujar si su valoración es 1500 y pujar si su valoración es 3000, por ello, el conjunto de estrategias para Pedro, siguiendo la notación dada en 2.2.1, es:

$$S_2 = \{1000 - 1000, 1000 - 2000, 2000 - 1000, 2000 - 2000\}.$$

Tomando las representaciones del juego en forma normal (Cuadro 3 y Cuadro 4), considerando el conjunto de estrategias  $S_2$  de Pedro y que cada valoración tiene probabilidad  $1/2$ , los pagos de la subasta en forma normal con información incompleta se determinan de la siguiente manera:

- Considerando  $s_1 = 1000$  y  $s_2 = 1000 - 2000$ , determinaremos los pagos para cada jugador de acuerdo a la Definición 4 (todos los demás casos se determinan de igual manera):

el pago para Raúl:  $u_1 = 250 p(v_1 = 1500, v_2 = 2000) + 0 p(v_1 = 1500, v_2 = 3000)$

$$u_1 = 250 \left(\frac{1}{2}\right) + 0 \left(\frac{1}{2}\right) = 125, \text{ y}$$

el pago para Pedro:  $u_2 = 500 p(v_1 = 1500, v_2 = 2000) + 1000 p(v_1 = 1500, v_2 = 3000)$

$$u_2 = 500 \left(\frac{1}{2}\right) + 1000 \left(\frac{1}{2}\right) = 750$$



*Teresa Pérez Muñoz*

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1<sup>a</sup> Sección,  
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.

e-mail: [tepm@xanum.uam.mx](mailto:tepm@xanum.uam.mx)



## EL PROGRAMA DE LANGLANDS Y SU APLICACIÓN AL PROBLEMA INVERSO DE LA TEORÍA DE GALOIS

ADRIÁN ZENTENO

RESUMEN. En la última década, el estudio de la imagen de representaciones de Galois asociadas a representaciones automorfas, vía la correspondencia de Langlands, ha resultado ser una estrategia muy efectiva para realizar grupos finitos de matrices como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$ . El objetivo de este artículo es presentar una panorámica general del problema inverso de la teoría de Galois con énfasis en algunos de los nuevos resultados obtenidos usando dicha estrategia.

### 1. INTRODUCCIÓN

Sea  $F/\mathbb{Q}$  una extensión finita del campo de los números racionales. A dicha extensión siempre podemos asociarle un grupo finito  $G$ , a saber, el grupo de automorfismos de  $F$  que dejan fijos a los elementos de  $\mathbb{Q}$ . En particular, cuando  $F/\mathbb{Q}$  es de Galois, el grupo  $G$  es conocido como el grupo de Galois de la extensión  $F/\mathbb{Q}$  y se denota por  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ . En un primer curso de Teoría de Galois, es un ejercicio común calcular el grupo de Galois de algunas extensiones finitas de Galois. Sin embargo, también podríamos plantearnos de manera natural la pregunta inversa, es decir, dado un grupo finito  $G$  ¿existe una extensión de Galois finita  $F/\mathbb{Q}$  tal que su grupo de Galois  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  es isomorfo a  $G$ ? Esta pregunta es conocida como el problema inverso de la teoría de Galois.

Cuando  $G$  es un grupo abeliano la respuesta a esta pregunta es bien conocida y puede obtenerse como consecuencia de la teoría de campos de clases (§ 2). Por otro lado, a pesar de que este problema ha sido resuelto de manera afirmativa para muchas familias de grupos finitos no abelianos, obtener una solución completa al problema inverso de la teoría de Galois continua siendo una importante área de investigación.

Los primeros grupos finitos no abelianos para los cuales el problema inverso de la teoría de Galois fue resuelto, fueron los grupos simétricos  $S_n$  y los grupos alternantes  $A_n$ . Estos grupos fueron realizados como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  por Hilbert [35] en 1892, siendo dicha realización una consecuencia de su famoso teorema de irreducibilidad el cual, de hecho, fue demostrado para dicho propósito. En 1937, resolviendo una serie de problema de encaje, Scholtz [65] y Reichardt [59] demostraron que todos los  $p$ -grupos finitos ocurren como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$ . Usando esta misma estrategia, combinada con un complicado proceso de reducción, Shafarevich [71] logro realizar todos los grupos solubles como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  en 1954 [57, IX.6]. El último gran avance del siglo pasado en el problema inverso de la teoría de Galois ocurrió en los 80, cuando Matzat, Thompson y varios otros matemáticos demostraron, utilizando el llamado método de rigidez, que todos los grupos simples esporádicos, a excepción del grupo de Mathieu  $M_{23}$ , pueden realizarse como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  [52, §II.9]. Para más detalles sobre la historia y los diferentes métodos utilizados para intentar resolver el problema inverso de la teoría de Galois en los siglos XIX y XX invitamos al lector a consultar las siguientes referencias: [52] [70] [75] [76].

Desafortunadamente, los métodos antes mencionados han resultado ser poco efectivos cuando se aplican a grupos de matrices con coeficientes en campos finitos y solo han tenido éxito en algunos casos muy particulares cuando el campo finito posee

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 12F12, 11R37, 11F70, 11F80, 20G40, 11–02, 12–02.

*Palabras clave.* Teoría de Galois inversa, grupos finitos de tipo Lie, teoría de campos de clases, formas modulares, representaciones de Galois.

un número primo (o el cuadrado de un número primo) de elementos [52, §II.10.2]. Sin embargo, en años recientes el estudio de la imagen de representaciones de Galois asociadas a representaciones automorfas (vía la correspondencia de Langlands) con ciertas condiciones locales, ha resultado ser una estrategia efectiva para realizar grupos de matrices como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$ , sin restricciones en la cardinalidad de sus campos de coeficientes [1] [2] [3] [4] [27] [40] [41] [79] [80] [81] [82]. El objetivo principal de este artículo es explicar el funcionamiento de dicha estrategia y presentar algunos de los resultados más relevantes obtenidos en lo que va de este siglo, en esta particular línea de investigación.

## 2. EL PROBLEMA INVERSO DE LA TEORÍA DE GALOIS PARA GRUPOS ABELIANOS

El objetivo principal de la teoría de campos de clases es describir las extensiones de un campo local o global en términos de la aritmética del propio campo. Para extensiones abelianas, esta teoría fue desarrollada a finales del siglo XIX y principios del siglo XX por Artin, Chevalley, Hasse, Hilbert, Kronecker, Takagi, Weber y muchos otros matemáticos [53, DRAMATIS PERSONÆ]. En esta sección recordaremos brevemente dicha teoría y explicaremos cómo solucionar el problema inverso de la teoría de Galois para grupos abelianos usando esta herramienta.

Sea  $F$  un campo global y  $\mathcal{O}_F$  su anillo de enteros. Recordemos que el anillo de adeles  $\mathbb{A}_F$  de  $F$  se define como el producto restringido  $\prod'_v F_v$  de todas las completaciones  $F_v$  de  $F$  en los lugares  $v$  de  $F$  y el grupo de ideles  $\mathbb{I}_F$  de  $F$  se define como el producto restringido  $\prod'_v F_v^\times$  de todos los grupos multiplicativos  $F_v^\times$ . Recordemos también, que el grupo multiplicativo  $F^\times$  se encaja de manera canónica en  $\mathbb{I}_F$  vía el encaje diagonal  $x \mapsto (x, x, x, \dots)$ , por lo que podemos definir el grupo de clases de ideles de  $F$  como el grupo topológico  $C_F := \mathbb{I}_F / F^\times$ . En su versión global, la reciprocidad de Artin afirma que existe un único homomorfismo continuo

$$\theta_F : C_F \longrightarrow \text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$$

conocido como el mapeo global de Artin, tal que para cada extensión  $E/F$  contenida en la extensión máxima abeliana  $F^{\text{ab}}$  de  $F$ , el homomorfismo  $\theta_{E/F} : C_F \rightarrow \text{Gal}(E/F)$  (obtenido al componer  $\theta_F$  con el mapeo cociente  $\text{Gal}(F^{\text{ab}}/F) \rightarrow \text{Gal}(E/F)$ ) es suprayectivo con núcleo el subgrupo norma  $N_{E/F}(C_E) \leq C_F$  e induce el isomorfismo  $C_F / N_{E/F}(C_E) \cong \text{Gal}(E/F)$ . Otro resultado importante es el teorema de existencia global, el cual afirma que para cada subgrupo abierto  $H \leq C_F$  de índice finito, existe una única extensión abeliana finita  $E/F$  en  $F^{\text{ab}}$  tal que  $H = N_{E/F}(C_E)$ .

Combinando los resultados anteriores y tomando completaciones profinitas, obtenemos el teorema principal de la teoría de campos de clases global, el cual afirma que para cualquier campo global  $F$ , el mapeo global de Artin  $\theta_F$  induce un isomorfismo canónico de grupos profinitos

$$\widehat{\theta}_F : \widehat{C}_F \longrightarrow \text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$$

que a su vez, induce la siguiente correspondencia:

$$\{\text{Subgrupos abiertos de índice finito } H \leq C_F\} \longleftrightarrow \{\text{Extensiones abelianas finitas } E/F\}$$

la cual describe a las extensiones abelianas de  $F$  en términos de los subgrupos de  $C_F$ . En particular, si  $F = \mathbb{Q}$ , podemos calcular el grupo de clases de ideles de  $\mathbb{Q}$  y sus subgrupos norma (que se corresponden con los campos ciclotómicos) para obtener el teorema de Kronecker-Weber, el cual afirma que cada extensión abeliana de  $\mathbb{Q}$  esta contenida en una extensión ciclotómica.

Cuando  $F$  es un campo local, tenemos el mapeo local de Artin  $\theta_F : F^\times \rightarrow \text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$  y resultados similares a los del caso global pueden ser obtenidos. Invitamos al lector a consultar las siguientes referencias: [7] [53] [56] para un estudio detallado de la teoría de campos de clases local y global.

Como mencionamos en la introducción, una interesante consecuencia de la teoría de campos de clases, es la solución del problema inverso de la teoría de Galois para

grupos abelianos. De manera más precisa, sea  $G$  un grupo abeliano finito el cual, por el teorema fundamental de los grupos abelianos finitos, es isomorfo a un producto directo de la forma  $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_m\mathbb{Z}$ . Por el teorema de Dirichlet sobre progresiones aritméticas, para cada  $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ , podemos elegir un primo  $p_i$  tal que  $p_i \equiv 1 \pmod{n_i}$ . Ahora, consideremos la extensión ciclotómica  $\mathbb{Q}(\zeta_{p_i})/\mathbb{Q}$ , la cual es abeliana con grupo de Galois  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p_i})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/(p_i - 1)\mathbb{Z}$ . Como  $n_i$  divide a  $p_i - 1$ , por el teorema fundamental de la teoría de Galois, existe una extensión abeliana  $F_i$  con grupo de Galois  $\text{Gal}(F_i/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ . Finalmente, por el teorema de Kronecker-Weber, las extensiones  $F_i$  están contenidas en diferentes extensiones ciclotómicas  $\mathbb{Q}(\zeta_{p_i})$ . Luego, las  $F_i$  son linealmente disjuntas sobre  $\mathbb{Q}$  y el compositum  $F = \prod F_i$  es una extensión abeliana de  $\mathbb{Q}$  con grupo de Galois  $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  isomorfo a  $G$ , lo cual resuelve el problema inverso de la teoría de Galois para grupos abelianos.

Las primeras indicaciones de la forma que debería tener la teoría de campos de clases para extensiones no abelianas aparecieron en una carta de Langlands a Weil en 1967 [48]. Esta teoría es ahora conocida como el programa de Langlands y tendremos oportunidad de hablar de ésta y de sus consecuencias en el problema inverso de la teoría de Galois para grupos no abelianos en las siguientes secciones.

### 3. USANDO REPRESENTACIONES DE GALOIS EN EL SIGLO XX

Una manera de agrupar a todas las extensiones finitas de Galois de  $\mathbb{Q}$  (contenidas en una cerradura algebraica  $\overline{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$ ) es a través del grupo de Galois absoluto de  $\mathbb{Q}$ , el cual podemos definir como el límite inverso

$$G_{\mathbb{Q}} := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \varprojlim_{F/\mathbb{Q}} \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$$

indexado por todas las extensiones finitas de Galois  $F/\mathbb{Q}$  contenidas en  $\overline{\mathbb{Q}}$ . El grupo  $G_{\mathbb{Q}}$  puede ser equipado con la topología de Krull, que hace de este un grupo topológico Hausdorff, compacto y totalmente desconexo. Para estudiar este grupo, es usual considerar las representaciones de Galois (morfismos continuos de grupos) de  $G_{\mathbb{Q}}$  en el grupo general lineal  $\text{GL}_n(E)$  de dimensión  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $E$  es un campo topológico.

Sea  $\ell$  un número primo. De particular interés para nosotros será el caso cuando  $E = \overline{\mathbb{F}}_{\ell}$ , una cerradura algebraica del campo finito  $\mathbb{F}_{\ell}$  con  $\ell$  elementos equipada con la topología discreta. De manera más precisa, sea

$$\bar{\rho}_{\ell} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_{\ell})$$

una representación de Galois. Notemos, que la imagen de  $\bar{\rho}_{\ell}$  está contenida en  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_{\ell^s})$  para algún entero positivo  $s$ , pues  $G_{\mathbb{Q}}$  es compacto y  $\text{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_{\ell})$  tiene la topología discreta. Luego,  $\text{Im}(\bar{\rho}_{\ell})$  siempre será un grupo finito de matrices. Por otro lado, como  $\ker(\bar{\rho}_{\ell}) \subseteq G_{\mathbb{Q}}$  es un subgrupo abierto, existe una extensión finita de Galois  $F/\mathbb{Q}$  tal que  $\ker(\bar{\rho}_{\ell}) = G_F := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ . Luego,

$$\text{Im}(\bar{\rho}_{\ell}) \simeq G_{\mathbb{Q}}/\ker(\bar{\rho}_{\ell}) \simeq G_{\mathbb{Q}}/G_F \simeq \text{Gal}(F/\mathbb{Q}).$$

Esto muestra, que dada una representación de Galois  $\bar{\rho}_{\ell}$ , siempre podemos obtener una realización de la imagen de  $\bar{\rho}_{\ell}$  como grupo de Galois sobre  $\mathbb{Q}$ . Por lo tanto, si podemos construir representaciones de Galois con imagen controlada, podemos usar éstas para realizar nuevos grupos de matrices como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$ .

Con el fin de utilizar esta estrategia para obtener nuevos resultados sobre el problema inverso de la teoría de Galois, necesitamos encontrar una fuente de objetos matemáticos que nos provea de representaciones de Galois con la imagen deseada. Inspirado por los trabajos de Serre [69] y Swinnerton-Dyer [73], el primer matemático que abordó el problema inverso de la teoría de Galois desde esta perspectiva (de manera explícita) fue Ribet [61] en 1975, quien utilizó formas modulares como su fuente proveedora de representaciones de Galois. Grosso modo, las formas modulares son funciones holomorfas definidas en el semiplano superior que presentan un buen comportamiento respecto a la acción de grupo modular  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  (o alguno de sus

subgrupos de congruencias) y que desde sus inicios, han jugado un papel central en la teoría de números. Invitamos al lector a consultar [25] para un estudio detallado de estos objetos.

En el corazón de la relación que existe entre formas modulares y teoría de números esta el hecho de que podemos asociarles representaciones de Galois. De manera más precisa, sea  $f$  una forma modular cuspidal de nivel  $N$ , peso  $k \geq 2$  y nebentypus  $\psi$  (que por brevedad escribiremos  $f \in S_k(N, \psi)$ ) y sea  $\sum_{n \geq 1} a_n(f)q^n$  su  $q$ -expansión de Fourier, donde  $q = q(z) = e^{2\pi iz}$ . Definimos el campo de coeficientes de  $f$  como  $\mathbb{Q}_f := \mathbb{Q}(\{a_n(f) : (n, N) = 1\})$  el cual puede demostrarse, que es un campo de números. Luego, para cada ideal máximo  $\lambda$  del anillo de enteros  $\mathcal{O}_f$  de  $\mathbb{Q}_f$ , denotaremos por  $\mathbb{Q}_{f,\lambda}$  la completación de  $\mathbb{Q}_f$  en  $\lambda$  y por  $\overline{\mathbb{Q}}_{f,\lambda}$  una cerradura algebraica de  $\mathbb{Q}_{f,\lambda}$ . Cuando  $f \in S_k(N, \psi)$  es una forma propia normalizada (es decir,  $a_1(f) = 1$  y  $f$  es una forma propia bajo la acción de los operadores de Hecke), para cada ideal máximo  $\lambda$  de  $\mathcal{O}_f$ , existe (gracias al trabajo de Shimura para  $k = 2$  y Deligne para  $k > 2$  [22]) una representación de Galois

$$\rho_{f,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_{f,\lambda}),$$

tal que para cada primo  $p \nmid N\ell$  (donde  $\ell$  denota el número primo abajo de  $\lambda$ )  $\rho_{f,\lambda}$  es no ramificada,  $\mathrm{Tr}(\rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_p)) = a_p(f)$  y  $\det(\rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_p)) = \psi(p)p^{k-1}$  (donde  $\mathrm{Frob}_p$  denota un elemento de Frobenius en  $p$ ).

Sean  $\mathcal{O}_{f,\lambda}$  el anillo de enteros de  $\mathbb{Q}_{f,\lambda}$  y  $\overline{\mathcal{O}}_{f,\lambda}$  el anillo de valuación de  $\overline{\mathbb{Q}}_{f,\lambda}$ , los cuales son anillos locales. Notemos que  $\rho_{f,\lambda}$  puede ser conjugada de modo que su imagen esté contenida en  $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathcal{O}}_{f,\lambda})$ . Luego, podemos componer  $\rho_{f,\lambda}$  con la reducción módulo el ideal máximo de  $\overline{\mathcal{O}}_{f,\lambda}$  y obtener la representación residual

$$\overline{\rho}_{f,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_{\ell}).$$

Con el fin de enunciar el resultado principal de Ribet sobre la imagen de  $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ , necesitamos introducir un par de condiciones en los coeficientes de Fourier de  $f$ . Diremos que  $f$  tiene multiplicación compleja, si existe un carácter de Dirichlet  $\chi$  tal que  $a_p(f)\chi(p) = a_p(f)$ , para casi todo primo  $p$  (es decir, todos salvo un número finito). Por otro lado, diremos que un torcimiento de  $f$  por un carácter de Dirichlet  $\chi$  es interior, si existe un automorfismo de campos  $\sigma_{\chi} : \mathbb{Q}_f \rightarrow \mathbb{Q}_f$  tal que  $a_p(f)\chi(p) = \sigma_{\chi}(a_p(f))$ , para casi todo primo  $p$ . En [61] (para  $N = 1$ ) y [63] (para  $N$  arbitrario), Ribet demostró el siguiente resultado acerca de la imagen de  $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ .

**TEOREMA 1.** *Sea  $f \in S_k(N, \psi)$  una forma propia normalizada sin multiplicación compleja y sin torcimientos interiores y  $\mathbb{F}_{\lambda} := \mathcal{O}_{f,\lambda}/\lambda$ . Entonces para casi todo ideal máximo  $\lambda$  de  $\mathcal{O}_f$  se tiene que*

$$\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{f,\lambda}) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{\lambda}) : \det(g) \in (\mathbb{F}_{\ell}^{\times})^{k-1}\}.$$

Resultados similares al teorema anterior pueden demostrarse para formas modulares con multiplicación compleja y con torcimientos interiores [62] [63], pero serán omitidos en este texto para simplificar la exposición.

Como consecuencia inmediata del teorema 1, tenemos el siguiente resultado.

**COROLARIO 2.** *El grupo  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{\ell})$  ocurre como grupo de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  para casi todo primo  $\ell$ .*

*Demostración.* Es suficiente demostrar que existe una forma modular  $f$  de peso  $k = 2$  y campo de coeficientes  $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}$  (luego  $\mathbb{F}_{\lambda} = \mathbb{F}_{\ell}$ ) que satisfaga las condiciones del teorema de Ribet. Actualmente muchas formas modulares pueden construirse explícitamente y encontrarse en la base de datos LMFDB [83]. En nuestro caso la forma modular 11.2.a.a en LMFDB satisface las condiciones requeridas, por lo que nuestro corolario queda demostrado.  $\square$

*Observación 1.* Este resultado también puede obtenerse usando un resultado clásico de Serre [68, Théorème 2] el cual afirma que las representaciones de Galois  $\overline{\rho}_{E,\ell} :$

$G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{\ell})$  asociadas a una curva elíptica  $E/\mathbb{Q}$  (usando los puntos de  $\ell$ -torsión de  $E(\overline{\mathbb{Q}})$ ) sin multiplicación compleja son suprayectivas para casi todo  $\ell$ . De hecho, haciendo una búsqueda rápida en la LMFDB, podemos encontrar ejemplos de curvas elípticas tales que sus representaciones de Galois asociadas son suprayectivas para todo  $\ell$ . Por ejemplo, la curva 1001.c1 en [83] con ecuación de Weierstrass  $y^2 + y = x^3 - x^2 - 15881x + 778423$ . Por lo que podemos concluir, que de hecho, todos los grupos  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{\ell})$  ocurren como grupo de Galois sobre  $\mathbb{Q}$ . En este artículo, no consideraremos más las representaciones de Galois asociadas a variedades algebraicas pues, hasta donde sabemos, éstas solo nos permiten realizar grupos de matrices con coeficientes en campos con un número primo de elementos como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$ .

Un resultado más interesante, sobre todo por la época en la que fue demostrado, es el resultado original de Ribet concerniente al problema inverso de la teoría de Galois. De manera más precisa, sea  $\overline{\rho}_{f,\lambda}^{\mathrm{proj}}$  la proyectivización de  $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ , la cual se obtiene al componer  $\overline{\rho}_{f,\lambda}$  con la proyección natural  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{\lambda}) \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\lambda})$ . Notemos que si  $k$  es impar,  $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{f,\lambda}^{\mathrm{proj}}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\lambda})$ , mientras que si  $k$  es par,  $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{f,\lambda}^{\mathrm{proj}}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\lambda})$  cuando  $[\mathbb{F}_{\lambda}, \mathbb{F}_{\ell}]$  es par e  $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{f,\lambda}^{\mathrm{proj}}) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\lambda})$  cuando  $[\mathbb{F}_{\lambda}, \mathbb{F}_{\ell}]$  es impar. En [61, §8], Ribet construyó una forma modular  $f \in S_{24}(1, \psi_{\mathrm{triv}})$ , con campo de coeficientes  $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(\sqrt{144169})$ , satisfaciendo su teorema. Luego, aplicando el teorema 1, tenemos que para casi todo  $\ell$  inerte en  $\mathcal{O}_f$  (luego  $[\mathbb{F}_{\lambda}, \mathbb{F}_{\ell}] = 2$ ),  $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{f,\lambda}^{\mathrm{proj}}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^2})$ , mientras que para casi todo  $\ell$  escindido en  $\mathcal{O}_f$  (luego  $[\mathbb{F}_{\lambda}, \mathbb{F}_{\ell}] = 1$ ),  $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_{f,\lambda}^{\mathrm{proj}}) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell})$ . De donde obtenemos el sigue resultado.

**COROLARIO 3.** *El grupo  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^2})$  ocurre como grupo de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  para casi todo primo  $\ell$  tal que 144169 no es un cuadrado módulo  $\ell$ .*

Notemos que, usando la forma modular construida por Ribet, también podemos realizar al grupo  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell})$  como grupo de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  para casi todo  $\ell$  tal que 144169 es un cuadrado módulo  $\ell$ . Sin embargo, no incluimos este caso en el corolario 3 porque (como indicamos en la observación 1) se sigue directamente del resultado de Serre para curvas elípticas que es anterior al trabajo de Ribet. A pesar de esto, vale la pena señalar que cada forma modular que satisface el teorema 1, nos permite realizar algún grupo de la forma  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$  o  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , como grupo de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  para casi todo  $\ell$ . En vista de esta observación, dada una forma propia normalizada  $f$ , diremos que  $\ell$  es un *primo excepcional* de  $f$ , si la imagen de  $\overline{\rho}_{f,\lambda}^{\mathrm{proj}}$  no es un grupo de la forma  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$  o  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$  para algún entero  $s > 0$ . En particular, cualquier forma modular satisfaciendo el teorema de Ribet solo tiene un número finito de primos excepcionales.

Finalmente, nos gustaría mencionar que usando este método, Reverter y Vila [60] demostraron en 1995 que  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^{2r}})$  y  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^{2r-1}})$  ocurren como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  para infinitos primos  $\ell$ , cuando  $2 \leq r \leq 5$ .

#### 4. USANDO REPRESENTACIONES DE GALOIS EN EL SIGLO XXI

Como hemos vistos en los resultados de la sección anterior, el método de Ribet para realizar grupos finitos de matrices de la forma  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$  y  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$  como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  depende de nuestra capacidad de construir formas modulares con coeficientes de Fourier apropiados, por lo que a pesar de los enormes avances a nivel computacional de los últimos años (que pueden observarse, por ejemplo, en la base de datos LMFDB) el mayor obstáculo sigue siendo lograr cubrir los casos en los que  $s$  es muy grande. Además, si nuestro objetivo es realizar grupos de matrices como grupos de Galois para todo  $\ell$ , otro obstáculo que puede ser un dolor de cabeza al aplicar el método de Ribet, es lidiar con el conjunto de primos excepcionales el cual nos gustaría poder acotar con precisión. Sin embargo, como puede verse en [12] [58], esto no es una tarea fácil.

En la conferencia “Modular forms on Schiermonnikoog” de 2006, Dieulefait y Wiese [26] [79] observaron que, usando algunas técnicas desarrolladas por Khare y Wintenberger en su trabajo sobre la conjetura de modularidad de Serre [42], es posible construir formas modulares sin primos excepcionales las cuales no dependen de manera directa del conocimiento de sus coeficientes de Fourier. De manera más precisa, sean  $p$  y  $q$  dos primos racionales distintos y  $\mathbb{Q}_{q^2}$  la única extensión cuadrática no ramificada de  $\mathbb{Q}_q$ . Diremos que una representación de Galois  $\rho_q : G_{\mathbb{Q}_q} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  de  $G_{\mathbb{Q}_q} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_q/\mathbb{Q}_q)$  es mansamente diedral de orden  $p$ , si existe un carácter mansamente ramificado  $\chi_q : G_{\mathbb{Q}_{q^2}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  de  $G_{\mathbb{Q}_{q^2}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_q/\mathbb{Q}_{q^2})$ , tal que su restricción al grupo de inercia  $I_q \leq G_{\mathbb{Q}_{q^2}}$  es de orden  $p$  y

$$\rho_q \cong \mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{q^2}}}^{G_{\mathbb{Q}_q}}(\chi_q).$$

Diremos que una forma propia normalizada  $f$  es *mansamente diedral* de orden  $p$  en el primo  $q$ , si para cada  $\lambda$  que no divide ni a  $p$  ni a  $q$ , la representación local  $\rho_{f,\lambda}|_{D_q}$  (la restricción de  $\rho_{f,\lambda}$  a un grupo de descomposición  $D_q \cong G_{\mathbb{Q}_q}$  en  $q$ ) es mansamente diedral de orden  $p$ . Imponiendo ciertas condiciones de congruencia en los primos  $p$  y  $q$ , se puede demostrar que, para cada  $\lambda$  que no divide ni a  $p$  ni a  $q$ , la imagen de  $\bar{\rho}_{f,\lambda}$  no es soluble [42, Lemma 6.3.i]. Luego, por la clasificación de subgrupos finitos máximos de  $\mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$  de Dickson [79, Proposition 2.1], para todo  $\lambda$  que no divide ni a  $p$  ni a  $q$ , la imagen de  $\bar{\rho}_{f,\lambda}^{\mathrm{proj}}$  es isomorfa a  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$  o a  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$  para algún entero positivo  $s$ . Además, cabe señalar que usando el teorema de Dirichlet para progresiones aritméticas, se puede demostrar que existen infinitas parejas de primos  $p$  y  $q$  con las cuales podemos construir representaciones locales mansamente diedrales. Luego, podemos elegir al primo  $p$  tan grande como queramos y hacer que la imagen de nuestras representaciones sean tan grandes como deseemos. Por lo tanto, si logramos construir formas propias normalizadas que sean mansamente diedrales en algún primo, obtendremos formas modulares con solo dos primos excepcionales y además la imagen de sus representaciones de Galois asociadas será tan grande como queramos. Mejor aún, en [27], Dieulefait y Wiese demostraron que los dos primos excepcionales de una forma modular mansamente diedral pueden ser eliminados si logramos demostrar que ésta es mansamente diedral en un segundo primo el cual debe estar relacionado de manera apropiada con el primero vía la ley de reciprocidad cuadrática.

Usando un resultado sobre levantamiento de nivel de formas modulares, debido a Diamond y Taylor [24, Theorem A], Dieulefait y Wiese [27] han logrado construir formas modulares con las características antes mencionadas. Grosso modo, un teorema de levantamiento de nivel nos permite construir formas modulares de nivel  $N'$  a partir de formas modulares de nivel  $N$ , donde  $N|N'$ , respetando cierta compatibilidad entre sus representaciones de Galois asociadas. Luego, la idea de la construcción de Dieulefait y Wiese es la siguiente: Empezamos con una forma modular  $f \in S_2(N, \psi_{\mathrm{triv}})$  que satisfice las hipótesis del teorema de levantamiento de nivel de Diamond y Taylor. Eligiendo un primo  $q$  y aplicando el teorema de levantamiento de nivel obtenemos una forma modular  $f' \in S_2(Nq^2, \psi_{\mathrm{triv}})$  que es mansamente diedral en  $q$  y que también satisfice las hipótesis del teorema de Diamond y Taylor. Por lo tanto, podemos elegir un segundo primo  $u$  y aplicar nuevamente el teorema de levantamiento de nivel para obtener una forma modular  $f'' \in S_2(Nq^2u^2, \psi_{\mathrm{triv}})$  la cual es mansamente diedral en  $q$  y  $u$  como queríamos. Aplicando este proceso para infinitas parejas de primos se obtiene el siguiente resultado [27, Theorem 6.2].

**TEOREMA 4 (Dieulefait-Wiese).** *Existen familias infinitas  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de formas propias normalizadas de peso 2 y nebentypus trivial tales que, para toda  $n$ , el conjunto de primos excepcionales de  $f_n$  es vacío. Además, fijando un primo  $\ell$  y un ideal  $\lambda_n | \ell$ , el tamaño de la imagen  $\bar{\rho}_{f_n, \lambda_n}$  es no acotado cuando  $n$  tiende a infinito.*

Como consecuencia de este resultado tenemos el siguiente corolario concerniente al problema inverso de la teoría de Galois.

**COROLARIO 5.** *Para cada primo  $\ell$  al menos uno de los grupos:  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$  o  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^s})$  ocurre como grupo de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  para infinitos enteros  $s > 0$ .*

Como podemos observar, este resultado se distingue de los obtenidos en el siglo XX, porque éste no limita el tamaño de  $s$  y al mismo tiempo cubre a todos los primos  $\ell$ . En el resto de este trabajo, explicaremos cómo, en la última década, estas ideas se han extendido a representaciones de Galois de dimensión arbitraria con el fin de realizar nuevos grupos finitos de matrices como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$ .

## 5. LA CORRESPONDENCIA DE LANGLANDS GLOBAL

Un hecho usual en la teoría moderna de formas automorfas, es remplazar formas modulares por representaciones automorfas de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ . Grosso modo, dado que el semiplano superior  $\mathbb{H}$  puede ser visto como un espacio simétrico para  $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$  actuando por transformaciones de Möbius, una forma modular cuspidal  $f$  definida sobre  $\mathbb{H}$  puede levantarse (primero) a una función real en  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  y luego a una función adélica en  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ . Este levantamiento, nos permite asociar a cada forma propia normalizada  $f$ , una representación automorfa cuspidal  $\pi_f$  de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  y remplazar las herramientas de variable compleja por potentes herramientas de análisis armónico no abeliano. Invitamos al lector a consultar [19, Lecture 2] para más detalles sobre el tema.

A la luz de esta idea, el resultado de Shimura y Deligne [22] (mencionado en la sección 3) sugiere que (en general), a cada representación automorfa cuspidal  $\pi$  de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ , deberíamos ser capaces de asociarle un campo de números  $E_{\pi}$  y, para cada ideal máximo  $\lambda$  de  $\mathcal{O}_{E_{\pi}}$ , una representación de Galois  $\rho_{\pi,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{E}_{\pi,\lambda})$ , donde  $E_{\pi,\lambda}$  denota la completación de  $E_{\pi}$  en el ideal  $\lambda$ . Desafortunadamente, es bien sabido por los expertos que hay “más” representaciones automorfas cuspidales de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  que representaciones de Galois de dimensión  $n$ . Incluso cuando  $n = 1$ , por teoría de campos de clases global, lo que tenemos es una biyección entre caracteres continuos de  $G_{\mathbb{Q}}$  y caracteres de orden finito de  $C_{\mathbb{Q}}$ . Con el fin de tratar este problema en el caso de dimensión 1 (es decir, para poder considerar a todos los caracteres de  $C_{\mathbb{Q}}$ ) Weil remplazó a  $G_{\mathbb{Q}}$  por el grupo de Weil  $W_{\mathbb{Q}}$  [77]. Sin embargo, se puede demostrar que las representaciones del grupo de Weil no son suficientes cuando  $n \geq 2$ , por lo que formular una correspondencia análoga a la del caso 1-dimensional continua siendo muy complicada y misteriosa. A pesar de esto, existen varios enfoques para tratar de formalizar una correspondencia de este tipo para  $n > 1$ . Por ejemplo, podríamos insistir en trabajar con todas las representaciones automorfas cuspidales  $\pi$  de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ , e intentar asociarle a todas ellas representaciones  $\rho_{\pi,\ell} : \mathcal{L}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$  del conjetural grupo de Langlands  $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ . El lector puede consultar [5] para más detalles acerca de esta formulación. Alternativamente, Clozel [18], Buzzard y Gee [15] han propuesto una formulación de la (conjetural) correspondencia global de Langlands para  $\mathrm{GL}_n$  sobre  $\mathbb{Q}$  como sigue: Para cada primo  $\ell$  y para cada entero  $n \geq 1$ , existe una correspondencia

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Representaciones automorfas cuspidales} \\ L\text{-algebraicas } \pi \text{ de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Representaciones irreducibles} \\ \rho_{\pi,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \end{array} \right\}$$

Por supuesto, esta correspondencia debe satisfacer ciertas propiedades de compatibilidad, por ejemplo, los parámetros de Satake de  $\pi$  deben estar relacionados con los valores propios de los elementos de Frobenius de  $\rho_{\pi,\ell}$ . Los detalles de este enfoque pueden consultarse en [15].

Aunque la prueba de una correspondencia tan fuerte está lejos de ser encontrada, muchos resultados parciales han sido demostrados cuando uno empieza con una representación automorfa particular y trata de asociarle una familia de representaciones de Galois. Por ejemplo, cuando  $\Pi$  es una representación automorfa cuspidal  $L$ -algebraica

regular y esencialmente autodual de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ , Clozel, Kotwitz, Harris, Taylor y muchos otros matemáticos [11, § 2.1], demostraron que existe un campo de números  $E_{\pi}$  y, para cada ideal máximo  $\lambda$  de  $\mathcal{O}_{E_{\pi}}$ , una representación de Galois semisimple

$$\rho_{\pi,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{E}_{\pi,\lambda})$$

la cual solo se ramifica en un conjunto finito de primos, y tal que (por autodualidad) su imagen está contenida en un grupo ortogonal o simpléctico de dimension  $n$ . Se espera que estas representaciones sean irreducibles, sin embargo este hecho solo es conocido cuando  $n \leq 6$  [37]. En particular, las representaciones automorfas asociadas a formas propias normalizadas, son ejemplos de representaciones automorfas cuspidales  $L$ -algebraicas regulares y esencialmente autoduales de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  [18, § 1.2]. Luego, este resultado puede ser considerado como una generalización del resultado de Shimura y Deligne [22] mencionado anteriormente. Un resultado más general, en el cual la condición de autodualidad en  $\pi$  ya no es necesaria, fue demostrado en 2015 por Scholze [67] usando sus famosos espacios perfectoides.

De acuerdo a Buzzard y Gee [15], se espera que (salvo ligeras modificaciones) su formulación de la correspondencia de Langlands global funcione para grupos reductivos en general, reemplazando a  $\mathrm{GL}_n$  por un grupo reductivo conexo  $G$  definido sobre  $\mathbb{Q}$ , en el lado automorfo, y reemplazando a  $\mathrm{GL}_n$  por el llamado  $L$ -grupo  ${}^L G$  de  $G$ , en el lado galoisiano. En particular, ellos han conjeturado que dada una representación automorfa cuspidal  $L$ -algebraica  $\pi$  de  $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  y un primo  $\ell$ , existe una representación de Galois semisimple

$$\rho_{\pi,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow {}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$$

que ramifica solo en un número finito de primos. Recientemente, Kret y Shin [44] [45] han demostrado esta conjetura (sujeta a ciertas restricciones técnicas) para representaciones automorfas cuspidales  $L$ -algebraicas de  $\mathrm{GSp}_{2m}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  and  $\mathrm{GO}_{2m}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ . Cabe señalar que cuando  $G = \mathrm{GSp}_4$ , una versión sin restricciones del resultado de Kret y Shin se conoce desde hace tiempo gracias al trabajo de Laumon [51], Taylor [74] y Weissauer [78].

## 6. REPRESENTACIONES AUTOMORFAS SIN PRIMOS EXCEPCIONALES

Después de todos los resultados y conjeturas enunciados en la sección anterior, podemos plantearnos como objetivo principal, tratar de extender el teorema 4 a las representaciones de Galois asociadas a representaciones automorfas vía los casos conocidos de la correspondencia de Langlands global con el fin de poder realizar grupos finitos de matrices de dimension  $n$  como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$ . En esta sección explicaremos los avances y estrategias más recientes en esta dirección.

Sea  $\pi$  una representación automorfa cuspidal de  $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  de peso cohomológico  $(m_1, m_2)$  y componente local en infinito  $\pi_{\infty}$  perteneciente a las series discretas. Estas condiciones técnicas aparecen de manera natural al levantar las formas modulares de Siegel de género dos a funciones adélicas en  $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  [8]. Las formas modulares de Siegel de género  $n$  pueden pensarse como una generalización de formas modulares clásicas donde estas últimas ocurren como formas modulares de Siegel de género uno [14].

Como señalamos al final de la sección anterior, gracias al trabajo de Laumon, Taylor y Weissauer, podemos asociar a  $\pi$  un campo de números  $E_{\pi}$  y, para cada ideal máximo  $\lambda$  de  $\mathcal{O}_{E_{\pi}}$ , una representación de Galois semisimple

$$\rho_{\pi,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GSpin}_5(\overline{E}_{\pi,\lambda}) = \mathrm{GSp}_4(\overline{E}_{\pi,\lambda}).$$

Como en el caso 2-dimensional, denotaremos por  $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}$  la representación residual de  $\rho_{\pi,\lambda}$  y por  $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}^{\mathrm{proj}}$  la proyectivización de  $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}$ . Por la clasificación de subgrupos máximos finitos de  $\mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{F}}_{\ell})$  de Mitchel [54], diremos que  $\ell$  es un *primo excepcional* de  $\pi$ , si la imagen de  $\overline{\rho}_{\pi,\lambda}^{\mathrm{proj}}$  no es un grupo de la forma  $\mathrm{PSP}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$  o  $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$  para algún entero positivo  $s$ . Siguiendo la construcción de Dieuelefait y Wiese [27], en [29] demostramos

el siguiente resultado (el cual puede considerarse como una generalización del teorema 4 para  $\mathrm{GSp}_4$ ).

**TEOREMA 6** (Dieulefait-Zenteno). *Existen infinitas familias  $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de representaciones automorfas cuspidales de  $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  sin primos excepcionales y tales que para cada  $\ell$  y cada  $\lambda_n | \ell$ , el tamaño de la imagen de  $\bar{\rho}_{\pi_n, \lambda_n}$  es no acotado cuando  $n$  tiende a infinito.*

La prueba de este resultado consiste esencialmente de dos partes: Por un lado, necesitamos encontrar condiciones en las representaciones de Galois residuales para asegurar que su imagen sea grande (es decir, encontrar el análogo a las representaciones mansamente diedrales) y por otro lado, necesitamos mostrar la existencia de representaciones automorfas que satisfagan las condiciones deseadas (es decir, encontrar el análogo al teorema de levantamiento de nivel de Diamond y Taylor).

**6.1. Representaciones máximamente inducidas: en busca de la condición galoisiana.**

Sean  $n = 2m$  un entero par positivo y  $p, q > n$  dos primos distintos tales que el orden de  $p$  módulo  $q$  es  $n$ . Sea  $\mathbb{Q}_{q^n}$  la única extensión no ramificada de  $\mathbb{Q}_q$  de grado  $n$  y recordemos que  $\mathbb{Q}_{q^n}^\times \simeq \mu_{q^n-1} \times U_1 \times q^{\mathbb{Z}}$ , donde  $\mu_{q^n-1}$  denota el grupo de  $(q^n - 1)$ -ésimas raíces de la unidad y  $U_1$  denota el grupo de 1-unidades. Para cada primo  $\ell$  distinto de  $p$  y  $q$ , un carácter  $\chi_q : \mathbb{Q}_{q^n}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  de orden  $2p$  puede ser construido de modo que su restricción a  $\mu_{q^n-1}$  tenga orden  $p$  y  $\chi_q(q) = -1$  (resp.  $\chi_q(q) = 1$ ). Por teoría de campos de clases local, podemos mirar a  $\chi_q$  como un carácter de  $G_{\mathbb{Q}_{q^n}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_q}/\mathbb{Q}_{q^n})$  y construir una representación de Galois irreducible

$$\mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{q^n}}}^{G_{\mathbb{Q}_q}}(\chi_q) := \rho_q : G_{\mathbb{Q}_q} \rightarrow \mathrm{Sp}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \quad \left( \text{resp. } \mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{q^n}}}^{G_{\mathbb{Q}_q}}(\chi_q) := \rho_q : G_{\mathbb{Q}_q} \rightarrow \mathrm{SO}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \right)$$

A tales representaciones las llamaremos representaciones máximamente inducidas de tipo  $S$  (resp. tipo  $O$ ) y orden  $p$ . Diremos que una representación de Galois simpléctica  $\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GSp}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$  (resp. ortogonal  $\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GO}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ ) es *máximamente inducida* de tipo  $S$  (resp. tipo  $O$ ) en  $q$  de orden  $p$ , si su restricción  $\rho_\ell|_{D_q}$  a un grupo de descomposición  $D_q$  en  $q$  es máximamente inducida de tipo  $S$  (resp. tipo  $O$ ) y orden  $p$ . Como en el caso 2-dimensional, dada una pareja apropiada de primos  $(p, q)$  y una representación de Galois  $\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GSp}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$  (resp.  $\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GO}_{2m}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ ) máximamente inducida de tipo  $S$  (resp. tipo  $O$ ) en  $q$  de orden  $p$ , se puede demostrar que  $\bar{\rho}_\ell$  es irreducible [3] [80]. Finalmente, cuando  $n = 4$  y  $\rho_\ell$  es de tipo  $S$ , usando la clasificación de subgrupos finitos máximos de  $\mathrm{GSp}_4(\overline{\mathbb{F}_\ell})$  de Mitchel, se puede demostrar que la imagen de  $\bar{\rho}_\ell^{\mathrm{pToj}}$  es igual a  $\mathrm{PSP}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$  o  $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$  para algún entero  $s > 0$  [29].

**6.2. Correspondencia de Langlands local y funtorialidad Langlands.** Como se evidencia en [2] y [40], debido a la falta de un teorema de levantamiento de nivel en altas dimensiones, la correspondencia de Langlands local y la funtorialidad de Langlands juegan un papel central en la construcción de representaciones automorfas con condiciones locales apropiadas.

Sean  $G$  un grupo reductivo conexo definido sobre una completación  $\mathbb{Q}_v$  de  $\mathbb{Q}$  (es decir,  $\mathbb{Q}_v = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{Q}_v$  es un campo  $q$ -ádico  $\mathbb{Q}_q$ ) y  $W'_v$  el grupo de Weil-Deligne de  $\mathbb{Q}_v$  [23]. La correspondencia de Langlands local para  $G$  sobre  $\mathbb{Q}_v$ , predice la existencia de un mapeo finito-a-uno

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Representaciones irreducibles} \\ \text{admisibles } \pi_v \text{ de } G(\mathbb{Q}_v) \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} L\text{-parámetros} \\ \phi_v : W'_v \longrightarrow {}^L G \end{array} \right\}$$

que preserve los invariantes naturales ( $\gamma$ -factores,  $L$ -factores y  $\epsilon$ -factores) y es compatible con la correspondencia de Langlands global de acuerdo a la descomposición  $\pi = \otimes'_v \pi_v$  de la representación automorfa cuspidal  $\pi$  de  $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  en un producto tensorial restringido de representaciones irreducible admisibles  $\pi_v$  de  $G(\mathbb{Q}_v)$ . Cuando

$G = \mathrm{GL}_n$ , la correspondencia de Langlands local es una biyección la cual fue establecida por Harris, Taylor [33], Henniart [34] y Scholze [66] para campos  $q$ -ádicos y por Langlands para  $\mathbb{Q}_v = \mathbb{R}$  [49] (de hecho, en este artículo, Langlands demuestra la correspondencia de Langlands local para todo grupo conexo reductivo sobre  $\mathbb{R}$ ). Además, la correspondencia de Langlands local sobre campos  $q$ -ádicos ha sido establecida para  $G = \mathrm{GSp}_4$  (por Gan y Takeda [30]); para  $G = \mathrm{SL}_n$  y todas sus formas interiores (por Hiraga y Saito [36]); para grupos clásicos cuasi-escindidos (por Arthur [6]); y para grupos unitarios (por Mok [55], Kaletha, Minguez, Shin, y White [39]).

Asumiendo la correspondencia de Langlands local para grupos reductivos conexos sobre  $\mathbb{Q}_v$  no es difícil dar una formulación precisa de la funtorialidad de Langlands entre dos grupos reductivos conexos  $G$  y  $H$ . Para simplificar nuestra exposición, supongamos que  $G$  es alguno de los grupos clásicos escindidos  $\mathrm{SO}_{2m+1}$ ,  $\mathrm{SO}_{2m}$  o  $\mathrm{Sp}_{2m}$  y que  $H = \mathrm{GL}_n$ , donde  $n$  es elegido de modo que el mapeo analítico  $\xi : {}^L G \rightarrow {}^L \mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  sea el encaje natural de  ${}^L G$  en  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ . Recordemos que en estos casos  ${}^L \mathrm{SO}_{2m+1} = \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$ ,  ${}^L \mathrm{SO}_{2m} = \mathrm{SO}_{2m}(\mathbb{C})$  y  ${}^L \mathrm{Sp}_{2m} = \mathrm{SO}_{2m+1}(\mathbb{C})$ . Por la correspondencia de Langlands local para  $G$  sobre  $\mathbb{Q}_v$ , cada representación irreducible admisible  $\pi_v$  de  $G(\mathbb{Q}_v)$ , es parametrizada por un  $L$ -parámetro  $\phi_v : W'_v \rightarrow {}^L G$ . Luego, si componemos  $\phi_v$  con  $\xi$ , obtenemos un  $L$ -parámetro  $\phi'_v = \xi \circ \phi_v : W'_v \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ , el cual parametriza (por la correspondencia de Langlands local para  $\mathrm{GL}_n$  sobre  $\mathbb{Q}_v$ ) una representación admisible  $\Pi_v$  de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_v)$ . En este texto nos referiremos a  $\Pi_v$  como el levantamiento funtorial local de  $\pi_v$ .

Ahora, sean  $G$  un grupo clásico escindido sobre  $\mathbb{Q}$  y  $\xi : {}^L G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  el encaje natural de  ${}^L G$  en  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  como antes. La funtorialidad de Langlands global predice que asociado a  $\xi$  debería existir un levantamiento natural de representaciones automorfas de  $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  a representaciones automorfas de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ . Una formulación concreta de este principio global puede ser enunciada usando la funtorialidad de Langlands local y el principio local-global como sigue. Sean  $\pi = \otimes'_v \pi_v$  una representación automorfa de  $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ ,  $\Pi = \otimes'_v \Pi_v$  una representación automorfa de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  y supongamos que la correspondencia de Langlands local es cierta para cada componente  $\pi_v$  de  $\pi$ . Entonces,  $\Pi$  es un levantamiento funtorial global de  $\pi$  si existe un conjunto finito de lugares  $S$  de  $\mathbb{Q}$  tal que  $\Pi_v$  es el levantamiento funtorial local de  $\pi_v$  para todo  $v \notin S$ .

Estas versiones de la funtorialidad de Langlands local y global han sido establecidas para representaciones genéricas de  $G$  por Cogdell, Kim, Piatetski-Shapiro y Shahidi [20] [21] y (recientemente) para representaciones no genéricas por Cai, Friedberg y Kaplan [16] [17]. Otro caso conocido de la funtorialidad de Langlands, tanto local como global, es cuando  $G$  es uno de los grupos reductivos escindidos  $\mathrm{GSpin}_{2m}$  o  $\mathrm{GSpin}_{2m+1}$  y  $H = \mathrm{GL}_{2m}$ , el cual fue establecido por Asgari y Shahidi [9] en el caso genérico y por Cai, Friedberg y Kaplan [16] [17] en el caso no genérico.

**6.3. Existencia de representaciones automorfas con condiciones locales prescritas.** En [29], nuestra construcción de representaciones automorfas de  $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ , se basa en la siguiente construcción de representaciones automorfas cuspidales  $L$ -algebraicas regulares y esencialmente autoduales de  $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  debida a Khare, Larsen y Savin [40].

Sea  $n = 2m$  un entero positivo par y  $p, q$  dos primos distintos como arriba. Sea  $\rho_q : G_{\mathbb{Q}_q} \rightarrow \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{Q}_{\ell})$  una representación máximamente inducida de tipo  $S$  y orden  $p$ , la cual como vimos es irreducible. Es bien sabido por los expertos que asociado a  $\rho_q$ , existe un  $L$ -parámetro irreducible  $\phi_q : W'_{\mathbb{Q}_q} \rightarrow \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$ . Luego, por la correspondencia de Langlands local para representaciones genéricas de  $\mathrm{SO}_{2m+1}(\mathbb{Q}_q)$ , la cual fue probada inicialmente por Jiang y Soudry en [38], podemos asociar a  $\phi_q$  una representación automorfa supercuspidal  $\tau_q$  de  $\mathrm{SO}_{2m+1}(\mathbb{Q}_q)$ .

Por otro lado, usando series de Poincaré, Khare, Larsen y Savin [40] demostraron el siguiente resultado de globalización para grupos clásicos escindidos sobre  $\mathbb{Q}$ .

**TEOREMA 7 (Khare-Larsen-Savin).** *Sea  $G$  un grupo clásico escindido sobre  $\mathbb{Q}$ . Sean  $S$  y  $D$  dos conjuntos finitos y ajenos de lugares de  $\mathbb{Q}$ , tales que  $D$  contiene al lugar*

infinito y  $S$  es un conjunto de lugares finitos no vacío tal que  $G$  es no ramificado en todos los lugares que están afuera del conjunto  $D \cup S$ . Sea  $\pi_\infty$  una representación genérica perteneciente a las series discretas de  $G(\mathbb{R})$  y  $\pi_q$  una representación genérica supercuspidal de  $G(\mathbb{Q}_q)$  para cada lugar finito  $q \in D$ . Entonces, existe una representación automorfa cuspidal globalmente genérica  $\pi$  de  $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$  que no se ramifica fuera de  $D \cup S$ , y tal que el componente de  $\pi$  en el lugar infinito es  $\pi_\infty$  y los componentes locales de  $\pi$  en cada  $q$  son  $\pi_q$ .

Regresando a nuestra construcción, tenemos que el resultado de Khare, Larsen y Savin implica la existencia de una representación automorfa cuspidal globalmente genérica  $\tau$  de  $\mathrm{SO}_{2m+1}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$  tal que su componente local en  $q$  es  $\tau_q$ . Luego, por la funtorialidad de Langlands global de  $\mathrm{SO}_{2m+1}$  a  $\mathrm{GL}_{2m}$ , existe una representación automorfa cuspidal  $L$ -algebraica regular y esencialmente autodual  $\Pi$  de  $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$  tal que las representaciones de Galois  $\rho_{\Pi, \lambda} : G_\mathbb{Q} \rightarrow \mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{Q}_\ell)$  asociadas a  $\Pi$  (para cada  $\lambda$  que no divide ni a  $p$  ni  $q$ ) tienen imagen contenida en  $\mathrm{GSp}_{2m}(\mathbb{Q}_\ell)$  y son tales que  $\rho_{\Pi, \lambda}|_{D_q} \simeq \rho_q$ . En particular, cuando  $m = 2$ , por el criterio galoisiano de § 6.1, tenemos que la imagen de  $\bar{\rho}_{\pi, \lambda}^{\mathrm{proj}}$  es igual a  $\mathrm{PSP}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$  o a  $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$  para algún entero  $s > 0$ , para cada  $\lambda$  que no divide ni a  $p$  ni  $q$  [29].

Por otro lado, por un resultado de Jiang y Soudry [38, Theorem E], la representación  $\Pi$  de  $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$  construida antes, es tal que su función  $L$  parcial  $L(s, \Pi, \wedge^2)$  tiene un polo simple en  $s = 1$ . Luego, cuando  $\Pi$  es una representación automorfa cuspidal  $L$ -algebraica regular y esencialmente autodual de  $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ , por un resultado de Jacquet, Piatetski-Shapiro y Shalika [43, Theorem 9.1] existe una representación automorfa cuspidal globalmente genérica  $\pi$  de  $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$  tal que  $\Pi$  es el levantamiento funtorial global de  $\pi$ . Finalmente, como el teorema 7 funciona para un conjunto finito  $D$  de lugares simultáneamente, podemos construir, para alguna pareja apropiada de primos  $\{q, u\}$  (como en el caso 2-dimensional) una representación automorfa cuspidal  $L$ -algebraica regular y esencialmente autodual  $\Pi$  de  $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$  la cual desciende a una representación automorfa cuspidal globalmente genérica  $\pi$  de  $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$  sin primos excepcionales. Luego tenemos el siguiente resultado concerniente al problema inverso de la teoría de Galois, que puede verse como una generalización del corolario 5.

**COROLARIO 8.** *Para cada primo  $\ell$ , al menos uno de los grupos  $\mathrm{PSP}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$  o  $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_{\ell^s})$  ocurre como grupo de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  para infinitos enteros  $s > 0$ .*

**6.4. Algunas generalizaciones parciales.** En [40], Khare, Larsen y Savin demostraron en 2008 que, para cada entero positivo  $m$  y cada primo  $\ell$ , al menos uno de los grupos  $\mathrm{PSP}_{2m}(\mathbb{F}_{\ell^s})$  o  $\mathrm{PGSp}_{2m}(\mathbb{F}_{\ell^s})$  ocurren como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  para infinitos enteros  $s > 0$ . A pesar de usar la noción de representación máximamente inducida y el teorema de globalización 7, su método no proporciona representaciones automorfas sin primos excepcionales. Esto es debido a que, en la parte galoisiana, en lugar de usar la clasificación completa de subgrupos finitos máximos de  $\mathrm{GSp}_{2m}(\mathbb{F}_\ell)$  (como en las pruebas de Dieulefait-Wiese y Dieulefait-Zenteno), ellos usan una caracterización de los subgrupos finitos de  $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{F}_\ell)$ , debida a Larsen y Pink [50] la cual depende del primo  $\ell$ . Luego, ellos solo pueden garantizar que las representaciones automorfas producidas por su método tienen un primo no excepcional  $\ell$ . La principal razón para no usar la clasificación de los subgrupos finitos máximos de  $\mathrm{GSp}_{2m}(\mathbb{F}_\ell)$ , la cual se conoce y se le atribuye a Aschbacher [10], es que dicha clasificación es mucho más intrincada cuando  $m > 2$  por obvias razones de dimensión.

Resultados análogos al resultado de Khare, Larsen y Savin han sido demostrados para grupos ortogonales por Khare, Larsen, Savin [41] y el autor de este artículo [82]. De manera más precisa tenemos el siguiente resultado que resume los casos del problema inverso de la teoría de Galois que se han podido resolver siguiendo esta línea de investigación hasta el momento (noviembre de 2023).

**TEOREMA 9.** *Para cada primo  $\ell$ , tenemos que:*

1. (Khare-Larsen-Savin, 2008) *Al menos uno de los grupos:*

$$\mathrm{PSp}_{2m}(\mathbb{F}_{\ell^s}) \text{ o } \mathrm{PGSp}_{2m}(\mathbb{F}_{\ell^s})$$

*ocurre como grupo de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  para infinitos enteros  $s > 0$ .*

2. (Khare-Larsen-Savin, 2010) *Al menos uno de los grupos:*

$$\mathrm{P}\Omega_{2s+1}(\mathbb{F}_{\ell^s}) \text{ o } \mathrm{PSO}_{2s+1}(\mathbb{F}_{\ell^s})$$

*ocurre como grupo de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  para infinitos enteros  $s > 0$ .*

3. (Zenteno, 2021) *Al menos uno de los grupos:*

$$\mathrm{P}\Omega_{2m}^{\pm}(\mathbb{F}_{\ell^s}), \mathrm{PSO}_{2m}^{\pm}(\mathbb{F}_{\ell^s}), \mathrm{PO}_{2m}^{\pm}(\mathbb{F}_{\ell^s}) \text{ o } \mathrm{PGO}_{2m}^{\pm}(\mathbb{F}_{\ell^s})$$

*ocurre como grupo de Galois sobre  $\mathbb{Q}$  para infinitos enteros  $s > 0$ .*

Cabe señalar que aunque los métodos de prueba en cada caso son similares, cada grupo pose obstrucciones particulares que hacen que las pruebas no sean un simple ejercicio de copiar y pegar. Por ejemplo, en el caso de grupos ortogonales de dimensión impar [41], no existen representaciones supercuspidales asociadas a representaciones de Galois mansamente ramificadas, luego nuevos componentes locales con ramificación salvaje tienen que ser introducidas. Por otro lado, en el caso ortogonal de dimensión par [82], aunque las representaciones máximamente inducidas (ahora de tipo  $O$ ) funcionan, el teorema 7 no es suficiente, pues solo funciona para grupos reductivos escindidos y en este caso es necesario lidiar con grupos reductivos cuasi-escindidos. Luego, el teorema 7 tiene que ser remplazado por el trabajo de Arthur [6] acerca de la clasificación endoscópica de representaciones automorfas de grupos simplécticos y ortogonales, y algunos resultados de Binder [13] y Shin [72] sobre equidistribuciones de componentes locales en un primo fijo con respecto a una medida de Plancherel.

Finalmente, nos gustaría señalar que el estudio de la imagen de las representaciones de Galois asociadas a representaciones automorfas cuspidales  $L$ -algebraicas regulares no autoduales construidas por Scholze [67] continua siendo terreno no explorado y que lograr demostrar un resultado similar al teorema 9 en este contexto sería interesante porque nos permitiría realizar grupos finitos lineales y unitarios como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}$ . Hasta ahora, lo único que sabemos es que el principal obstáculo para demostrar tal resultado es que ni el teorema 7 ni el trabajo de Arthur [6] funcionan en este caso, por lo que nuevas técnicas de globalización de representaciones automorfas tendrían que ser descubiertas.

## 7. EL PROBLEMA INVERSO DE LA TEORÍA GALOIS EN OTROS CAMPOS

Como es bien sabido, la teoría de Galois puede ser formulada para extensiones de campos arbitrarios y no solo para extensiones de  $\mathbb{Q}$ . Guiados por esta idea, es natural preguntarnos por el problema inverso de la teoría de Galois para cualquier campo. De manera más precisa, dado un grupo finito  $G$  y un campo  $F$ , podemos preguntarnos si ¿existe una extensión de Galois  $E/F$  tal que  $\mathrm{Gal}(E/F) \cong G$ ? En esta última sección presentamos un breve resumen sobre los principales resultados obtenidos en este contexto.

El primer caso que nos viene a la mente (por su simplicidad) es cuando  $F = \mathbb{F}_{\ell}$ . En este caso, el problema es falso, pues como se ve en un primer curso de teoría de Galois,  $\mathbb{F}_{\ell}$  solo tiene una extensión de Galois de grado  $n$  (a saber  $\mathbb{F}_{\ell^n}$ ) cuyo grupo de Galois es el grupo cíclico  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Luego, solo los grupos cíclicos ocurren como grupos de Galois sobre  $\mathbb{F}_{\ell}$ . Un caso clásico en el que se sabe que el problema inverso de la teoría de Galois es verdadero, es cuando  $F$  es el campo de funciones racionales  $\mathbb{C}(t)$  en una variable con coeficientes en  $\mathbb{C}$ . Este resultado, se sigue esencialmente del teorema de existencia de Riemann y una prueba completa de éste puede leerse en [76]. Siguiendo esta misma idea, en [31], Harbater resolvió el problema inverso de la teoría de Galois para campos de funciones racionales  $\mathbb{Q}_{\ell}(t)$  en una variable con coeficientes en un campo  $\ell$ -ádico  $\mathbb{Q}_{\ell}$ .

Un caso muy interesante es cuando  $F = \mathbb{Q}_{\ell}$ . En este caso se sabe que el problema inverso de la teoría de Galois es falso, pues el grupo de Galois de cualquier extensión

finita de un campo  $\ell$ -ádico es un grupo soluble, pero no se sabe cuáles grupos solubles ocurren como grupos de Galois sobre  $\mathbb{Q}_\ell$  y cuáles no. Invitamos al lector a consultar [64] para informarse de algunos de los avances más recientes en este caso.

Es bien sabido por los expertos que muchos de los resultados descritos a través de este artículo se extienden de manera casi automática a cualquier campo de números, pero en la mayoría de los casos, los resultados no pueden encontrarse de manera explícita en la literatura y muchas veces su extensión en realidad no es tan automática. En esta línea, podemos señalar que la formulación de Buzard y Gee [15] de la correspondencia de Langlands global, funciona para campos de números en general y los resultados de Scholze [67] Shin y Kret [44] [45], han sido demostrados para campos de números totalmente reales en general. Sin embargo, un análogo del teorema 9, no ha sido escrito salvo en el caso 2-dimensional [28], pues su redacción requiere resolver problemas técnicos no triviales relacionados con el número de clase del campo de números en cuestión.

Por otro lado, en teoría de números, es bien conocido el paralelismo que hay entre campos de números y campos de funciones sobre campos finitos. Guiados por este paralelismo, es natural plantearse el problema inverso de la teoría de Galois para campos de funciones sobre campos finitos e intentar usar los métodos descritos en las secciones anteriores para tratar de resolverlo. Sobre todo, porque en este caso la correspondencia de Langlands global para  $GL_n$  es un teorema [46] y de hecho, muchos avances se han obtenido recientemente para grupos reductivos en general por V. Lafforgue [47]. Sin embargo, hasta donde sabemos, la falta de lugares arquimedianos en los campos de funciones sobre campos finitos representa un fuerte obstáculo al momento de intentar aplicar los métodos galoisianos desarrollados para campos de números. El mejor resultado conocido para campos de funciones sobre campos finitos, de acuerdo a [32], es un resultado de Fried, Jarden, Pop y Völklein el cual afirma que para cada grupo finito  $G$  existe un entero  $m$  tal que para todos los primos  $\ell > m$ , el grupo  $G$  ocurre como grupo de Galois sobre  $\mathbb{F}_\ell(t)$ .

Aunque una solución completa del problema inverso de la teoría de Galois se ve aún lejana. Los recientes avances en el programa de Langlands nos proporcionan una poderosa herramienta que esperamos nos permita continuar avanzando rumbo a una solución de este problema al menos para grupos de matrices. Además, como señalamos a través de todo el texto, muchas de las herramientas utilizadas son, por sí mismas, problemas de gran interés para la comunidad matemática. Dicho esto, creemos que este tema es terreno fértil para muchas futuras líneas de investigación y esperamos que este artículo sirva como una pequeña guía para el lector interesado.

**AGRADECIMIENTOS.** El autor expresa su gratitud a Pedro Luis del Ángel por alentarle a escribir este artículo y al árbitro anónimo por sus sugerencias y observaciones las cuales han ayudado a mejorar considerablemente la presentación de este trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] Arias-de-Reyna, S. *Automorphic Galois representations and the inverse Galois problem*, in Trends in Number Theory, Contemporary Mathematics, vol. 649, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1–16, 2015.
- [2] Arias-de-Reyna, S., Dieulefait, L., Shin, S.W. & Wiese, G. *Compatible systems of symplectic Galois representations and the inverse Galois problem III. Automorphic construction of compatible systems with suitable local properties*, Math. Ann., 361, no. 3-4, 909–925, 2015.
- [3] Arias-de-Reyna, S., Dieulefait, L. & Wiese, G. *Compatible systems of symplectic Galois representations and the inverse Galois problem II. Transvections and huge image*, Pacific J. Math., 281, no. 1, 1–16, 2016.
- [4] Arias-de-Reyna, S., Dieulefait, L. & Wiese, G. *Compatible systems of symplectic Galois representations and the inverse Galois problem I. Images of projective representations*, Trans. Amer. Math. Soc., 369, no. 2, 887–908, 2017.
- [5] Arthur, J. *A note on the automorphic Langlands group*. Canad. Math. Bull., 45, no. 4, 466–482, 2002.

- [6] Arthur, J. The endoscopic classification of representations. Orthogonal and Symplectic Groups. American Mathematical Society Colloquium Publications, 61. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
- [7] Artin, E. & Tate, J. Class field theory. Reprinted with corrections from the 1967 original. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009.
- [8] Asgari, M. & Schmidt, R. *Siegel modular forms and representations*. *Manuscr. Math.*, 104, No. 2, 173–200, 2001.
- [9] Asgari, M. & Shahidi, F. *Generic Transfer for General Spin Groups*. *Duke Math. J.*, 132, no. 1, 137–190, 2006.
- [10] Aschbacher, M. *On the maximal subgroups of the finite classical groups*. *Invent. Math.* 76, 469–514, 1984.
- [11] Barnet-Lamb, T., Gee, T., Geraghty, D. & Taylor, R. *Potential automorphy and change of weight*. *Ann. of Math. (2)*, 179, no. 2, 501–609, 2014 .
- [12] Billerey, N. & Dieulefait, L. *Explicit large image theorems for modular forms*. *J. Lond. Math. Soc.*, II., 89, no. 2, 499–523, 2014.
- [13] Binder, J. *Fields of rationality of automorphic representations: the case of unitary groups*. *J. Number Theory*, 203, 32–67, 2019.
- [14] Bruinier, J.H., van der Geer, G., Harder, G. & Zagier, D. The 1-2-3 of modular forms. Lectures at a summer school in Nordfjordeid, Norway, June 2004. Universitext. Berlin: Springer, 2008.
- [15] Buzzard, K. & Gee, T. *The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations*. In: Automorphic forms and Galois representations. Vol. 1, 135–187, London Mathematical Society Lecture Note Series, 414. Cambridge University. Press, Cambridge, 2014.
- [16] Cai, Y., Friedberg, S. & Kaplan, E. *The generalized doubling method: local theory*. *Geom. Funct. Anal.*, 32, no.6, 1233–1333 2022.
- [17] Cai, Y., Friedberg, S. & Kaplan, E. Doubling constructions: local and global theory, with an application to global functoriality for non-generic cuspidal representations. ArXiv:1802.02637.
- [18] Clozel, L. *Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité*. Automorphic forms, Shimura varieties, and  $L$ -functions, Vol. 1 (Ann Arbor, MI, 1988), *Perspect. Math.*, vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 77–159, 1990.
- [19] Cogdell, J. *Lectures on  $L$ -functions, converse theorems and functoriality for  $GL_n$* . Lectures on automorphic  $L$ -functions. Fields Institute Monographs No. 20, AMS, Providence, 1–96, 2004.
- [20] Cogdell, J., Kim, H., Piatetski-Shapiro, I.I. & Shaidi, F. *On lifting from classical groups to  $GL_N$* . *Pub. Mat. Ins. Hautes Études Sci.*, 93, 5–30, 2001.
- [21] Cogdell, J., Kim, H., Piatetski-Shapiro, I.I. & Shaidi, F. *Functoriality for the classical groups*. *Pub. Mat. Ins. Hautes Études Sci.*, 99, 163–233, 2004.
- [22] Deligne, P. *Formes modulaires et représentations  $\ell$ -adiques*. In: Séminaire Bourbaki. Vol. 1968/69: Exposés 347–363, Exp. No. 355, 139–172, *Lecture Notes in Math.*, 175. Springer, Berlin, 1971.
- [23] Deligne, P. *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions  $L$* . In Modular functions of one variable, II, *Lecture notes in mathematics*, 349, Berlin, New York: Springer-Verlag, 501–597, 1973.
- [24] Diamond, F. & Taylor, R. *Non-optimal levels of mod  $\ell$  modular representations*. *Invent. math.*, 115, 435–462, 1994.
- [25] Diamond, F. & Shurman, J. A first course in modular forms. Graduate Texts in Mathematics, 228. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [26] Dieulefait, L. *A control theorem for the images of Galois actions on certain infinite families of modular forms*, in *Modular Forms on Schiermonnikoog*, edited by Gerard van der Geer, Ben Moonen and Bas Edixhoven, Cambridge University Press, 79–84, 2008.
- [27] Dieulefait, L. & Wiese, G. *On Modular Forms and the Inverse Galois Problem*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363, no. 9, 4569–4584, 2011.
- [28] Dieulefait, L. & Zenteno, A. *Constructing Hilbert modular forms without exceptional primes*. *Math. Z.*, 288, no. 1-2, 199–215, 2018.
- [29] Dieulefait, L. & Zenteno, A. *On the images of the Galois representations attached to generic automorphic representations of  $GSp(4)$* . *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)*, XX, no. 2, 635–655, 2020.
- [30] Gan, T. & Takeda, S. *The local Langlands conjecture for  $GSp(4)$* . *Ann. of Math. (2)*, 173, no. 3, 1841–1882, 2011.
- [31] Harbater, D. *Galois coverings of the arithmetic line*, *Number Theory: New York, 1984–85*, *Lecture Notes in Mathematics*. 1240, Springer-Verlag, 165–195, 1987.
- [32] Harbater, D., Obus, A., Pries, R. & Stevenson, K. *Abhyancar’s conjectures in Galois theory: current status and future directions*. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, no. 2, 239–287, 2018.
- [33] Harris, M. & Taylor, R. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*. *Annals of Mathematics Studies* 151. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

- [34] Henniart, G. *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour  $GL(n)$  sur un corps  $p$ -adique*. Invent. Math., 139, no. 2, 439–455, 2000.
- [35] Hilbert, D. *Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten*. J. Reine Angew. Math., 110, 104–129, 1892.
- [36] Hiraga, K. & Saito, H. *On  $L$ -Packets for Inner Forms of  $SL_n$* . Mem. Am. Math. Soc., 215, no. 1013, 2012.
- [37] Hui, C.Y. *Monodromy of subrepresentations and irreducibility of low degree automorphic Galois representations*. to appear in J. London Math. Soc. DOI: <https://doi.org/10.1112/jlms.12811>
- [38] Jiang, D. & Soudry, D. *Generic representations and local Langlands reciprocity law for  $p$ -adic  $SO_{2n+1}$* . In Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, 457–519, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004.
- [39] Kaletha, T., Minguez, A., Shin, S.W. & White, P.-J. *Endoscopic classification of representations: Inner forms of unitary groups*. arXiv:1409.3731.
- [40] Khare, C., Larsen, M., & Savin, G. *Functoriality and the inverse Galois problem*. Compos. Math., 144, no. 3, 541–564, 2008.
- [41] Khare, C., Larsen, M., & Savin, G. *Functoriality and the inverse Galois problem. II. Groups of type  $B_n$  and  $G_2$* . Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 19, no. 1, 37–70, 2010.
- [42] Khare, C. & Wintenberger, J.-P. *Serre’s modularity conjecture, I and II*. Invent. Math., 178, no. 3, 485–586, 2009.
- [43] Kim, H. & Shahidi, F. *Functorial products for  $GL_2 \times GL_3$  and the symmetric cube for  $GL_2$* . Ann. of Math., 155, 837–893, 2002.
- [44] Kret, A. & Shin, S.W. *Galois representations for general symplectic groups*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 25, no. 1, 75–152, 2023.
- [45] Kret, A. & Shin, S.W. *Galois representations for even general special orthogonal groups*. to appear in J. Inst. Math. Jussieu.
- [46] Lafforgue, L. *Chtoukas de Drinfeld et correspondance de Langlands*. Invent. Math., 147, no. 1, 1–241, 2002.
- [47] Lafforgue, V. *Chtoukas pour les groupes réductifs et paramétrization de Langlands globale*. J. Amer. Math. Soc., 31, 719–891, 2018.
- [48] Langlands, R.P. Letter to André Weil (1967), disponible en: <http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/functoriality.html>
- [49] Langlands, R.P. *On the Classification of Irreducible Representations of Real Algebraic Groups*. AMS, Providence, 1973.
- [50] Larsen, M. & Pink, R. *Finite subgroups of algebraic groups*. J. Amer. Math. Soc., 24, no. 4, 1105–1158, 2011.
- [51] Laumon, G. *Fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension trois*. In Formes automorphes. II. Le cas du groupe  $GSp(4)$ . Astérisque no. 302, 1–66, 2005.
- [52] Malle, G. & Matzat, B.H. *Inverse Galois theory*. 2nd edition. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer, 2018.
- [53] Milne, J. *Class field theory*. Course notes, <https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/>
- [54] Mitchel, H. *The subgroups of the quaternary abelian linear group*. Trans. Amer. Math. Soc. 15, 379–396, 1914.
- [55] Mok, C.P. *Endoscopic classification of representation of quasi-split unitary groups*. Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 235, no. 1108, 2015.
- [56] Neukirch, J. *Algebraic number theory*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 322. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [57] Neukirch, J., Schmidt, A., & Wingberg, K. *Cohomology of number fields*. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 323. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [58] Peacock, B. *Explicit Small Image Theorems for Residual Modular Representations*. Int. J. Number Theory, 18, no. 5, 1143–1202, 2022.
- [59] Reichardt, H. *Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung*. J. reine angew. Math., 177, 1–5, 1937.
- [60] Reverter, A. & Vila, N. *Some projective linear groups over finite fields as Galois groups over  $\mathbb{Q}$* . Contemp. Math., 186, 51–63, 1995.
- [61] Ribet, K. *On  $\ell$ -adic representations attached to modular forms*. Invent. Math., 28, 245–275, 1975.
- [62] Ribet, K. *Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus*. In Modular functions of one variable, V (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976), 17–51. Lecture Notes in Math., Vol. 601. Springer, Berlin, 1977.
- [63] Ribet, K. *On  $\ell$ -adic representations attached to modular forms II*. Glasg. Math. J., 27, 185–194, 1985.
- [64] Roe, D. *The Inverse Galois Problem for  $p$ -adic fields*. The Open Book Series, Vol. 2, No. 1. MSP, Berkeley CA, 393–409, 2019.
- [65] Scholz, A. *Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung I*. Math. Z., 42, 161–188, 1937.

- [66] Scholze, P. *The local Langlands Correspondence for  $GL(n)$  over  $p$ -adic fields*. Invent. Math., 192, no. 3, 663–715, 2013.
- [67] Scholze, P. *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*. Ann. of Math. (2), 182, no. 3, 945–1066, 2015.
- [68] Serre, J.-P. *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*. Invent. Math., 15, no. 4, 259–331, 1972.
- [69] Serre, J.-P. *Congruences et formes modulaires (d'après H.P.F. Swinnerton-Dyer)*. Séminaire Bourbaki 416, Juin 1972. Lecture Notes in Mathematics, 317, 319–338, 1973.
- [70] Serre, J.-P. *Topics in Galois theory*. Notes written by Henri Darmon. 2nd ed. Research Notes in Mathematics 1. Wellesley, MA: A K Peters, 2007.
- [71] Shafarevich, R. *Construction of fields of algebraic numbers with given solvable Galois group (en ruso)*. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 18, 525–578, 1954.
- [72] Shin, S.W. *Automorphic Plancherel density theorem*. Israel J. Math., 192, no. 1, 83–120, 2012.
- [73] Swinnerton-Dyer, H. P. *On  $\ell$ -adic representations and congruences for coefficients of modular forms*. International Summer School on Modular Functions; Antwerp, 1972. Lecture Notes in Mathematics, 350, 1–55, 1973.
- [74] Taylor, R. *On the  $l$ -adic cohomology of Siegel threefolds*. Invent. Math., 114, 289–310, 1993.
- [75] Vila, N. *On the inverse problem of Galois theory*. Publ. Mat., Barc., 36, No. 2B, 1053–1073, 1992.
- [76] Völklein, H. *Groups as Galois groups: an introduction*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 53. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [77] Weil, A. *Sur la théorie du corps de classes*. J. Math. Soc. Japan, 3, 1–35, 1951.
- [78] Weissauer, R. *Four dimensional Galois representations*. Formes automorphes. II. Le cas du groupe  $GSp(4)$ . Astérisque No. 302, 67–150, 2005.
- [79] Wiese, G. *On projective linear groups over finite fields as Galois groups over the rational numbers*, in Modular Forms on Schiermonnikoog, edited by Gerard van der Geer, Ben Moonen and Bas Edixhoven, Cambridge University Press, 343–350, 2008.
- [80] Zenteno, A. *On the images of the Galois representations attached to certain RAESDC automorphic representations of  $GL_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$* . Math. Res. Lett., 26, no. 3, 921–947, 2019.
- [81] Zenteno, A. *Lübeck's classification of representations of finite simple groups of Lie type and the inverse Galois problem for some orthogonal groups*. J. Number Theory, 206, 182–193, 2020.
- [82] Zenteno, A. *Automorphic Galois representations and the inverse Galois problem for certain groups of type  $D_m$* . Proc. Amer. Math. Soc., 149, 89–95, 2021.
- [83] *LMFDB - The L-functions and Modular Forms Database*. <https://www.lmfdb.org>

*Adrián Zenteno*

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.,

Jalisco s/n. Col. Valenciana,

C.P. 36023, Guanajuato, México.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6379-7294>

e-mail: [adrian.zenteno@cimat.mx](mailto:adrian.zenteno@cimat.mx)

## UNA NOTA ACERCA DE LA DERIVADA DE $f(x) = x^\alpha$ , CUANDO $\alpha \neq 0$

BELEM GARCÉS Y VÍCTOR C. GARCÍA

RESUMEN. Dado un número real  $\alpha \neq 0$ , presentamos una demostración elemental de la bien conocida fórmula

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

La demostración combina el método asintótico con argumentos y lemas básicos, al alcance de lectores con una formación inicial del concepto de límite.

### 1. INTRODUCCIÓN

Sea  $\alpha \neq 0$  un número real fijo. Consideremos a la función  $f(x) = x^\alpha$  cuando  $x > 0$ . Partiendo de la definición de derivada, para cada  $x_0 > 0$  considere al cociente

$$(1) \quad g_{x_0}(x) = \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0},$$

con el propósito de establecer la existencia del límite,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g_{x_0}(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ . Primero notamos que es suficiente probar el caso cuando la potencia es positiva. Efectivamente, suponga cierto este hecho y  $\alpha < 0$ , entonces

$$f(x) = x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}},$$

donde  $x^{-\alpha}$ , con  $-\alpha > 0$ , tiene derivada  $-\alpha x^{-\alpha-1}$ . De esta forma, es posible concluir usando la fórmula de la derivada de un cociente.

Si  $\alpha = m$ , con  $m$  un entero positivo, es fácil ver que  $g_{x_0}(x)$  es aritméticamente maleable y equivalente a la función polinomial

$$g_{x_0}(x) = x^{m-1} + x^{m-2}x_0 + \dots + xx_0^{m-2} + x_0^{m-1}$$

siempre que  $x \neq x_0$ . Así, es claro que el siguiente límite tiene lugar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^m - x_0^m}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g_{x_0}(x) = mx_0^{m-1}.$$

Ahora supongamos que  $\alpha$  es un racional, digamos  $\alpha = m/n$  para ciertos enteros positivos  $m, n$  primos relativos. Entonces  $f(x) = (x^{1/n})^m = (f_m \circ f_{1/n})(x)$ , donde  $f_m(x) = x^m$  y  $f_{1/n}(x) = x^{1/n}$ . Según a la discusión inmediata, es evidente que  $f_m$  es derivable en todos los reales positivos. Más aún, observamos que para todo  $x \neq x_0$  se tiene:

$$\frac{x^{1/n} - x_0^{1/n}}{x - x_0} = \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}}x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}}x_0^{\frac{n-2}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}}}.$$

De esta forma, tomando directamente el límite correspondiente, se verifica que  $f_{1/n}(x)$  tiene derivada  $f'_{1/n}(x) = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$ . Entonces, por la regla de la cadena se sigue que

$$f'(x) = mx^{(m-1)/n}f'_{1/n}(x) = \frac{m}{n}x^{m/n-1}.$$

El caso cuando  $\alpha$  es irracional es de naturaleza más compleja,  $g_{x_0}(x)$  no se reduce inmediatamente a una expresión donde se aplique el límite de manera directa ni parece que se pueda reducir al escenario cuando la potencia es racional. Observamos que el

uso de la regla de L'Hôpital sería redundante. El ejercicio se facilita si permitimos el uso del logaritmo y sus propiedades. Es cierto que

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \quad \text{para } x > 0.$$

Si además asumimos válida la fórmula  $(e^x)' = e^x$ , entonces junto con la regla de la cadena se concluye el ejercicio. Por otra parte, el problema es elemental y nos complace presentar una demostración con un uso mínimo de recursos. Nuestro argumento evita el uso de la función logaritmo y también sirve para establecer la derivada de la función exponencial.

PROPOSICIÓN 1. *Sea  $\alpha$  un número real dado y distinto de cero. Entonces la siguiente expresión tiene lugar*

$$(2) \quad \frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1},$$

para todo  $x > 0$ .

La demostración es de carácter asintótico, uno de los métodos más prolíficos en el análisis. A grandes rasgos y en la forma más simple, se buscan funciones  $u(x)$  y  $v(x)$  tales que en una vecindad agujereada de  $x_0$  se cumple  $u(x) \leq \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} \leq v(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$ . El Lema 2 precisa esta idea.

A modo de ejemplo destaquemos la bien conocida demostración del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Observamos que para la función involucrada  $\frac{\text{sen } x}{x}$  no se conoce una identidad elemental que permita tomar el límite<sup>1</sup>. En su lugar, se busca una estimación suficientemente fina. Por ejemplo, mediante un argumento geométrico, se verifica el siguiente sistema de desigualdades cuando  $0 < x < \pi/4$ ,

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1.$$

De esta forma, aplicando el Lema 2 obtenemos que  $\frac{\text{sen } x}{x} \rightarrow 1$  si  $x \rightarrow 0^+$ . Haciendo las adecuaciones respectivas, se sigue que el límite lateral izquierdo también coincide con la unidad.

La derivada de la función exponencial es otro ejemplo de interés. Encontrar la derivada de  $f(x) = e^x$ , en cualquier punto se puede reducir al caso en el origen en virtud de la siguiente observación:

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0},$$

de esta forma, si  $x \rightarrow x_0$ , entonces  $x - x_0 \rightarrow 0$ . En cierta vecindad de cero afirmamos que tiene lugar el sistema de desigualdades  $1 + x \leq e^x \leq 1 + x + cx^2$ , para alguna constante  $c > 0$ . Entonces cuando  $x$  es suficientemente pequeño y  $x > 0$  se tiene

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + cx,$$

así, aplicando el Lema 2 obtenemos

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + cx).$$

El mismo esquema puede usarse para probar que el límite lateral izquierdo es igual a uno.

A pesar de que la idea asintótica de fondo es la misma, los detalles técnicos están hechos a medida de las funciones dadas. En nuestro caso comenzamos reduciendo el problema al cálculo del límite de una función en cero, ver (5). Con ayuda de las desigualdades de Bernoulli, Lema 4, la función involucrada  $\frac{(1+u)^\alpha - 1}{u}$  será acotada

<sup>1</sup>Evitamos el uso del Teorema de Taylor, deseamos argumentos tan elementales como sea posible.

superior e inferiormente de tal forma que podamos aplicar el Lema 2 para finalmente obtener el límite buscado.

Siendo una pregunta natural y con respuesta no trivial, se puede esperar que haya sido un tema de discusión en la comunidad. En este sentido, mencionamos las ideas propuestas por Barry Cipra [3], quien también propone una solución sin el uso de logaritmos y usando los Lemas 2 y 4. En la misma referencia se pueden encontrar otras propuestas interesantes.

## 2. LEMAS AUXILIARES

El siguiente lema es fundamental y bien conocido, su demostración puede encontrarse, por ejemplo, en el libro de Bartle y Sherbert [1].

LEMA 2. Sean  $f$ ,  $u$  y  $v$  funciones definidas en una vecindad de un punto  $x_0$ . Suponga que para todo  $x \neq x_0$  de dicha vecindad se tiene

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x).$$

Si  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$ , entonces  $f$  tiene límite en  $x_0$  y además

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Otra de las herramientas es la desigualdad de Bernoulli, que presentamos en la siguiente forma.

LEMA 3 (Desigualdad de Bernoulli). Para todos los reales  $\alpha$  real  $\alpha \geq 1$ , y  $u \geq -1$

$$(3) \quad (1 + u)^\alpha \geq 1 + \alpha u.$$

En caso que  $0 \leq \alpha \leq 1$ , y  $u \geq -1$  se tiene

$$(4) \quad (1 + u)^\alpha \leq 1 + \alpha u.$$

Es importante notar que ambas desigualdades se obtienen de forma elemental. Por completitud se incluye una demostración en la Sección 4. También puede consultarse [2] y [4].

## 3. LA DEMOSTRACIÓN

En adelante asumiremos que  $\alpha$  no es un entero. Observe que si  $x_0 > 0$ , entonces estudiar el comportamiento de  $g_{x_0}(x)$ , ver (1), alrededor de  $x_0$ , equivale al estudio de  $\frac{(x_0+x)^\alpha - x_0^\alpha}{x}$  alrededor del origen. Por otra parte,

$$\frac{(x_0 + x)^\alpha - x_0^\alpha}{x} = x_0^{\alpha-1} \frac{(1 + (x/x_0))^\alpha - 1}{x/x_0}.$$

Además, si  $x \rightarrow 0$ , entonces  $x/x_0 \rightarrow 0$ . Por lo tanto, es suficiente demostrar que

$$(5) \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1 + u)^\alpha - 1}{u} = \alpha.$$

Dado que calculamos el límite cuando  $u \rightarrow 0$ , en adelante basta suponer que  $|u| < 1/2$ .

Primero consideramos el caso  $0 < \alpha < 1$ . De esta forma  $1 + \alpha > 1$  y aplicando la desigualdad (3) se sigue que

$$(1 + u)^\alpha = \frac{(1 + u)^{\alpha+1}}{1 + u} \geq \frac{1 + (\alpha + 1)u}{1 + u} = 1 + \frac{\alpha u}{1 + u}.$$

Recordando que  $\alpha < 1$  y mediante (4) obtenemos  $(1 + u)^\alpha \leq 1 + \alpha u$ . Combinando con la desigualdad anterior se verifica

$$\frac{\alpha u}{1 + u} \leq (1 + u)^\alpha - 1 \leq \alpha u.$$

Supongamos que  $0 < u < 1/2$ , entonces dividimos al sistema de desigualdades por  $u > 0$  y tenemos

$$(6) \quad \frac{\alpha}{1+u} \leq \frac{(1+u)^\alpha - 1}{u} \leq \alpha, \quad \alpha < 1.$$

Usando el Lema 2 se sigue que existe el límite cuando  $u \rightarrow 0^+$

$$\alpha = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{1+u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(1+u)^\alpha - 1}{u}.$$

De manera análoga, se verifica que  $\frac{(1+u)^\alpha - 1}{u} \rightarrow \alpha$  cuando  $u \rightarrow 0^-$ .

Ahora, considere el caso  $\alpha > 1$ . Denotemos por  $\{\alpha\}$  y  $[\alpha]$  a la parte fraccional y entera de  $\alpha$ , respectivamente. Entonces  $\alpha = \{\alpha\} + [\alpha]$ , con  $0 < \{\alpha\} < 1$  y  $[\alpha] \geq 1$ . Podemos asumir que  $|u| < 1/2$ , y aplicamos la desigualdad (4) para obtener  $(1+u)^{\{\alpha\}} \leq 1 + u\{\alpha\}$ . De esta forma

$$(7) \quad (1+u)^\alpha = (1+u)^{\{\alpha\}}(1+u)^{[\alpha]} \leq (1 + \{\alpha\}u)(1+u)^{[\alpha]}.$$

Haciendo uso de la expansión binomial  $(1+u)^{[\alpha]} = 1 + [\alpha]u + \binom{[\alpha]}{2}u^2 + \dots + u^{[\alpha]}$  se sigue

$$(8) \quad \begin{aligned} (1 + \{\alpha\}u)(1+u)^{[\alpha]} &= (1 + \{\alpha\}u) \left( 1 + [\alpha]u + \binom{[\alpha]}{2}u^2 + \dots + u^{[\alpha]} \right) \\ &= (1 + \{\alpha\}u)(1 + [\alpha]u) + (1 + \{\alpha\}u) \left( \binom{[\alpha]}{2}u^2 + \dots + u^{[\alpha]} \right) \\ &= 1 + \alpha u + u^2 \left( \{\alpha\}[\alpha] + (1 + \{\alpha\}u) \left( \binom{[\alpha]}{2} + \dots + u^{[\alpha]-2} \right) \right). \end{aligned}$$

Recordemos que  $|u| < 1/2$ ,  $0 < \{\alpha\} < 1$  y

$$\sum_{k=0}^{[\alpha]} \binom{[\alpha]}{k} u^k \leq \sum_{k=0}^{[\alpha]} \binom{[\alpha]}{k} \leq 2^{[\alpha]}.$$

De esta forma

$$(9) \quad \{\alpha\}[\alpha] + (1 + \{\alpha\}u) \left( \binom{[\alpha]}{2} + \dots + u^{[\alpha]-2} \right) \leq \alpha + 2^{[\alpha]+1}.$$

Retomando la expresión (7) y combinándola con (8) y (9) obtenemos

$$(1+u)^\alpha = (1+u)^{\{\alpha\}}(1+u)^{[\alpha]} \leq 1 + \alpha u + (\alpha + 2^{[\alpha]+1})u^2.$$

Por lo tanto, usando la estimación anterior y la desigualdad (3) se sigue que

$$\alpha u \leq (1+u)^\alpha - 1 \leq \alpha u + (\alpha + 2^{[\alpha]+1})u^2.$$

Si  $0 < u < 1/2$ , entonces dividimos por  $u$  para obtener

$$(10) \quad \alpha \leq \frac{(1+u)^\alpha - 1}{u} \leq \alpha + (\alpha + 2^{[\alpha]+1})u, \quad \alpha > 1.$$

Tomando el límite cuando  $u \rightarrow 0^+$ , usando el Lema 2 obtenemos

$$\alpha = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(1+u)^\alpha - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} (\alpha + 2^{[\alpha]+1}u).$$

De manera análoga (5) se obtiene cuando  $u \rightarrow 0^-$  si  $-1/2 < u < 0$ .

## 4. LAS DESIGUALDADES DE BERNOULLI, SU DEMOSTRACIÓN

Primero estableceremos desigualdades (3) y (4) en el caso cuando la potencia  $\alpha$  es un número racional. Primero, para  $u \geq -1$  definimos:

$$h(u) = (1 + u)^\alpha - \alpha u.$$

En virtud de la derivabilidad de  $h(u)$ , ya que  $\alpha$  es racional, se puede verificar que la función tiene un punto extremo cuando  $u = 0$ . Además, si  $0 \leq \alpha < 1$ , entonces  $u = 0$  es un máximo local y  $h(0) = 1 \geq (1 + u)^\alpha - \alpha u$ , es decir, se obtiene la desigualdad (3). Por otra parte, cuando  $\alpha > 1$ ,  $u = 0$  es el mínimo local de  $h$  y se verifica (3). El caso  $\alpha = 1$  es inmediato.

Ahora suponga que  $\alpha$  es un irracional con  $0 < \alpha < 1$ . Sea  $r_k$  una sucesión de racionales tales que  $r_k < \alpha$  y  $r_k \rightarrow \alpha$  si  $k \rightarrow \infty$ . Entonces para todo  $k \geq 1$  se tiene:

$$(1 + u)^\alpha < (1 + u)^{r_k} \leq 1 + r_k u.$$

Finalmente, al tomar el límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , se obtiene la desigualdad buscada (3). Cuando  $1 < \alpha$ , para obtener (4) se procede de manera análoga eligiendo una sucesión de racionales  $r_k$  tales que  $\alpha < r_k$  y  $r_k$  convergiendo a  $\alpha$ .

**AGRADECIMIENTOS.** Los autores agradecen al Proyecto de Servicio Social de la UAM-A con No. 1069 de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería, por todo el apoyo recibido para la realización de esta investigación. Se agradece también al árbitro anónimo por sus valiosos comentarios y sugerencias.

## REFERENCIAS

- [1] Bartle, R. G. and Sherbert, D. R., *Introduction to real analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2nd edition, 1992.
- [2] Bullen, P. S., *Handbook of means and their inequalities*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.
- [3] Cipra, B., What is the derivate of  $x^n$ ?, <https://math.stackexchange.com/questions/1808332/what-is-the-derivative-of-xn>, 2016.
- [4] Kazarinoff, N. D., *Analytic inequalities*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.

*Belem Garcés Martínez*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Azcapotzalco,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Ciencias Básicas.  
Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas  
Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200 CDMX, México  
e-mail: a12162004142@azc.uam.mx

*Víctor Cuauhtemoc García Hernández*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Azcapotzalco,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Ciencias Básicas.  
Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas  
Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200 CDMX, México  
e-mail: vcgh@azc.uam.mx



## LA FÓRMULA DE LEIBNIZ Y EL TRUCO FAVORITO DE FEYNMAN

E. ARIZA GARCÍA, L. ARTEAGA, J. DUTA, E. HURTADO, R. MOYA. & M. MUÑOZ

RESUMEN. En este trabajo exploramos el uso de la, así llamada, Fórmula de Leibniz, para lo cual resolvemos varios ejemplos. El método que consiste en el uso de esta fórmula también es conocido como truco favorito de Feynman. A pesar de su utilidad y potencia, dicho método es poco usado, y ha sido ampliamente olvidado en la actualidad, por lo que este trabajo pretende ayudar a ponerlo en el arsenal que se usa para calcular integrales de distintos tipos. Además, damos el marco teórico para finalmente demostrar formalmente un par de versiones de la fórmula de Leibniz.

### 1. INTRODUCCIÓN

Algunos autores (ver [6, 7]) han llamado **el truco favorito de Feynman** al uso de lo que en matemáticas se conoce como **la fórmula de Leibniz** (ver [3]). Esta fórmula involucra la derivación de una función, dependiente de un parámetro, y definida por medio de una integral en la cual, tanto los límites de integración, como el integrando, pueden depender del parámetro. Por esta razón, también hay autores que se refieren a este método como **derivación bajo el signo de integral**.

Según el propio Feynman (ver [4]) su profesor de física de la secundaria (el profesor Bader) le prestó un libro de cálculo avanzado (ver [13]) con el cual aprendió a usar este método de forma autodidacta. Años más tarde, Feynman se ganó la reputación de resolver integrales, algunas de las cuales eran (y son) consideradas difíciles de calcular. Al volverse Feynman una figura reconocida en todo el mundo científico, este truco de resolución de integrales se hizo famoso en algunos círculos científicos, y tomó el nombre de *el truco favorito de Feynman*.

Sin embargo, resulta un poco injusto endosar el método a Feynman, cuando este no es más que el uso de un teorema atribuido a Leibniz desde mucho antes de Feynman. Con el fin de darle el crédito adecuado a cada uno de estos grandes de la ciencia, hemos considerado pertinente que el título de este trabajo sea *La Fórmula de Leibniz y el Truco Favorito de Feynman*.

Esta herramienta, a pesar de su gran potencia y utilidad, no es comúnmente enseñada en los cursos de cálculo y, en la mayoría de los casos, ni siquiera es mencionada. Por esta razón se ha convertido en un método desconocido casi por completo, generando una debilidad en la caja de herramientas para el cálculo de integrales tanto de estudiantes como de algunos profesores. Esto es particularmente cierto en español, posiblemente debido a las pocas referencias relacionadas con este tema encontradas en nuestro idioma. De aquí que pretendamos, con esta pequeña contribución, proveer de una buena referencia, en el idioma español, que sirva de punto de partida para su uso.

En este trabajo demostramos formalmente un par de versiones de la fórmula de Leibniz, pero antes de eso, damos varios ejemplos del uso de esta fórmula para ilustrar, en primer lugar, cómo se usa el famoso truco favorito de Feynman y, en segundo lugar, cuán útil y potente es esta herramienta.

---

2010 *Mathematics Subject Classification*. 97I40, 97I50, 97I60.

*Palabras clave*. Fórmula de Leibniz, Truco favorito de Feynman, Derivación bajo el signo de integral.

La estructura de este documento es la siguiente: En la Sección 2 enunciaremos las dos versiones de la fórmula de Leibniz, sin dar la demostración ni mayores detalles sobre dicha fórmula, para luego pasar a mostrar cómo se usan estas, ilustrando así lo que se conoce como truco favorito de Feynman; en la Sección 3 introducimos todos los conceptos y la terminología necesaria para mostrar las dos versiones de la fórmula de Leibniz; en la Sección 4 enunciaremos y demostramos las dos versiones de la fórmula de Leibniz; en la Sección 5 damos algunas observaciones finales; en la Sección 7 damos algunas conclusiones sobre este trabajo y posibles trabajos futuros; en la Sección 8 mostramos el procedimiento formal para resolver algunos ejemplos. Finalmente, en la Sección 9 dejamos algunos ejercicios que el lector interesado puede usar para practicar y mejorar sus habilidades en el uso de esta herramienta.

## 2. EJEMPLOS

Comenzamos enunciando las dos versiones de la fórmula de Leibniz. Las demostraciones de estas fórmulas se encuentran en la Sección 4.

### TEOREMA 1. (Fórmula de Leibniz: Primera Versión)

Sea  $f : A \times J \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, donde  $A$  es un conjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  y  $J$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Si  $\frac{\partial f}{\partial t}$  es uniformemente continua en  $A \times J$  y

$$g(t) := \int_A f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x},$$

entonces

$$(1) \quad \boxed{g'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}}.$$

### TEOREMA 2. (Fórmula de Leibniz: Segunda Versión)

Sea  $f : A \times J \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, donde  $A$  es un conjunto acotado de  $\mathbb{R}$  y  $J$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Sean  $g, h : J \rightarrow \mathbb{R}$  funciones derivables en  $J$ . Si definimos  $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\phi(t) := \int_{g(t)}^{h(t)} f(x, t) \, dx,$$

y  $\frac{\partial f}{\partial t}$  es uniformemente continua en  $A \times J$ , entonces

$$(2) \quad \boxed{\phi'(t) = f(h(t), t) \cdot h'(t) - f(g(t), t) \cdot g'(t) + \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx}.$$

El uso de estos resultados para el cálculo de ciertas integrales es lo que se conoce como truco favorito de Feynman. Veamos algunos ejemplos, en los que no ahondaremos en los detalles formales, para ilustrar cuán útil y potente es esta herramienta.

**Ejemplo 1.** Calculemos la integral

$$(3) \quad I(a) := \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} \, dx.$$

Para ello, recordemos que

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \int_0^b \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a} \cdot \arctan \left( \frac{b}{a} \right) \right) = \frac{\pi}{2a}.$$

Derivando con respecto al parámetro  $a$  en ambos lados de la igualdad anterior (teniendo en cuenta que la derivación en el lado izquierdo es bajo el signo de integral), tenemos que

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{x^2 + a^2} \right) \, dx = \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\pi}{2a} \right) \implies \int_0^\infty \frac{-2a}{(x^2 + a^2)^2} \, dx = -\frac{\pi}{2a^2}.$$

De donde, al despejar la integral requerida, resulta

$$(4) \quad \boxed{\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3}}.$$

**Proceder de esta forma resulta bastante práctico, ¡pero tenga cuidado! Pudiera no ser correcto intercambiar la derivada con la integral (es decir, derivar bajo el signo de integral) ver Observación 12.** El procedimiento formal para resolver este ejemplo se muestra en el Ejemplo 10 de las Sección 8.

El Ejemplo 1 es un ejemplo relativamente sencillo en el que el truco de Feynman es aplicable. Para ilustrar más claramente la potencia de este método, consideremos los siguientes ejemplos, algunos de los cuales son bastante famosos.

**Ejemplo 2.** Calculemos la famosa integral

$$(5) \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Esta integral se suele calcular usando el cambio en coordenadas polares para integrales dobles (ver, por ejemplo, la página 603 de [8]). Nosotros usaremos el truco de Feynman para realizar este cálculo. Con esto en mente, consideremos la función

$$(6) \quad g(t) := \left( \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2.$$

Está claro que

$$(7) \quad \boxed{\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) \right)^{1/2}}.$$

De aquí que, para calcular la integral requerida, bastaría con calcular  $g(t)$  y tomar la raíz cuadrada del límite indicado en (7). Es claro que se puede hacer uso de la segunda versión de la fórmula de Leibniz (que, en este caso, no es más que el Teorema Fundamental del Cálculo), junto con la regla de la cadena, para obtener

$$\frac{dg}{dt}(t) = 2 \left( \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} = 2 \int_0^t e^{-\frac{t^2+x^2}{2}} dx = 2 \int_0^t e^{-\frac{1+(\frac{x}{t})^2}{2} \cdot t^2} dx.$$

Hagamos ahora el cambio de variable  $y = \frac{x}{t}$ , de manera que  $dx = t \cdot dy$ , y

$$\begin{cases} \text{si } x = 0 & \Rightarrow y = 0, \\ \text{si } x = t & \Rightarrow y = 1. \end{cases}$$

Luego,

$$(8) \quad \frac{dg}{dt}(t) = 2 \int_0^1 e^{-\frac{1+y^2}{2} \cdot t^2} t \cdot dy = \int_0^1 2te^{-\frac{1+y^2}{2} \cdot t^2} dy.$$

Ahora bien, es fácil ver que

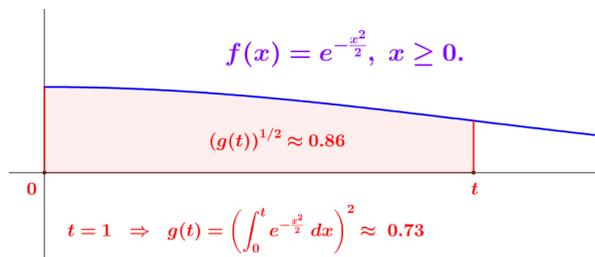
$$\int 2te^{-\frac{1+y^2}{2} \cdot t^2} dt = -\frac{2e^{-\frac{1+y^2}{2} \cdot t^2}}{1+y^2} + C.$$

Luego, podemos escribir

$$(9) \quad 2te^{-\frac{1+y^2}{2} \cdot t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{2e^{-\frac{1+y^2}{2} \cdot t^2}}{1+y^2} \right).$$

De (8) y (9) resulta, entonces,

$$\frac{dg}{dt}(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{2e^{-\frac{1+y^2}{2} \cdot t^2}}{1+y^2} \right) dt = -2 \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1+y^2}{2} \cdot t^2}}{1+y^2} dy \right).$$

FIGURA 1. Área bajo la curva cuando  $t = 1$ .

Nótese el intercambio de los símbolos de derivación e integración, esto es, la aplicación del truco favorito de Feynman.

Así, pues, al integrar con respecto a  $t$  ambos lados de la igualdad anterior, obtenemos que

$$(10) \quad g(t) = -2 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1+y^2}{2} \cdot t^2}}{1+y^2} dy + K.$$

Para terminar, notemos que  $g(0) = 0$  debido a (6), y

$$0 = g(0) = -2 \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy + K,$$

debido a (10). Como

$$\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

lo anterior implica que

$$K = \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente,

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -2 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1+y^2}{2} \cdot t^2}}{1+y^2} dy + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2},$$

puesto que

$$(12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1+y^2}{2} \cdot t^2}}{1+y^2} dy \right) = \int_0^1 \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-\frac{1+y^2}{2} \cdot t^2}}{1+y^2} \right) dy = 0.$$

Podemos concluir, entonces, gracias a (7) y a (11), que

$$(13) \quad \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) \right)^{1/2} = \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

*Observación 1.* El intercambio del límite con la integral en (12) es posible gracias a la continuidad uniforme del integrando en el intervalo  $[0, 1]$ . Vea el argumento dado en el Lema 15 para más detalles.

*Observación 2.* Es de hacer notar que la integral dada dentro del paréntesis en la definición (6) representa el área bajo la curva  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  en el intervalo  $[0, t]$ . Ver Figura 1. También puede ver este ejemplo en geogebra, haciendo [click aquí](#).

En este punto, el lector interesado estará pensando en si convino usar el método seguido en el Ejemplo 2 o habría sido preferible realizar este cálculo usando el cambio de variables en coordenadas polares para integrales dobles mencionado. Es posible que sí. Sin embargo, en el siguiente ejemplo resulta bastante complicado usar esto último, mientras que el truco de Feynman sigue vigente.

**Ejemplo 3.** Calculemos la integral

$$I := \int_0^{\infty} \cos(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Para ello, vamos a proceder con cierta informalidad. En el Ejemplo 11 se formalizan estas ideas. Sea, entonces,

$$(14) \quad I(t) := \int_0^{\infty} \cos(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

de manera que  $I = I(1)$ . Derivando con respecto al parámetro  $t$  en ambos lados de la igualdad anterior (teniendo en cuenta que la derivación en el lado derecho es bajo el signo de integral y que, como la derivada es con respecto a  $t$ , el valor de  $x$  se considera constante), tenemos que

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( \cos(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( \cos(tx) \right) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^{\infty} -x \operatorname{sen}(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes la última integral, con

$$\boxed{u = \operatorname{sen}(tx)} \quad \text{y} \quad \boxed{dv = -xe^{-\frac{x^2}{2}} dx},$$

resulta que

$$\boxed{du = t \cdot \cos(tx) dx} \quad \text{y} \quad \boxed{v = e^{-\frac{x^2}{2}}},$$

por lo que

$$I'(t) = \left( \operatorname{sen}(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot t \cdot \cos(tx) dx,$$

es decir,

$$(15) \quad I'(t) = -t \int_0^{\infty} \cos(tx) \cdot e^{-x^2} dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{I'(t) = -t \cdot I(t)},$$

puesto que

$$\left( \operatorname{sen}(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \Big|_0^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \operatorname{sen}(tb) \cdot e^{-\frac{b^2}{2}} - \operatorname{sen}(0) \cdot e^0 \right) = 0.$$

Ahora bien, la ecuación (15) es una ecuación diferencial de variables separables que se resuelve fácilmente (dejamos los detalles al lector), y cuya solución general es

$$(16) \quad I(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Finalmente, gracias a (13) y (14),

$$(17) \quad \boxed{I(0) = \int_0^{\infty} \cos(0) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

Luego, debido a (16) y (17), podemos escribir

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = I(0) = C \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

En conclusión, tenemos que

$$I(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}},$$

esto es,

$$(18) \quad \boxed{\int_0^{\infty} \cos(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}}.$$

En particular, como la integral que se requería calcular era  $I = I(1)$ , podemos decir que

$$\boxed{\int_0^{\infty} \cos(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = I(1) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}}.$$

**Ejemplo 4.** Calculemos la integral

$$(19) \quad \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx.$$

Para ello, definamos la función

$$(20) \quad g(k) = \int_0^1 \frac{x^k - 1}{\ln x} dx,$$

dependiente del parámetro  $k \geq 0$ . Notemos que

$$(21) \quad \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx = g(2)$$

y que

$$(22) \quad g(0) = 0.$$

Derivando (20) bajo el signo de integral, obtenemos

$$\frac{dg}{dk}(k) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial k} \left( \frac{x^k - 1}{\ln x} \right) dx.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial k} \left( \frac{x^k - 1}{\ln x} \right) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\partial}{\partial k} (x^k - 1) = \frac{1}{\ln x} \cdot (x^k \cdot \ln x) = x^k,$$

entonces

$$(23) \quad \frac{dg}{dk}(k) = \int_0^1 x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

Esta ecuación (23) es una ecuación diferencial ordinaria de variables separables que, al resolverla, resulta

$$(24) \quad g(k) = \ln |k + 1| + C.$$

Para calcular  $C$ , notemos que, debido a (22) y a (24),

$$0 = g(0) = \ln |0 + 1| + C \Rightarrow \boxed{C = 0}.$$

Luego,

$$(25) \quad \boxed{g(k) = \ln |k + 1|}.$$

Finalmente, de (21), tenemos que

$$(26) \quad \boxed{\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx = g(2) = \ln(3)}.$$

**Ejemplo 5.** Calculemos la integral

$$(27) \quad \tilde{I} := \int_0^{\pi} e^{\cos(x)} \cdot \cos(\operatorname{sen}(x)) dx.$$

Esta integral se puede resolver de distintas formas. Una de ellas es escribir el integrando por medio de su representación en series. Nosotros usaremos el truco de Feynman.

Con ello en mente, definamos

$$I(k) = \int_0^\pi e^{k \cos(x)} \cdot \cos(k \operatorname{sen}(x)) \, dx.$$

Nótese que  $\tilde{I} = I(1)$  y que  $I$  es derivable en todo  $k \in \mathbb{R}$ . De la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta),$$

se tiene que

$$(28) \quad e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}.$$

Sea  $\alpha = k \cos(x)$ . Usando (28) con  $\theta = k \operatorname{sen}(x)$ , podemos escribir

$$e^{k \cos(x)} \cdot \cos(k \operatorname{sen}(x)) = e^\alpha \cdot \cos(\theta) = e^\alpha \cdot \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{e^{\alpha+i\theta} + e^{\alpha-i\theta}}{2}.$$

Como

$$\boxed{\alpha + i\theta = k(\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)) = ke^{ix}} \quad \text{y} \quad \boxed{\alpha - i\theta = ke^{-ix}},$$

tenemos que

$$e^{k \cos(x)} \cdot \cos(k \operatorname{sen}(x)) = \frac{1}{2}e^{ke^{ix}} + \frac{1}{2}e^{ke^{-ix}},$$

con lo cual

$$(29) \quad \boxed{I(k) = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{ke^{ix}} \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{ke^{-ix}} \, dx}.$$

De (29) se obtiene, derivando bajo el signo de integral con respecto a  $k$ , que

$$(30) \quad I'(k) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial k} (e^{ke^{ix}}) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial k} (e^{ke^{-ix}}) \, dx.$$

Ahora bien,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial k} (e^{ke^{ix}}) = e^{ke^{ix}} \cdot \frac{\partial}{\partial k} (ke^{ix}) = e^{ke^{ix}} \cdot e^{ix}} \quad \text{y} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial k} (e^{ke^{-ix}}) = e^{ke^{-ix}} \cdot e^{-ix}}.$$

Así, (30) se reduce a

$$I'(k) = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{ke^{ix}} \cdot e^{ix} \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{ke^{-ix}} \cdot e^{-ix} \, dx.$$

Esto lo podemos escribir como

$$(31) \quad 2i k I'(k) = \underbrace{ik \int_0^\pi e^{ke^{ix}} \cdot e^{ix} \, dx}_{I_1} + \underbrace{ik \int_0^\pi e^{ke^{-ix}} \cdot e^{-ix} \, dx}_{I_2}.$$

Para calcular  $I_1$  basta con hacer el cambio de variable  $u = ke^{ix}$ , lo que resulta en

$$I_1 = e^{ke^{ix}} \Big|_0^\pi = e^{-k} - e^k,$$

mientras que para el cálculo de  $I_2$  basta con hacer el cambio  $v = ke^{-ix}$ , lo que lleva a

$$I_2 = -e^{ke^{-ix}} \Big|_0^\pi = -(e^{-k} - e^k) = -I_1.$$

Por tanto, (31) se convierte en

$$2ik I'(k) = I_1 + I_2 = I_1 + (-I_1) = 0.$$

Como esto vale para todo  $k \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$I'(k) = 0,$$

i.e.,  $I(k)$  es constante con respecto a  $k$ . En particular, tenemos que

$$\tilde{I} = I(1) = I(0) = \int_0^\pi e^0 \cos(0) \, dx = \int_0^\pi dx = \pi,$$

es decir,

$$\boxed{\int_0^\pi e^{\cos(x)} \cdot \cos(\operatorname{sen}(x)) \, dx = \pi}.$$

**Ejemplo 6.** Calculemos la integral

$$(32) \quad I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} \, dx.$$

Para hacerlo, definamos

$$I(t) = \int_0^1 \frac{\ln(tx+1)}{x^2+1} \, dx.$$

Notemos que

$$\boxed{I(1) = I} \quad \text{e} \quad \boxed{I(0) = 0}.$$

Si asumimos que podemos derivar bajo el signo de integral, resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\ln(tx+1)}{x^2+1} \right) \, dx = \int_0^1 \frac{x}{(tx+1)(x^2+1)} \, dx.$$

La última integral se puede calcular usando descomposición en fracciones simples. Esta descomposición es de la siguiente forma:

$$\frac{x}{(tx+1)(x^2+1)} = \frac{A}{tx+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Al realizar los cálculos necesarios para hallar las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ , resulta que

$$A = \frac{-t}{t^2+1} = -C, \quad B = \frac{1}{t^2+1}.$$

Luego,

$$\frac{x}{(tx+1)(x^2+1)} = \frac{1}{t^2+1} \cdot \left( \frac{-t}{tx+1} + \frac{x+t}{x^2+1} \right) = \frac{1}{t^2+1} \cdot \left( -\frac{t}{tx+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{t}{x^2+1} \right).$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} I(t) &= \frac{1}{t^2+1} \cdot \int_0^1 \left( -\frac{t}{tx+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{t}{x^2+1} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{t^2+1} \cdot \left( -\ln(tx+1) + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + t \cdot \arctan(x) \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{t^2+1} \cdot \left( -\ln(t+1) + \frac{1}{2} \ln(2) + t \cdot \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\ln(2)}{2} \cdot \frac{1}{t^2+1} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{t}{t^2+1} - \frac{\ln(t+1)}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Integrando ambos lados en el intervalo  $(0, 1)$ , y usando el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} I(t) \, dt}_{I(1)-I(0)} = \frac{\ln(2)}{2} \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} \, dt}_{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{4} \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{t}{t^2+1} \, dt}_{\frac{\ln(2)}{2}} - \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1} \, dt}_{I(1)}.$$

Como  $I(0) = 0$ , lo anterior implica que

$$I(1) = \frac{\ln(2)}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\ln(2)}{2} - I(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = I(1) = \frac{\pi \ln(2)}{8}}.$$

### 3. PELIMINARES TEÓRICOS

Quisimos que la sección de ejemplos estuviera antes de los preliminares teóricos, para mostrar de entrada la potencia y utilidad del uso de la fórmula de Leibniz o truco favorito de Feynman.

Ahora vamos a mostrar las dos versiones de la fórmula de Leibniz enunciadas al principio de la sección anterior, para lo cual iniciamos con esta sección de preliminares, en la que recordamos algunos conceptos y resultados bien conocidos del cálculo diferencial e integral, y del análisis matemático.

#### 3.1. Continuidad.

**Definición 3.** Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en  $D \subset \text{Dom}(f)$ . Diremos que  $f$  es **continua** en  $\mathbf{a} \in D$  si dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\mathbf{x} \in D, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon.$$

En otras palabras, si

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})}.$$

Si la función  $f$  no es continua en  $\mathbf{a}$ , diremos que ella es **discontinua** en ese punto. Si  $f$  es continua en cada punto  $\mathbf{a} \in D$ , diremos que  $f$  es **continua en  $D$** .

**Ejemplo 7.** Toda función polinómica es continua en todo su dominio. También lo son las funciones racionales (i.e., cocientes de polinomios) en todo su dominio. Otros ejemplos de funciones continuas son las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, en todo su dominio. Finalmente, suma, resta, producto y composición de funciones continuas, es continua. El cociente de funciones continuas es continuo siempre que su denominador no sea cero.

En la definición 3 anterior, suele ocurrir que  $\delta$  dependa tanto de  $\varepsilon$  como de  $\mathbf{a}$ . Si  $\delta$  depende sólo de  $\varepsilon$ , entonces diremos que  $f$  es **uniformemente continua en  $D$** . Más precisamente, tenemos la siguiente

**Definición 4.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es **uniformemente continua en  $D$**  si, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

*Observación 3.* Si  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto cerrado y acotado y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $D$ , entonces  $f$  es uniformemente continua en  $D$ .

*Observación 4.* Si  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto cerrado y acotado y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $D$ , entonces  $f$  alcanza su máximo y su mínimo valor en  $D$ .

#### 3.2. Derivabilidad y Teorema del Valor Medio (T.V.M.).

**Definición 5.** Sea  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $t_0 \in (a, b)$ . Diremos que  $h$  es **derivable en  $t_0$**  si existe el límite

$$(33) \quad \boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}}.$$

Llamaremos a dicho límite **la derivada de  $h$  en  $t_0$**  y lo denotaremos por

$$h'(t_0) \quad \text{ó} \quad \frac{dh}{dt}(t_0).$$

Diremos que  $h$  es **derivable en  $(a, b)$**  si ella es derivable en cada punto de  $(a, b)$ .

*Observación 5.* Si llamamos  $\Delta t := t - t_0$  y  $\Delta h := h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)$ , podemos escribir

$$h'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta t}.$$

Lo anterior equivale a

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta h}{\Delta t} - h'(t_0) \right) = 0.$$

De aquí que, si definimos

$$R(t_0; \Delta t) := \Delta h - \Delta t \cdot h'(t_0),$$

entonces  $h$  es derivable en  $t_0$  si y sólo si

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t_0; \Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Finalmente, debemos notar que esto implica que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t_0; \Delta t) = 0,$$

lo que, a su vez, nos lleva a concluir que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta h = 0.$$

Esto es, **si  $h$  es derivable en  $t_0$ , también es continua ahí.**

Aunque hay mucho que decir sobre la derivada, para lo que buscamos es este trabajo, además de la observación anterior, nos basta con el siguiente resultado, conocido como **Teorema del Valor Medio (T.V.M.)** o **Teorema de los incrementos finitos de Lagrange**.

**TEOREMA 6.** *Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , siendo  $a < b$ . Entonces, existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que:*

$$(34) \quad \boxed{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)}.$$

Una demostración de este hecho se puede ver en cualquier buen libro de cálculo diferencial o uno de análisis matemático. Ver, por ejemplo, [9] o [12].

**3.3. La integral de Riemann y el Teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C.).** Primero damos la definición de la integral de Riemann de  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , para luego pasar a algunas propiedades de interés, y al Teorema Fundamental del Cálculo.

**Definición 7.** Una **partición del intervalo cerrado**  $[a, b]$  es un conjunto

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{l-1}, x_l\}$$

de puntos de  $[a, b]$  tales que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{l-1} < x_l = b.$$

**Definición 8.** Dada una función continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y una partición  $P$  de  $[a, b]$ , la Observación 4 implica que  $f$  alcanza su valor máximo y su valor mínimo en cada subintervalo de la partición dada. Así, si consideramos el subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , para  $i = 1, \dots, l$ , podemos definir los valores

$$m_i := \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad M_i := \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Definimos, además, la **suma inferior** y la **suma superior de  $f$  en  $[a, b]$  con respecto a la partición  $P$** , respectivamente, como

$$L_f(P) := \sum_{i=1}^l m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad U_f(P) := \sum_{i=1}^l M_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

**Observación 6.** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , existe sólo un número real  $I$  tal que

$$L_f(P) \leq I \leq U_f(P)$$

para todas las particiones  $P$  de  $[a, b]$ . Puede ver una demostración de este hecho en [9] o en [12].

Debido a esta observación, podemos dar la siguiente

**Definición 9.** Sea  $f$  continua en  $[a, b]$ . Al único número  $I$  que satisface

$$L_f(P) \leq I \leq U_f(P),$$

para todas las particiones  $P$  de  $[a, b]$ , lo llamaremos **la integral definida de  $f$  en  $[a, b]$** , y denotaremos este valor por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

*Observación 7.* La continuidad de una función es una condición suficiente para que el valor  $I$  de la definición anterior exista, pero no es necesaria. Es decir, hay funciones no continuas que cumplen con que existe un único número  $I$  que satisface

$$L_f(P) \leq I \leq U_f(P)$$

para todas las particiones  $P$  de  $[a, b]$ . A todas las funciones que satisfacen esto las llamaremos **funciones integrables en  $[a, b]$** , y denotaremos al conjunto de funciones integrables en  $[a, b]$  por  $\mathcal{R}([a, b])$ .

*Observación 8.* Algunas propiedades de esta integral son las siguientes. Sean  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$(i) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

$$(ii) \text{ Si } c \in [a, b], \text{ entonces } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$(iii) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

*Observación 9.* El concepto de integral se puede extender a funciones escalares de varias variables, es decir,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $n \geq 2$ . En este caso consideramos un conjunto adecuado  $A \in \mathbb{R}^n$ , llamamos a  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  integrable en  $A$  y denotamos a la integral de  $f$  sobre  $A$  por

$$\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{o} \quad \int_A f.$$

Las propiedades de la observación anterior también se cumplen en este caso, con algunas modificaciones para adaptarlas a  $\mathbb{R}^n$ . Para ver más detalles sobre este particular, remitimos al lector a [3, 5, 8].

Enunciamos ahora el **Teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C.)**. Una demostración de este puede ser vista en [9, 10, 12].

**TEOREMA 10. (T.F.C.)** Sea  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Si  $f$  es continua en  $t_0 \in (a, b)$ , entonces la función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

es derivable en  $t_0$ , y

$$F'(t_0) = f(t_0).$$

Terminamos esta subsección con el siguiente resultado conocido como **Teorema del Valor Medio para integrales**.

**TEOREMA 11.** Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces existe al menos un número  $c$  en  $(a, b)$  para el cual

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

*Demostración.* Aplique el T.V.M. y el T.F.C. a la función

$$F(t) := \int_a^t f(x) dx$$

en el intervalo  $[a, b]$ . □

### 3.4. Convergencia puntual y convergencia uniforme [\[10\]](#), [\[12\]](#).

**Definición 12.** Una sucesión de funciones  $\{h_k\}_k$ , siendo  $h_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , **converge puntualmente a la función**  $h : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en  $D$  si

$$h(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(\mathbf{x})$$

para cada  $\mathbf{x} \in D$ .

**Ejemplo 8.** La sucesión  $f_k(x) = \frac{x^{2k}}{1 + x^{2k}}$  converge puntualmente a

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| < 1, \\ 1/2, & \text{si } |x| = 1, \\ 1, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 13.** Una sucesión de funciones  $\{h_k\}_k$ , siendo  $h_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , **converge uniformemente a la función**  $h : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en  $D$  si, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $K \in \mathbb{N}$  (que sólo depende de  $\varepsilon$ ) tal que

$$|h_k(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})| < \varepsilon \text{ para todo } k \geq K$$

y para todo  $\mathbf{x} \in D$ .

**Ejemplo 9.** La sucesión de funciones  $h_k(x) = k^2 x e^{-kx}$  converge puntualmente, pero no uniformemente a  $h(x) = 0$  en el intervalo  $[0, \infty)$ . En intervalos de la forma  $[a, \infty)$  para  $a > 0$  la convergencia sí es uniforme.

*Observación 10.* Algunos resultados bien conocidos relacionados con este tipo de convergencia son los enunciados en la siguiente Proposición (ver [\[12\]](#)).

PROPOSICIÓN 14. Sea  $\{h_k\}_k$ , con  $h_k : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , una sucesión de funciones.

- (i) Si  $\{h_k\}_k$  converge uniformemente a  $h$  en  $D$ , entonces  $\{h_k(\mathbf{x})\}_k$  converge a  $h(\mathbf{x})$  para cada  $\mathbf{x} \in D$  (es decir,  $\{h_k\}_k$  converge puntualmente a  $f$ ).
- (ii) Si  $\{h_k\}_k$  converge uniformemente a  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  en  $D$  y cada  $h_k$  es continua en  $D$ , entonces  $h$  también lo es.
- (iii) **(Criterio de Cauchy)** Si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que

$$|h_k(\mathbf{x}) - h_m(\mathbf{x})| \leq \varepsilon \text{ siempre que } m, k \geq K \text{ y } \mathbf{x} \in D,$$

entonces  $\{h_k\}_k$  converge uniformemente a una función  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Para más ejemplos sobre sucesiones de funciones, remitimos al lector a [\[11\]](#).

Ahora mostramos un resultado que involucra el intercambio de un límite uniforme con la integral definida.

LEMA 15. Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto en  $\mathbb{R}^n$  con volumen  $V(A) \in [0, \infty)$ . Si  $\{h_k\}_k$  es una sucesión de funciones integrables en  $A \subset \mathbb{R}^n$  que convergen uniformemente a la función integrable  $h : A \rightarrow \mathbb{R}$  en  $A$ . Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A h_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_A \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

*Demostración.* Si  $V(A) = 0$ , entonces

$$\int_A h_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall k, \quad \text{y} \quad \int_A h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

por lo que la conclusión del Lema es evidente. Asumamos, entonces, que  $V(A) \neq 0$ .

Como  $\{h_k\}_k$  converge uniformemente a  $h$  en  $A$ , dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $\mathbf{x} \in A$ ,

$$|h_k(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{V(A)} \text{ siempre que } k \geq K,$$

donde  $V(A)$  representa el volumen de  $A$ , esto es,

$$V(A) = \int_A d\mathbf{x}.$$

Por otro lado, si  $k \geq K$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_A h_k(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_A h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_A (h_k(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \int_A |h_k(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \\ &\leq \int_A \frac{\varepsilon}{V(A)} \, d\mathbf{x} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto es precisamente lo que queríamos mostrar. □

#### 4. LA FÓRMULA DE LEIBNIZ

En esta Sección mostraremos un par de versiones de la, así llamada, fórmula de Leibniz.

##### 4.1. Fórmula de Leibniz: Primera Versión.

###### TEOREMA 16. (Fórmula de Leibniz: Primera Versión)

Sea  $f : A \times J \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, donde  $A$  es un conjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  y  $J$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Si  $\frac{\partial f}{\partial t}$  es uniformemente continua en  $A \times J$  y

$$g(t) := \int_A f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x},$$

entonces

$$(35) \quad \boxed{g'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}}.$$

*Demostración.* Notemos, en primer lugar, que, si  $\{t_k\}_k \in \mathbb{N}$  es una sucesión de números reales que tiene límite  $t$ , entonces

$$g'(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(t_k) - g(t)}{t_k - t}.$$

Ahora bien,

$$g(t_k) - g(t) = \int_A (f(\mathbf{x}, t_k) - f(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x}.$$

Además, si asumimos que  $t < t_k$  (el caso  $t > t_k$  se trata de manera similar), para cada  $\mathbf{x} \in A$  fijo, el T.V.M. implica que existe  $\tau_k(\mathbf{x}) \in (t, t_k)$ , tal que

$$f(\mathbf{x}, t_k) - f(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau_k(\mathbf{x})) \cdot (t_k - t).$$

Definamos

$$\varphi_k(\mathbf{x}) := \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau_k(\mathbf{x})) = \frac{f(\mathbf{x}, t_k) - f(\mathbf{x}, t)}{t_k - t}.$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial t}$  es uniformemente continua en  $A \times J$ , podemos decir que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , que sólo depende de  $\varepsilon$ , tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, \tilde{t}) - \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |t - \tilde{t}| < \varepsilon.$$

Además, como  $t_k \rightarrow t$ , para este mismo valor de  $\varepsilon$ , existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que

$$|t - t_k| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad k \geq K.$$

Por lo tanto, si  $k \geq K$  y  $\mathbf{x} \in A$  es arbitrario, se tiene que

$$(36) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t_k) - \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right| < \varepsilon.$$

Pero esto también es válido si en (36) escribimos  $\tau_k(\mathbf{x})$  en lugar de  $t_k$  (¡pues  $\tau_k(\mathbf{x}) \in (t, t_k)$ !), es decir,  $\forall \mathbf{x} \in A$ ,

$$(37) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau_k(\mathbf{x})) - \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad k \geq K.$$

Como  $\varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, \tau_k(\mathbf{x}))$ , lo anterior significa que  $\varphi_k(\mathbf{x})$  converge uniformemente a  $\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$  en  $A$ . Esto es

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$$

uniformemente en  $A$ . Debido a esto y al Lema 15 tenemos, finalmente, que

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dx &= \int_A \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\mathbf{x}) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \varphi_k(\mathbf{x}) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \left( \frac{f(\mathbf{x}, t_k) - f(\mathbf{x}, t)}{t_k - t} \right) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(t_k) - g(t)}{t_k - t} \\ &= g'(t). \end{aligned}$$

□

**4.2. Fórmula de Leibniz: Segunda Versión o versión general.** El siguiente Lema bien podría ser presentado como lo que más adelante llamaremos la versión general de la fórmula de Leibniz, porque es equivalente a esta. Sin embargo, preferimos presentarlo como un resultado previo.

LEMA 17. Sea  $f : A \times J \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, donde  $A$  es un conjunto acotado de  $\mathbb{R}$  y  $J$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Sea  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $J$ . Si definimos  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\varphi(t) := \int_a^{h(t)} f(x, t) dx,$$

y  $\frac{\partial f}{\partial t}$  es uniformemente continua en  $A \times J$ , entonces

$$(38) \quad \boxed{\varphi'(t) = f(h(t), t) \cdot h'(t) + \int_a^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx}.$$

*Demostración.* Consideremos la diferencia

$$\Delta\varphi := \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t),$$

que, por definición, es

$$\Delta\varphi = \int_0^{h(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx - \int_0^{h(t)} f(x, t) dx.$$

De la Observación 5 podemos escribir  $h(t + \Delta t) = h(t) + \Delta h$ , por lo cual

$$\begin{aligned} \int_0^{h(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx &= \int_0^{h(t)+\Delta h} f(x, t + \Delta t) dx \\ &= \int_0^{h(t)} f(x, t + \Delta t) dx + \int_{h(t)}^{h(t)+\Delta h} f(x, t + \Delta t) dx. \end{aligned}$$

Luego,

$$\Delta\varphi = \int_0^{h(t)} (f(x, t + \Delta t) - f(x, t)) dx + \int_{h(t)}^{h(t)+\Delta h} f(x, t + \Delta t) dx.$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \int_0^{h(t)} \left( \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} \right) dx + \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{h(t)}^{h(t)+\Delta h} f(x, t + \Delta t) dx.$$

Por un lado, la continuidad uniforme de  $\frac{\partial f}{\partial t}$  en  $A \times J$  nos permite usar un argumento similar al dado en la demostración del Teorema 16 para escribir

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{h(t)} \left( \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} \right) dx &= \int_0^{h(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} \right) dx \\ &= \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, el Teorema del Valor Medio para integrales (Teorema 11) implica que existe  $\xi \in (h(t), h(t) + \Delta h)$  tal que

$$\int_{h(t)}^{h(t)+\Delta h} f(x, t + \Delta t) dx = f(\xi, t + \Delta t) \cdot \Delta h,$$

así que

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{h(t)}^{h(t)+\Delta h} f(x, t + \Delta t) dx = f(\xi, t + \Delta t) \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t}.$$

Finalmente, como  $\Delta h \rightarrow 0$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , entonces

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \xi = h(t).$$

Por lo tanto, debido a lo anterior y a la continuidad de  $f$ , tenemos que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{h(t)}^{h(t)+\Delta h} f(x, t + \Delta t) dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( f(\xi, t + \Delta t) \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t} \right) = f(h(t), t) \cdot h'(t).$$

En conclusión,

$$\varphi'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + f(h(t), t) \cdot h'(t),$$

tal como queríamos.  $\square$

El Lema recién demostrado implica la segunda versión de la fórmula de Leibniz, que corresponde a la generalización de la primera versión.

**TEOREMA 18. (Fórmula de Leibniz: Segunda Versión)**

Sea  $f : A \times J \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, donde  $A$  es un conjunto acotado de  $\mathbb{R}$  y  $J$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Sean  $g, h : J \rightarrow \mathbb{R}$  funciones derivables en  $J$ . Si definimos  $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\phi(t) := \int_{g(t)}^{h(t)} f(x, t) dx,$$

y  $\frac{\partial f}{\partial t}$  es uniformemente continua en  $A \times J$ , entonces

$$(39) \quad \phi'(t) = f(h(t), t) \cdot h'(t) - f(g(t), t) \cdot g'(t) + \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

*Demostración.* Basta con notar que

$$\phi(t) = \int_a^{h(t)} f(x, t) dx - \int_a^{g(t)} f(x, t) dx$$

y con usar la fórmula (38) del Lema 17.

□

## 5. ALGUNAS OBSERVACIONES FINALES

Habiendo considerado ejemplos prácticos y la base teórica que respalda la aplicación del método en todos estos ejemplos, siempre surge la pregunta **¿cuándo conviene o no aplicar el método?**

Con el fin de tratar de responder a esta cuestión, damos algunas observaciones que son importantes al momento de considerar este método.

*Observación 11.* En primer lugar debemos decir que, si la integral considerada puede resolverse por los métodos tradicionales (cambio de variable, integración por partes, etc), suele ser conveniente usar dichos métodos. Por ejemplo, la integral

$$I(k) := \int_0^1 (2x + k^3)^2 dx$$

puede calcularse usando el método de derivación bajo el signo de integral. Sin embargo, es bastante claro que la misma puede calcularse por medio de un cálculo directo. Dejamos al lector los cálculos usando ambas vías.

*Observación 12.* La primera dificultad que suele encontrarse en el uso de este método es decidir dónde introducir el parámetro con respecto al cual vamos a derivar. El no decidir adecuadamente sobre este tema es una de las principales limitantes del método.

Otra limitante se encuentra en las condiciones de los teoremas 16 y 18. El no tener cuidado en la verificación de estas condiciones, puede llevar a resultados incorrectos. Como ejemplo, si consideramos

$$f(x, t) := \begin{cases} \frac{2t^3 x}{(t^2 + x^2)^2}, & \text{si } x \neq 0 \text{ o } t \neq 0, \\ 0, & \text{si } (x, t) = (0, 0). \end{cases}$$

No es difícil ver que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) := \begin{cases} 2t^2 x \cdot \frac{3x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^3}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

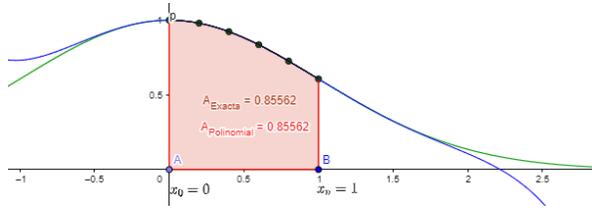


FIGURA 2. Área bajo la curva y aproximación usando Newton-Côtes.

por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0$$

sin importar el valor de  $x$ . Luego,

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \Big|_{t=0} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) dx = 0.$$

Por otro lado,

$$\int_0^1 f(x, t) dx = \frac{t}{t^2 + 1} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^1 f(x, t) dx \right) = \frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^1 f(x, t) dx \right) \Big|_{t=0} = 1.$$

Es decir, **la igualdad**

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^1 f(x, t) dx \right)$$

**no es cierta en  $t = 0$ .** De manera que el método no es válido acá. El problema está en el hecho de que  $f$  no satisface la propiedad de continuidad uniforme en ningún entorno del origen y, si usamos el método acá, estaríamos asumiendo (erróneamente) que sí lo hace.

*Observación 13.* Aunque no es el tema a tratar en este artículo, es importante mencionar que existen métodos numéricos que permiten realizar aproximaciones de este tipo de integrales. En la Figura 2 se puede ver el área bajo la curva en el intervalo  $[0, 1]$  y una aproximación dada por el método de Newton-Côtes con  $n = 5$ , correspondiente al Ejemplo 2. Este  $n$  representa la cantidad de subintervalos iguales en los que se divide el intervalo en el que se está integrando, así como el grado del polinomio interpolador que aproxima a la función dada. Para más detalles con respecto a este y otros métodos numéricos, referimos al lector a [1, 2].

Haciendo [click aquí](#) puede ver una implementación del método de Newton-Côtes en geogebra, con el cual el lector puede jugar un poco, cambiando los intervalos, el valor de  $n$ , y la función considerada, de manera que esta implementación puede ser usada para este y algunos de los otros ejemplos. Además, se tiene una representación geométrica de la situación presentada en cada caso. Animamos al lector a usarlo.

## 6. IDEAS DE IMPLEMENTACIÓN EN CLASES

Esta Sección va dirigida a los docentes interesados en enseñar esta herramienta en sus clases.

Algunas de las formas en que se puede implementar la enseñanza del truco favorito de Feynman, pueden ser las siguientes:

- (1) En primer lugar, sugerimos que, sea cual fuere la manera en que se vaya a desarrollar el método, y a manera de motivación, este sea introducido por medio de un pequeño recuento histórico, presentando algunas integrales que resulten complicadas de calcular por otras vías.

- (2) Se puede aprovechar esta introducción para retar a los estudiantes para que resuelvan alguno de los ejemplos exhibidos usando las herramientas que manejan, de manera que entiendan de primera mano la limitación de dichas herramientas.
- (3) Una motivación adicional para el uso del truco favorito de Feynman es la implementación de competencias de resolución de integrales con participantes de la escuela, de la facultad, o de toda la universidad que estén interesados en participar en este tipo de eventos. Para ello se sugiere dividir la competencia en varias etapas. Para avanzar a la siguiente etapa se debe alcanzar un puntaje mínimo. La etapa subsiguiente debe ser más compleja que la anterior, y en la o las últimas etapas se deberían incluir integrales que se resuelvan usando el truco favorito de Feynman. Finalmente, los mejores participantes deberían ser premiados con certificados u otros premios, mientras que todos los participantes deberían recibir un certificado de participación. Esto último con el fin de fomentar la mayor participación posible.

El punto (3) anterior puede servir como un proyecto de vinculación con la sociedad, en el que participen varios docentes y estudiantes avanzados, para poder cumplir con el requisito de participación en proyectos vinculados con la comunidad que se tiene en algunos países para culminar sus estudios.

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo exhibimos el, así llamado, truco favorito de Feynman. Este es un método que consiste en el uso de la fórmula de Leibniz, fórmula que permite realizar derivación bajo el signo de integral.

También mostramos algunos ejemplos que ilustran cómo se usa esta herramienta y su versatilidad. En estos ejemplos queda en evidencia la necesidad de manejar algunos temas básicos del cálculo diferencial e integral, así como de ecuaciones diferenciales ordinarias. De aquí que derivar bajo el signo de integral, aunque útil, no es suficiente por sí solo.

Esperamos que con esta contribución se tenga una referencia de calidad, en el idioma español, que sirva de ayuda a los lectores interesados en usar esta herramienta.

Pretendemos que este sea el punto de partida de una colección de trabajos divulgativos que busquen rescatar herramientas útiles, pero ampliamente desconocidas y hasta olvidadas, del cálculo avanzado.

**AGRADECIMIENTOS.** Queremos agradecer las muy acertadas observaciones del árbitro. Su trabajo fue muy valioso para mejorar en muchos aspectos este manuscrito y, en particular, fue de gran ayuda en la detección de los errores presentados a lo largo del documento. Todo ello permitió darle una dimensión distinta a esta contribución.

## 8. APÉNDICE: SOLUCIÓN FORMAL DE ALGUNOS EJEMPLOS

**Ejemplo 10.** Calculemos la integral

$$(40) \quad I(a) := \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

Para calcular esta integral, bien pudierámos usar el truco de Feynman de derivación bajo el signo de integral de forma directa, esto es, usando la integral impropia. Sin embargo, estaríamos considerando el conjunto  $[0, \infty)$ , que no es acotado, lo que no cumple con la condición de acotamiento requerida para este conjunto en las versiones enunciadas de la fórmula de Leibniz. Así que vamos a considerar la integral

$$I(a, b) := \int_0^b \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx,$$

siendo  $b$  un número real positivo, lo cual hace que el conjunto  $A = [0, b]$  sí sea acotado, y después usaremos el hecho de que

$$I(a) = \lim_{b \rightarrow \infty} I(a, b)$$

para así obtener  $I(a)$ . Además de cumplir con la condición de acotamiento recién mencionada, es claro que tanto  $f(x, a) = \frac{1}{x^2 + a^2}$  es continua y  $\frac{\partial f}{\partial a}$  es uniformemente continua en  $A \times J$ , para  $J$  cerrado y acotado (vea la Observación 3). Por lo que es posible usar cualquiera de las versiones de la fórmula de Leibniz, esto es, derivar bajo el signo de integral.

Para resolver este ejemplo, comencemos definiendo

$$(41) \quad F(a) := \int_0^b \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

y recordando que

$$(42) \quad F(a) = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Así, al derivar (41) bajo el signo de integral, tenemos que

$$(43) \quad \frac{dF}{da}(a) = \int_0^b \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{x^2 + a^2} \right) dx = \int_0^b \frac{-2a}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

Por otro lado, de (42), resulta que

$$\frac{dF}{da}(a) = \frac{d}{da} \left( \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \right) = \frac{-1}{a^2} \cdot \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{a} \cdot \frac{-b/a^2}{1 + (b/a)^2},$$

i.e.,

$$(44) \quad \frac{dF}{da}(a) = \frac{-1}{a^2} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Igualando (43) y (44), tenemos

$$\int_0^b \frac{-2a}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{-1}{a^2} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{a^2 + b^2},$$

de donde

$$(45) \quad I(a, b) = \int_0^b \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2a^3} \cdot \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Finalmente, tenemos que

$$(46) \quad \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} I(a, b) = \frac{1}{2a^3} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2a^2} \cdot 0 = \frac{\pi}{4a^3},$$

puesto que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left( \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = 0.$$

La fórmula (46) es precisamente lo que queríamos calcular.

Notemos que, al no proceder directamente con la integral impropia, ganamos dos cosas: Primero, hubo más formalidad en el cálculo (lo cual evita cometer algún error por no garantizar que se cumplan las condiciones para derivar bajo el signo de integral) y, segundo, obtuvimos la fórmula (45), una fórmula más general que puede usarse para otros fines.

Como comentario final sobre este ejemplo, queremos decir que, aparentemente, el método de fracciones simples puede ayudarnos a realizar este mismo cálculo, sin

embargo, no es así. Animamos al lector a que trate de usar fracciones simples y se convenza de que dicho método no funciona en el presente ejemplo.

**Ejemplo 11.** Si queremos formalizar el cálculo del Ejemplo 3, podemos proceder como sigue: Sea

$$(47) \quad I(t, b) := \int_0^b \cos(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad b > 0,$$

y notemos que

$$(48) \quad I = \lim_{b \rightarrow \infty} I(1, b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Notemos, además, que

$$(49) \quad I(0, b) = \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \implies \lim_{b \rightarrow \infty} I(0, b) = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Derivando (47) bajo el signo de integral, tenemos que

$$\frac{dI}{dt}(t, b) = \int_0^b \frac{\partial}{\partial t} \left( \cos(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = \int_0^b -x \operatorname{sen}(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Integrando por partes, con

$$u = \operatorname{sen}(tx) \quad \text{y} \quad dv = -xe^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

se tiene que

$$du = t \cos(tx) dx \quad \text{y} \quad v = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

por lo que

$$\frac{dI}{dt}(t, b) = \left( \operatorname{sen}(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \Big|_0^b - \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot t \cos(tx) dx,$$

es decir,

$$\frac{dI}{dt}(t, b) = \operatorname{sen}(tb) \cdot e^{-\frac{b^2}{2}} - t \cdot \int_0^b \cos(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \operatorname{sen}(tb) \cdot e^{-\frac{b^2}{2}} - t \cdot I(t, b).$$

Si fijamos  $b$ , y llamamos  $F(t) := I(t, b)$ , lo anterior se puede reescribir como

$$(50) \quad F'(t) + t \cdot F(t) = \operatorname{sen}(tb) \cdot e^{-\frac{b^2}{2}}.$$

Esto no es más que una ecuación diferencial lineal de primer orden, que se puede resolver fácilmente introduciendo un factor integrante (a saber, el factor integrante  $\mu(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ ). Teniendo en cuenta que se cumple la condición inicial

$$F(0) = I(0, b) = \int_0^b e^{-x^2} dx,$$

la solución de (50) es, entonces,

$$(51) \quad I(t, b) = F(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \left( \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + e^{-\frac{b^2}{2}} \cdot \int_0^t e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{sen}(bx) dx \right).$$

Teniendo en cuenta que (ver el ítem (iii) de la Observación 8)

$$\left| \int_0^t e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{sen}(bx) dx \right| \leq \int_0^t \left| e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{sen}(bx) \right| dx \leq \int_0^t e^{\frac{x^2}{2}} dx < \infty,$$

y que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-\frac{b^2}{2}} = 0,$$

si ahora tomamos  $b \rightarrow \infty$  en (51), resulta que

$$I(t) = \int_0^\infty \cos(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} I(t, b) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Esto es,

$$(52) \quad \boxed{\int_0^\infty \cos(tx) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}},$$

que es exactamente lo mismo que obtuvimos en (18).

### 9. EJERCICIOS

EJERCICIO 1. Muestre el resultado obtenido en el Ejemplo 1 usando un cambio de variable trigonométrico adecuado.

EJERCICIO 2. Muestre que

$$(53) \quad \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^3} dx = \frac{3\pi}{16a^5}$$

derivando bajo el signo de integral en la fórmula (4) obtenida en el Ejemplo 1. Calcule también la integral

$$(54) \quad \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^4} dx.$$

¿Reconoce algún patrón? Si es así, ¡escríbalo!

EJERCICIO 3. Escriba los detalles formales de los demás ejemplos considerados en la Sección 2.

EJERCICIO 4. Calcule las integrales siguientes, usando la herramienta presentada en este documento:

$$a) I(a) := \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx. \quad b) I(b) := \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \cdot \operatorname{sen} bx}{x} dx, a \geq 0.$$

$$c) I(a) := \int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx. \quad d) I(a) := \int_0^\infty \ln\left(\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}\right) dx.$$

$$e) I(a) := \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx. \quad f) I(a) := \int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) \ln x dx.$$

$$g) I(a) := \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x^2 e^x} dx. \quad h) I := \int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx.$$

### REFERENCIAS

[1] Burden, R., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2011). Análisis numérico, Cengage Learning.  
 [2] del Río, J. A. I., & Cabezas, J. M. R. (2022). Métodos numéricos: teoría, problemas y prácticas con MATLAB. Comercial Grupo ANAYA, SA.  
 [3] Edwards, C. H. (2012). Advanced calculus of several variables. Courier Corporation.  
 [4] Feynman, R. P., & Sackett, P. D. (1985). "Surely You're Joking Mr. Feynman!" Adventures of a Curious Character. American Journal of Physics, 53(12), 1214-1216.  
 [5] Marsden, J. E., Tromba, A. J., & Mateos, M. L. (1991). Cálculo vectorial (Vol. 69). México: Addison-Wesley Iberoamericana.  
 [6] Muñoz, J. M. S., & Valdés, P. S. (2022). La técnica de Feynman de derivación bajo el signo integral. *Lecturas matemáticas*, 43(1), 5-22.  
 [7] Nahin, P. J. (2020). Inside Interesting Integrals: A Collection of Sneaky Tricks, Sly Substitutions, and Numerous Other Stupendously Clever, Awesomely Wicked, and Devilishly Seductive Maneuvers for Computing Hundreds of Perplexing Definite Integrals From Physics, Engineering, and Mathematics (Plus Numerous Challenge Problems with Complete, Detailed Solutions). Springer Nature.  
 [8] Ruiz, C. P., & de Jesús, C. (1995). Cálculo vectorial. Prentice-Hall Hispanoamericana.

- [9] Salas, S. L., Etgen, G. J., & Hille, E. (1999). Salas and Hille's calculus: One and several variables. Wiley.
- [10] Stromberg, K. R. (2015). An introduction to classical real analysis (Vol. 376). American Mathematical Soc.
- [11] Takeuchi, Y. (1976). Sucesiones y series (No. 515.24 515.24 T136s). Limusa.
- [12] Tineo, A. & Uzcátegui, C. Introducción al análisis real. [http://www.ciencias.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/libro\\_analisis1\\_marzo2006.pdf](http://www.ciencias.ula.ve/matematica/publicaciones/guias/libro_analisis1_marzo2006.pdf)
- [13] Woods, F. S. (1934). Advanced calculus.

*Eusebio Ariza García*

Universidad Yachay Tech,  
Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales,  
Departamento de Matemáticas.  
Urcuquí, Imbabura, Ecuador.  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7754-2666>  
e-mail: [eariza@yachaytech.edu.ec](mailto:eariza@yachaytech.edu.ec)

*Luis Arteaga*

Universidad Yachay Tech,  
Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales,  
Departamento de Matemáticas.  
Urcuquí, Imbabura, Ecuador.  
e-mail: [luis.arteaga@yachaytech.edu.ec](mailto:luis.arteaga@yachaytech.edu.ec)

*Jhon Duta*

Universidad Yachay Tech,  
Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales,  
Departamento de Matemáticas.  
Urcuquí, Imbabura, Ecuador.  
e-mail: [jhon.duta@yachaytech.edu.ec](mailto:jhon.duta@yachaytech.edu.ec)

*Edwin Hurtado*

Universidad Yachay Tech,  
Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales,  
Departamento de Matemáticas.  
Urcuquí, Imbabura, Ecuador.  
e-mail: [edwin.hurtado@yachaytech.edu.ec](mailto:edwin.hurtado@yachaytech.edu.ec)

*Ray Moya*

Universidad Yachay Tech,  
Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales,  
Departamento de Matemáticas.  
Urcuquí, Imbabura, Ecuador.  
e-mail: [ray.moya@yachaytech.edu.ec](mailto:ray.moya@yachaytech.edu.ec)

*Manuel Muñoz*

Universidad Yachay Tech,  
Escuela de Ciencias Matemáticas y Computacionales,  
Departamento de Matemáticas.  
Urcuquí, Imbabura, Ecuador.  
e-mail: [manuel.munoz@yachaytech.edu.ec](mailto:manuel.munoz@yachaytech.edu.ec)

## ON THE COEFFICIENTS OF THE POLYNOMIAL INDUCED BY RECIPROCAL ROOTS REVISITED

JORGE E. MACÍAS-DÍAZ AND BRIAN VILLEGAS-VILLALPANDO

**ABSTRACT.** Consider a polynomial  $P$  with complex coefficients and nonzero roots. What is the relation between the coefficients of  $P$ , and those of the polynomial  $\bar{P}$  whose roots are reciprocal of the roots of  $P$ ? Is it possible to express the coefficients of  $\bar{P}$  through a formula which depends on the coefficients of  $P$ ? The purpose of this note is to revisit this problem and respond affirmatively to these questions. Some examples will be provided for illustration purposes and as a motivation for this communication.

Let us consider a polynomial  $P$  with coefficients in the complex numbers. For the sake of concreteness, let us assume that  $P(z) = 2 + 3z + z^2$ . This polynomial has  $r_1 = -1$  and  $r_2 = -2$  as its only roots. Define  $\bar{r}_i$  as the reciprocal of  $r_i$ , for each  $i = 1, 2$ . Obviously,  $\bar{r}_1 = -1$  and  $\bar{r}_2 = -\frac{1}{2}$ , and it is easy to check that the polynomial with roots  $\bar{r}_1$  and  $\bar{r}_2$  is given by  $\bar{P}(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}z + z^2$ . A natural question is whether there exists a relation between the coefficients of  $P$  and those of  $\bar{P}$ . The purpose of the present note is to respond this question affirmatively. To that end, we will revisit a result from the theory of polynomials, and we will establish it in its most general form, which will include the case when 0 is a root of the polynomial  $P$ .

For the remainder of this communication,  $P$  will represent a non-constant polynomial  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ , where  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Recall that the degree of  $P$  is the largest integer  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  such that  $a_N \neq 0$ . In this case,  $a_N$  is the *leading coefficient* of  $P$ . A *root* of the polynomial  $P$  is some  $r \in \mathbb{C}$  for which  $P(r) = 0$ . If  $r \in \mathbb{C}$  is a root of  $P$ , then we say that it has *multiplicity*  $m \in \mathbb{N}$  if

$$P(z) = (z - r)^m Q(z),$$

where  $Q$  is a complex polynomial such that  $Q(r) \neq 0$ .

It is well known that non-constant polynomials with coefficients in the complex numbers possess complex roots. More precisely, the following is a standard result in algebra and the theory of polynomials.

**THEOREM 1** (Fundamental Theorem of Algebra [2]). *If  $P$  is a polynomial of degree  $n \in \mathbb{N}$  with coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ , then the polynomial equation*

$$P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j = 0$$

*has at least one solution  $z \in \mathbb{C}$ . Moreover, there exists exactly  $n$  complex numbers  $r_1, \dots, r_n$ , such that  $P(z) = a_n(z - r_1) \dots (z - r_n)$ .*

In order to prove the main result of this work, we will need to make use of elementary symmetric polynomials. Recall that the  $k$ -th *elementary symmetric polynomial* in  $n$  complex variables  $z_1, \dots, z_n$  is the polynomial  $S_k : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  given by

$$S_k(z_1, \dots, z_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} z_{j_1} \dots z_{j_k},$$

where  $1 \leq k \leq n$  and  $S_0(z_1, \dots, z_n) = 1$  (see [1]).

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11A51, 11D45, 11R04, 11R11, 11R29.

*Key words.* polynomial roots, elementary symmetric polynomials, fundamental theorem of algebra.

The following technical result will be required in the sequel. The proof of this result is based on Proposition V.8.4 in [1].

LEMMA 2. *Let  $P$  be a polynomial of degree  $n \in \mathbb{N}$ , with coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  and roots  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ . If  $0 \leq k \leq n$ , then*

$$S_{n-k}(r_1, \dots, r_n) = (-1)^{n-k} \frac{a_k}{a_n}.$$

*Proof.* We know that  $P(z) = a_n(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)$  from the Fundamental Theorem of Algebra. So, it suffices to prove that the following equation holds:

$$(1) \quad P(z) = a_n \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} S_{n-j}(r_1, \dots, r_n) z^j, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

To do this, we expand  $(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)$  algebraically. The result is a sum of terms of the form  $t_1 t_2 \cdots t_n$ , where  $t_j = z$  or  $t_j = -r_j$ , for each  $j = 1, \dots, n$ . Let  $1 \leq j \leq n$ , and consider a term  $t_1 t_2 \cdots t_n$  in which  $t_i = -r_i$  appears exactly  $j$  times. It follows that  $t_1 t_2 \cdots t_n = (-1)^j r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_j} z^{n-j}$ , where  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n$ . When adding together all of these terms, we obtain  $(-1)^j S_j(r_1, \dots, r_n) z^{n-j}$ , for each  $1 \leq j \leq n$ , whence it follows that

$$P(z) = a_n \sum_{j=0}^n (-1)^j S_j(r_1, \dots, r_n) z^{n-j}.$$

Equation (1) is reached now after a change of variable. □

The following is the main result of this work.

THEOREM 3. *Let  $P$  be a polynomial of degree  $n \in \mathbb{N}$ , coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  and roots  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ . Define the complex polynomial  $\bar{P}$  as follows:*

- (1) *The degree of  $\bar{P}$  is equal to  $n$ , and  $a_n$  is its leading coefficient.*
- (2) *If  $r_i \neq 0$ , then  $\bar{r}_i := \frac{1}{r_i}$  is one of its roots.*
- (3) *If  $r_i = 0$ , then  $\bar{r}_i := r_i$  is one of its roots.*

*If  $m$  is the number of roots equal to zero, then*

$$\bar{P}(z) = a_n \sum_{j=0}^{n-m} \frac{a_{n-j}}{a_m} z^{m+j}.$$

*This polynomial will be called the polynomial induced by the reciprocal roots of  $P$ , and it is unique up to the multiplication by a nonzero complex constant.*

*Proof.* Let  $b_0, b_1, \dots, b_n$  be the coefficients of the polynomial  $\bar{P}$ , where  $b_n$  is the leading coefficient. The proof will consider two cases.

- **Case 1.** Assume firstly that all the roots are nonzero. Hence,

$$\begin{aligned} S_{n-k}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n} \bar{r}_{j_1} \cdots \bar{r}_{j_{n-k}} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n} \frac{1}{r_{j_1}} \cdots \frac{1}{r_{j_{n-k}}}. \end{aligned}$$

To calculate the right-hand side of this equation observe that

$$\begin{aligned} S_{n-k}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) &= \frac{1}{r_1 \cdots r_n} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} r_{j_1} \cdots r_{j_k} \\ &= \frac{S_k(r_1, \dots, r_n)}{S_n(r_1, \dots, r_n)}. \end{aligned}$$

The conclusion in this case is reached now using Lemma 2 and noticing that

$$b_k = a_n(-1)^{n-k} \frac{S_k(r_1, \dots, r_n)}{S_n(r_1, \dots, r_n)} = a_n \frac{a_{n-k}}{a_0},$$

for each  $0 \leq k \leq n$ .

- **Case 2.** Suppose now that there are  $0 < m < n$  roots which are equal to zero. Without lost generality, assume that  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_q$  are the nonzero roots, where  $q = n - m$ . Since zero has multiplicity equal to  $m$ , then there is a complex polynomial  $Q$  of degree  $q$  with leading coefficient equal to 1, such that  $Q(0) \neq 0$ . If  $c_0, \dots, c_n$  are the coefficients of  $Q$ , then  $a_{m+j} = a_n c_j$ , for each  $0 \leq j \leq q$ . Moreover, if  $\bar{Q}$  is the polynomial induced by the reciprocal roots of  $Q$ , then

$$\bar{P}(z) = a_n z^m \bar{Q}(z) = a_n \sum_{j=0}^q (-1)^{q-j} S_{q-j}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_q) z^{m+j},$$

where the roots of  $\bar{Q}$  are  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_q$ . Applying the first result to  $Q$ , then

$$\bar{P}(z) = a_n \sum_{j=0}^q \frac{c_{q-j}}{c_0} z^{m+j} = a_n \sum_{j=0}^{n-m} \frac{a_{n-j}}{a_m} z^{m+j}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Notice finally that (1) holds for  $m = n$ . □

It is important to point out a convenient simplification in the expression of the polynomial  $\bar{P}$  in the conclusion of Theorem 3 when none of the roots of  $P$  is equal to zero. The result is provided in the next corollary.

**COROLLARY 4.** *Let  $P$  be a polynomial of degree  $n \in \mathbb{N}$ , with complex coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  and roots  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Then a polynomial whose roots are the reciprocals of  $r_1, \dots, r_n$  is given by*

$$Q(z) = a_n + a_{n-1}z + \dots + a_0z^n.$$

*Proof.* Under the hypotheses of this corollary, zero is a root of multiplicity  $m = 0$ . Theorem 3 implies that the polynomial induced by the reciprocal roots of  $P$  is

$$(2) \quad \bar{P}(z) = \frac{a_n}{a_0} \sum_{j=0}^n a_{n-j} z^j.$$

Observe that  $a_n/a_0$  is a nonzero constant. This implies that  $Q(z) = \frac{a_0}{a_n} \bar{P}(z)$  has the same roots as  $\bar{P}$ , whence the conclusion of this result readily follows. □

Before we close this work, we provide a couple of applications of Theorem 3.

**Example 5.** Consider the polynomial  $P(z) = 2 + z + 2z^2 + z^3$ , whose roots are  $r_1 = -2$ ,  $r_2 = i$  and  $r_3 = -i$ . Observe that the reciprocal roots are  $\bar{r}_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $\bar{r}_2 = -i$  and  $\bar{r}_3 = i$ . It follows that the polynomial induced by the reciprocal roots of  $P$  is

$$\bar{P}(z) = \frac{1}{2} + z + \frac{1}{2}z^2 + z^3.$$

On the other hand, following the notation used in this work, we have  $n = 3$ ,  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  and  $a_3 = 1$ . Moreover, zero is a root of multiplicity  $m = 0$  for  $P$ . The conclusion of Theorem 3 states that

$$\bar{P}(z) = \frac{a_3}{a_0} \sum_{j=0}^3 a_{3-j} z^j = \frac{1}{2} (1 + 2z + z^2 + 2z^3).$$

Obviously, both results for  $\bar{P}(z)$  agree in this example. Moreover, multiplying  $\bar{P}(z)$  by the nonzero constant 2, we obtain that  $Q(z) = 1 + 2z + z^2 + 2z^3$  is a polynomial whose

roots are the reciprocal of the roots of  $P(z)$ . This result agrees with the conclusion of Corollary 4, as expected.

**Example 6.** We consider next the polynomial  $P(z) = z^2 + z^4$ , which has 0,  $i$  and  $-i$  as its only roots. Moreover, zero is a root of multiplicity  $m = 2$ . In this example, the coefficients of  $P$  are  $a_0 = a_1 = a_3 = 0$  and  $a_2 = a_4 = 1$ . According to Theorem 3, the polynomial induced by the reciprocal roots of  $P$  is

$$\bar{P}(z) = a_4 \sum_{j=0}^n \frac{a_{4-j}}{a_2} z^{2+j} = z^2 + z^4.$$

On the other hand, we can calculate the polynomial whose roots are the reciprocals of  $i$  and  $-i$ , and which has 0 as a root of multiplicity 2. It is clear that the result agrees with the polynomial  $\bar{P}(z)$ , as expected.

#### REFERENCES

- [1] Grillet, P. A. (2007). *Abstract Algebra* (Vol. 242). Springer Science & Business Media.
- [2] Lang, S. (2012). *Algebra* (Vol. 211). Springer Science & Business Media.

*Jorge E. Macías-Díaz*

Tallinn University,  
School of Digital Technologies,  
Department of Mathematics and Didactics of Mathematics,  
Narva mnt 25, 10120 Tallinn, Estonia  
e-mail: [jorge.macias\\_diaz@tlu.ee](mailto:jorge.macias_diaz@tlu.ee)

Universidad Autónoma de Aguascalientes,  
Departamento de Matemáticas y Física,  
Av. Universidad 940, Cd. Universitaria  
Aguascalientes, Ags., C.P. 20100, México  
e-mail: [jorge.maciasdiaz@edu.uaa.mx](mailto:jorge.maciasdiaz@edu.uaa.mx)

*Brian Villegas-Villalpando*

Universidad Autónoma de Aguascalientes,  
Centro de Ciencias Básicas,  
Av. Universidad 940, Cd. Universitaria  
Aguascalientes, Ags., C.P. 20100, México  
e-mail: [brvillea@gmail.com](mailto:brvillea@gmail.com)

## EL MOVIMIENTO BROWNIANO

DAVID MÁRQUEZ-CARRERAS

RESUMEN. El objetivo de este trabajo es introducir el movimiento Browniano a estudiantes que han finalizado los estudios de matemáticas, estadística o ciertas ingenierías. El motivo de estudiar el movimiento Browniano es porque es un proceso muy importante dentro de las matemáticas, y del cálculo estocástico en particular. El estudio abarca la definición matemática del movimiento, su construcción y sus propiedades más importantes. Además, se darán algunas de las aplicaciones más comunes en las matemáticas y también una aplicación a la física y otra a la economía.

El artículo consta en primer lugar de una introducción histórica. Una segunda sección está dedicada a introducir los conceptos fundamentales de la teoría de la probabilidad necesarios para comprender el artículo. Las secciones siguientes tratan sobre el propio movimiento Browniano, sus propiedades trayectoriales y algunas aplicaciones.

**A Josep Márquez Vanrell, un pare molt especial.** *Dedico este trabajo a mi padre, por su bondad y generosidad, por su amor, por sus valores, por muchísimas otras razones que siempre estarán en mi corazón, y una muy importante; por el interés que tenía en aprender y que me transmitió.*

### 1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

El movimiento Browniano es una herramienta muy importante para distintas ciencias como la matemática, la física, la economía y la ingeniería, entre otras. En este artículo me centraré en el punto de vista particular del cálculo estocástico y en algunas aplicaciones que tiene el movimiento Browniano en este campo.

La historia empieza alrededor de 1820, cuando el médico, biólogo y botánico Robert Brown realizó una serie de observaciones con el microscopio del movimiento de pequeñas partículas contenidas en el polen de ciertas plantas cuando éstas estaban en suspensión en agua. Observó que el movimiento era muy irregular y lo describió en un artículo en 1828 [5]. Después de hacer muchas más observaciones creyó haber descubierto la presencia de moléculas *activas* en cuerpos orgánicos e inorgánicos. Muchos científicos intentaron posteriormente interpretar este extraño fenómeno. Se estableció empíricamente que el movimiento era más rápido si: las partículas eran más pequeñas, se aumentaba la temperatura o se disminuía la viscosidad del líquido. No fue hasta finales del siglo XIX que se descubrió el verdadero motivo que causaba este movimiento: el gran número de choques de las partículas en suspensión con las moléculas del líquido.

Aunque otros científicos han pasado a la posteridad como descubridores del movimiento Browniano, creo que es justo comentar a T.N. Thiele quien describió este movimiento a finales del siglo XIX y, sobretodo, a Louis Bachelier quien en 1900 también lo describe y lo aplica a las finanzas en su tesis doctoral *Théorie de la Spéculation* [2].

De manera aparentemente independiente, Albert Einstein [9] en 1905 plasmó una teoría y unos resultados cuantitativos sobre el movimiento Browniano. Aun dando un marco matemático poco riguroso, Einstein resolvió básicamente el problema físico del

---

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 60J65; Secondary 60H05, 60H07, 60H10.

*Palabras clave*. Movimiento Browniano. Historia, construcción y propiedades. Integral de Itô. Fórmula de Itô. Ecuaciones diferenciales estocásticas. Movimiento de partículas en un fluido. Modelo de Black y Sholes.

movimiento. El marco físico-matemático propuesto por Einstein es el siguiente. Sea  $u(t, x)$ , para  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \geq 0$ , la densidad de granos de polen por unidad de volumen en el instante  $t$  y en el punto  $x$ . Entonces,  $u(t, x)$  también podría interpretarse como la probabilidad que una partícula se encuentre en el punto  $x$  en el instante  $t$ . Asumiendo ciertas hipótesis, Einstein dedujo la ecuación diferencial (aproximada) siguiente para la función  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u, \quad t > 0,$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace y  $D$  es una constante positiva llamada el coeficiente de difusión. Esta ecuación es precisamente la *ecuación del calor* que satisface la temperatura. Este resultado fue obtenido también por Bachelier pero su trabajo pasó desapercibido en aquella época. Si suponemos que en el momento inicial la partícula se encuentra en un punto  $y \in \mathbb{R}^3$ , es decir,  $u(\cdot, 0) = \delta_y$ , la solución de la ecuación será la densidad de una ley Gaussiana

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi Dt)^3}} \exp \left\{ -\frac{\|y - x\|^2}{4Dt} \right\}.$$

Por otro lado, Einstein demostró mediante razonamientos físicos que  $D = \frac{RT}{NF}$ , donde  $R$  es una constante universal que depende del material donde está suspendida la partícula,  $T$  es la temperatura absoluta,  $N$  es el número de Avogrado y  $F$  el coeficiente de viscosidad del líquido. Ello sirvió para solucionar el problema físico que planteaba la aparición de este movimiento, e incluso para confirmar la existencia de moléculas y átomos.

Sería injusto olvidarnos del científico Marian Von Smoluchowski que en el mismo periodo de tiempo consiguió resultados similares a los de Einstein describiendo también el movimiento Browniano (véase [29]), trabajando tanto desde el punto de vista teórico como experimental. Por esta razón a la modelación del movimiento Browniano como proceso se le llama modelo de Einstein-Smoluchowski. Poco después Jean Perrin lo verificó y corroboró experimentalmente, utilizando esta fórmula, junto con una serie de experimentos, para determinar una aproximación del número de Avogadro.

No obstante, los trabajos de Einstein-Smoluchowski no proporcionan una teoría dinámica del movimiento, solamente determinan la naturaleza del movimiento y el valor del coeficiente de difusión, todo ello aceptando ciertas hipótesis físicas no muy rigurosas. Las primeras formulaciones dinámicas son debidas a los físicos Paul Langerin por un lado y a Leonard Ornstein y George Uhlenbeck por otro.

El marco teórico adecuado y riguroso para describir un modelo matemático que describa el movimiento Browniano fue realizado por Norbert Wiener en los años veinte del siglo pasado. Wiener demostró la existencia de una probabilidad en el espacio de las funciones continuas  $\mathcal{C}([0, +\infty))$  que correspondía a la ley de probabilidad del movimiento Browniano. En las siguientes secciones presentaré estos conceptos del proceso también llamado proceso de Wiener en honor a este filósofo y matemático. Posteriormente, Paul Lévy llevó a término un análisis profundo y exhaustivo de las propiedades de las trayectorias del movimiento.

Entre esas propiedades, se muestra que el movimiento Browniano no es derivable en ningún punto, por lo que parecía tarea complicada tratar de definir una integral con respecto a este movimiento. Kiyosi Itô tiene el mérito de haberlo conseguido en uno de los hitos más importantes dentro del cálculo estocástico, de ahí que también sea conocido con el cálculo de Itô (véase [11]).

## 2. PROBABILIDADES

Esta sección pretende dar una introducción a la teoría de la probabilidad para entender este artículo. Si el lector tiene buenos conocimientos de esta teoría, puede pasar directamente a la siguiente sección. En caso contrario aquí se expone un resumen de lo necesario para seguir este artículo de divulgación. No se da demostración alguna

porque no es el propósito de este trabajo. Si el lector está interesado en más información puede consultar los libros [4], [7], [20] o [31], entre otros.

Un *espacio de probabilidad* es una terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  donde  $\Omega$  es un conjunto no vacío,  $\mathcal{F}$  es una familia de subconjuntos de  $\Omega$  con estructura de  $\sigma$ -álgebra y  $P$  una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{F}$ . Para dos eventos  $A, B \in \mathcal{F}$  diremos que son independientes si se cumple

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Una aplicación  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un vector aleatorio si es una aplicación medible, es decir, si  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , donde  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  es el conjunto de Borelianos de  $\mathbb{R}^n$ . Cuando  $n = 1$ , en lugar de vector se habla habitualmente de variable aleatoria. Esta aplicación medible entre  $(\Omega, \mathcal{F})$  y  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  induce una probabilidad sobre  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  denotada por

$$P_X(B) = (P \circ X^{-1})(B) = P(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

A la probabilidad  $P \circ X^{-1}$  se le llama, en el análisis matemático, medida imagen de  $P$  para  $X$  y en la teoría de la probabilidad, *ley del vector*  $X$ . Cumple el resultado siguiente:

**PROPOSICIÓN 2.1.** (Teorema de la medida imagen) *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible. Entonces,  $f$  es integrable en el espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P \circ X^{-1})$  si y solo si  $f \circ X$  es integrable en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , y en este caso*

$$\int_{\Omega} (f \circ X) dP = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d(P \circ X^{-1})(dx).$$

La integral con respecto a una probabilidad puede ser construida con los mismos pasos que se construye la integral de Lebesgue. La definiríamos inicialmente para funciones medibles elementales, la extenderíamos a funciones medibles positivas como límite de elementales y terminaríamos dando la integral de una función medible integrable. Dos conceptos muy ligados a lo que acabamos de introducir son la función de distribución y la esperanza de un vector aleatorio. La *función de distribución* de  $X$  es la función de distribución de su ley, es decir,

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si una variable aleatoria  $X$  es integrable con respecto a  $P$  definimos la *esperanza matemática* de  $X$  como

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x(P \circ X^{-1})(dx).$$

Más generalmente, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible tal que  $f \circ X$  es integrable con respecto a  $P$ , la esperanza de  $f(X)$  es

$$\mathbf{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X) dP = \int_{\mathbb{R}} f(x)(P \circ X^{-1})(dx).$$

Para cada natural  $k \geq 1$ , la esperanza de  $\mathbf{E}(X^k)$  (si existe) se denomina *momento de orden  $k$*  de la variable  $X$ . Si el momento de orden dos existe, definimos la *varianza* de la variable  $X$  como

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2] = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2.$$

**2.1. Convergencias.** Consideremos una sucesión  $\{A_n, n \geq 1\}$  de conjuntos de un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Definimos

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Los *Lemas de Borel-Cantelli* son dos resultados muy importantes dentro de la teoría de la probabilidad. Para una sucesión de conjuntos  $\{A_n, n \geq 1\}$  de  $\mathcal{F}$ :

- *Primer lema.* Si  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ , entonces  $P(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 0$ .
- *Segundo lema.* Si además de  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ , la sucesión es de conjuntos independientes, tenemos  $P(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n) = 1$ .

A continuación daremos distintos tipos de convergencia de sucesión de variables aleatorias  $\{X_n, n \geq 1\}$  a una variable  $X$ . La sucesión converge *casi seguramente* si existe un conjunto  $N \in \mathcal{F}$  de probabilidad cero tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \forall \omega \notin N.$$

La sucesión de variables converge *en probabilidad* si para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

La sucesión converge *en media de orden  $p$*  si la sucesión y el límite pertenecen a  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

Las convergencias casi segura y en media de orden  $p$  implican la convergencia en probabilidad. En cambio si tenemos convergencia en probabilidad, existe una subsucesión que converge casi seguramente pero no podemos asegurar la convergencia de la sucesión. Finalmente, si la sucesión converge casi seguramente y  $|X_n| \leq Y$  con  $Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , entonces tenemos convergencia en media de orden  $p$ .

Uno de los resultados más importantes de la teoría de la probabilidad es *la ley fuerte de los grandes números*.

**TEOREMA 2.2.** *Sea  $\{X_n, n \geq 1\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.*

- (i) *Si  $\mathbf{E}(|X_1|) < +\infty$ , entonces  $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} X_n = \mathbf{E}(X_1)$ , casi seguramente.*
- (ii) *Si  $\mathbf{E}(|X_1|) = +\infty$ , entonces  $\limsup_n \frac{1}{n} |\sum_{n=1}^{\infty} X_n| = +\infty$ , casi seguramente.*

Una sucesión de probabilidades  $\{P_n, n \geq 1\}$  converge *débilmente* hacia una probabilidad  $P$  y escribiremos  $\omega - \lim_n P_n = P$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f dP_n = \int_{\mathbb{R}} f dP,$$

para toda función continua y acotada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**TEOREMA 2.3.** *Una sucesión de probabilidades  $\{P_n, n \geq 1\}$  converge débilmente hacia una probabilidad  $P$  si y solo si  $\lim_n F_n(x) = F(x)$  para todo punto de continuidad de  $F$ , y donde  $F_n$  y  $F$  son las funciones de distribución de  $P_n$  y  $P$ , respectivamente.*

Si tenemos una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n, n \geq 1\}$  definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Diremos que esta sucesión converge *en ley* hacia una variable  $X$  y lo escribiremos  $\mathcal{L} - \lim_n X_n = X$ , si

$$\omega - \lim_{n \rightarrow +\infty} P \circ X_n^{-1} = P \circ X^{-1},$$

o equivalentemente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}[f(X_n)] = \mathbf{E}[f(X)],$$

para toda función continua y acotada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

La convergencia en probabilidad implica la convergencia en ley y recíprocamente, si la convergencia en ley es hacia una constante también implica la convergencia en probabilidad.

**2.2. Funciones características.** Definimos la función característica de una probabilidad  $P$  en  $\mathbb{R}^n$  como la aplicación  $\varphi_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\varphi_P(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\langle t, x \rangle} P(dx) = \int_{\mathbb{R}} \cos\langle t, x \rangle P(dx) + i \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}\langle t, x \rangle P(dx),$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  significa el producto interior de  $\mathbb{R}^n$ . La función está bien definida porque el seno y el coseno son funciones continuas y acotadas. Si  $X = (X_1, \dots, X_n)$  es un vector aleatorio en cierto espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , la función característica de  $X$  es la función característica de su ley, es decir,

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\langle t, x \rangle} P_X(dx) = \mathbf{E} \left( e^{i\langle t, X \rangle} \right).$$

Esta función tiene muchas propiedades muy útiles y no muy complicadas de demostrar (ver, por ejemplo, el libro de Nualart y Sanz [20] para la demostración de estas propiedades):

1.  $\varphi_P(0) = 1$  y  $|\varphi_P(t)| \leq 1$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^n$ . Además,  $\varphi_P(-t) = \overline{\varphi_P(t)}$ .
2. Es una función uniformemente continua.
3. Si  $A$  es una matriz  $m \times n$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ , entonces

$$\varphi_{AX+b}(t) = e^{i\langle t, b \rangle} \varphi_X(A^T t),$$

donde  $A^T$  significa la matriz transpuesta

4. Tiene la propiedad fundamental de inyectividad. Si tenemos dos medidas de probabilidad  $P_1$  y  $P_2$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , satisfaciendo que  $\varphi_{P_1} = \varphi_{P_2}$ , entonces  $P_1 = P_2$ . La implicación contraria es trivial.
5. Sea  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un vector aleatorio. Las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  son independientes si y solo si

$$\varphi_X(t) = \varphi_{X_1}(t_1) \times \dots \times \varphi_{X_n}(t_n), \quad \text{siendo } t = (t_1, \dots, t_n).$$

6. Si  $X_1, \dots, X_n$  son independientes, entonces

$$\varphi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \times \dots \times \varphi_{X_n}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entre otros resultados existen teoremas que relacionan la función característica con la existencia de momentos de una probabilidad (o de una variable aleatoria) y la derivabilidad de la función característica. Además, la función característica se llama así porque caracteriza la ley de una variable aleatoria, ya que mediante las llamadas fórmulas de inversión podemos conocer la función de distribución asociada a una probabilidad e incluso su densidad cuando la probabilidad es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Uno de los resultados más importantes asociados a las funciones características es el llamado *teorema de continuidad de Paul Lévy*.

**TEOREMA 2.4.** *Consideremos una sucesión  $\{P_n, n \geq 1\}$  de probabilidades en  $\mathbb{R}$  y sean  $\{\varphi_n, n \geq 1\}$  las funciones características asociadas. Entonces,*

- Si  $P_n$  converge débilmente hacia una probabilidad  $P$  cuando  $n$  tiende a infinito, entonces  $\lim_n \varphi_n(t) = \varphi_P(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- Si  $\lim_n \varphi_n(t) = \varphi(t)$ , donde  $\varphi$  es una función continua en el cero, entonces  $\varphi$  es la función característica de una probabilidad  $P$  y tenemos  $\omega - \lim_n P_n = P$ .

**2.3. Ley normal multidimensional.** Antes de hablar del teorema central del límite debemos conocer detalladamente la ley normal o Gaussiana. También es natural estudiarla por la importancia que tiene en la definición del movimiento Browniano. Es sobradamente conocida cual es la densidad de una variable aleatoria Gaussiana  $N(\mu, \sigma^2)$  para  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2 > 0$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 \right\}.$$

En cambio la ley de una Gaussiana multidimensional ya no lo es tanto, y menos el caso más general que se define mediante un teorema y cuya demostración podemos encontrar en [20] (ver también [4]).

**TEOREMA 2.5.** *Sean  $\mu \in \mathbb{R}^n$  y  $\Lambda$  una matriz simétrica de orden  $n$  definida no negativa. Entonces, existe una probabilidad en  $\mathbb{R}^n$ , que designaremos por  $N(\mu, \Lambda)$  y denominaremos normal  $n$ -dimensional (o Gaussiana  $n$ -dimensional), que tiene por función característica*

$$\varphi(t) = \exp\left(it^T\mu - \frac{1}{2}t^T\Lambda t\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $t^T\mu = \langle t, \mu \rangle$ .

Las funciones características de las variables Gaussianas unidimensionales  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  y  $Z \sim N(0, 1)$  son, respectivamente:

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} \quad \text{y} \quad \varphi_Z(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}.$$

A continuación daremos algunas de las propiedades más usuales de los vectores normales multidimensionales (si el lector está interesado en las demostraciones consultar, por ejemplo, el libro de Nualart y Sanz [20] o también [4]).

1. Sea  $X$  un vector aleatorio con ley  $N(\mu, \Lambda)$ . Si  $M$  es una matriz ortogonal tal que  $\Lambda = M^T D M$ , siendo  $D$  una matriz diagonal con sus elementos designados por  $d_1, \dots, d_n$ . Entonces el vector aleatorio  $Y = M(X - \mu)$  tiene todas las componentes independientes con ley  $N(0, d_i)$  si  $d_i \neq 0$  o bien cero si  $d_i = 0$ .
2. Si  $X$  es un vector aleatorio con ley  $N(\mu, \Lambda)$ , entonces  $\mu \in \mathbb{R}^n$  y  $\Lambda$  representan el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas, respectivamente. Efectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= M^T \mathbf{E}(Y) + \mu = \mu, \\ \mathbf{E}((X - \mu)(X - \mu)^T) &= \mathbf{E}(M^T Y Y^T M) = M^T D M = \Lambda, \end{aligned}$$

donde  $Y$  es el vector aleatorio del punto 1.

3. Si  $X$  es un vector aleatorio con ley  $N(\mu, \Lambda)$  y  $A$  una matriz de orden  $r \times n$ , el vector aleatorio  $AX$  tiene ley  $N(A\mu, A\Lambda A^T)$ . Ello implica que todo vector aleatorio de la forma  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$ , con  $m \leq n$ , tiene ley normal, y toda combinación lineal  $\sum_{i=1}^n a_i X_i$  también. Recíprocamente, si  $(X_1, \dots, X_n)$  es un vector aleatorio tal que toda combinación lineal es normal, entonces  $X$  tiene ley normal multidimensional (algunos autores utilizan este concepto para definir la ley normal multidimensional).
4. Sea  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un vector aleatorio con ley  $N(\mu, \Lambda)$ . La independencia de las variables  $X_1, \dots, X_n$  es equivalente a que la matriz  $\Lambda$  sea diagonal, es decir, que las variables sean incorrelacionadas.
5. Si la matriz  $\Lambda$  es regular ( $\det \Lambda > 0$ ), decimos que la ley normal  $N(\mu, \Lambda)$  es no degenerada, y en este caso la ley es absolutamente continua con densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Lambda}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Lambda^{-1}(x - \mu)\right\}.$$

**2.4. Teorema central del límite.** En primer lugar daremos la versión unidimensional del teorema central del límite, también llamado *teorema central del límite de Lévy-Lindeberg* o teorema fundamental de la teoría de la probabilidad.

**TEOREMA 2.6.** *Sea  $\{X_n, n \geq 1\}$  una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas y cuadrado integrable, con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2 > 0$ . Entonces, si  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , tenemos que*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

La versión multidimensional del teorema es la siguiente.

**TEOREMA 2.7.** *Sea  $\{X_n, n \geq 1\}$  una sucesión de vectores aleatorios  $k$ -dimensionales independientes e idénticamente distribuidos. Supongamos que las componentes de  $X_1$  son cuadrado integrable. Utilizando la notación  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $\mathbf{E}(X_1) = \mu$  y  $\mathbf{E}[(X_1 - \mu)(X_1 - \mu)^T] = \Lambda$ , tenemos que*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} N(0, \Lambda).$$

### 3. EL MOVIMIENTO BROWNIANO

Un *proceso estocástico* es una colección de variables aleatorias  $\{X_t, t \in T\}$  definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , indexadas por un espacio de parámetros  $T$  y a valores en un espacio medible  $(S, \mathcal{S})$ . Este espacio medible  $(S, \mathcal{S})$  se denomina *espacio de estados* del proceso y en general será  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  o un conjunto finito o numerable. El parámetro  $t \in T$  representa el tiempo y el conjunto  $T$  será habitualmente  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  ó un intervalo de  $\mathbb{R}$ .

Para todo conjunto  $v = \{t_1 < \dots < t_n\} \subset T$  podemos considerar la aplicación medible  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  que induce una probabilidad  $P_v = P \circ (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^{-1}$  en el espacio producto  $(S^v, \mathcal{S}^v)$ . A la familia de probabilidades  $\{P_v, v \subset T, v \text{ finito}\}$  la denominaremos *distribución en dimensión finita del proceso*  $\{X_t, t \in T\}$ .

Diremos que un proceso  $\{X_t, t \in T\}$  es un *proceso estocástico Gaussiano* si todas sus distribuciones en dimensión finita son leyes Gaussianas multidimensionales, es decir, si para cualquier conjunto de tiempos  $\{t_1 < \dots < t_n\} \subset T$ , el vector  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  tiene ley Gaussiana multidimensional.

**Definición 3.1.** Un movimiento Browniano unidimensional  $\{B_t, t \geq 0\}$  es un proceso estocástico Gaussiano con esperanza cero y función de covarianza dada por

$$\mathbf{E}(B_t B_s) = t \wedge s = \min(s, t).$$

**3.1. Existencia de este movimiento y algunas propiedades.** Una primera pregunta que uno debe hacerse es si este objeto realmente existe. Para obtener una respuesta afirmativa, en primer lugar, necesitamos un resultado que nos permita extender una probabilidad sobre conjuntos finitos a conjuntos más generales. Considero este resultado de Kolmogorov una herramienta y su demostración se escapa al objetivo de este trabajo. Si el lector está interesado puede consultar su demostración en los teoremas 3.5 y 3.7 del libro de Tudor [32] (mirar también [12]).

**TEOREMA 3.2.** (Teorema de consistencia de Kolmogorov) *Sea  $T$  un conjunto arbitrario y consideremos una familia de probabilidades  $\{P_v, v \subset T, v \text{ finito}\}$ , donde  $P_v$  está definida sobre  $(\mathbb{R}^v, \mathcal{B}(\mathbb{R}^v))$  y la familia cumple la condición siguiente de compatibilidad:*

*Si  $u \subset v$  son dos conjuntos finitos y  $\Pi_{u,v} : \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^u$  es la proyección canónica, entonces se cumple que*

$$P_v \circ \Pi_{u,v}^{-1} = P_u.$$

*Bajo estas suposiciones, existe una única probabilidad  $Q$  en el espacio  $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$  tal que*

$$Q \circ \Pi_v^{-1} = P_v,$$

*para todo conjunto finito  $v$ .*

Mediante este teorema de Kolmogorov podemos demostrar un resultado sobre la existencia de procesos Gaussianos que nos ayudará a comprobar la existencia del movimiento Browniano.

**PROPOSICIÓN 3.3.** *Sea  $K : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  una función simétrica y definida no negativa. Entonces, existe un proceso Gaussiano  $\{X_t, t \in T\}$  satisfaciendo  $\mathbf{E}(X_t) = 0, \forall t \in T$ , y  $\text{Cov}(X_s, X_t) = K(s, t), \forall s, t \in T$ .*

*Demostración.* Consideremos, para  $t_1, \dots, t_n \in T$ ,

$\mu_{t_1, \dots, t_n} = (0, \dots, 0)$ ,  $\Lambda_{t_1, \dots, t_n} = (K(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ , y  $P_{t_1, \dots, t_n} \sim N(\mu_{t_1, \dots, t_n}, \Lambda_{t_1, \dots, t_n})$ , es decir,  $P_{t_1, \dots, t_n}$  es una ley Gaussiana  $n$ -dimensional con esperanza cero y matriz de covarianzas  $(K(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ . Denotemos por  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  un vector aleatorio con ley  $P_{t_1, \dots, t_n}$ . Para cualquier subconjunto  $\{t_{i_1}, \dots, t_{i_m}\}$  de  $\{t_1, \dots, t_n\}$ , tenemos que

$$A(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = (X_{t_{i_1}}, \dots, X_{t_{i_m}}),$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \delta_{t_1, t_{i_1}} & \cdots & \delta_{t_n, t_{i_1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{t_1, t_{i_m}} & \cdots & \delta_{t_n, t_{i_m}} \end{pmatrix},$$

donde  $\delta_{s,t}$  es la función delta de Kronecker. Utilizando que la transformación lineal de una ley Gaussiana sigue siendo Gaussiana obtenemos que el vector aleatorio  $(X_{t_{i_1}}, \dots, X_{t_{i_m}})$  tiene una distribución normal  $m$ -dimensional con esperanza cero y matriz de covarianzas  $A\Lambda_{t_1, \dots, t_n}A^T = (K(t_{i_k}, t_{i_l}))_{1 \leq k, l \leq m}$ . Así, finalmente, aplicando el teorema 3.2 obtenemos el resultado deseado.  $\square$

Esta proposición nos asegurará la existencia de un proceso  $\{B_t, t \geq 0\}$  satisfaciendo la definición del movimiento Browniano. En efecto, si escribimos  $K(s, t) = s \wedge t$ , podemos demostrar que, para cualesquiera  $t_i \geq 0$  y  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n x_i K(t_i, t_j) x_j &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j (t_i \wedge t_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0, t_i]}(r) \mathbb{1}_{[0, t_j]}(r) dr \\ &= \int_0^\infty \left( \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{[0, t_i]}(r) \right)^2 dr \geq 0, \end{aligned}$$

en donde  $\mathbb{1}_{[0, t_i]}(r)$  es la función cuyo valor es 0 si  $r > t_i$  ó  $r < 0$  y 1 si  $0 \leq r \leq t_i$ . Por tanto,  $K(s, t) = s \wedge t$  es una función simétrica y definida no negativa y podemos aplicar la proposición 3.3.

Ahora daremos una definición equivalente de movimiento Browniano.

**PROPOSICIÓN 3.4.** *Un proceso estocástico  $\{B_t, t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano si y solo si  $B_0 = 0$  c.s., y para cualesquiera  $0 \leq s < t$ , la variable aleatoria  $B_t - B_s$  es independiente de  $B_r$ ,  $0 \leq r \leq s$ , y  $B_t - B_s$  sigue una distribución  $N(0, t - s)$ .*

*Demostración.* Tenemos que demostrar las dos implicaciones.

$\Rightarrow$ ) Asumimos en primer lugar que  $\{B_t, t \geq 0\}$  satisface la definición de movimiento Browniano (véase definición 3.1). Como  $\mathbf{E}(B_0^2) = 0$ , tenemos que  $B_0 = 0$  c.s. Sea  $0 \leq r \leq s \leq t$ . Usando la covarianza del movimiento Browniano deducimos que

$$\mathbf{E}[B_r(B_t - B_s)] = (r \wedge t) - (r \wedge s) = r - r = 0.$$

Por lo tanto, como  $B$  tiene esperanza cero, obtenemos

$$\mathbf{E}[B_r(B_t - B_s)] = \mathbf{E}(B_r)\mathbf{E}(B_t - B_s).$$

Ya que  $(B_r, B_s, B_t)$  es un vector aleatorio Gaussiano, esta igualdad implica la independencia entre  $B_r$  y  $B_t - B_s$ .

Gracias a que la combinación lineal de variables aleatorias Gaussianas vuelve a ser Gaussiana,  $B_t - B_s$  es una normal que cumple  $\mathbf{E}(B_t - B_s) = 0$  y utilizando la covarianza del movimiento Browniano

$$\mathbf{E}[(B_t - B_s)^2] = \mathbf{E}(B_t^2) - 2\mathbf{E}(B_s B_t) + \mathbf{E}(B_s^2) = t - 2s + s = t - s,$$

que prueba la última condición.

⇐) Si tomamos  $n \geq 1$  y  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , el siguiente vector  $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$  está formado por componentes Gaussianas independientes. Entonces, existe una matriz  $A$  tal que

$$X = (B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = A(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}),$$

y por lo tanto,  $X$  es Gaussiano. Como todas sus distribuciones en dimensión finita son leyes Gaussianas, tenemos que  $\{B_t, t \geq 0\}$  es un proceso Gaussiano. Finalmente, como  $B_t - B_0 \sim N(0, t)$ , tenemos que

$$\mathbf{E}(B_t) = \mathbf{E}(B_t - B_0) = 0;$$

y, para  $0 \leq s \leq t$ , usando la independencia

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(B_s B_t) &= \mathbf{E}[B_s(B_t - B_s + B_s)] = \mathbf{E}[B_s(B_t - B_s)] + \mathbf{E}(B_s^2) \\ &= \mathbf{E}(B_s)\mathbf{E}(B_t - B_s) + \mathbf{E}(B_s^2) = \mathbf{E}(B_s^2) = s = s \wedge t. \end{aligned}$$

Lo que concluye la otra implicación. □

No resulta difícil demostrar la proposición siguiente calculando la varianza de los distintos procesos que aparecen en ella.

**PROPOSICIÓN 3.5.** *Sea  $\{B_t, t \geq 0\}$  un movimiento Browniano. Entonces, los siguientes procesos también son movimientos Brownianos:*

- $\{-B_t, t \geq 0\}$ .
- $\{B_{t+s} - B_s, t \geq 0\}$ , para cualquier  $s > 0$ .
- $\{\lambda B_{t/\lambda^2}, t \geq 0\}$ , para cualquier  $\lambda > 0$ .
- $\{Y_t = tB_{1/t}, t > 0\}$  y  $Y_0 = 0$ .

**3.2. Construcción del movimiento Browniano.** En la sección anterior hemos comprobado que existe este movimiento pero no lo hemos descrito. Hay diversas formas de construir un movimiento Browniano. Una opción sería escribir cómo tienen que ser las distribuciones marginales en dimensión finita y construir una medida de probabilidad en un espacio medible adecuado para obtener estas marginales (teoremas de Daniell-Kolmogorov y Kolmogorov-Čentsov, ver por ejemplo [6]). Otra forma sería demostrar su existencia como límite de una secuencia de caminos o paseos aleatorios (teorema de Donsker, ver por ejemplo [30]).

Aquí construiremos el movimiento Browniano utilizando una tercera vía. Las ideas que usaremos son la de la construcción de Paul Lévy en los años 40 del siglo pasado y la posterior simplificación de Zbigniew Ciesielski en los años 60 del mismo siglo. Por este motivo la construcción que daremos es conocida como de *Lévy-Ciesielski*. La construcción es larga y densa, solo se pretende dar un esquema amplio para comprenderla ya que consideramos que es una herramienta importante dentro de la investigación del cálculo estocástico. Vamos a construirlo sobre el intervalo  $[0, 1]$ , como un elemento aleatorio del espacio de funciones  $\mathcal{C}([0, 1])$  para después extenderlo a todo  $\mathbb{R}_+$ . La idea básica es definirlo paso a paso en el conjunto finito de los puntos diádicos para luego interpolar linealmente los valores obtenidos y demostrar que el límite uniforme de estas funciones es justamente un movimiento Browniano. Para una demostración completa se puede consultar, por ejemplo, el teorema 1.12 en [32] o la sección 3.2 de [22].

Consideremos el espacio de Hilbert  $L^2([0, 1])$  de las funciones medibles  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\int_0^1 f(s)^2 ds < \infty$ , y dotado del producto escalar

$$\langle f, g \rangle := \langle f, g \rangle_{L^2([0,1])} = \int_0^1 f(s)g(s)ds.$$

Definimos las funciones de Haar como  $f_{0,1}(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$  y para  $n \geq 1$ ,  $1 \leq k \leq 2^n$ ,  $k$  impar,

$$f_{n,k}(t) = 2^{\frac{n-1}{2}} \mathbb{1}_{[(k-1)2^{-n}, k2^{-n})}(t) - 2^{\frac{n-1}{2}} \mathbb{1}_{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})}(t).$$

No resulta complicado demostrar que la familia  $\{f_{n,k}, n \geq 0, 1 \leq k \leq 2^n, k \text{ impar}\}$  es una base ortonormal completa de  $L^2([0, 1])$ . De este modo, para cualquiera  $h \in L^2([0, 1])$ , tenemos que

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I_n} \langle h, f_{n,k} \rangle f_{n,k}(t),$$

con  $I_n = \{k \in \{1, \dots, 2^n\}, k \text{ impar}\}$ , y para  $g \in L^2([0, 1])$ , obtenemos también la identidad de Parseval

$$\langle h, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I_n} \langle h, f_{n,k} \rangle \langle g, f_{n,k} \rangle.$$

Con ello en mente definimos las funciones de Schauder como  $S_{0,1}(t) = \int_0^t f_{0,1}(s) ds = t$ , y para  $n \geq 1, 1 \leq k \leq 2^n, k \text{ impar}$ ,

$$\begin{aligned} S_{n,k}(t) &= \int_0^t f_{n,k}(s) ds \\ &= 2^{\frac{n-1}{2}} \left[ \left( t - \frac{k-1}{2^n} \right) \mathbb{1}_{[(k-1)2^{-n}, k2^{-n})}(t) + \left( \frac{k+1}{2^n} - t \right) \mathbb{1}_{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})}(t) \right], \end{aligned}$$

que satisfacen

$$(3.1) \quad \max_{0 \leq t \leq 1} |S_{n,k}(t)| \leq \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}},$$

y utilizando la identidad de Parseval para  $h = \mathbb{1}_{[0,s]}$  y  $g = \mathbb{1}_{[0,t]}$  obtenemos

$$s \wedge t = \langle h, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I_n} \langle h, f_{n,k} \rangle \langle g, f_{n,k} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I_n} S_{n,k}(s) S_{n,k}(t).$$

Ahora estamos en condiciones de definir la sucesión que convergirá a un movimiento Browniano. Sea  $\{\xi_{n,k}, k \in I_n, n \geq 0\}$  una colección de variables aleatorias Gaussianas independientes  $N(0, 1)$ . Consideremos entonces las funciones  $\{B_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$  definidas como

$$B_n(t, \omega) = \sum_{m=0}^n \sum_{k \in I_m} \xi_{m,k}(\omega) S_{m,k}(t), \quad \forall t \in [0, 1], n \geq 0,$$

que son procesos Gaussianos, centrados y con trayectorias continuas.

Utilizando (3.1) podemos obtener

$$\|B_n(t) - B_{n-1}(t)\|_{\infty} := \sup_{0 \leq t \leq 1} |B_n(t) - B_{n-1}(t)| \leq 2^{-\frac{n+1}{2}} \max_{k \in I_n} |\xi_{n,k}|.$$

Así tomando  $A_n = \{\omega \in \Omega; \|B_n(t) - B_{n-1}(t)\|_{\infty} > \sqrt{2^{-n+1} \ln 2^n}\}$ , podemos comprobar que  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ . En efecto, la cota de  $\|B_n(t) - B_{n-1}(t)\|_{\infty}$  y el hecho que  $\int_a^{\infty} e^{-u^2/2} du \leq \frac{1}{a} e^{-a^2/2}$  implican

$$P(A_n) \leq P\left(\max_{k \in I_n} |\xi_{n,k}| > 2\sqrt{n \ln 2}\right) \leq 2^{n-1} P\left(|\xi_{n,1}| > 2\sqrt{n \ln 2}\right) \leq \frac{2^{-n-1}}{\sqrt{2\pi n \ln 2}},$$

y esta cantidad es sumable. Entonces, si  $N := \limsup_n A_n$ , el lema de Borel-Cantelli nos dice que la sucesión  $\{B_n(t, \omega), n \geq 0\}$  es convergente en  $\mathcal{C}([0, 1])$  si  $\omega \notin N$ . Definamos

$$B_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} B_n(t, \omega), & \text{si } \omega \notin N, \\ 0, & \text{si } \omega \in N. \end{cases}$$

El proceso  $\{B_t, 0 \leq t \leq 1\}$  tiene trayectorias continuas porque el límite uniforme de funciones continuas es continuo. Además, es un proceso Gaussiano porque pertenece a la envoltura lineal cerrada de la familia Gaussiana  $\{\xi_{n,k}, k \in I_n, n \geq 0\}$ . Por otro lado, tenemos

$$(3.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[B_n(t)] = 0, \quad \forall t \in [0, 1],$$

y

$$(3.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[B_n(t)B_n(t)] = s \wedge t, \quad \forall s, t \in [0, 1].$$

Usando las propiedades de la función característica, las propiedades (3.2) y (3.3) implican que para todo número finito de instantes  $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$  los vectores aleatorios  $(B_n(t_1), \dots, B_n(t_k))$  convergen en ley hacia una distribución normal  $k$ -dimensional, centrada y con matriz de covarianzas  $\{(t_i \wedge t_j)\}_{1 \leq i, j \leq k}$ . Pero como esta sucesión converge casi seguramente a  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$  deducimos que  $\{B_t, 0 \leq t \leq 1\}$  es un proceso Gaussiano y tiene esperanza cero y función de covarianza  $s \wedge t$ , y por lo tanto, es un movimiento Browniano.

Finalmente, para extenderlo a  $[0, +\infty)$ , tomaremos una sucesión  $\{B_t^m, t \in [0, 1], m \geq 0\}$  de movimientos Brownianos independientes con trayectorias continuas y definiremos

$$B_t = \sum_{i=0}^{m-1} B_1^i + B_{t-m+1}^m, \quad \text{si } t \in [m-1, m), m \geq 1.$$

No es complicado comprobar que este nuevo proceso es un movimiento Browniano en  $[0, +\infty)$ .

#### 4. PROPIEDADES TRAYECTORIALES DEL MOVIMIENTO BROWNIANO

En esta sección observaremos algunas de las propiedades más importantes de sus trayectorias.

**4.1. Variación cuadrática del movimiento.** La noción de variación de orden  $j$  nos indica el tipo de regularidad de cierta función y la existencia de diferentes órdenes son importantes para las expansiones de Taylor y el desarrollo del cálculo infinitesimal. El movimiento Browniano tiene variación cuadrática finita y variación total infinita, en todo intervalo finito, casi seguramente.

Fijemos un intervalo finito  $[0, T]$  y consideremos una sucesión de particiones  $\Pi_n = \{t_0^n = 0 \leq t_1^n \leq \dots \leq t_{\tau_n}^n = T\}$  de este intervalo cumpliendo  $|\Pi_n| = \sup_j |t_{j+1}^n - t_j^n| \rightarrow 0$ , cuando  $n$  tiende a infinito. Con estas premisas y utilizando la notación  $\Delta_j B = B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}$ , puede probarse

$$(4.1) \quad \sum_{j=1}^{\tau_n} (\Delta_j B)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega)} T.$$

Veámoslo. Observemos que gracias a la definición del movimiento Browniano tenemos que  $\Delta_j B \sim N(0, t_j^n - t_{j-1}^n)$  y las variables  $(\Delta_j B)^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , son independientes y centradas. Entonces, utilizando además los momentos de orden 2 y 4 de una Gaussiana, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \left( \sum_{j=1}^{\tau_n} (\Delta_j B)^2 - T \right)^2 \right] &= \mathbf{E} \left[ \left( \sum_{j=1}^{\tau_n} [(\Delta_j B)^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)] \right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\tau_n} \mathbf{E} \left( [(\Delta_j B)^2 - (t_j^n - t_{j-1}^n)]^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\tau_n} \left( \mathbf{E} [(\Delta_j B)^4] - 2(t_j^n - t_{j-1}^n) \mathbf{E} [(\Delta_j B)^2] + (t_j^n - t_{j-1}^n)^2 \right) \\ &= 2 \sum_{j=1}^{\tau_n} (t_j^n - t_{j-1}^n)^2 \leq 2T |\Pi_n|, \end{aligned}$$

lo cual implica (4.1). Si a las hipótesis le añadiéramos  $\Pi_{n-1} \subset \Pi_n$ , podríamos demostrar (4.1) pero con la convergencia casi segura.

Como consecuencia de (4.1), la variación total de las trayectorias del Browniano es infinita en cualquier intervalo  $[0, T]$ . Efectivamente,

$$\sum_{j=1}^{\tau_n} (\Delta_j B)^2 \leq \sup_{1 \leq j \leq \tau_n} |\Delta_j B| \sum_{j=1}^{\tau_n} |\Delta_j B|,$$

y teniendo en cuenta (4.1) y que  $\sup_j |\Delta_j B| \rightarrow 0$  casi seguramente cuando  $n$  tiende a infinito, se obtiene que la variación total debe ser infinita.

**4.2. Continuidad en el sentido de Hölder.** Recordemos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente continua en el sentido de Hölder con exponente  $\gamma \in (0, 1]$ , si para cualquier conjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}$ , el coeficiente de Hölder

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\gamma(A)} := \sup_{x, y \in A, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma}$$

es finito. En el caso  $\gamma = 1$  la función es localmente Lipschitz continua.

En el caso del movimiento Browniano puede mostrarse que las trayectorias son continuas en el sentido de Hölder para cualquier exponente  $\gamma \in (0, 1/2)$ . Para probarlo se utiliza el siguiente criterio (ver teorema 2.1 [25] para su demostración):

**TEOREMA 4.1.** (Criterio de continuidad de Kolmogorov) *Consideremos un proceso estocástico  $\{X_t, t \geq 0\}$  satisfaciendo que para cualquier conjunto acotado de subíndices  $A \subset [0, +\infty)$ , existen tres constantes estrictamente positivas  $\alpha, C, \varepsilon$  tal que*

$$(4.2) \quad \mathbf{E} [|X_t - X_s|^\alpha] \leq C |t - s|^{1+\varepsilon}, \quad \forall s, t \in A.$$

*Entonces, casi seguramente, las trayectorias del proceso  $X$  son continuas en el sentido de Hölder con exponente  $\gamma \in (0, \varepsilon/\alpha)$ .*

Ahora, si tomamos un movimiento Browniano  $\{B_t, t \geq 0\}$ , recordando que, para cualesquiera  $0 \leq s < t$ ,  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ , y utilizando cuánto vale el momento de orden  $n$  de una Gaussiana tenemos que

$$\mathbf{E} [|B_t - B_s|^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} (t - s)^n.$$

Esto es válido para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, mediante el criterio de continuidad de Kolmogorov podemos concluir que el movimiento Browniano tiene, casi seguramente, trayectorias continuas con exponente  $\gamma \in (0, \frac{n-1}{2n})$  y haciendo tender  $n$  a infinito se obtiene el resultado.

**4.3. No diferenciabilidad del movimiento Browniano.** El teorema sobre la no derivabilidad de las trayectorias del movimiento Browniano fue demostrado por Paley, Wiener y Zigmund [21] en 1933 y actualmente se usa una adaptación hecha en 1961 por Dvoretzki, Erdős y Kakutani [8].

La demostración se basa en demostrar que el conjunto

$$N = \left\{ \omega \in \Omega, \exists t \in [0, 1], M, k \in \mathbb{N}; \text{ tal que } \forall s \in \left[ t, t + \frac{1}{k} \right], |B_s(\omega) - B_t(\omega)| \leq M |s - t| \right\}$$

tiene probabilidad cero (se puede encontrar una demostración en la sección 2.9 de [12]).

Esta demostración no es muy complicada pero sí algo larga y técnica. Sin embargo, usando que la variación cuadrática es finita casi seguramente puede probarse otro resultado que implica la no diferenciabilidad del movimiento Browniano.

**PROPOSICIÓN 4.2.** *Las trayectorias del movimiento Browniano no son localmente continuas en el sentido de Hölder casi seguramente en ningún punto para exponentes  $\gamma > 1/2$ .*

*Demostración.* Gracias a la sección 4.1, existe un conjunto  $\Omega_0 \subset \Omega$  tal que  $P(\Omega_0) = 1$  y para cualesquiera  $p < q$  racionales, existe una sucesión  $\Pi_n$  de subparticiones de  $[p, q]$  con  $|\Pi_n| \rightarrow 0$  y

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{t_i^n \in \Pi_n} (B_{t_{i+1}^n}(\omega) - B_{t_i^n}(\omega))^2 = q - p,$$

para todo  $\omega \in \Omega_0$ . Si suponemos que  $|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq C|t - s|^\gamma$  para  $p \leq s, t \leq q$  y  $\gamma > 1/2$ , entonces

$$\sum_i (B_{t_{i+1}^n}(\omega) - B_{t_i^n}(\omega))^2 \leq C^2(q - p) \sup_i |t_{i+1}^n - t_i^n|^{2\gamma-1},$$

y ello contradice (4.3). □

Fíjense que este resultado nos da la no diferenciabilidad en cualquier punto porque para ser diferenciable necesitaríamos que sea localmente continuo en el sentido de Hölder para un exponente de grado  $\gamma = 1$  y eso contradice la proposición anterior.

Sabemos qué sucede para  $\gamma \in (0, 1/2)$  y  $\gamma > 1/2$ . Una pregunta interesante sería qué ocurre con  $\gamma = 1/2$ . Este problema lo resolvió Paul Lévy en 1937 con el llamado *teorema del modulo de continuidad*. Puede encontrarse una versión de la demostración en [25] (teorema 2.7).

PROPOSICIÓN 4.3. *Sea  $\{B_t, t \geq 0\}$  un movimiento Browniano. Entonces,*

$$P \left( \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\sup_{0 \leq t \leq 1-h} |B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{2h|\ln h|}} = 1 \right) = 1.$$

Consecuentemente, las trayectorias del movimiento Browniano no son continuas en el sentido de Hölder para  $\gamma = 1/2$ . En efecto,

$$\frac{\sup_{0 \leq t \leq 1-h} |B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{h}} = \frac{\sup_{0 \leq t \leq 1-h} |B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{2h|\ln h|}} \sqrt{2|\ln h|},$$

que tiende a infinito cuando  $h \rightarrow 0$ .

## 5. APLICACIONES O HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS DEL MOVIMIENTO BROWNIANO

El movimiento Browniano tiene muchísimas aplicaciones en distintas ramas de las ciencias pero algunos conceptos son ya muy importantes para las propias matemáticas. En esta sección comentaremos algunas de ellas como la integral estocástica, la fórmula de Itô o las ecuaciones diferenciales estocásticas. Solo daremos unas pinceladas porque cualquiera de estos conceptos daría por sí solo para un artículo completo. Si el lector esta interesado existe un artículo precioso de León [14] donde pueden encontrar más extensamente y de manera comprensible y accesible todos estos conceptos.

**5.1. La integral de Itô.** El movimiento Browniano representa fenómenos que cambian rápidamente en el tiempo y por este motivo no tiene trayectorias de variación acotada. Ello provoca un problema a la hora de definir una integral con respecto a este movimiento.

En efecto, si para un proceso estocástico con trayectorias continuas  $\{u(t), t \geq 0\}$  queremos definir la integral  $\int_0^T u(t)dB_t$  trayectoria a trayectoria ( $\omega$  por  $\omega$ ) como una integral de Lebesgue-Stieltjes aparecen disitintos problemas. Concretemos estas dificultades. Para cada  $\omega \in \Omega$ , consideraríamos la integral como el límite de las sumas de Riemann-Stieltjes

$$S_n := \sum_{i=1}^n u(\xi_i)(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}),$$

con  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$  una partición de  $[0, T]$  y  $\xi_i$  un punto intermedio entre  $t_{i-1}$  y  $t_i$ . No resulta complicado comprobar que en general  $S_n$  no converge en

probabilidad porque  $u(t)$  depende de los eventos que ocurren después de  $t$  (ver la observación 3.2 [14]) y que incluso tomando el caso particular  $u(t) = B_t$  el límite en probabilidad depende del punto intermedio  $\xi_i$  tomado (ver la observación 3.4 [14]).

K. Itô resolvió este problema en los años 40 construyendo la integral para una clase particular de procesos (ver [11]). Definamos en primer lugar algunos conceptos necesarios para entender sus ideas. Una familia de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  se llama filtración si  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ ,  $t \geq 0$ , y si  $s \leq t$  implica que  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ . Tomaremos una filtración satisfaciendo:

1.  $B$  es adaptado a  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ , ello significa, que para todo  $t \geq 0$ ,  $B_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.
2. Para cualesquieras  $0 \leq s \leq t$ , la variable aleatoria  $B_t - B_s$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$ .

Por ejemplo, si tomamos  $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_s, s \in [0, t]\}$ , la filtración generada por  $B$ , cumple estas propiedades.

Itô construyó la integral para procesos adaptados a una filtración resolviendo así los problemas que antes hemos mencionado. Consideró procesos  $\{u(t), t \geq 0\}$  que son adaptados a una filtración  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ , que como función

$$\begin{aligned} u : [0, T] \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\longrightarrow u(t, \omega) \end{aligned}$$

son medibles con respecto a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ , y además cumplen

$$(5.4) \quad \mathbf{E} \int_0^T u(t)^2 dt < \infty.$$

A estos procesos los llamaremos  $L_{a,T}^2$ . Entonces, siguiendo los pasos habituales en la teoría de la integración, Itô definió la integral para procesos elementales de  $L_{a,T}^2$ ,

$$u(t) = \sum_{j=1}^n u_j \mathbb{1}_{[t_{j-1}, t_j)}(t),$$

con  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ , como la variable aleatoria centrada

$$\int_0^T u(t) dB_t = \sum_{j=1}^n u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).$$

Esta integral estocástica cumple los requisitos de linealidad y una propiedad muy importante que es la isometría

$$\mathbf{E} \left[ \left( \int_0^T u(t) dB_t \right)^2 \right] = \mathbf{E} \left( \int_0^T u(t)^2 dt \right).$$

A partir de aquí puede demostrarse que para cualquier  $u \in L_{a,T}^2$ , existe una sucesión  $\{u_n(t), n \geq 0\}$  de procesos simples tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \mathbf{E} (u_n(t) - u(t))^2 dt = 0,$$

y puede definirse la integral estocástica de Itô como

$$\int_0^T u(t) dB_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T u_n(t) dB_t,$$

donde el límite es en  $L^2(\Omega)$ . Incluso puede generalizarse a procesos adaptados y conjuntamente medibles satisfaciendo

$$P \left\{ \int_0^T u_t^2 dt < \infty \right\} = 1.$$

Más adelante, se definieron otras integrales como la de Stratonovich, la de Skorohod, etc. Si el lector está interesado en una amplia exposición de la integral de Itô puede

consultar el artículo didáctico de León [14] o bien los libros de Arnold [1], Karatzas-Shreve [12] o Revuz-Yor [25].

**5.2. Ejemplo.** Daremos un ejemplo donde aplicamos lo dicho en la sección anterior y que nos servirá para introducir el siguiente apartado. Vamos a comprobar que

$$\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2}(B_T^2 - T),$$

en lugar de  $\frac{1}{2}B_T^2$  que sería lo esperado con las reglas del cálculo determinista.

Consideremos un proceso simple definido como sigue:

$$u^n(t) = \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} \mathbb{1}_{[t_{j-1}, t_j)}(t),$$

con  $t_j = \frac{jT}{n}$ ,  $j = 0, \dots, n$ . Es obvio que  $u^n \in L_{a,T}^2$  y fácilmente tenemos

$$\int_0^T \mathbf{E} (u_n(t) - B_t)^2 dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{E} (B_{t_{j-1}} - B_t)^2 dt \leq \frac{T}{n} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt = \frac{T^2}{n}.$$

Por tanto,  $\{u^n, n \geq 0\}$  es una sucesión que aproxima al movimiento Browniano  $B$  en la norma  $L^2(\Omega \times [0, T])$ . Ahora, de acuerdo con la definición de integral de Itô, debemos calcular en  $L^2(\Omega)$

$$\int_0^T B_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).$$

Fijando  $\omega \in \Omega$ , podemos obtener

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{t_j}^2 - B_{t_{j-1}}^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 \\ &= \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2, \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos utilizado el desarrollo de  $(a - b)^2$  y en la segunda que la serie es telescópica. El resultado se obtiene usando la variación cuadrática del movimiento Browniano.

**5.3. La fórmula de Itô.** Esta fórmula la podríamos introducir de diversas maneras, vamos a dar dos de ellas. En primer lugar podríamos introducirla como una generalización del ejemplo anterior. Tenemos que

$$B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + t, \quad t \geq 0.$$

La fórmula de Itô es una generalización de esta fórmula para funciones más generales que  $f(x) = x^2$  y procesos también más generales en el papel de integrando que el movimiento Browniano. La otra posibilidad es decir que la fórmula de Itô para la integral estocástica es la equivalente a la fórmula de integración por partes del cálculo determinista.

Sea un proceso estocástico definido como

$$(5.5) \quad X_t = X_0 + \int_0^t h_s dB_s + \int_0^t g_s ds,$$

con  $X_0$  una variable aleatoria  $\mathcal{F}_0$ -medible,  $g$  un proceso estocástico adaptado satisfaciendo  $\int_0^T |g_s| ds < \infty$  c.s., y  $h$  un proceso estocástico adaptado, medible con respecto a  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$  y cumpliendo que

$$P \left\{ \int_0^T h_s^2 ds < \infty \right\} = 1.$$

A este proceso lo denominaremos *proceso de Itô*. Entonces, para toda función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que pertenece a  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  (función con segunda derivada continua), tenemos

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) (dX_s)^2 \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) g_s ds + \int_0^t f'(X_s) h_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) ds, \quad \text{c.s.} \end{aligned}$$

La idea de la demostración no es muy complicada. Daremos un esquema de ella en un caso particular. Tomando  $g \equiv 0$  y  $h \equiv 1$ , eso significa  $X_t = B_t$ , la fórmula de Itô es:

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds, \quad \text{c.s.}$$

Consideremos  $\{0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t\}$  una partición de  $[0, t]$ . El desarrollo de Taylor hasta orden dos implica

$$\begin{aligned} f(B_t) &= f(B_0) + \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}} + \lambda_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}))(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2, \end{aligned}$$

con  $\lambda_i \in (0, 1)$ ,  $i = 0, \dots, n$ . En el primer sumando aplicando la construcción de la integral de Itô se puede demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \int_0^t f'(B_s) dB_s.$$

Para el segundo sumando, la clave es la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}} + \lambda_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}))(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - \int_0^t f''(B_s) ds \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}} + \lambda_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}))(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}}) [(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})] \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) - \int_0^t f''(B_s) ds \right|. \end{aligned}$$

El primer término podemos comprobar que tiende a cero por la continuidad de  $f''$ , el tercer término converge por el clásico resultado de la aproximación de la integral de Riemann por las sumas de Riemann y en cuanto al segundo, se puede demostrar sin mucha dificultad que tiende a cero en probabilidad.

Si el lector está interesado en la demostración o en versiones más generales de esta fórmula puede consultar los libros de Karatzas-Shreve [12], Protter [23] o Revuz-Yor [25] o el artículo de Moret y Nualart [16].

**5.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas.** Ahora nuestro propósito es estudiar la ecuación diferencial estocástica

$$(5.6) \quad \begin{aligned} dX_t &= \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt, \quad t \in [0, T], \\ X_0 &= \xi, \end{aligned}$$

donde  $b$  y  $\sigma$  son funciones  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -medibles y  $\xi$  es una variable aleatoria  $\mathcal{F}_0$ -medible. Una solución fuerte de (5.6) es un proceso  $\{X_t, t \in [0, T]\}$  adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$  con trayectorias continuas tal que:

- $P(X_0 = \xi) = 1$ .

- Los procesos  $\{\sigma(t, X_t), t \in [0, T]\}$  y  $\{b(t, X_t), t \in [0, T]\}$  son conjuntamente medibles, adaptados y cumplen  $\int_0^T \mathbf{E}(\sigma(t, X_t)^2)dt < \infty$  y  $\int_0^T \mathbf{E}(|b(t, X_t)|)dt < \infty$ , respectivamente.
- Para cada  $t \in [0, T]$ , con probabilidad 1, se satisface

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

**TEOREMA 5.4.** *Asumimos además de las condiciones de adaptabilidad y medibilidad recién mencionadas las hipótesis:*

1. *Crecimiento lineal. Existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. *Condición de Lipschitz. Existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$|b(t, y) - b(t, x)| + |\sigma(t, y) - \sigma(t, x)| \leq C|y - x|, \quad \forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Entonces, si  $\xi \in L^2(\Omega)$ , existe una única solución fuerte a (5.6) en  $L^2(\Omega \times [0, T])$ .

*Demostración.* Veamos primero la unicidad. Supongamos que tenemos dos soluciones  $\{X_t, t \geq 0\}$  y  $\{Y_t, t \geq 0\}$  satisfaciendo (5.6). Entonces, utilizando la condición de Lipschitz y la isometría de la integral estocástica, obtenemos

$$\mathbf{E}[|X_t - Y_t|] \leq KC^2 \int_0^t \mathbf{E}[|X_s - Y_s|] ds, \quad t \in [0, T],$$

para cierta constante  $K > 0$ . Finalmente, mediante el lema de Gronwall, se tiene que  $X \equiv Y$  en  $L^2(\Omega \times [0, T])$ .

Estudiemos ahora la existencia. Resulta interesante hacer un resumen de la demostración porque recurre a un procedimiento muy utilizado tanto en el caso estocástico como en el determinista. Definimos, para  $t \geq 0$ , la siguiente iteración llamada de Picard:

$$\begin{aligned} X_t^0 &= \xi \\ X_t^n &= \xi + \int_0^t b(s, X_s^{n-1})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dB_s, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

No es complicado ver que  $\{X_n; n \geq 0\}$  es una sucesión convergente en  $L^2(\Omega \times [0, T])$  cuyo límite es una solución fuerte de (5.6). La existencia se divide en distintos pasos.

**Paso 1.** Se demuestra por inducción sobre  $n$  que:

- $\sigma(s, X_s^n) \in L_{a,T}^2$  y  $b(s, X_s^n) \in L^2(\Omega \times [0, T])$ .
- Para todo  $t \in [0, T]$ ,

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^n|^2 \right] < \infty.$$

Para este paso usamos básicamente la hipótesis de crecimiento lineal y las desigualdades de Hölder y Burkholder.

**Paso 2.** Se prueba también por inducción sobre  $n$  que existe una constante  $K > 0$  tal que para todo  $t \in [0, T]$ ,

$$\mathbf{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] \leq \frac{(Kt)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En este punto se utiliza la hipótesis de Lipschitz en lugar de la de crecimiento lineal.

**Paso 3.** No resulta difícil probar la existencia de una solución fuerte en  $L^2(\Omega \times [0, T])$ . Si quisieramos la existencia trayectorial utilizaríamos la desigualdad de Chebichev y el lema de Borel-Cantelli para así tener que  $\{X_n; n \geq 0\}$  converge uniformemente en  $[0, T]$  casi seguramente.  $\square$

Con estas mismas hipótesis también podemos demostrar la existencia de una única solución trayectorial, es decir, si tenemos dos soluciones fuertes  $X$  y  $Y$ , éstas son indistinguibles

$$P(X_t = Y_t, \text{ para todo } t \geq 0) = 1.$$

A partir de aquí podríamos estudiar ecuaciones con coeficientes más generales o, modificando las hipótesis, encontrar otras propiedades de la solución, como por ejemplo, la existencia de momentos, o regularidad con respecto a la condición inicial o al tiempo.

Fijémonos que la condición de Lipschitz (al menos localmente) es necesaria para la unicidad. Tomando el ejemplo de [14], si consideramos  $\alpha \in (0, 1)$ , la ecuación

$$Z_t = \int_0^t |Z_s|^\alpha ds,$$

tiene las soluciones  $Z \equiv 0$  y  $Z_t = (1 - \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}(t - s)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ ,  $0 \leq s \leq t$ . En esta misma referencia se observa cómo sin la hipótesis de crecimiento lineal podemos dar una ecuación sin solución global.

Si el lector está interesado en resultados más generales puede leerse los libros [12] o [23].

## 6. APLICACIONES A OTROS CAMPOS CIENTÍFICOS

Aparte de las matemáticas, el movimiento Browniano tiene muchas aplicaciones a otros campos de la ciencia, como por ejemplo, la ingeniería, la biología, la geología, etc. Aquí introduciremos dos aplicaciones muy importantes, una dentro del campo de la física y otra dentro de la economía.

**6.1. Movimiento de partículas en un fluido.** Existen numerosas referencias donde el lector puede encontrar la presentación del movimiento de partículas en un fluido (ver, por ejemplo, [10], [15], [18], [22], [26], y la bibliografía que contienen estas referencias).

En el caso que estamos considerando lo más habitual en física sería resolver la ecuación de Fokker-Planck que es una ecuación estocástica con derivadas parciales. No analizaremos esta ecuación porque es demasiado compleja para estudiarla en un artículo divulgativo. En cambio, si podemos analizar el proceso de Ornstein-Uhlenbeck y aplicarlo al problema físico de una partícula en un fluido (de gran tamaño comparándola con las moléculas del fluido).

*6.1.1. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck.* Sea un proceso estocástico  $\{\theta_t, t \geq 0\}$  satisfaciendo la ecuación diferencial

$$(6.7) \quad d\theta_t = \lambda(\mu - \theta_t)dt + \sigma dB_t,$$

con  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\lambda, \sigma \in (0, +\infty)$ . Fijémonos que se trata de un proceso de Itô tal como lo hemos definido en (5.5). Aplicando una versión de la fórmula de Itô biparamétrica a la función  $f(t, x) = xe^{\lambda t}$  con condición inicial  $\theta_0$  obtenemos

$$\begin{aligned} f(t, \theta_t) &= \theta_t e^{\lambda t} = \theta_0 + \int_0^t [\theta_s \lambda e^{\lambda s} + e^{\lambda s} \lambda(\mu - \theta_s)] ds + \int_0^t e^{\lambda s} \sigma dB_s \\ &= \theta_0 + \mu \lambda \int_0^t e^{\lambda s} ds + \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dB_s = \theta_0 + \mu(e^{\lambda t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dB_s, \end{aligned}$$

y aislando  $\theta_t$  encontramos:

$$(6.8) \quad \theta_t = \theta_0 e^{-\lambda t} + \mu(1 - e^{-\lambda t}) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s.$$

Sea  $\Pi_n$  una partición del intervalo  $[0, t]$ , definida como  $\Pi_n = \{t_0^n = 0 \leq t_1^n \leq \dots \leq t_{k_n}^n = t\}$  tal que  $|\Pi_n| \rightarrow 0$  cuando  $n$  tiende a infinito. Entonces, utilizando la integral de Itô podemos escribir

$$\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} e^{-\lambda(t-t_{j-1}^n)} (B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}),$$

y ello es una distribución Gaussiana porque es límite de la suma de variables aleatorias independientes y con distribución Gaussiana. Por lo tanto, el proceso  $\theta_t$  definido en (6.8) tiene distribución Gaussiana. Como la integral de Itô es centrada, el valor de su media es

$$\mathbf{E}(\theta_t) = \theta_0 e^{-\lambda t} + \mu(1 - e^{-\lambda t}) + \sigma \mathbf{E} \left[ \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s \right] = \mu + (\theta_0 - \mu)e^{-\lambda t}$$

y su covarianza, por ejemplo para  $s \leq t$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(\theta_s, \theta_t) &= \mathbf{E}[(\theta_s - \mathbf{E}(\theta_s))(\theta_t - \mathbf{E}(\theta_t))] = \sigma^2 \mathbf{E} \left[ \int_0^s e^{-\lambda(s-r)} dB_r \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} dB_r \right] \\ &= \sigma^2 e^{-\lambda(t+s)} \left( \mathbf{E} \left[ \left( \int_0^s e^{\lambda r} dB_r \right)^2 \right] + \mathbf{E} \left[ \int_0^s e^{\lambda r} dB_r \int_s^t e^{\lambda r} dB_r \right] \right), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la partición de la integral sobre  $[0, t]$  en  $[0, s]$  y  $[s, t]$ . Ahora, la isometría de la integral estocástica nos permite dar su covarianza

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(\theta_s, \theta_t) &= \sigma^2 e^{-\lambda(t+s)} \int_0^s e^{2\lambda r} dr = \frac{\sigma^2}{2\lambda} e^{-\lambda(t+s)} [e^{2\lambda s} - 1] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\lambda} e^{-\lambda(t+s)} [e^{2\lambda(s \wedge t)} - 1]. \end{aligned}$$

Así,

$$\theta_t \sim N \left( \mu + (\theta_0 - \mu)e^{-\lambda t}, \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) \right).$$

Los parámetros de este proceso pueden ser interpretados de la forma siguiente:  $\mu$  es la media asintótica del proceso;  $\lambda$  la tendencia de retornar a la media (propiedad *mean-reverting*), es decir, la intensidad con que el proceso reacciona a las perturbaciones; y  $\sigma$  la intensidad del ruido, similar a la varianza de un movimiento Browniano.

Si observamos un movimiento Browniano  $B_t$ , como su varianza es  $t$ , cuando el tiempo tiende a infinito su varianza también lo hará, en cambio con la del proceso de Ornstein-Uhlenbeck no ocurre lo mismo. En este proceso con el paso del tiempo las trayectorias tienden hacia la media y lo hacen más rápido para valores de  $\lambda$  mayores (de aquí la importancia de la propiedad *mean-reverting*).

*6.1.2. Aplicación a la física de fluidos. Ecuación de Langevin.* Ahora consideraremos el problema que dio lugar a la descripción matemática del movimiento Browniano. Supongamos que tenemos una partícula de masa  $m$  inmersa en un fluido compuesto de moléculas mucho más pequeñas. El movimiento es debido a las colisiones aleatorias con las moléculas del fluido provocadas a la vez por las fluctuaciones de la densidad. Einstein estudió este movimiento en [9] desde un punto de vista probabilístico, obteniendo la ecuación diferencial para la densidad de partículas  $p(t, x)$ :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad t > 0,$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión. Si en el momento inicial la partícula se encuentra en  $y \in \mathbb{R}^3$ , la solución será

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp \left( -\frac{\|x - y\|^2}{2Dt} \right),$$

que es la densidad de una Gaussiana. Einstein [9] y Smoluchowski [29] demostraron que  $D = K_B T / \gamma$ , donde  $K_B$  es la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura y  $\gamma$  el coeficiente de fricción, y por la ley de Stokes  $\gamma = 6\pi\eta r$ , siendo  $\eta$  la viscosidad del líquido y  $r$  el radio de la partícula.

El problema de la teoría de Einstein es que no nos proporciona una teoría dinámica. Estas primeras formulaciones dinámicas son debidas a Langevin y Ornstein y

Uhlenbeck en los años 30 del siglo pasado. La segunda ley de Newton implica que el movimiento de la partícula cumple la siguiente ecuación:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(t),$$

donde  $v(t)$  es la velocidad y  $F(t)$  es la fuerza instantánea ejercida sobre ella. Se observó experimentalmente que la fuerza puede describirse mediante dos contribuciones, una dominada por la fricción que ejerce el fluido,  $-\gamma v(t)$ , y otra que es un término estocástico debido a las fluctuaciones aleatorias,  $\xi(t)$ . Por lo tanto, la ecuación del movimiento, llamada *ecuación de Langevin* es:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -\gamma v(t) + \xi(t).$$

Consideremos que la parte estocástica es un ruido blanco Gaussiano, es decir, que  $\xi(t)$  es una distribución Gaussiana con variables no correlacionadas (por esto se llama blanco) con momentos:

$$\mathbf{E}[\xi(t)] = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{E}[\xi(t_1)\xi(t_2)] = K\delta(t_1 - t_2),$$

donde  $K$  es una medida de la intensidad de la fuerza y

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 0, \\ 0, & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

La delta de Dirac aparece porque no existe correlación entre impactos en distintos instantes de tiempo y ello es debido a que en un intervalo de tiempo pequeño respecto a la escala característica del proceso hay muchísimas colisiones y no puede haber memoria entre ellas. Con todo ello podemos suponer que  $\xi(t)dt = dB_t$  y entonces la ecuación de Langevin queda como

$$dv(t) = -\frac{\gamma}{m}v(t)dt + \frac{1}{m}dB_t.$$

Estamos en un espacio de dimensión 3 pero de hecho tenemos un sistema de tres ecuaciones diferenciales estocásticas unidimensionales desacopladas y podemos considerar cada componente por separado. Así, lo que tenemos es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck (6.7) con  $v(t) = \theta_t$  y  $\mu = 0$ ,  $\lambda = \frac{\gamma}{m}$  y  $\sigma = \frac{1}{m}$ . Finalmente utilizando lo probado para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck podemos dar su expresión (6.8),

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t/m} + \frac{1}{m} \int_0^t e^{-\frac{\gamma(t-s)}{m}} dB_s,$$

con

$$\mathbf{E}[v(t)] = v_0 e^{-\gamma t/m} \quad \text{y} \quad \mathbf{Cov}(v(s), v(t)) = \frac{C}{2m\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m}(t+s)} \left( e^{2\frac{\gamma}{m}(s \wedge t)} - 1 \right).$$

**6.1.3. Teorema de fluctuación-disipación.** En mecánica estadística clásica, el teorema de equipartición de la energía relaciona la temperatura de un sistema con las energías de las moléculas. En este caso particular, con un único grado de libertad en una dimensión, el equilibrio se expresa como  $\langle E \rangle_{eq} = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle_{eq} = \frac{K_B T}{2}$ , y de esta forma  $\langle v^2 \rangle_{eq} = \frac{K_B T}{m}$ . De aquí podremos deducir la fuerza aleatoria  $\xi(t)$  que actúa sobre la partícula. Calculemos primero  $\langle v^2(t) \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle v^2(t) \rangle &= \mathbf{E}[v(t)^2] = \mathbf{E}[v(t)]^2 + \mathbf{Var}(v(t)) = v_0^2 e^{-2\gamma t/m} + \frac{C}{2m\gamma} \left( 1 - e^{-2\frac{\gamma}{m}t} \right) \\ &= \left( v_0^2 - \frac{C}{2m\gamma} \right) e^{-\frac{2\gamma t}{m}} + \frac{C}{2m\gamma}. \end{aligned}$$

Como consecuencia de que el equilibrio no depende del tiempo, el primer término debe anularse y entonces por el teorema de equipartición obtenemos

$$\langle v_0^2 \rangle_{eq} = \frac{C}{2m\gamma} = \frac{K_B T}{m} \quad \implies \quad C = 2K_B T \gamma.$$

Este resultado se conoce como teorema de fluctuación-disipación. Entonces,

$$\langle \xi(t_1), \xi(t_2) \rangle = \mathbf{E}[\xi(t_1)\xi(t_2)] = 2K_B T \gamma \delta(t_1 - t_2),$$

y, por lo tanto,

$$v(t) \sim N \left( v_0 e^{-\gamma t/m}, \frac{K_B T}{m} \left( 1 - e^{-2\gamma t/m} \right) \right).$$

Si ahora se continuara con el cálculo del desplazamiento cuadrático (una de las magnitudes que más se observa en los experimentos), hallaríamos entonces el coeficiente de difusión tal como hicieron Einstein y Smoluchowski en [9] y [29], respectivamente.

**6.2. Modelo de Black y Scholes.** No resulta fácil explicar este modelo si no ampliamos un poco la introducción de este artículo. El problema tratado por Black y Scholes en [3] es la evaluación y la cobertura de una opción de tipo europeo sobre una acción que no reparte dividendos. Para escribir esta aplicación nos hemos basado en el libro de Lamberton y Lapeyre [13] (lectura muy recomendable para introducirse en las finanzas).

*6.2.1. Descripción del modelo.* El modelo propuesto por Black y Scholes para describir la evolución de los precios es un modelo a tiempo continuo con un activo de riesgo (una acción de precio  $S_t$  al instante  $t$ ) y un activo sin riesgo (de precio  $S_t^0$  al instante  $t$ ). Se asume que la evolución de  $S_t^0$  sigue la siguiente ecuación diferencial:

$$dS_t^0 = r S_t^0 dt, \quad r > 0.$$

Ello significa que la tasa de interés sobre el mercado de inversión sin riesgo es constante e igual a  $r$ . Asumiremos también que  $S_0^0 = 1$ . Entonces tenemos que  $S_t^0 = e^{rt}$ ,  $\forall t \geq 0$ . En cambio, la evolución de  $S_t$  asumiremos que está modelizada por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$(6.9) \quad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t),$$

siendo  $\mu$  y  $\sigma$  dos constantes y  $\{B_t, t \geq 0\}$  un movimiento Browniano.

El modelo es estudiado en el intervalo  $[0, T]$  donde  $T$  es la fecha de vencimiento de la opción a tratar. Usando la fórmula de Itô, la ecuación recién introducida puede escribirse explícitamente como

$$(6.10) \quad S_t = S_0 \exp \left\{ \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t \right\},$$

donde  $S_0$  es el precio observado en el instante 0. Tenemos que el proceso  $\{S_t, t \geq 0\}$  satisface la ecuación (6.9) si y solo si el proceso  $\{\ln S_t, t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano. Entonces, el proceso  $\{S_t, t \geq 0\}$  satisface las propiedades siguientes:

- Trayectorias continuas.
- Independencia de los incrementos relativos, es decir,  $(S_t - S_s)/S_s$ , con  $s \leq t$ , es independiente a la  $\sigma$ -álgebra  $\sigma\{S_u, u \leq s\}$ .
- Estacionaridad de los incrementos relativos, es decir, la ley de  $(S_t - S_s)/S_s$ , con  $s \leq t$ , es la misma que la de  $(S_{t-s} - S_0)/S_0$ .

Una *estrategia* es definida por un proceso  $\{\phi_t, t \in [0, T]\}$  con  $\phi_t = (H_t^0, H_t)$  a valores en  $\mathbb{R}^2$  y adaptado a la filtración natural del movimiento Browniano. Las componentes  $H_t^0$  y  $H_t$  son las cantidades de activo sin riesgo y activo con riesgo, respectivamente, que hay en cartera. El valor de la cartera en el instante  $t$  será

$$(6.11) \quad V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

Diremos que una estrategia es *autofinanciada* si la pareja de procesos adaptados  $\{H_t^0, t \in [0, T]\}$  y  $\{H_t, t \in [0, T]\}$  cumplen

$$(6.12) \quad \int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty, \quad \text{casi seguramente}$$

y,  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u, \quad \text{casi seguramente.}$$

Utilizaremos la notación  $\hat{S}_t = e^{-rt} S_t$  para el precio actual del activo de riesgo. Un resultado sencillo que podemos obtener en una estrategia autofinanciada es que el valor de la cartera depende solamente de la cantidad de activo en riesgo que tenemos. No daremos la demostración de este resultado pero sí el enunciado (si el lector está interesado en su demostración miren la proposición 1.2 del capítulo 4 en [13]).

**PROPOSICIÓN 6.5.** *Sea  $\{\phi_t, t \in [0, T]\}$  un proceso adaptado a valores en  $\mathbb{R}^2$  satisfaciendo (6.12). Notemos  $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$ , con  $V$  definido en (6.11). Entonces,  $\phi$  define una estrategia autofinanciada si y solo si*

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\hat{S}_u, \quad \text{c.s.,} \quad \forall t \in [0, T].$$

**6.2.2. Algunos resultados de la teoría de la probabilidad.** Para poder abordar la aplicación de nuestro problema necesitamos dar algunos conceptos avanzados de probabilidades.

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Una probabilidad  $Q$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  diremos que es *absolutamente continua con respecto a  $P$*  si:

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad P(A) = 0 \implies Q(A) = 0.$$

El resultado que enunciaremos a continuación es una versión del teorema de Radon-Nikodym (ver, por ejemplo, una demostración en la sección 6.4 del libro de Quesada y Pardo [24] o el teorema 27.3 de [17]).

**TEOREMA 6.6.**  *$Q$  es absolutamente continua con respecto a  $P$  si y solamente si, existe una variable aleatoria  $Y$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  y a valores en  $[0, +\infty)$  cumpliendo que:*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad Q(A) = \int_A Y(\omega) dP(\omega).$$

Habitualmente decimos que  $Y$  es la densidad de  $Q$  con respecto a  $P$  y algunas veces lo escribiremos como  $\frac{dQ}{dP}$ .

Diremos que  $P$  y  $Q$  son *equivalentes* si cada una de ellas es absolutamente continua con respecto a la otra. Fijémonos que si  $Q$  es absolutamente continua con respecto a  $P$ , con densidad  $Y$ , entonces  $P$  y  $Q$  son equivalentes si y solamente si  $P(Y > 0) = 1$ .

Sea  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$  una filtración de un movimiento Browniano estándar  $\{B_t, t \in [0, T]\}$ . El resultado siguiente es conocido como *teorema de Girsanov* o *teorema de Cameron-Martin*.

**TEOREMA 6.7.** *Sea  $\{u_t, t \in [0, T]\}$  un proceso adaptado cumpliendo que  $\int_0^T u_t^2 dt < +\infty$  c.s. y tal que el proceso  $\{L_t, t \in [0, T]\}$  definido por*

$$L_t = \exp \left\{ - \int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 ds \right\}$$

*sea integrable con  $\mathbf{E}(L_t) = 1$ , para todo  $t \in [0, T]$ . Entonces, el proceso*

$$(6.13) \quad W_t = B_t + \int_0^t u_s ds, \quad t \in [0, T],$$

*es un movimiento Browniano con respecto a la probabilidad  $Q$  definida por  $\frac{dQ}{dP} = L_T$ .*

Para el caso  $u \equiv 1$  se puede encontrar una demostración en el teorema 4.7 de [27] y para el caso general consultar el teorema 18.8 en [28].

6.2.3. *Evaluación y cobertura de una opción de tipo europeo.* Volvamos al modelo introducido al inicio de la subsección. En particular, vamos a ver que existe una probabilidad equivalente a la inicial, bajo la cual, el precio actual  $\hat{S}_t = e^{-rt}S_t$  de la acción es integrable y tiene esperanza igual a 1.

Utilizando (6.9), tenemos que

$$(6.14) \quad d\hat{S}_t = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t = \hat{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t),$$

y consecuentemente, si escribimos  $W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$ , obtenemos

$$d\hat{S}_t = \hat{S}_t \sigma dW_t.$$

Gracias al teorema de Girsanov (teorema 6.7 con  $u_t = \frac{\mu - r}{\sigma}$ ) tenemos que existe una probabilidad  $Q$ , equivalente a  $P$ , bajo la cual,  $W$  es un movimiento Browniano.

*Evaluación de la opción.* A continuación evaluaremos opciones europeas. Una opción europea será definida por una variable aleatoria  $\mathcal{F}_T$ -medible y positiva. Habitualmente, tomará la forma  $f(S_T)$ , con  $f(x) = (x - K)_+$  para un *call* y  $f(x) = (K - x)_+$  para un *put*. Trataremos el caso del call (el caso del put es análogo).

**Definición 6.8.** Una estrategia  $\phi = \{(H_t^0, H_t), t \in [0, T]\}$  es admisible si es autofinanciada y si el valor actual  $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t \hat{S}_t$  de la cartera es positivo para todo  $t$  y tal que  $\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t$  es cuadrado integrable bajo  $Q$ .

Una opción puede *replicarse* si es posible definir una estrategia de inversión admisible tal que su valor final coincide con el valor inicial, en el caso del call, para cualquier posible evolución del mercado. Necesitaremos que la variable aleatoria sea cuadrado integrable bajo  $Q$  y en nuestro caso se cumple porque  $\mathbf{E}_Q(S_T^2) < +\infty$ , y ello implica que para un call se satisface.

El teorema que sigue nos da el precio de la opción y puede encontrarse una demostración muy detallada en [13] (ver teorema 3.2).

**TEOREMA 6.9.** *Para el modelo de Black y Scholes, toda opción definida por una variable aleatoria  $h$ , positiva,  $\mathcal{F}_T$ -medible y cuadrado integrable bajo la probabilidad  $Q$ , es replicable y su valor en el instante  $t$  de toda cartera replicable es dado por*

$$V_t = \mathbf{E}_Q \left( e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right).$$

Hemos usado en el enunciado el concepto de esperanza condicional, el cual es el siguiente. Consideremos un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y una sub- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{F}$ . Entonces, para toda variable aleatoria  $X$  integrable, existe c.s. una única variable aleatoria  $Y$  integrable y medible con respecto a  $\mathcal{A}$  tal que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbf{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbf{E}(Y \mathbb{1}_A).$$

A  $Y$  se la denomina esperanza condicional de  $X$  con respecto a  $\mathcal{A}$  y se escribe como  $\mathbf{E}(X | \mathcal{A})$ .

Veamos en un caso particular cómo este teorema nos permite dar explícitamente el valor  $V_t$  de la opción en el instante  $t$ . Supongamos que la variable aleatoria  $h$  es de la forma  $h = f(S_T)$ . Así, utilizando la expresión explícita (6.10) de  $S_T$  y la relación entre  $B$  y  $W$  dada por (6.13), tenemos que

$$V_t = \mathbf{E}_Q \left( e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{E}_Q \left( e^{-r(T-t)} f \left( S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \right) | \mathcal{F}_t \right).$$

Ya que  $S_t$  es una variable aleatoria  $\mathcal{F}_t$ -medible y, bajo  $Q$ ,  $W_T - W_t$  es independiente de  $\mathcal{F}_t$ , existe un resultado de esperanza condicional (ver, por ejemplo, la proposición 2.5 en [13]) que nos permite escribir:

$$V_t = G(t, S_t),$$

con

$$G(t, x) = \mathbf{E}_Q \left( e^{-r(T-t)} f \left( x e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \right) \right).$$

En este caso general,  $W_T - W_t$  es, bajo  $Q$ , una variable aleatoria Gaussiana centrada y de varianza  $T - t$ , y entonces

$$\begin{aligned} G(t, x) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\left(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y}\right) e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\left(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z}\right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos realizado el cambio de variable  $y = z\sqrt{T-t}$ .

Consideremos ahora un call, es decir,  $f(x) = (x - K)_+$ . Entonces, repitiendo el argumento para este caso particular, obtenemos que

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left( e^{-r(T-t)} \left( xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K \right)_+ \right) \\ &= \mathbf{E} \left[ \left( xe^{\sigma\sqrt{\lambda}Z - \frac{\sigma^2\lambda}{2}} - Ke^{-r\lambda} \right)_+ \right], \end{aligned}$$

siendo  $Z \sim N(0, \lambda)$  y  $\lambda = T - t$ . Fijémonos que

$$xe^{\sigma\sqrt{\lambda}Z - \frac{\sigma^2\lambda}{2}} - Ke^{-r\lambda} \geq 0 \implies \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}} + Z \geq 0.$$

Sumando y restando  $\sigma\sqrt{\lambda}$  al último término y usando la notación

$$\theta_1 = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}} \quad \text{y} \quad \theta_2 = \theta_1 - \sigma\sqrt{\lambda},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} G(t, x) &= \mathbf{E} \left[ \left( xe^{\sigma\sqrt{\lambda}Z - \frac{\sigma^2\lambda}{2}} - Ke^{-r\lambda} \right) \mathbb{1}_{\{Z+\theta_2 \geq 0\}} \right] \\ &= \int_{-\theta_2}^{+\infty} \left( xe^{\sigma\sqrt{\lambda}z - \frac{\sigma^2\lambda}{2}} - Ke^{-r\lambda} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\theta_2} \left( xe^{-\sigma\sqrt{\lambda}z - \frac{\sigma^2\lambda}{2}} - Ke^{-r\lambda} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= x \int_{-\infty}^{\theta_2} e^{-\sigma\sqrt{\lambda}z - \frac{\sigma^2\lambda}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - Ke^{-r\lambda} \int_{-\infty}^{\theta_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= x \int_{-\infty}^{\theta_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - Ke^{-r\lambda} \int_{-\infty}^{\theta_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad para la primera integral hemos realizado el cambio de variable  $y = z + \sigma\sqrt{\lambda}$ .

*Cobertura de la opción.* A continuación vamos a mostrar de manera breve y resumida que también puede darse explícitamente el valor de la cartera de cobertura. Asumamos que  $h = f(S_T)$ , entonces una cartera replicable debe tener a cada instante  $t$  un valor actual igual a

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} G(t, S_t),$$

donde  $G$  está definida en el apartado anterior y hemos utilizado además la proposición 6.5. Asumiendo cierta regularidad sobre  $f$ , que se satisfara en el caso de un call, tenemos que

$$\tilde{G}(t, x) = e^{-rt} G(t, xe^{rt}) \implies \tilde{V}_t = \tilde{G}(t, \hat{S}_t),$$

donde  $\hat{S}$  está definida en (6.14). Aplicando la fórmula de Itô para  $t < T$  y realizando algunos cálculos podemos obtener

$$\tilde{G}(t, \hat{S}_t) = \tilde{G}(0, \hat{S}_0) + \int_0^t \sigma \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(u, \hat{S}_u) \hat{S}_u dW_u = \tilde{G}(0, \hat{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(u, \hat{S}_u) d\hat{S}_u.$$

El candidato natural como proceso de cobertura  $H_t$  sería

$$H_t = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(t, \hat{S}_t) = \frac{\partial G}{\partial x}(t, S_t).$$

Asumiendo  $H_t^0 = \tilde{G}(t, \hat{S}_t) - H_t \hat{S}_t$ , entonces la cartera  $(H_t^0, H_t)$  es autofinanciada y su valor actual en el instante  $t$  es  $\tilde{V}_t = \tilde{G}(t, \hat{S}_t)$ . En el caso particular de un call tenemos que

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

lo que nos permite finalmente dar explícitamente la cobertura.

## REFERENCIAS

- [1] Arnold, L., *Stochastic differential equations: theory and applications*, J. Wiley and Sons, Nueva York, 1974.
- [2] Bachelier, L., *Théorie de la spéculation*, Ann. Sci. École Norm. Sup **17** 21-86, París, 1900.
- [3] Black, F., Scholes, M., *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy **81** 635-654, 1973.
- [4] Blanco Castañeda, L., *Probabilidad*, Editorial Universidad Nacional de Colombia, 2a Edición, Bogotá, 2010.
- [5] Brown, R., *A Brief Account of Microscopical Observations Made in the Months of June, July and August 1827, on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies*, Philosophical Magazine **4** 161-173, Londres, 1828.
- [6] Brzeźniak, Z., Zastawniak, T., *Basic stochastic processes. A course through exercises*, Springer-Verlag, Londres, 2005.
- [7] Chung, K.L., *A Course in Probability Theory*, Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [8] Dvoretzky, A., Erdős, P., Kakutani, S., (1961): *Nonincrease everywhere of the Brownian motion process*, Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat & Probability **2** 103-116, 1961.
- [9] Einstein, A., *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, Annalen der Physik **322** (8) 549-560, 1905.
- [10] Hida, T., *Brownian motion*, Springer-Verlag, Nueva York, 1980.
- [11] Itô, K., *Stochastic integral*, Proc. Imperial Acad. Tokyo **20** (8) 519-524. 1944.
- [12] Karatzas, I., Shreve, S.E., *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer, Nueva York, 2000.
- [13] Lamberton, D., Lapeyre, B., *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses, París, 1997.
- [14] León, J.A., *Integración estocástica con respecto al movimiento Browniano*. Matemáticas, Enseñanza Universitaria **Vol XIV** (2) 71-109, Escuela Regional de Matemáticas, Cali, 2006.
- [15] Mircea, G., *Stochastic calculus. Applications in Science and Engineering*, Birkäuser, Boston, 2002.
- [16] Moret, S., Nualart, D., *Generalization of Itô's formula for smooth non-degenerate martingales*, Stochastic Process. Appl. **91** (1) 115-149, 2001.
- [17] Munroe, M.E., *Measure and integration*, 2nd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
- [18] Nelson, E., *Dynamical theories of Brownian motion*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1967.
- [19] Nualart, D., *The Malliavin calculus and related topics*, 2nd Edition, Springer, 2006.
- [20] Nualart, D., Sanz-Solé, M., *Curs de probabilitats*, Promociones y Publicaciones Universitarias, Universitat de Barcelona, 1990.
- [21] Paley, R.E., Wiener, A.C., Zygmund, A., *Note on random functions*, Math. Z. **37** 647-668, 1933.
- [22] Pi, I., *El movimiento Browniano y su aplicación al cálculo estocástico*, Trabajo final de grado de la Facultat de Matemàtiques e Informàtica de la Universitat de Barcelona, 2019.
- [23] Protter, P., *Stochastic integration and differential equations*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [24] Quesada, V., Pardo, L., *Curso superior de probabilidades*, PPU, Barcelona, 1987.
- [25] Revuz, D., Yor, M., *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer, Berlin, 2005.
- [26] Rojas Bonilla, J.R., *La fórmula d'Itô en la resolució de procesos de difusió con aplicaciones en física*, Trabajo final de grado de la Facultat de Ciències de la Escuela Politécnica Nacional de Quito, 2016.
- [27] Sanz-Solé, M., *An Introduction to stochastic calculus*, Curso de Máster, Universitat de Barcelona, 2021.

- [28] Schilling, R.L., Partzsch, L., *Brownian Motion: an introduction to stochastic processes*, 2nd Edition, De Gruyter, 2014.
- [29] Smoluchowski, M., *Zur kinetischen theorie der Brownschen molekularebewegung und der suspensionen*, *Annalen der Physik* **21** (14) 756-780, 1906.
- [30] Shreve, S.E., *Stochastic calculus for finance II. Continuous-Time models*, Springer-Verlag, Nueva York, 2004.
- [31] Tucker, H.G., *A graduate course in probability*, Dover publications, Nueva York, 1999.
- [32] Tudor, C., *Procesos estocásticos*, Publicación de la Sociedad Matemática Mexicana, México. 2002.

*David Márquez-Carreras*

Facultat de Matemàtiques i Informàtica,

Universitat de Barcelona,

Gran Via 585, 08007-Barcelona.

e-mail: davidmarquez@ub.edu

## LAS MATEMÁTICAS BABILÓNICAS DE 4000 AÑOS

GABRIEL LÓPEZ GARZA

RESUMEN. El presente artículo es una introducción a la aritmética del periodo “viejo babilonio” de la antigua Mesopotamia. Se estudia el sistema numérico sexagesimal babilonio y las operaciones básicas en este sistema. Finalmente, se describe y analiza la tableta Plimpton 322, la cual contiene ternas pitagóricas no triviales.

### 1. INTRODUCCIÓN

El periodo conocido como viejo babilonio se ubica entre 2000 y 1600 años antes de nuestra era, es decir, hace aproximadamente 4000 años. Para situarnos históricamente, baste recordar que el rey Hammurabi vivió entre 1810 y 1750 a. n. e.

Como se sabe, la escritura babilónica fue registrada en tabletas de barro. Si bien es difícil establecer exactamente cuándo fueron hechas, los especialistas están más o menos de acuerdo de que las tabletas que se citarán en el presente artículo corresponden a la época mencionada, sin embargo provienen, en su conjunto, de varios lugares situados en una extensa zona geográfica, mayormente del actual Irak.

No menos fascinante que las tabletas mismas y su contenido, es la forma en la que han llegado a nosotros. En la actualidad existen cientos de miles de tabletas (algunos miles en el Museo Británico), muchas de ellas fueron vendidas por toda Europa y Estados Unidos por aventureros y comerciantes que las sustrajeron o compraron, nadie sabe cómo ni a quién. Por ejemplo, muchos objetos de la colección de Plimpton, quien fue un millonario norteamericano cuya colección donó póstumamente a la Universidad de Columbia, cuenta entre sus objetos más afamados la tableta que contiene ternas pitagóricas no triviales, denominada Plimpton 322, la cual, entre otras tabletas, fue comprada a un aventurero de quien se dice que la serie de películas de *Indiana Jones* está basada en el mismo personaje.

En realidad es difícil saber la procedencia de muchos textos, al respecto afirma Friberg [1]:

*En un mundo ideal, no existirían textos de “procedencia desconocida” que vinieran del mercado de antigüedades. En el mundo real, donde tales textos existen, algunas personas afirman con entereza que los académicos serios no deberían tener nada que ver con ellos, por diversas razones idealizadas. Sin embargo, hay que tener en cuenta que gran parte de la mayoría de las colecciones del patrimonio cultural no europeo, incluso los de los mayores museos de Europa y Estados Unidos, son textos de “procedencia desconocida” del mercado de antigüedades. Así, por ejemplo, las obras clásicas sobre matemáticas cuneiformes, los “Textos matemáticos de Keilschrift” por Neugebauer, 1935-1937, y “Textos Cuneiformes matemáticos” de Neugebauer y Sachs, 1945, nunca habrían aparecido si sus autores se hubieran negado a trabajar con textos sin procedencia conocida.*

En cuanto a la bibliografía mencionada en la cita anterior, quizá el libro más destacado sobre matemática en textos cuneiformes es el mencionado de Neugebauer y Sachs [3]. Afortunadamente la digitalización de tal ejemplar ha sido donada a la fabulosa biblioteca digital *Internet Archive* por lo que me ha sido posible escribir este

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 01A17.

*Palabras clave.* Historia de las matemáticas babilónicas, Aritmética.

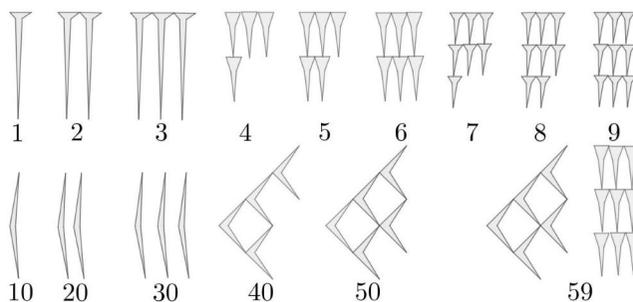


FIGURA 1. Representación de los numerales 1 a 9, 10, 20, 30, 40, 50 y 59 en escritura cuneiforme.

artículo y por lo cual recomiendo urgentemente al lector que acceda a tal sitio si no lo conoce<sup>[1]</sup>.

La matemática descrita en el libro de Neugebauer y Sachs requeriría de varios artículos para ser solamente resumida, pero además de este libro, hay algunos textos más modernos, baste mencionar como ejemplo los libros de Gonçalves<sup>[2]</sup> y el libro de Friberg<sup>[3]</sup>, ya mencionado. Algunos datos e información de tales libros será incluida en el presente artículo como será mencionado oportunamente.

La sección<sup>[2]</sup> trata someramente de las operaciones básicas que conocían los antiguos babilonios y algunas aplicaciones que sorprendentemente para la época eran conocidas, por ejemplo una aproximación de la fórmula para el tiempo que se requiere para duplicar el capital inicial con interés compuesto, así es, ¡hace 4000 años! La sección<sup>[3]</sup> está dedicada al estudio de las ternas pitagóricas grabadas en la famosa tableta Plimpton 322. En esta sección se describe el contenido de la tableta y se analiza la posible manera en que fueron construidas las ternas pitagóricas así como se estudian los llamados “errores” contenidos en ella. La sección<sup>[4]</sup> trata someramente de la importancia histórica de la aritmética babilonia.

## 2. ARITMÉTICA CUNEIFORME

El sistema de numeración babilónico utiliza solamente dos signos, uno para las decenas que se denotará “ $\llcorner$ ” y otro para las unidades que se denotará “ $\llcorner$ ”. Utilizaban menos signos que el sistema maya,<sup>[2]</sup> ya que los babilonios del periodo viejo babilonio, no utilizaban ningún signo para el “cero”. El no contar con un signo para el cero, a pesar<sup>[3]</sup> de que su sistema también es posicional, acarrea ciertos problemas, como se verá, aunque a veces para denotar el cero se dejaba un espacio en blanco, digamos “para comodidad del lector”. Con los signos se agrupaban hasta nueve unidades y hasta cinco decenas, es decir, con los signos se representaban los números de 1 a 59, por ejemplo:  $59 = \llcorner$  aunque existían patrones de representación para que los números fueran fáciles de leer como se muestra en la figura<sup>[1]</sup>.

A partir de 60 se usaba el sistema posicional es decir  $1 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 = \llcorner$  donde con “ $\llcorner$ ” se enfatiza, cuando se requiere, un espacio en blanco, uso que se hará a lo largo del presente artículo<sup>[4]</sup>. Para nuestros propósitos se empleará la siguiente convención ya que es la mayormente aceptada por los especialistas: los números  $a_n, a_{-n}$  representan

<sup>1</sup>El libro de Neugebauer y Sachs puede ser encontrado en el sitio *Internet Archive*:

<https://archive.org/details/mathematicalcune0000neug/page/n5/mode/2up>

<sup>2</sup>El sistema maya, como se sabe, usa tres símbolos: puntos para las unidades, rayas para grupos de cinco unidades y el cero.

<sup>3</sup>Un símbolo para el cero en Babilonia aparece hasta los textos del periodo seleucida 312 a 63 a. n. e.

<sup>4</sup>Una página donde hay un convertidor del sistema babilonio (del periodo seleucida) a nuestro sistema decimal puede encontrarse en:

<https://www.dcode.fr/babylonian-numbers>

el equivalente a nuestros dígitos y que para los babilonios son los números de 1 a 60, el número

$$a_n \cdot 60^n + a_{n-1} \cdot 60^{n-1} + \dots + a_0 \cdot 60^0 + a_{-1} \cdot \frac{1}{60^1} + a_{-2} \cdot \frac{1}{60^2} + \dots + a_{-n} \cdot \frac{1}{60^n} + \dots$$

se representará como

$$a_n a_{n-1} \dots a_0 ; a_{-1} a_{-2} \dots$$

cuando se requiera brevedad, aunque a veces las fracciones se representarán como

$$\frac{a_{-1}}{60^1} \frac{a_{-2}}{60^2} \dots \frac{a_{-n}}{60^n} \dots$$

y la parte entera como

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$$

para mantener la claridad. El cero posicional se representa con el signo para el espacio visible, como ya se mencionó  $0 \stackrel{def}{=} \_$ . Además, el punto y coma “;”, se usará para separar los enteros de los números fraccionarios sexagesimales. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 360 &= 6 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 = 6, \_ \\ 365 &= 6 \cdot 60^1 + 5 \cdot 60^0 = 6, 5 \\ 2024 &= 33 \cdot 60^1 + 44 \cdot 60^0 = 33, 44 \\ \frac{1}{2} &= 30 \cdot \frac{1}{60} = \_ ; 30 \end{aligned}$$

**2.1. Adición y multiplicación.** Los babilonios, aún antes del periodo viejo babilonio eran excelentes aritméticos y por supuesto sabían sumar, multiplicar y dividir<sup>5</sup>.

En general, de acuerdo con Friberg *op. cit.* p. 6 no existen muchos textos del viejo babilonio donde se muestren paso a paso los algoritmos usados dado lo limitado del tamaño de las tabletas, por lo que cualquier afirmación de los algoritmos usados es puramente conjetural, desde mi punto de vista. Por ejemplo de la tableta de la colección de Martin Schøyen (MS): MS 2792 # 2, donde entre otras operaciones se requiere la suma de 4, 30 + 8  $\_$  + 6, 40 + 7, 30 y donde solo aparece el resultado: 26, 40.

Sin embargo no es difícil concluir que para la suma y la resta, dado que se trata de un sistema posicional, debían proceder exactamente como nosotros, es decir agrupando las unidades y reagrupando cuando la suma excede 60:

$$\begin{aligned} 4, 30 + 8, \_ + 6, 40 + 7, 30 &= (4 + 8 + 6 + 7) \cdot 60^1 + (30 + 0 + 40 + 30) \cdot 60^0 \\ &= 25 \cdot 60^1 + (1 \cdot 60^1 + 40 \cdot 60^0) \cdot 60^0 \\ &= (25 + 1) \cdot 60^1 + 40 \cdot 60^0 \\ &= 26, 40 \end{aligned}$$

Como ejemplos de ejercicios de multiplicación para niños en edad escolar, Friberg *op. cit.* menciona los textos de la colección de Martin Schøyen en las tabletas MS 2728, 2729 y 3944, por ejemplo en la tableta MS 2729 donde se presentan las multiplicaciones  $30 \times 35 = 17, 30$ ,  $40 \times 35 = 23, 20$  y  $45 \times 40 = 30, \_$ . Por ejemplo, la multiplicación  $45 \times 40$  podría haber sido realizada como sigue:

$$\begin{aligned} 45 \cdot 40 &= (40 \cdot 40) + (5 \cdot 40) \\ &= (26 \cdot 60^1 + 40) + (3 \cdot 60^1 + 20) \\ &= (26 + 3) \cdot 60^1 + (40 + 20) \\ &= 29 \cdot 60^1 + 1 \cdot 60^1 \\ &= 30 \cdot 60^1 = 30, \_ \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Desde tiempos anteriores al viejo babilonio existen objetos de 3350-3200 a.n.e., con elaborados cálculos matemáticos vea por ejemplo [1] p. 243].

Pero otro desconcertante procedimiento que parece haber sido usado (vea Friber [1] p. 7), fue aprovechar las ventajas del punto flotante y por ejemplo, dado que 40 es  $2/3$  de 60 pudieron haber realizado el siguiente truco:

$$\begin{aligned} 45 \cdot 40 &\stackrel{?}{=} 45 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{45 \cdot 2}{3} \\ &= \frac{90}{3} = 30 \end{aligned}$$

para llegar al resultado correcto, se debe recordar que se usó un truco y en lugar de 30 se debe escribir  $30, \_ = 30 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0$ , y así, se habrían aprovechado las facilidades que otorga del punto flotante para las multiplicaciones. Curiosamente, en innumerables ocasiones no usaban ninguna notación, lo que podría acarrear confusiones.

Observe que dado que 30 es  $1/2$  de 60, la multiplicación  $35 \cdot 30$  pudo haberse realizado como

$$\begin{aligned} 35 \cdot 30 &\stackrel{?}{=} 35 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 17 + \frac{1}{2} \\ &= 17;30 \\ &\stackrel{!}{=} 17, 30 \end{aligned}$$

se debe recordar que es necesario mover el punto flotante (en nuestra notación: mover el punto y coma) para obtener el resultado correcto

$$35 \cdot 30 = 17 \cdot 60^1 + 30 \cdot 60^0 = 17, 30.$$

En realidad, en el viejo babilonio no usaba ningún signo para separar fracciones de enteros, por lo que el significado real de la operación debía establecerse a partir del contexto.

Esta técnica de multiplicación puede sorprendernos un poco ya que no la usamos en la actualidad, en el sistema decimal solo sirve con potencias de 5 y de 2 (dado que la base 10, puede escribirse como  $10 = 2 \cdot 5$ ). Por ejemplo, si alguien quisiera multiplicar 35 por 5 puede hacer el siguiente truco:

$$\begin{aligned} 35 \cdot 5 &\stackrel{?}{=} 35 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 17 + \frac{1}{2} = 17.5 \\ &\stackrel{!}{=} 175 \\ 35 \cdot 5 &= 175 \end{aligned}$$

Así es, estimado lector, en el sistema decimal en *términos algorítmicos* es lo mismo multiplicar por 5 que dividir por 2 y viceversa, multiplicar por 2 es lo mismo que dividir por 5 moviendo el punto flotante a conveniencia. Dada esta reciprocidad que existe en los sistemas posicionales, las tablas de multiplicar del periodo viejo babilonio incluyen recíprocos de una gran cantidad de números, por ejemplo ¡puede encontrarse la tabla de multiplicar de 44, 26, 40! Algunos ejemplos tomados del original se encuentran en el cuadro [1]. El carácter del número 44 26 40 que así aparece en las tablas sin ninguna indicación, queda revelado si escribimos con nuestra notación explícitamente el espacio y el punto y coma que requiere:

$$; \_, 44, 26, 40 = \frac{44}{60^2} + \frac{26}{60^3} + \frac{40}{60^4} = \frac{1}{3^4}.$$

Para los babilonios nuestro sistema decimal les habría parecido extremadamente impreciso y aburrido dada nuestra incapacidad de localizar exactamente números tan básicos como  $1/3^4 = 1/81$ , ya que nosotros representamos tal número como

44 26 40	
×1	44 26 40
×2	1 28 53 20
×3	2 13 20
×4	2 57 46 40
×5	3 42 13 20
×6	4 26 40
×7	5 11 06 40
⋮	⋮
×50	37 02 13 20
×44 26 40	32 55 18 31 06 40

CUADRO 1. Parte de la tabla de multiplicar de 1/81 o bien de  $44 \cdot 60^2 + 26 \cdot 60 + 40 = 160\,000$  incluida en la tableta MS 3974. La tableta completa incluye todos los productos de 1 a 20 y después los productos por 30 y de 10 en 10 hasta 50. Precaución: si escribe la transliteración de la tabla babilónica, no olvide colocar ceros, comas y punto y coma, en donde haga falta.

$0.\overline{0123456789}$ , es decir, con un desarrollo decimal que no termina nunca. Números con desarrollos infinitos en base sesenta eran evitados en lo posible.

Las tablas de multiplicar que se conocen de los antiguos babilonios son muy interesantes. Si usted alguna vez se había preguntado cuál será la tabla de multiplicar de 44, 26, 40 aquí se incluye parte de ella por cortesía de los viejos babilonios en el cuadro 1, la cual es parte de una tabla más completa de multiplicaciones [1, p. 362] la cual corresponde a la tableta MS 3974.

Tablas del viejo babilonio con los cuadrados de todos los números de 1 a 60 pueden verse<sup>6</sup> en [1, p. 45]. Aunque también tablas de multiplicaciones estándar son conocidas y un largo catálogo puede encontrarse en [3, p. 20 a 23] y en el apéndice 2, p. 362 del libro de Friberg *op. cit.*, donde puede encontrarse treinta y un fracciones de 60 y después en el orden que se presentarán, las tablas de multiplicar de 18, 16 40, 16, 15, 12 30, 12, 10, 9, 8 20, 8, 7 30, 7 12, 7, 6 40, 6, 5, 4, 3 45, 3 20, 3, 2 30, 2 24, 2 15, 2, 1 40, 1 30, 1 20, 1 15, 1 12. La notoria falta de la tabla de números tales como 19 y 17, es debido a que, obviamente, tales números no pueden escribirse de la forma  $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ , con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ , al ser primos, y por lo tanto,  $1/19$  no tiene expansión sexagesimal finita. Recuerde que la tabla es la representación en punto flotante del número y por lo tanto, si aparece la tabla de  $x$  puede verse también como la tabla de  $;x$  o  ${}_x$ , etcétera.

También es necesario aclarar que no aparece la tabla de 20 ya que este número es un tercio de 60 y por lo tanto su tabla puede ser sustituida por la tabla de  $1/3 = ;20$  sin mucho problema!, con el debido cuidado.

<sup>6</sup>Claro,  $60 \cdot 60 = 1$  lo cual aparece en las tablas babilónicas después de  $59 \cdot 59$ , simplemente como  $1 \cdot 1 = 1$ .

Así, en la aritmética babilonia antigua se diferencia entre tres tipos de números: a) los números llamados *regulares* que son de la forma  $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ , con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ ; b) los números *semiregulares* en donde aparece algún factor primo distinto de 2, 3, 5 pero incluyen potencias de alguno de estos números; c) los números *irregulares* que o bien son primos diferentes de 2, 3, 5 o solo tienen entre sus factores números distintos de estos.

Por supuesto, además de tablas de multiplicar de números regulares existen tablas de recíprocos, ya que, como puede deducirse de sus sistema de punto flotante, para dividir  $a/b$  multiplicaban  $a$  por el recíproco de  $b$ , es decir, multiplicaban  $a$  por la expansión sexagesimal de  $1/b$ , por lo que elaboraron tablas de recíprocos de números regulares, pero también incluían números semiregulares e irregulares (vea Friberg p. 8 y 9 *op. cit.*).

En la página 20 del libro de Neugenbauer *op. cit.* aparece un cuadro con la información de las tablas de multiplicación simple (*i. e.* un solo producto por línea) conocidas hasta 1945, donde da cuenta de las colecciones a las que pertenecían en ese tiempo, además del estado físico en que se encontraban. Tal cuadro, muestra 85 tablas de la colección MKT, además de 77 tablas más de otras colecciones. También se conocen tablas de recíprocos (*v. gr.* p. 4 Neugenbauer *op. cit.*) mayormente de números regulares, pero existen también de números irregulares (tableta YBC 10529). Finalmente, se conocen tablas de cuadrados y raíces cuadradas y cubos, Neugenbauer (p. 33) menciona y describe algunas de las tabletas conocidas en su época: 16 tabletas con cuadrados y 17 con raíces y 6 tablas con raíces cúbicas. Termino esta enumeración refiriendo a Neugenbauer quien documenta tablas de potencias  $a^n$ , donde  $2 \leq n \leq 10$  y  $a$  toma los valores 9, 16, 140, 345, lo que el citado autor llama logaritmos, aunque en realidad los babilonios si utilizaban de alguna forma aproximaciones para logaritmos para algunos problemas de interés compuesto (probablemente inventado por los antiguos babilonios), ya que ellos fueron notablemente usuarios de prestamos y tasas de interés en esas épocas tan remotas como el antiguo babilonio. Lo que nos lleva a la siguiente pregunta: ¿cuáles eran las aplicaciones de la formidable aritmética babilonia? Por supuesto, la aritmética la utilizaban en el comercio ya para su época bastante complejo: contabilidad e impuestos; también para dividir herencias, contratos y terrenos, realizar pagos de salarios, cálculos de volúmenes para almacenamiento, en general la aritmética relacionada con pesos y medidas y un largo etcétera. Existen innumerables tabletas que contienen problemas relacionados con lo mencionado y mucho más, incluyendo algunos que parecen ser hechos por el mero placer de calcular o como una prueba de fuerza o bien meramente parecen acertijos. Como ejemplo de esta última instancia se encuentra la tableta de la división de 1, 01, 01,  $01 = 46\ 668\ 963\ 601$  por 13, note que ambos números son irregulares, sin embargo 13 también es divisor de ambos números (vea Friberg apéndice p. 156 y 410). El desarrollo posterior de las habilidades aritméticas se encuentra años después, en el periodo seleucida (aproximadamente 569 a. n. e.), en la tableta BM 46301 donde se muestra explícitamente<sup>7</sup> el cálculo del cuadrado de

$$3^{92} = 16, 34, 39, 52, 40, 21, 26, 52, 57, 35, 56, 49, 50, 37, 38, 58, 13, 38, 04, 44, \\ 57, 15, 03, 37, 21$$

al parecer, tal cálculo no proviene de ninguna aplicación al comercio, sino que se trata solo de una notable prueba de fuerza.

Regresando al periodo viejo babilonio, el número de tablas de cálculos de cuadrados de números es tan notoria que se ha llegado a especular que en este periodo las multiplicaciones se realizaban no con las tablas normales, sino con las tablas de cuadrados mediante el algoritmo (vea Strom [7], p. 54 y referencias al interior) siguiente:

$$a \cdot b = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2),$$

<sup>7</sup>En el periodo seleucida si existen ejemplos de cálculos explícitos, Friberg *op. cit.* p. 458, 459.

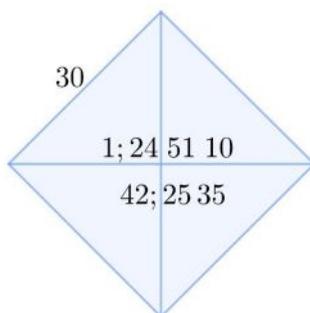


FIGURA 2. Se muestra un diagrama de lo que se representa en la tableta YBC 7289. Se trata de un cuadrado donde en un lado exterior aparece el número 30. En la diagonal hay dos números, el primero 1; 24 51 10 es la aproximación a  $\sqrt{2}$  en sexagesimal; el segundo número, bajo la diagonal, representa en sexagesimal  $30 \cdot (1; 24 51 10 = 42; 25 35)$ .

aunque cabe mencionar que no hay evidencia directa del uso de tales algoritmos en el viejo babilonio, ya que, como se mencionó, en ese periodo temprano solo se escribían los resultados finales, no los pasos seguidos para llegar al resultado.

**2.2. Raíces cuadradas.** El cálculo de  $\sqrt{2}$ , para mí, es el más exasperante ejemplo de cálculos que sorprenden por su antigüedad y que no muestran el algoritmo utilizado paso a paso; el indicio del cálculo se encuentra en la tableta YBC 7289 cuya representación se presenta en la figura 2 (en el original escriben “=” en lugar de “≈” a diferencia de este artículo; el símbolo “=<sub>10</sub>”, debe leerse: *igual en base diez a*):

$$\sqrt{2} \approx 1; 24 51 10 =_{10} 1.41421\overline{296}$$

Tal cálculo también constituye una prueba de que el teorema de Pitágoras se conocía entre 1800 y 1600 a. C., de la tableta YBC 7289 se muestra una representación en la figura 2. La figura representa un cuadrado con sus dos diagonales y en ella parecen tres números en base 60, el primer número que llamaremos  $l = 30$ , el segundo número  $m = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$  y el tercer número  $n = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$ . El segundo número  $m \approx \sqrt{2}$ , corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 ambos, lo cual se cumple por el teorema de Pitágoras. Claramente el triángulo con catetos de medida 1 es semejante al triángulo con catetos de medida 30 por lo que sus hipotenusas son proporcionales, es decir, la diagonal  $n$  se obtiene multiplicando por  $l = 30$ , es decir,  $n = 30 \cdot m$ , que como se ha dicho, es el segundo número escrito en la tableta sobre la diagonal. Por cierto, la aproximación para  $\sqrt{2}$  es la misma que usa Ptolomeo en el Almagesto, obra escrita más de 2000 años después.

El hecho de que el teorema de Pitágoras (o algunos ejemplos de aplicaciones del teorema) fueran conocido centenares de años antes de Pitágoras a llevado a proponer a Strom (*op. cit.*) que se llame a tal teorema “el teorema babilonio”. Dado que no hay ninguna prueba documental de que Pitágoras haya descubierto tal teorema, quizá sería correcto, pero creo que más bien debemos llamarlo teorema de Euclides, ya que en su obra “Elementos”, es el primer documento donde aparece enunciado como teorema y además, demostrado con su recíproco, como es bien sabido. No considero que debe llamarse teorema babilonio ya que no se conoce ninguna demostración por parte de los babilonios ni que haya sido siquiera enunciado como teorema. De los antiguos babilonios solo se conocen sorprendentes e inesperadas aplicaciones para tan temprana época.

### 3. CONOCIMIENTO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS EN LA ANTIGUA BABILONIA

Una de las más impactantes muestras de conocimiento del teorema de Pitágoras en la antigua babilonia se encuentra en la tableta Plimpton 322 donde ocurren triplas  $(a, b, c)$  tales que  $a^2 + b^2 = c^2$  que van más allá de cualquier balbuceo de aficionados a la aritmética y que muestra el trabajo de verdaderos profesionales en acción, como se verá.

En el cuadro 2 se muestra la transliteración<sup>8</sup> de la tableta original. En rojo se presenta la reconstrucción de texto ilegible en el original aceptada por asiriólogos como Friberg *op. cit.* En azul se muestran números que los asiriólogos consideran que son erróneos porque no siguen el patrón general.

**3.1. Descripción de la tableta Plimpton 322.** Si se designan los lados de un triángulo rectángulo mediante  $a, b, c$ , siendo  $a$  el cateto adyacente,  $b$  el cateto opuesto,  $c$  la hipotenusa del triángulo y siendo  $\alpha$ , el ángulo formado por el cateto adyacente y la hipotenusa del triángulo. El orden en el que aparecen los números corresponde al orden de magnitud de los números de la primera columna de la tabla 2 escritos de mayor a menor. En la primera columna, se puede identificar la secante al cuadrado,  $\sec^2 \alpha$  o bien  $1 + \tan^2 \alpha$ , en la segunda columna el cateto opuesto  $b$  y en la tercera columna la hipotenusa  $c$  del triángulo. De esta forma, en la tableta no se encuentra el cateto adyacente, sino implícito en la primera columna. Obviamente, conocidos el cateto opuesto y la hipotenusa, se requiere conocer el cateto adyacente para obtener la primera columna, lo cual, claro, puede hacerse mediante el teorema de Pitágoras. En la tabla 3 se ha agregado la columna del cateto adyacente, también se expresan los números en base diez, para mayor claridad. La transliteración de los encabezados de la tabla, indica el carácter geométrico pero también aritmético de la misma. Por ejemplo: “el lado del cuadrado de enfrente”, puede interpretarse como el cateto opuesto y que es posible construir un cuadrado sobre ese lado. De la misma manera, “diagonal” corresponde a la hipotenusa ya que, presumiblemente, sería la diagonal de un paralelogramo cuyos lados son el cateto opuesto y el cateto adyacente del triángulo.

De acuerdo con Nuegenbauer (p. 40 *op. cit.*) las ternas pitagóricas pudieron haber sido construidas mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} b &= 2pq \\ a &= p^2 - q^2 \\ c &= p^2 + q^2, \end{aligned}$$

donde  $p, q$  son primos relativos y  $p > q$ . En la tabla 3 se ha reescrito la tableta Plimpton 322, agregando una cuarta columna donde aparece el cateto adyacente  $b$  factorizado para evidenciar su carácter de número regular babilónico. Observe que efectivamente todos los números  $b$  de la cuarta columna son de la forma  $2pq$  con  $p, q$  primos relativos, salvo el renglón 11, para el cual ocurre que no pueden escribirse  $p$  y  $q$  como enteros para obtener  $a$  y  $c$  dados en la tableta Plimpton 322 original, sino que debe escribirse  $p = 2\sqrt{3} \cdot 5$  y  $q = \sqrt{3} \cdot 5$  para obtener  $a = p^2 - q^2$  y  $c = p^2 + q^2$  (recuerde que  $a$  y  $c$  son dados), lo cual es por lo menos algo que debe llamar la atención, aunque al escribir  $p$  y  $q$  como irracionales, mantiene el orden descendente de la división  $p/q$ , mostrado en la primera columna del cuadro 3, columna que no aparece en el original, pero que resulta curiosa. De hecho otra curiosidad de este renglón es que es un múltiplo de la terna  $(3, 4, 5)$ , la más conocida de las ternas pitagóricas, efectivamente  $15(3, 4, 5) = (45, 60, 75)$  y, de hecho, este onceavo renglón es el único con esta característica de ser múltiplo de otra terna.

De acuerdo a lo que se muestra en la primera columna del cuadro 3 y al observar la primera columna del cuadro 3, esta pudo haberse construido dividiendo por el número

<sup>8</sup>Se usa el término *transliteración* y no *traducción* debido a que hay cierta ambigüedad inevitable debida a la antigüedad de los textos.

La ... de la diagonal de la que 1 se quita y aparece el frente	El lado del cuadrado de enfrente	El lado del cuadrado de la diagonal	Su posición
1; $\frac{59}{60} \frac{0}{60^2} \frac{15}{60^3}$	1, 59	2, 49	lugar 1
1; $\frac{56}{60} \frac{56}{60^2} \frac{58}{60^3} \frac{14}{60^4} \frac{50}{60^5} \frac{6}{60^6} \frac{15}{60^7}$	56, 7	3, 12, 1	lugar 2
1; $\frac{55}{60} \frac{7}{60^2} \frac{41}{60^3} \frac{15}{60^4} \frac{33}{60^5} \frac{45}{60^6}$	1, 16, 41	1, 50, 49	lugar 3
1; $\frac{53}{60} \frac{10}{60^2} \frac{29}{60^3} \frac{32}{60^4} \frac{52}{60^5} \frac{16}{60^6}$	3, 31, 49	5, 9, 1	lugar 4
1; $\frac{48}{60} \frac{54}{60^2} \frac{1}{60^3} \frac{40}{60^4}$	1, 5	1, 37	lugar 5
1; $\frac{47}{60} \frac{6}{60^2} \frac{41}{60^3} \frac{40}{60^4}$	5, 19	8, 1	lugar 6
1; $\frac{43}{60} \frac{11}{60^2} \frac{56}{60^3} \frac{28}{60^4} \frac{26}{60^5} \frac{40}{60^6}$	38, 11	59, 1	lugar 7
1; $\frac{41}{60} \frac{33}{60^2} \frac{45}{60^3} \frac{14}{60^4} \frac{3}{60^5} \frac{45}{60^6}$	13, 19	20, 49	lugar 8
1; $\frac{38}{60} \frac{33}{60^2} \frac{36}{60^3} \frac{36}{60^4}$	9, 1	12, 49	lugar 9
1; $\frac{35}{60} \frac{10}{60^2} \frac{2}{60^3} \frac{28}{60^4} \frac{27}{60^5} \frac{24}{60^6} \frac{26}{60^7} \frac{40}{60^8}$	1, 22, 41	2, 16, 1	lugar 10
1; $\frac{33}{60} \frac{45}{60^2}$	45	1, 15	lugar 11
1; $\frac{29}{60} \frac{21}{60^2} \frac{54}{60^3} \frac{2}{60^4} \frac{15}{60^5}$	27, 59	48, 49	lugar 12
1; $\frac{27}{60} \frac{0}{60^2} \frac{3}{60^3} \frac{45}{60^4}$	7, 12, 1	4, 49	lugar 13
1; $\frac{25}{60} \frac{48}{60^2} \frac{51}{60^3} \frac{35}{60^4} \frac{6}{60^5} \frac{40}{60^6}$	29, 31	53, 49	lugar 14
1; $\frac{23}{60} \frac{13}{60^2} \frac{46}{60^3} \frac{40}{60^4}$	56	53	lugar 15

CUADRO 2. Transliteración del contenido del original Plimpton 322. En rojo se muestra lo que es ilegible en el original, pero que han añadido expertos, salvo donde aparecen puntos suspensivos, allí no ha sido posible añadir nada. En azul, se muestran números que no siguen el patrón general de la tabla.

regular  $b$  en nuestra notación, ya sea el número  $a$  o el número  $b$  y después elevar al cuadrado. Es decir, la identidad trigonométrica  $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ , les debió parecer mágica (ya que no conocían la trigonometría), al ser obtenida por medios puramente aritméticos, ya que si a  $(a/b)^2$  se le quita 1 puede obtenerse de  $(c/b)^2$ , que es lo que aparentemente dice el encabezado de la primera columna del original, si pensamos en el triángulo de la figura 3, donde es claro que del triángulo con catetos 1,  $\tan \alpha$  e hipotenusa  $\sec \alpha$ , aparece el frente  $\tan \alpha$  si se construye un cuadrado sobre la secante y se le quita 1 (y se saca raíz cuadrada).

3.2. “Errores”. Seguidamente se presentan los presuntos errores en la tableta Plimpton 322 (vea el cuadro 2).

$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ (en notación moderna)	cateto opuesto (frente)	hipotenusa (diagonal)	cateto adyacente (base)	lugar
$(\frac{169}{120})^2 = 1 + (\frac{119}{120})^2$	119 = 7 · 17	169 = 13 <sup>2</sup>	120 = 2 <sup>3</sup> · 3 · 5	1
$(\frac{4825}{3456})^2 = 1 + (\frac{3367}{3456})^2$	3367 = 7 · 13 · 37	4825 = 5 <sup>2</sup> · 193	3456 = 2 <sup>7</sup> · 3 <sup>3</sup>	2
$(\frac{6649}{4800})^2 = 1 + (\frac{4601}{4800})^2$	4601 = 43 · 107	6649 = 61 · 109	4800 = 2 <sup>6</sup> · 3 · 5 <sup>2</sup>	3
$(\frac{18541}{13500})^2 = 1 + (\frac{12709}{13500})^2$	12709 = 71 · 179	18541 primo	13500 = 2 <sup>2</sup> · 3 <sup>3</sup> · 5 <sup>3</sup>	4
$(\frac{97}{72})^2 = 1 + (\frac{65}{72})^2$	65 = 5 · 13	97 primo	72 = 2 <sup>3</sup> · 3 <sup>2</sup>	5
$(\frac{481}{360})^2 = 1 + (\frac{319}{360})^2$	319 = 11 · 29	481 = 13 · 37	360 = 2 <sup>3</sup> · 3 <sup>2</sup> · 5	6
$(\frac{3541}{2700})^2 = 1 + (\frac{2291}{2700})^2$	2291 = 29 · 79	3541 primo	2700 = 2 <sup>2</sup> · 3 <sup>3</sup> · 5 <sup>2</sup>	7
$(\frac{1249}{960})^2 = 1 + (\frac{799}{960})^2$	799 = 17 · 47	1249 primo	960 = 2 <sup>6</sup> · 3 · 5	8
$(\frac{769}{600})^2 = 1 + (\frac{481}{600})^2$	481 = 13 · 37	769 primo	600 = 2 <sup>3</sup> · 3 · 5 <sup>2</sup>	9
$(\frac{8161}{6480})^2 = 1 + (\frac{4961}{6480})^2$	4961 = 11 <sup>2</sup> · 41	8161 primo	6480 = 2 <sup>4</sup> · 3 <sup>4</sup> · 5	10
$(\frac{75}{60})^2 = 1 + (\frac{45}{60})^2$	45 = 3 <sup>2</sup> · 5	75 = 3 · 5 <sup>2</sup>	60 = 2 <sup>2</sup> · 3 · 5	11
$(\frac{2929}{2400})^2 = 1 + (\frac{1679}{2400})^2$	1679 = 23 · 73	2929 = 29 · 101	2400 = 2 <sup>5</sup> · 3 · 5 <sup>2</sup>	12
$(\frac{289}{240})^2 = 1 + (\frac{161}{240})^2$	161 = 7 · 23	289 = 17 <sup>2</sup>	240 = 2 <sup>4</sup> · 3 · 5	13
$(\frac{3229}{2700})^2 = 1 + (\frac{1771}{2700})^2$	1771 = 7 · 11 · 23	3229 primo	2700 = 2 <sup>2</sup> · 3 <sup>3</sup> · 5 <sup>2</sup>	14
$(\frac{106}{90})^2 = 1 + (\frac{56}{60})^2$	56 = 2 <sup>3</sup> · 7	106 = 2 · 53	90 = 2 · 3 <sup>2</sup> · 5	15

CUADRO 3. Aquí los números de la tableta Plimpton 322 han sido trasladados a base diez. Se ha agregado una cuarta columna (en color gris) con el cateto adyacente. También se han corregido los presuntos errores. Se pone en paréntesis la transliteración de las palabras con la que los babilonios designaban el cateto opuesto, la hipotenusa y el cateto adyacente.

1. Error en el 2o renglón, 3a columna,  $1 \cdot 60^2 + 20 \cdot 60 + 25 = 4825$ , está escrito en el original 3,12,1 = 11 521, el cual es demasiado grande. Pudo ser obvio para un experto en ternas pitagóricas.
2. Error en la 2a columna, renglón 9, dice 9,1 =  $9 \cdot 60 + 1 = 541$ , es primo, el único en esa columna, debe decir: 8,1 =  $8 \cdot 60 + 1 = 481$  y  $481 = 13 \cdot 37$ .
3. Renglón 13, columna 2, dice 7,12,1 =  $7 \cdot 60^2 + 12 \cdot 60 + 1 = 25921 = 161^2$ . Sucede que el número correcto es  $161 = 2 \cdot 60 + 41$ , es decir, el mismo número, pero sin estar elevado al cuadrado. También debió ser obvio para alguien con experiencia, no parece ser un error de copia, ni menos de cálculo.
4. Renglón 15, 3a columna, está escrito 53 en lugar de  $1 \cdot 60 + 44 = 106/2$ , es decir la mitad del valor correcto. Tampoco parece ser un error de copia ni de cálculo, a mi parecer.

$\frac{p}{q}$	$p$	$q$	$b = 2p \cdot q$	$a = p^2 - q^2$	$c = p^2 + q^2$	lugar
2.4	$2^2 \cdot 3$	5	$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$	119	169	1
2.37	$2^6$	$3^3$	$3456 = 2^7 \cdot 3^3$	3367	4825	2
2.34	$3 \cdot 5^2$	$2^5$	$4800 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$	4601	6649	3
2.31	$5^3$	$2 \cdot 3^3$	$13500 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$	12709	18541	4
2.25	$3^2$	$2^2$	$72 = 2^3 \cdot 3^2$	65	97	5
2.22	$2^2 \cdot 5$	$3^2$	$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	481	360	6
2.16	$2 \cdot 3^3$	$5^2$	$2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	2291	3541	7
2.13	$2^5$	$3 \cdot 5$	$960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5$	799	1249	8
2.08	$5^2$	$2^2 \cdot 3$	$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	481	769	9
2.025	$3^4$	$2^3 \cdot 5$	$6480 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$	4961	8161	10
2	$2\sqrt{3 \cdot 5}$	$\sqrt{3 \cdot 5}$	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$	45	75	11
1.92	$2^4 \cdot 3$	$5^2$	$2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$	1679	2929	12
1.87	$3 \cdot 5$	$2^3$	$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$	161	289	13
1.85	$2 \cdot 5^2$	$3^3$	$2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	1771	3229	14
1.8	$3^2$	5	$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$	56	106	15

CUADRO 4.  $p > q$ ,  $a = p^2 - q^2$ ,  $b = 2p \cdot q$ ,  $c = p^2 + q^2$  con lo que se cumple se cumple  $a^2 + b^2 = c^2$ .

**3.3. Explicación alternativa de los “errores”.** Quien piense que el gremio de los matemáticos es uno de los más feroces respecto a la crítica entre colegas, debe asomarse al gremio de los asiriólogos. En particular, la tableta Plimpton 322 ha despertado enconadas discusiones y descalificaciones entre expertos. Por ejemplo, en Friberg *op. cit.* p. 434:

*“El pretencioso y polémico intento de Robson en [5] de encontrar una explicación alternativa de la tableta Plimpton 322 es tan confuso y engañoso que debe ser completamente ignorado.”*

Afortunadamente, en matemáticas en los artículos científicos no hay lugar a la polémica que ocurre entre los asiriólogos quienes, dicho sea de paso, por momentos parecieran saber más de las tabletas que los mismos antiguos babilonios que las escribieron. He mencionado todo la anterior, no para “pasar el chisme” (o no solo para ello), sino por que voy a atreverme a dar una explicación alternativa de los “errores” de la tableta Plimpton 322, sin ninguna pretensión. Explicación que no he encontrado en la literatura que he consultado y a la que he llegado desde la perspectiva de un profesor con larga experiencia evaluando y elaborando exámenes y es la siguiente:

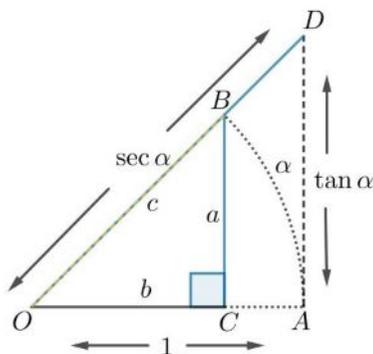


FIGURA 3. Para el caso en que  $b < 1$  se muestra un triángulo rectángulo con  $a = CB$  como cateto opuesto,  $b = OC$  como cateto adyacente y  $c = OB$  como hipotenusa. En este caso  $a/b = \tan \alpha$ , es el cateto opuesto del triángulo con cateto adyacente 1 e hipotenusa  $c/b = \sec \alpha$ . Esta figura explicaría el contenido de la tableta Plimpton 322.

*Quizá los errores de la tableta Plimpton 322 son deliberados y esto es así porque la tableta es un examen.*

¿Qué tipo de examen podría ser? Justamente, un examen del tipo: revise los números, diga si tienen errores y, en tal caso, escriba la forma correcta. Si este fuera el caso ¿A quién estaría dirigido?, pues supongo que podría estar dirigido a escribas a punto de obtener un alto puesto de trabajo que requiriera el uso profesional de cálculos. Si este fuera el caso, asiriólogos como Neugenbauer, quien fue el primero en publicarlos, habrían pasado el examen.

Qué puedo argumentar en favor de mi propuesta, pues precisamente mi experiencia, la cual me dice que si alguien comete errores por aburrimiento o por descuido en los cálculos, los errores cometidos estarían distribuidos a lo largo de toda la “talacha”. Sin embargo en la tableta Plimpton 322 no hay errores en la primera columna, donde aparecen los cálculos más largos, como el lector puede corroborar por sí mismo. Otro asunto es la naturaleza de los errores analizados en la sección 3.2. El error (1) es tan obvio que saltaría a los ojos de un experto, al ser el número en cuestión demasiado grande cualquier verificación, lo haría inmediatamente evidente. Del error 2, me parece posible que alguien cansado y aburrido de calcular escribiera 8 en lugar de 9, pero en el sistema babilonio se distinguen muy fácilmente el número 8 del 9 a simple vista y es la primera habilidad que debería tener un experto. El tercer error es el que me parece más evidentemente fabricado, ¿por cuál causa alguien se tomaría el tiempo de elevar al cuadrado un resultado que no lo requiere? es decir, el resultado correcto se obtiene sin necesidad de elevar al cuadrado si se siguió el método que se ha sugerido en la sección 3.1. Lo mismo ocurre con el error cuarto ¿por cuál motivo alguien se tomaría el tiempo de dividir por 2 un resultado, cuando en ningún caso anterior se ha requerido tal división? Finalmente pregunto: ¿por cuáles motivos un matemático experto en aritmética conservaría una tableta con errores (tan fue conservada que llegó a nosotros 4000 años después) si no fuera por que era un buen examen para aplicar da vez en cuando y fácil de evaluar sabiendo dónde están los errores?

Lo que he afirmado en los párrafos anteriores puede tomarse un poco en broma, pero no tanto. A fin de cuentas el lector puede realizar sus propios juicios a partir del cuadro 2, el cual es una transcripción del original, si se acepta que la traducción

es correcta, lo cual tampoco está libre de polémicas en cuanto al significado de las palabras ni los vacíos cubiertos por los especialistas<sup>9</sup>

#### 4. CONCLUSIONES

El impacto de la matemática de la antigua babilonia en los pueblos cercanos geográfica e históricamente es imposible de medir en su totalidad, pero su influencia es evidente en Grecia en tiempos de Tales de Mileto cuando la astronomía seleucida fue propagada por todos los pueblos cultos de Asia menor hasta llegar a Grecia y, a partir de allí, hasta nosotros. Pero la forma en que se propagó está oscurecida. Por ejemplo, ¿de qué manera los esfuerzos para calcular las ternas pitagóricas de la tableta Plimpton 322 culminan en el teorema de Pitágoras como es presentado en los elementos de Euclides? Lo que es palpable, es que la aritmética del comercio originada en la antigua babilonia, cuya máxima expresión es el interés compuesto, está entre nosotros en toda las economías del mundo, para bien o para mal, así como la escritura que también es invento babilonio.

La importancia del sistema numérico sexagesimal babilonio puede apreciarse al comparar con otros sistemas coetáneos que son francamente inapropiados para operar con ellos, como el egipcio y posteriormente el sistema de numeración griego y el romano. Por ejemplo el sistema griego es tan inapropiado para representar números grandes que Arquímedes en famoso texto tuvo que inventar un sistema de representación para números grandes (tan grandes como el número de granos de arena que contendría una esfera del tamaño del universo que imaginaba Arquímedes). Sin embargo, curiosamente, entre los especialistas (por ejemplo Robson *op. cit.*) hay cierta tendencia a desvalorar a los autores de las tabletas: “Ciertamente no siento justificado referirme a los autores y copistas de las matemáticas de la vieja babilonia como “matemáticos”, con las connotaciones de creatividad y profesionalismo que esta palabra conlleva; Prefiero el más neutral “escribas”.

En mi modesta opinión, solo un matemático podría dedicarse a realizar, por ejemplo, el cálculo exacto en sexagesimal de  $(8\ 161/6\ 480)^2$  con todos los dígitos como se presentan en el renglón 10 de la tableta Plimpton 322. Pero millares de ejemplos de creatividad matemática para resolver problemas se encuentran dispersos por los museos del mundo que poseen colecciones babilónicas. Invito a que el lector juzgue por sí mismo y revise al menos los libros citados de Neugebauer, Friberg y Gonçalves para hacerse una idea de la matemática babilonia antigua, fuera de opiniones cuestionables y juicios sumarios de “expertos” y no tan expertos.

*AGRADECIMIENTOS.* El autor agradece al Dr. Mario Pineda Ruelas por sus comentarios editoriales siempre en aras de mejorar el artículo.

#### REFERENCIAS

- [1] Friberg, J. *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Text. Manuscripts in the Schøyen Collection.* Springer Science+Business Media, LLC, 233 Spring Street, New York; NY 10013, USA. 2007.
- [2] Gonçalves, C., *Mathematical Tables from Tell Harmal.* Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer International Publishing Switzerland. 2015
- [3] Neugebauer, O. y Sachs, A., *Mathematical cuneiform texts.* New Haven, Conn., Pub. jointly by the American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research. 1945.
- [4] O'Connor, J. J. y Robertson E. F., *An Overview of Babilonial Mathematics.* MacTutor History of Mathematics. 2000.
- [5] Robson, E., *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322.* *Historia Mathematica* 28 (2001), 167–206.
- [6] Robson, E., *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322.* En: Anderson M, Katz V, Wilson R, eds. *Sherlock Holmes in Babylon: And Other Tales of Mathematical History.* Spectrum. Mathematical Association of America; 2003:14-26.

<sup>9</sup>Por ejemplo Neugebauer *op. cit.* propone que el encabezado de la cuarta columna debe decir: “Su nombre”.

- [7] Rutman, P., *The Babylonian theorem: the mathematical journey to Pythagoras and Euclid*. Prometheus Books, Amherst, N.Y. 2010.

*Gabriel López Garza*

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina,

alcaldía Iztapalapa, C. P. 09340, Ciudad de México.

e-mail: [gabl@xanum.uam.mx](mailto:gabl@xanum.uam.mx)

## UNA VERSIÓN DEL MÉTODO DE KUDRYASHOV PARA LA SOLUCIÓN DE ALGUNAS EDPs NO LINEALES QUE SURGEN EN LA FÍSICA MATEMÁTICA.

OSWALDO GONZÁLEZ-GAXIOLA

RESUMEN. Introduciremos una función que en la literatura se conoce como la función  $R$  de Kudryashov, expondremos las propiedades básicas de esta función y basados en ella, estableceremos un algoritmo para encontrar soluciones exactas en forma de onda solitaria para ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Finalmente, mostraremos mediante ejemplos la aplicación del método para encontrar soluciones exactas tipo solitones altamente dispersivos de algunas ecuaciones diferenciales que provienen de las aplicaciones de las matemáticas a la física.

### 1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales (EDPNL) proporcionan modelos matemáticos utilizados en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería para explicar fenómenos complejos de muchos y muy diversos problemas, por ejemplo, en teoría de ondas electromagnéticas, física de plasma, mecánica de fluidos, teoría de campos, óptica no lineal, cinética química, dinámica estructural, evolución estelar, dinámica de poblaciones, evolución de flujos financieros, teoría del control, etc. Encontrar soluciones exactas para EDPNL se ha convertido en un desafío para investigadores en el área de matemáticas y sus aplicaciones debido a que una solución exacta proporciona información esencial que ayudará a describir el comportamiento de los fenómenos modelados por la EDPNL. Hasta donde sabemos, no existe un método clásico que funcione para encontrar soluciones exactas a cualquier tipo de EDPNL. Por ello, la comunidad científica valora mucho la investigación e implementación de nuevas metodologías que aporten soluciones exactas a dichos problemas [1, 2, 3]. En el estudio de fenómenos físicos no lineales, encontrar soluciones exactas tipo ondas viajeras de algunas EDPNL juega un papel muy importante. Por lo tanto, encontrar soluciones exactas e investigar el comportamiento de tales soluciones es un tema básico de investigación en muchas áreas de las ciencias naturales. Es de destacar que la aparición de soluciones tipo solitones de algunas EDPNL también ha mostrado una enorme impacto debido a la implementación en varias áreas científicas. Recientemente en [4], el autor desarrolló un nuevo método para resolver EDPNL, denominado por la comunidad, método de Kudryashov, y ha sido muy útil para resolver una gran diversidad de EDPNL tanto de orden entero como fraccionario que surgen de aplicaciones de las matemáticas a otras disciplinas [5, 6, 7]. En [8] el autor demostró la aplicabilidad de la función logística para encontrar soluciones exactas de ecuaciones diferenciales no lineales. Con el mismo espíritu, Kudryashov introdujo recientemente una nueva función  $R$  que ha demostrado ser muy eficaz para encontrar soluciones tipo solitones para EDPNL con términos de alta dispersión. Nos referiremos a esta nueva función como la función  $R$  de Kudryashov, y la usaremos para encontrar las soluciones tipo onda viajera de ciertas EDPNL estudiadas ampliamente en la física-matemática. La organización del artículo es la siguiente: En la Sección 2 estableceremos la función  $R$  de Kudryashov y describimos las características esenciales de la función. En la Sección 3 describiremos brevemente el algoritmo del método  $R$  de Kudryashov para resolver

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35C05, 35C07, 35Q60, 35Q35.

*Palabras clave.* Método de Kudryashov, soluciones tipo ondas viajeras, ecuación de Schrödinger no lineal, ecuación KdV.

EDPNL. En la Sección 3 consideramos algunos ejemplos para ilustrar el empleo del método.

## 2. LA FUNCIÓN $R$ DE KUDRYASHOV

Recientemente en [9] A. N. Kudryashov introdujo una nueva función  $R$  definida como

$$(1) \quad R(z) = \frac{1}{ce^z + de^{-z}},$$

donde  $c$  y  $d$  son parámetros. Se puede verificar que la función  $R$  es solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$(2) \quad (R')^2 = R^2(1 - \chi R^2), \quad \chi = 4cd.$$

En el plano complejo, la función (1) tiene un polo de primer orden y su perfil representa una onda solitaria con

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} R(z) = 0.$$

El máximo de  $R$  es  $(c + d)^{-1}$  y lo alcanza en  $z = 0$ .

La característica principal de la función  $R$  es que sus derivadas de orden par pueden expresarse como polinomios de  $R$ , mientras que sus derivadas de orden impar son polinomios de  $R$  y  $R_z$ .

A continuación escribiremos el resultado de calcular algunas de las derivadas de orden superior de  $R$ , las cuales son sencillas de verificar:

$$(3) \quad R_{zz} = R - 2\chi R^3,$$

$$(4) \quad R_{zzz} = R_z - 6\chi R^2 R_z,$$

$$(5) \quad R_{zzzz} = R - 20\chi R^3 + 24\chi^2 R^5,$$

$$(6) \quad R_{zzzzz} = R_z - 60\chi R^2 R_z + 120\chi^2 R^4 R_z,$$

$$(7) \quad R_{zzzzzz} = R - 182\chi R^3 + 840\chi^2 R^5 - 720\chi^4 R^7.$$

Finalmente, si consideramos un polinomio de grado  $n$  en  $R$ , *i.e.*, si

$$(8) \quad y(z) = \sum_{k=0}^n a_k R^k(z),$$

entonces, considerando las ecuaciones (3)-(7), tenemos:

$$(9) \quad y_z = \sum_{k=1}^n a_k k R^{k-1} R_z,$$

$$(10) \quad y_{zz} = \sum_{k=1}^n a_k (k^2 R^k - k^2 \chi R^{k+2} - k \chi R^{k+2}),$$

$$(11) \quad y_{zzz} = \sum_{k=1}^n a_k (k^3 R^{k-1} - \chi k^2 (k+2) R^{k+1} - k(k+2) \chi R^{k+1}) R_z,$$

$$(12) \quad y_{zzzz} = \sum_{k=1}^n k a_k R^k [k^3 + (k^3 + 6k^2 + 11k + 6) \chi^2 R^4 - (2k^3 + 6k^2 + 8k + 4) \chi R^2].$$

De manera similar podemos calcular las siguientes derivadas para  $y$  con respecto a  $z$  haciendo uso de algún software adecuado para el cálculo simbólico, por ejemplo, utilizando *Mathematica*.

### 3. UNA BREVE DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO: $R$ -KUDRYASHOV

El método de Kudryashov originalmente establecido en [4] y actualizado recientemente en [9] proporciona un algoritmo muy útil para encontrar soluciones exactas de EDPNL. A continuación haremos una breve descripción de los pasos a seguir para la implementación del método actualizado y conocido como método  $R$ -Kudryashov.

En general, consideremos la EDPNL dada en forma polinomial en las variables  $u = u(x, t)$  y algunas de sus derivadas parciales  $u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, u_{xxx}, \dots$ ,

$$(13) \quad G(u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0.$$

Usando el siguiente cambio de variable  $u(x, t) = u(z)$  con  $z = x - \omega t$ , de la ecuación (13) obtenemos la ecuación diferencial ordinaria (EDO) no lineal

$$(14) \quad F(u, -\omega u_z, u_z, -\omega u_{zz}, u_{zz}, u_{zzz}, \dots) = 0.$$

Ahora mostramos cómo podemos obtener la solución exacta de la ecuación (14) usando el enfoque del método  $R$ -Kudryashov propuesto en [9].

La implementación del método consta de los siguientes pasos:

**Paso 1:** Supondremos que la solución de la ecuación (14) es de la forma

$$(15) \quad u(z) = \sum_{i=0}^N a_i R^i(z) = a_0 + a_1 R(z) + \dots + a_N R^N(z)$$

donde cada  $a_i$  es una constante que se determinará más adelante y  $a_N \neq 0$ .  $R(z)$  es la función  $R$  definida en (1).

La diferencia del presente método con el método tradicional de Kudryashov es la función  $R$ , en el método tradicional la función  $R$  es una solución de la ecuación diferencial de Riccati  $R_z = R^2 - R$ . Mayores detalles acerca del método tradicional de Kudryashov pueden hallarse en [5].

**Paso 2:** Para determinar el número natural  $N$  que aparece en la ecuación (15), consideraremos el equilibrio homogéneo entre la derivada de mayor orden y el término algebraico no lineal de mayor orden en la ecuación (14).

**Paso 3:** Consideremos  $u(z)$  dada en (15) y las primeras derivadas parciales necesarias  $u_z, u_{zz}, u_{zzz}, \dots$ , para reemplazarlas en (14), y así obtendremos la ecuación polinomial:

$$(16) \quad P[R(z)] = 0.$$

**Paso 4:** En este paso, igualamos a cero las expresiones algebraicas en las mismas potencias de  $R$ . Así obtendremos un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas que involucran los parámetros necesarios para obtener  $u(z)$  y por lo tanto de  $u(x, t)$ .

**Paso 5:** Este paso final consiste en encontrar una o varias familias de soluciones para el sistema de ecuaciones algebraicas obtenido en el paso anterior para los coeficientes  $a_i$  y  $\omega$  con el fin de encontrar soluciones de la ecuación (14), y por lo tanto del EDPNL (13).

### 4. APLICACIÓN DEL MÉTODO $R$ -KUDRYASHOV

En esta sección, aplicamos el método  $R$ -Kudryashov para encontrar soluciones exactas de algunas EDPNL que modelan fenómenos que surgen de diversas áreas de la física-matemática.

#### Ejemplo 1: La ecuación de Triki-Biswas

La ecuación de Schrödinger no lineal (ESNL) es uno de los modelos más importantes de la física matemática que describe no solo el mundo cuántico, sino también muchos

fenómenos en campos tan diversos como la óptica no lineal, la física de plasmas, la oceanografía, la biología, entre muchos otros. En el contexto de la óptica no lineal, la ESNL es una ecuación fundamental para describir la propagación de pulsos ópticos a través de una fibra óptica.

Recientemente, H. Triki y A. Biswas en [10] han hecho una generalización de la ESNL y cuya utilidad es para describir la propagación de pulsos ultracortos, esta generalización se conoce en la literatura como la ecuación de Triki-Biswas (ETB) y ha sido estudiada en diferentes contextos por varios autores [11, 12, 13].

La forma adimensional de ETB es dada para  $n$  natural por

$$(17) \quad iq_t + aq_{xx} + ib(|q|^{2n}q)_x = 0,$$

donde  $q(x, t)$  gobierna la evolución de una onda no lineal,  $x$  es una variable longitudinal y  $t$  es el tiempo y  $i = \sqrt{-1}$ . Esta ecuación se conoce como modelo de Kaup-Newell si  $n = 1$ . Para  $n = 2$ , los términos de no linealidad tipo Kerr juegan un papel importante en la propagación de pulsos muy cortos de ancho alrededor de sub-10 fs en fibras ópticas con comportamientos altamente no lineales [14].

Consideremos la Ec. (17) con el cambio de variable  $q(x, t) = Q(z)e^{i(\eta(z) - \nu t)}$  donde  $z = x - \omega t$ , del cual obtenemos

$$(18) \quad q_x = \left[ Q'(z) + iQ(z)\eta'(z) \right] e^{i(\eta(z) - \nu t)},$$

$$(19) \quad q_{xx} = \left[ Q''(z) + 2iQ'(z)\eta'(z) + iQ(z)\eta''(z) - Q(z)(\eta'(z))^2 \right] e^{i(\eta(z) - \nu t)},$$

$$(20) \quad q_t = \left[ (-\omega Q'(z) - iQ(z))(\omega\eta'(z) + \nu) \right] e^{i(\eta(z) - \nu t)},$$

$$(21) \quad (|q|^{2n}q)_x = \left[ (2n+1)Q^{2n}(z)Q'(z) + iQ^{2n+1}(z)\eta'(z) \right] e^{i(\eta(z) - \nu t)}.$$

Sustituyendo las Ecs. (18)-(21) en la Ec. (17) y al descomponer en partes real e imaginaria, obtenemos:

$$(22) \quad \omega Q'(z) + a(Q(z)\eta''(z) + 2Q'(z)\eta'(z)) - (2n+1)bQ^{2n}(z)Q'(z) = 0,$$

y

$$(23) \quad \eta Q(z) + \omega Q(z)\eta'(z) - bQ^{2n+1}(z)\eta'(z) + aQ(z)(\eta'(z))^2 - aQ''(z) = 0.$$

Multiplicando la Ec. (22) por  $Q$  e integrando con respecto a  $z$  y tomando la constante de integración nula, obtenemos

$$(24) \quad \frac{\omega}{2}Q^2(z) + aQ^2(z)\eta'(z) - \frac{(2n+1)b}{2n+2}Q^{2n+2}(z) = 0,$$

de donde obtenemos,

$$(25) \quad \eta'(z) = \frac{(2n+1)b}{(2n+2)a}Q^{2n}(z) - \frac{\omega}{2a}.$$

Sustituyendo (25) en (23) obtenemos la ecuación diferencial

$$(26) \quad Q''(z) - \left( \frac{4a\nu - \omega^2}{2a^2} \right) Q(z) - \frac{b\omega}{2a^2}Q^{2n+1}(z) + \frac{b^2(2n+1)}{4a^2(n+1)^2}Q^{4n+1}(z) = 0$$

o, bien

$$(27) \quad Q''(z) + c_1Q^{4n+1}(z) + c_2Q^{2n+1}(z) + c_3Q(z) = 0,$$

donde

$$c_1 = \frac{b^2(2n+1)}{4a^2(n+1)^2}, \quad c_2 = -\frac{b\omega}{2a^2}, \quad c_3 = \frac{\omega^2 - 4a\nu}{2a^2}.$$

Balanceando  $Q''$  con  $Q^{4n+1}$  obtenemos

$$N + 2 = (4n + 1)N \Rightarrow N = \frac{1}{2n}.$$

Puesto que  $N$  no es entero, usaremos el cambio

$$(28) \quad Q(z) = \sqrt[2n]{U(z)}$$

Bajo esta nueva transformación, la Ec. (27) resulta ser

$$(29) \quad 2nUU'' + (1 - 2n)(U')^2 + 4n^2[c_1U^4 + c_2U^3 + c_3U^2] = 0.$$

Balanceando  $UU''$  y el término  $U^4$  obtenemos  $N = 1$ . Así, para aplicar el método propuesto, consideremos

$$(30) \quad U(z) = a_0 + a_1R(z).$$

Además, como  $R_z^2 = R^2(1 - \chi R^2)$ , sustituyendo en (29) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas no lineales:

$$\begin{aligned} 4c_1a_0^4n^2 + 4c_2a_0^3n^2 + 4c_3a_0^2n^2 &= 0 \\ 16a_1c_1a_0^3n^2 + 12a_1c_2a_0^2n^2 + 8c_3a_0a_1n^2 + 2na_0a_1 &= 0 \\ 24c_1a_0^2a_1^2n^2 + 12a_0c_2a_1^2n^2 + 4c_3a_1^2n^2 + a_1^2 &= 0 \\ 16a_0c_1a_1^3n^2 + 4c_2a_1^3n^2 - 4a_0a_1n\chi &= 0 \\ 4c_1a_1^4n^2 - 2n\chi a_1^2 - \chi a_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviéndolo simultáneamente, obtenemos los siguientes conjuntos de soluciones y las correspondientes familias de solitones:

**Conjunto 1:**

$$a_0 = \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1}, \quad a_1 = a_1, \quad \chi = \frac{4n^2a_1^2c_1}{1 + 2n},$$

$$\text{con } c_1 \neq 0; \text{ y } c_3 = \frac{3c_2^2 - 9c_1}{9c_1},$$

de donde, considerando (28) y (30), la familia de soluciones asociada es

$$(31) \quad q_1(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1} + \frac{a_1}{ce^{(x-\omega_1t)} + de^{-(x-\omega_1t)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_1t)-\nu t)}.$$

En particular, si  $c = d$ , obtenemos

$$(32) \quad q_{1,1}(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1} + \frac{a_1}{2c} \operatorname{sech}(x - \omega_1t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_1t)-\nu t)},$$

y si  $c = -d$ , obtenemos

$$(33) \quad q_{1,2}(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1} + \frac{a_1}{2c} \operatorname{csch}(x - \omega_1t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_1t)-\nu t)},$$

con

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{2a^2c_2^2 - 6a^2c_1 + 12ac_1\nu}{3c_1}}.$$

**Conjunto 2:**

$$a_0 = \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1}, \quad a_1 = a_1, \quad \chi = \frac{4n^2a_1^2c_1}{1 + 2n},$$

$$\text{con } c_1 \neq 0; \text{ y } c_3 = \frac{9c_2^2 - 8c_1}{32c_1},$$

de donde, considerando (28) and (30), la familia de soluciones asociada es  
(34)

$$q_2(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1} + \frac{a_1}{ce^{(x-\omega_2t)} + de^{-(x-\omega_2t)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_2t)-\nu t)}.$$

En particular, si  $c = d$ , tenemos

$$(35) \quad q_{2,1}(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1} + \frac{a_1}{2c} \operatorname{sech}(x - \omega_2t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_2t)-\nu t)},$$

y si  $c = -d$ , obtenemos

$$(36) \quad q_{2,2}(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{9c_2^2 - 24c_1c_3 - 24c_1 - c_2}}{4c_1} + \frac{a_1}{2c} \operatorname{csch}(x - \omega_2t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_2t)-\nu t)},$$

con

$$\omega_2 = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{9a^2c_2^2 - 8a^2c_1 + 64ac_1\nu}{c_1}}.$$

**Conjunto 3:**

$$a_0 = \frac{\sqrt{8n^2c_1c_3 - 2c_1}}{4\sqrt{3}c_1n}, \quad a_1 = a_1, \quad \chi = -\frac{4n^2a_1^2c_1}{1 + 2n},$$

$$\text{con } c_1 \neq 0; \text{ y } c_3 = \frac{n^2 - 2n - 1}{4n^4 + 8n^3 + 4},$$

de donde, considerando (28) y (30), la familia de soluciones asociada es

$$(37) \quad q_3(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{8n^2c_1c_3 - 2c_1}}{4\sqrt{3}c_1n} + \frac{a_1}{ce^{(x-\omega_3t)} + de^{-(x-\omega_3t)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_3t)-\nu t)}.$$

En particular, si  $c = d$ , obtenemos

$$(38) \quad q_{3,1}(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{8n^2c_1c_3 - 2c_1}}{4\sqrt{3}c_1n} + \frac{a_1}{2c} \operatorname{sech}(x - \omega_3t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_3t)-\nu t)},$$

y si  $c = -d$ , obtenemos

$$(39) \quad q_{3,2}(x, t) = \left[ \frac{\sqrt{8n^2c_1c_3 - 2c_1}}{4\sqrt{3}c_1n} + \frac{a_1}{2c} \operatorname{csch}(x - \omega_3t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_3t)-\nu t)},$$

con

$$\omega_3 = \pm \sqrt{\frac{a^2n^2 - 2a^2n - a^2 + 8an^4\nu + 16an^3\nu + 8a\nu}{2n^4 + 4n^3 + 2}}.$$

**Conjunto 4:**

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_1, \quad \chi = \frac{4n^2a_1^2c_1}{1 + 2n}, \quad \text{con } c_1 \neq 0; \text{ y } c_3 = \frac{2n - 1}{4n^2},$$

de donde, considerando (28) y (30), la familia de soluciones asociada es

$$(40) \quad q_4(x, t) = \left[ \frac{a_1}{ce^{(x-\omega_4t)} + de^{-(x-\omega_4t)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_4t)-\nu t)}$$

En particular, si  $c = d$ , obtenemos

$$(41) \quad q_{4,1}(x, t) = \left[ \frac{a_1}{2c} \operatorname{sech}(x - \omega_4t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_4t)-\nu t)},$$

y si  $c = -d$ , obtenemos

$$(42) \quad q_{4,2}(x, t) = \left[ \frac{a_1}{2c} \operatorname{csch}(x - \omega_4t) \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i(\eta(x-\omega_4t)-\nu t)},$$

con

$$\omega_4 = \pm \sqrt{\frac{a^2(2n + 1) + 8an^2\nu}{2n^2}}.$$

En todos los casos, la función  $\eta$  se obtiene de la Ec. (25).

La figura 1 muestra un solitón brillante que se obtiene de la familia  $q_{2,1}$  eligiendo ciertos parámetros para los coeficientes y el índice de no linealidad en Ec. (17).

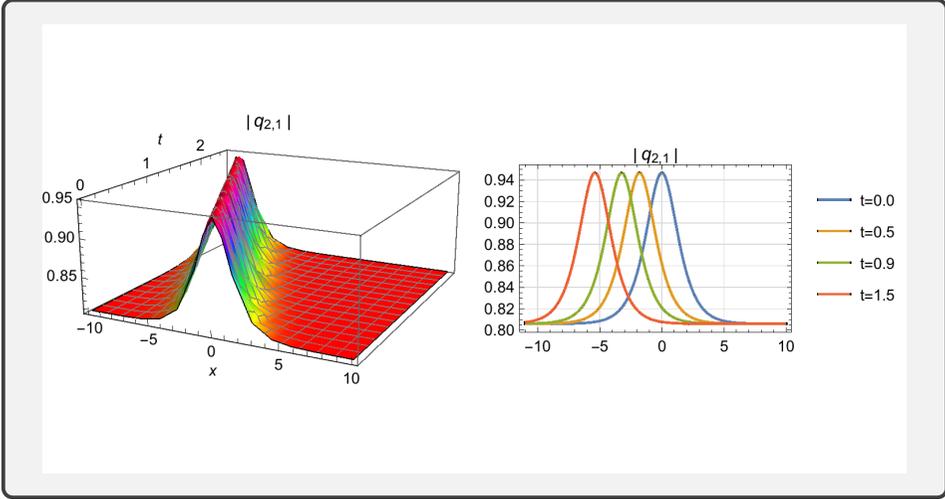


FIGURA 1. Evolución de un solitón brillante para la Ec. (17) con  $a = 4$ ,  $b = 3$  y  $n = 5$  (izquierda). Evolución de la solución en 2D para  $t = 0.0$ ,  $t = 0.5$ ,  $t = 0.9$  y  $t = 1.5$  (derecha).

**Ejemplo 2: La ecuación de Fokas-Lenells (EFL) perturbada**

La forma adimensional de la EFL perturbada es dada por

$$(43) \quad iq_t + a_1q_{xx} + a_2q_{xt} + |q|^2(bq + i\sigma q_x) = i[\alpha q_x + \lambda(|q|^2q)_x + \mu(|q|^2)_xq].$$

Esta ecuación fue estudiada por primera vez en [15, 16, 17, 18] y surge en óptica al considerar los efectos ópticos lineales y no lineales de orden superior así como los efectos dispersivos espacio-temporales. La EFL perturbada se ha derivado como un modelo para describir la propagación de pulsos con duración de femtosegundos a través de fibras óptica monomodales de silicio. En la Ec. (43),  $q(x, t)$  es una función complejo-valuada que representa la evolución de una onda no lineal,  $x$  y  $t$  son variables espaciales y temporales, respectivamente. El coeficiente  $a_1$  es la velocidad de dispersión y  $a_2$  representa la dispersión espacio-temporal, el coeficiente  $b$  representa la modulación de auto-fase, además  $\sigma$  considera la dispersión no lineal. En el término de perturbación del lado derecho de la Ec. (43), el primer término representa la dispersión intermodal, el segundo término es el efecto de auto-atenuación y, finalmente, el último término representa la rapidez de la dispersión no lineal.

Consideremos la Ec. (43) con el cambio de variable  $q(x, t) = y(z)e^{i(kx - \omega t)}$  donde  $z = x - \nu t$ , del cual obtenemos, descomponiendo en parte real e imaginaria

$$(44) \quad \omega y + a_1(y_{zz} - k^2y) - a_2(\nu y_{zz} - \omega ky) + y^2(by - \sigma ky) = -(\alpha ky + \lambda ky^3),$$

$$(45) \quad (2ka_1 - \nu)y_z - a_2(\omega + k\nu)y_z + \sigma y^2y_z = \alpha y_z + 3\lambda y^2y_z + 2\mu y^2y_z,$$

respectivamente.

Integrando una vez la Ec. (45) y tomando al constante de integración nula, obtenemos

$$(46) \quad [-\nu + 2a_1k - a_2(\omega + k\nu) - \alpha]y + (\sigma - 3\lambda - 2\mu)\frac{y^3}{3} = 0.$$

Ahora, elegimos los parámetros de la Ec. (46) tales que los coeficientes de  $y$  y  $y^3$  sean cero, así obtenemos

$$(47) \quad \sigma = 3\lambda + 2\mu, \quad \nu = \frac{2a_1k - a_2\omega - \alpha}{1 + a_2k}.$$

Considerando esto, podemos escribir la parte real (44) en una forma más simple, esto es

$$(48) \quad y_{zz} + b_1y + b_3y^3 = 0,$$

donde  $b_1$  y  $b_3$  son constantes dadas por

$$(49) \quad b_1 = \frac{\omega - a_1k^2 + a_2\omega k + \alpha k}{a_1 - a_2\nu}, \quad b_3 = \frac{b - \sigma k + \lambda k}{a_1 - a_2\nu}, \quad a_1 \neq a_2\nu.$$

Haciendo el balance entre  $y_{zz}$  y  $y^3$  obtenemos  $N = 1$ . Entonces por el método  $R$ -Kudryashov, la solución tipo onda solitaria estará dada por

$$(50) \quad y(z) = A_0 + A_1R(z).$$

Sustituyendo esta forma de la solución en (48) y al usar las derivadas de la función de  $R$  de Kudryashov, obtenemos

$$(51) \quad A_1(R - 2\chi R^3) + b_1(A_0 + A_1R) + b_3(A_0 + A_1R)^3 = 0.$$

Igualando los coeficientes de las potencias de  $R$  a cero, tenemos:

$$(52) \quad A_1 = \sqrt{\frac{2\chi}{b_3}}, \quad A_0 = 0, \quad b_1 = -1.$$

Usando el valor obtenido de  $b_1$  en (49) y considerando el valor de  $\nu$  de (47), obtenemos

$$(53) \quad \omega = \frac{a_1a_2k^3 + (a_1 + \alpha a_2)k^2 + (\alpha + a_1a_2)k - (a_1 + \alpha a_2)}{a_2^2k^2 + 2a_2k + a_2^2 + 1}$$

y además

$$(54) \quad \nu = \frac{a_1a_2 + (3a_1a_2^2 + 2a_1 - \alpha a_2)k + (3a_1a_2 - 2\alpha a_2^2)k^2 + a_2a_2^2k^3}{a_2^2(1 + a_2k) + (1 + a_2k)^3}.$$

Finalmente, combinando (47), (49), (53) y (54), obtenemos

$$(55) \quad k = \frac{-2a_1a_2 \pm \sqrt{4a_1^2a_2^2 + 4\alpha a_2(\alpha a_1a_2 - a_1 - 2\alpha a_2)}}{2(\alpha a_1a_2 - a_1 - 2\alpha a_2)}.$$

Considerando todo lo anterior, tenemos que las soluciones de la EFL perturbada son dadas por:

$$(56) \quad q(x, t) = \pm \sqrt{\frac{2\chi}{b_3}} \left[ \frac{4a}{4a^2e^{(x-\nu t)} + \chi e^{-(x-\nu t)}} \right] e^{i(kx - \omega t)}.$$

Recientemente, en [19, 20] se ha estudiado un modelo similar al proporcionado por la Ec. (43) utilizando el método  $R$  Kudryashov.

### Ejemplo 5: La ecuación de Kawahara (EK)

La ecuación de Kawahara es dada por [21]

$$(57) \quad u_t + uu_x + pu_{xxx} + qu_{xxxx} = 0.$$

En (57),  $p$  y  $q$  denotan constantes reales. Este ecuación no lineal dispersiva fue propuesta por Kawahara en el año 1972 en [21] como un modelo matemático que considera la evolución de olas en aguas poco profundas. En [5, 22] se abordaron versiones modificadas de esta ecuación. La EK representa un ejemplo de un sistema altamente dispersivo y su estudio aquí es puramente ilustrativo, proporcionando un caso para tratar con otra EDPNL con dispersión de orden superior.

Consideremos la Ec. (57) con el cambio de variable  $u(x, t) = y(z)$  donde  $z = x - \nu t$ , del cual obtenemos,

$$(58) \quad qy_{zzzz} + py_{zz} + \frac{y^2}{2} - \nu y = 0.$$

Tenga en cuenta que hemos tomado la constante de integración como cero. Haciendo el balance entre  $y_{zzzz}$  y  $y^2$  obtenemos  $N = 4$ . Entonces por el método  $R$ -Kudryashov, la solución tipo onda solitaria de la Ec. (58) estará dada por

$$(59) \quad y(z) = A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + A_3 R^3 + A_4 R^4.$$

Sustituyendo en (58) obtenemos directamente  $A_1 = A_3 = 0$  y el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas no lineales:

$$\begin{aligned} A_4 + 1680q\chi^2 &= 0 \\ 96q\chi A_2 - (p + 52q)A_4 &= 0 \\ (256q - \nu)A_4 - (6p + 24q)\chi A_2 + A_0 A_4 + A_2^2 &= 0 \\ (16q + 4p + A_0 - \nu)A_2 &= 0 \\ (A_0 - 2\nu)A_0 &= 0 \end{aligned}$$

De donde se obtienen los siguientes conjuntos de soluciones:

**Conjunto 1:**

$$A_0 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_4 = -1680\chi^2 q, \quad \nu = 256q, \quad p = -52q.$$

**Conjunto 2:**

$$A_0 = -512q, \quad A_2 = 0, \quad A_4 = -1680\chi^2 q, \quad \nu = -256q, \quad p = -52q.$$

**Conjunto 3:**

$$\begin{aligned} A_0 = 0, \quad A_2 = -\frac{1120}{59}(-3\chi^2 q + \sqrt{2487}\chi q), \quad A_4 = -1680\chi^2 q, \\ \nu = \frac{64}{59}(-189q + 4\sqrt{2487}q), \quad p = \frac{4}{59}(-815q + 16\sqrt{2487}q). \end{aligned}$$

**Conjunto 4:**

$$\begin{aligned} A_0 = -\frac{128}{59}(-189q + 4\sqrt{2487}q), \quad A_2 = -\frac{1120}{59}(-3\chi^2 q + \sqrt{2487}\chi q), \\ A_4 = -1680\chi^2 q, \quad \nu = -\frac{64}{59}(-189q + 4\sqrt{2487}q), \quad p = \frac{4}{59}(-815q + 16\sqrt{2487}q). \end{aligned}$$

**Conjunto 5:**

$$\begin{aligned} A_0 = 0, \quad A_2 = \frac{1120}{59}(3\chi^2 q + \sqrt{2487}\chi q), \quad A_4 = -1680\chi^2 q, \\ \nu = -\frac{64}{59}(189q + 4\sqrt{2487}q), \quad p = -\frac{4}{59}(815q + 16\sqrt{2487}q). \end{aligned}$$

**Conjunto 6:**

$$\begin{aligned} A_0 = \frac{128}{59}(189q + 4\sqrt{2487}q), \quad A_2 = \frac{1120}{59}(3\chi^2 q + \sqrt{2487}\chi q), \\ A_4 = -1680\chi^2 q, \quad \nu = \frac{64}{59}(189q + 4\sqrt{2487}q), \quad p = -\frac{4}{59}(815q + 16\sqrt{2487}q). \end{aligned}$$

Por ejemplo, para el conjunto 5 obtenemos la familia de soluciones para la Ec. (57)

$$(60) \quad \begin{aligned} u_v(x, t) = \frac{1120}{59}(3\chi^2 q + \sqrt{2487}\chi q) \left[ \frac{4c}{4c^2 e^{(x-\nu t)} + \chi e^{-(x-\nu t)}} \right]^2 \\ - 1680\chi^2 q \left[ \frac{4c}{4c^2 e^{(x-\nu t)} + \chi e^{-(x-\nu t)}} \right]^4 \end{aligned}$$

siendo  $\nu = -\frac{64}{59}(189q + 4\sqrt{2487}q)$ ,  $\chi = 4cd$ , además  $p = -\frac{4}{59}(815q + 16\sqrt{2487}q)$  es la relación entre los coeficientes  $p$  y  $q$  para que esta función  $u_\nu$  sea solución de (57). La figura 2 muestra un solitón oscuro que se obtiene de la familia  $u_\nu$  eligiendo ciertos parámetros de la Ec. (57).

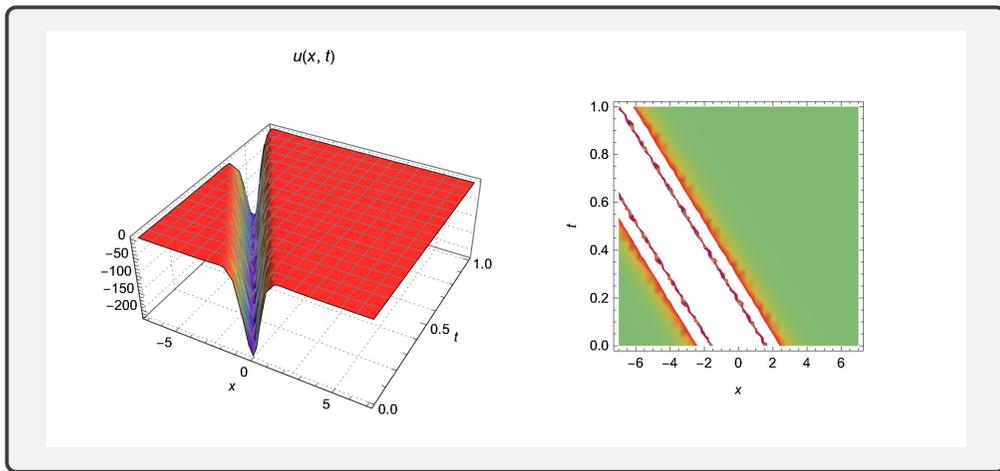


FIGURA 2. Evolución de un solitón oscuro para la Ec. (57) con  $c = 1$ ,  $d = 1$ ,  $\chi = 4$ ,  $\alpha = 1$  y  $q = 0.01$  (izquierda). Gráfica de la densidad del solitón para  $-6 \leq x \leq 6$  y  $0 \leq t \leq 1$  (derecha).

#### Ejemplo 4: La ecuación Korteweg-de Vries (KdV) modificada

La ecuación de KdV modificada es dada por:

$$(61) \quad u_t + \alpha\sqrt{u}u_x + \beta u_{xxx} = 0.$$

En el contexto de la física del plasma, en [23] los autores obtuvieron la ecuación anterior estudiando las propiedades de la propagación de ondas acústicas solitarias en un plasma homogéneo y pulverizado, sin magnetizar y sin colisiones electrónicas con iones no térmicos.

Para encontrar soluciones exactas para la EDPNL (61), primero introducimos el siguiente cambio de variable,  $u = w^2$  y con él, escribimos la ecuación (61) como:

$$(62) \quad ww_t + \alpha w^2 w_x + 3\beta w_x w_{xx} + \beta w w_{xxx} = 0.$$

Ahora, suponiendo una solución tipo onda viajera de la forma,  $w = y(z)$  con  $z = x - \nu t$ , obtenemos la EDO no lineal

$$(63) \quad \beta y y_{zzz} + 3\beta y_z y_{zz} - \nu y y_z + \alpha y^2 y_z = 0.$$

Considerando equilibrio homogéneo, obtenemos  $N = 2$ . Por lo tanto, las soluciones, de acuerdo con (15), serán de la forma

$$(64) \quad y(z) = a_0 + a_1 y(z) + a_2 y^2(z).$$

Sustituyendo la forma anterior de la solución en la ecuación (63) y usando las expresiones algebraicas para  $y_z$ ,  $y_{zz}$ , obtenemos un polinomio de quinto grado en  $R$ . Igualando los coeficientes de cada grado algebraico de  $R$  a cero, obtenemos

$$(65) \quad a_2 = \frac{30\beta\chi}{\alpha}, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = -\frac{20\beta}{\alpha}, \quad \nu = -16\beta.$$

por lo tanto, después de hacer cambios inversos de variables, obtenemos las familias paramétricas de soluciones para la ecuación KdV modificada dadas por

$$(66) \quad u(x, t) = \left[ -\frac{20\beta}{\alpha} + \frac{30\beta\chi}{\alpha} \left( \frac{4c}{4c^2 e^{(x+16\beta t)} + \chi e^{-(x+16\beta t)}} \right) \right]^2.$$

donde,  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros propios de la ecuación KdV modificada,  $\alpha \neq 0$  y tanto  $c$  como  $\chi$  son parámetros reales abiertos que definen a la función  $R$  de Kudryashov. La figura 3 muestra un solitón brillante en forma de W que se obtiene de la Ec. (66) con los valores de los parámetros que se indican en la misma figura.

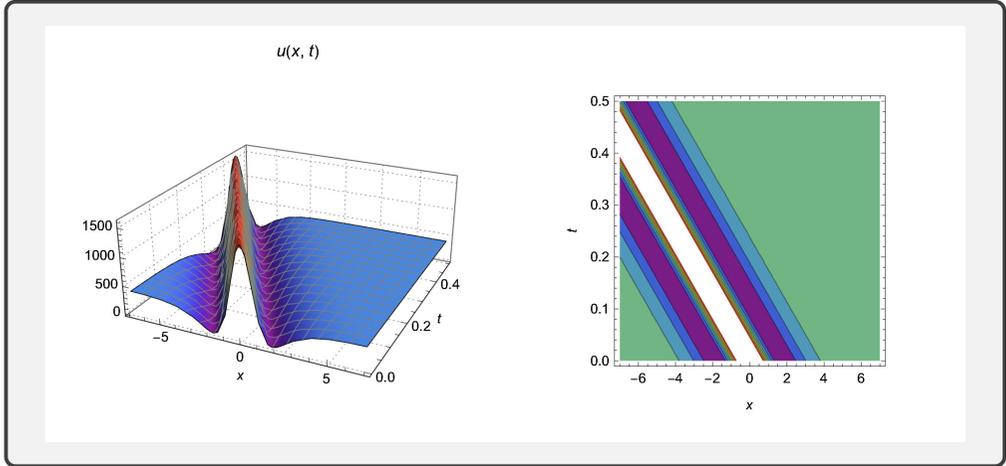


FIGURA 3. Evolución de un solitón brillante con forma de W para la Ec. (66) con  $c = 1$ ,  $d = 1$ ,  $\chi = 4$ ,  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$  (izquierda). Evolución del contorno en 2D para  $-6 \leq x \leq 6$  y  $0 \leq t \leq 0.5$  (derecha).

## 5. CONCLUSIONES

En este artículo hemos empleado el método  $R$  de Kudryashov para encontrar soluciones tipo ondas solitarias de algunas EDPNL que surgen con frecuencia en algunas ramas de la física. El algoritmo para deducir tales soluciones está claramente marcado por una gran simplificación debido a las propiedades intrínsecas de la función  $R$  de Kudryashov. El método que hemos expuesto es particularmente efectivo para encontrar soluciones exactas para EDPNL dispersivas de orden superior, y tiene ventajas significativas sobre otros enfoques de este tipo. Una ventaja es el hecho de que en los cálculos no usamos la forma de una función específica y otra es que resulta fácil de implementar simbólicamente como lo ilustramos a través de algunos ejemplos. El método que hemos descrito y empleado en este artículo puede aplicarse a una amplia variedad de EDPNL que surgen en otras ramas de las ciencias aplicadas para explorar analíticamente diferentes sistemas complejos no lineales.

## REFERENCIAS

- [1] Nayfeh, A. H., *Perturbation methods*. New York, John Wiley & Sons, 1973.
- [2] Whitham, G. B., *Linear and nonlinear waves*. New York, John Wiley & Sons, 1999.
- [3] Kudryashov, A. N. & Loguinova, N. B. *Be careful with the Exp-function method*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 14, 1881-1890, 2009.
- [4] Kudryashov, A. N. *One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 17, 2248-2253, 2012.
- [5] González-Gaxiola, O., León-Ramírez, A. & Chacón-Acosta, G. *Application of the Kudryashov method for finding exact solutions of the Schamel-Kawahara equation*. Russian J. Nonlinear Dyn., 18(2), 203-215, 2022.
- [6] León-Ramírez, A., González-Gaxiola, O. & Chacón-Acosta, G. *Analytical solutions to the Chavy-Waddy-Kolokolnikov model of bacterial aggregates in phototaxis by three integration schemes*. Mathematics, 10(11), 2352, 2023.
- [7] Gaber, A. A., Aljohani, A. F., Ebaid, A. & Tenreiro Machado, J. *The generalized Kudryashov method for nonlinear space-time fractional partial differential equations of Burgers type*. Nonlinear Dyn., 95(1), 361-368, 2019.

- [8] Kudryashov, A. N. *Logistic function as solution of many nonlinear differential equations*. Appl. Math. Model., 39, 5733-5742, 2015.
- [9] Kudryashov, A. N. *Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations*. Optik, 206, 163550, 2020.
- [10] Triki, H. & Biswas, A. *Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model*. Optik, 173, 235-241, 2018.
- [11] Kudryashov, N. A. *First integrals and solutions of the traveling wave reduction for the Triki-Biswas equation*. Optik, 185, 275-281, 2019.
- [12] Kara, A. H. *A the invariance and conservation laws of the Triki-Biswas equation describing monomode optical fibers*. Optik, 186, 300-302, 2019.
- [13] González-Gaxiola, O. *Optical soliton solutions for Triki-Biswas equation by Kudryashov's R function method*. Optik, 249, 168230, 2022.
- [14] Choudhuri, A. & Porsezian, K. *Higher-order nonlinear Schrödinger equation with derivative non-Kerr nonlinear terms: A model for sub-10-fs-pulse propagation*. Phys. Rev. A, 88, 033808, 2013.
- [15] Fokas, A. S. *On a class of physically important integrable equations*. Physica D, 87, 145-150, 1995.
- [16] Lenells, J. *Exactly solvable model for nonlinear pulse propagation in optical fibers*. Stud. Appl. Math., 123, 215-232, 2009.
- [17] Lenells, J. & Fokas, A. S. *On a novel integrable generalization of the nonlinear Schrödinger equation*. Nonlinearity, 22, 11-27, 2009.
- [18] Yang, C., Liu, W., Zhou, Q., Mihalache, D. & Malomed, B. A. *One-soliton shaping and two-soliton interaction in the fifth-order variable-coefficient nonlinear Schrödinger equation*. Nonlinear Dyn., 95, 369-380, 2019.
- [19] Yadav, R., Malik, S., Kumar, S., Sharma, R., Biswas, A., Yildirim, Y., González-Gaxiola, O., Moraru, L. & Alghamdi, A. A. *Highly dispersive W-shaped and other optical solitons with quadratic-cubic nonlinearity: Symmetry analysis and new Kudryashov's method*. Chaos, Solitons & Fractals, 173, 113675, 2023.
- [20] Elsherbeny, A. M., Arnous, A. H., Biswas, A., González-Gaxiola, O., Moraru, L., Moldovanu, S., Iticescu, C. & Alshehri, H. M. *Highly dispersive optical solitons with four forms of self-phase modulation*. Universe, 9(1), 51, 2023.
- [21] Kawahara, T. *Oscillatory solitary waves in dispersive media*. J. Phys. Soc. Japan, 33(1), 260-264, 1972.
- [22] Wazwaz, A. M. *New solitary wave solutions to the modified Kawahara equation*. Phys. Lett. A, 360, 588-592, 2007.
- [23] Adhikary, N. C., Deka, M. K., Dev, A. N. & Sarmah, J. *Modified Korteweg-de Vries equation in a negative ion rich hot adiabatic dusty plasma with non-thermal ion and trapped electron*. Physics of Plasmas, 21, 083703, 2014.

*Oswaldo González-Gaxiola*  
 Universidad Autónoma Metropolitana,  
 Unidad Cuajimalpa.  
 División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
 Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.  
 Av. Vasco de Quiroga 4871, Santa Fe, Cuajimalpa  
 C.P. 05300, Ciudad de México.  
 e-mail: ogonzalez@cua.uam.mx

## DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD Y REGIONES CONDICIONANTES

LUIS RINCÓN  
EMMANUEL DELGADILLO

RESUMEN. Es evidente que todo número real  $x$  se puede escribir como el cociente  $v/u$ , para ciertos valores no únicos  $u \in (0, 1)$  y  $v \in (-1, 1)$ . Este resultado se puede extender al caso de variables aleatorias cuando se cumplen algunas hipótesis, es decir, toda variable aleatoria  $X$  con una distribución dada que satisface ciertas condiciones se puede escribir como el cociente  $V/U$ , en donde  $U \sim \text{unif}(0, 1)$  y  $V \sim \text{unif}(-1, 1)$ , excepto que la distribución de  $V/U$  se debe condicionar a que el par  $(U, V)$  tome valores en una cierta región  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ . Esta representación permite obtener simulaciones de  $X$  a través de generar valores de  $U$  y  $V$  en los intervalos indicados o en alguna extensión de ellos. Esto último es sencillo pues  $U$  y  $V$  tienen distribución uniforme. Aquellas distribuciones que permiten esta representación pueden ser caracterizadas por su región condicionante  $S$ . De esto trata el método del cociente y en este trabajo se estudian algunos detalles del procedimiento.

### 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas fundamentales en la simulación estocástica es el de obtener valores de una variable aleatoria con una distribución de probabilidad dada y utilizarlos para resolver problemas matemáticos. A estos procedimientos se les conoce con el nombre de *métodos de Monte Carlo*. En el pequeño libro de I. Sóbol [8] se puede encontrar una excelente exposición de divulgación acerca de este tema. Existen distintos métodos para generar valores de una variable aleatoria y, dado que el azar es muy difícil de construir, usualmente se parte de uno o dos valores de la distribución uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ , y mediante alguna transformación se construye un valor de la distribución objetivo.

En los textos de S. Asmussen y P. W. Glynn [1], B. D. Ripley [6], y R. Y. Rubinstein y D. P. Kroese [7], por ejemplo, pueden encontrarse exposiciones muy completas sobre los varios métodos de Monte Carlo y sus aplicaciones.

El procedimiento más sencillo para generar valores de una variable aleatoria es el *método de la función inversa*. Este procedimiento establece que si una función de distribución  $F(x)$  es invertible para valores de  $x$  tales que  $0 < F(x) < 1$ , entonces  $F^{-1}(u)$  es un valor de una variable aleatoria  $X$  con distribución  $F(x)$ , en donde  $u$  es un valor de la distribución  $\text{unif}(0, 1)$ . Como ejemplo particular, podemos tomar a la distribución exponencial,  $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ , para  $x > 0$ , en donde  $\lambda > 0$  es un parámetro. La función inversa de esta función de distribución es

$$(1) \quad F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u), \quad 0 < u < 1.$$

De esta manera si  $u$  es un valor de la distribución  $\text{unif}(0, 1)$ , entonces  $-(1/\lambda) \ln(1 - u)$  es un valor de la distribución  $\exp(\lambda)$ . Las desventajas de este método estriban en que no todas las funciones de distribución son invertibles, y aquellas que lo son podrían no contar con una expresión sencilla para su inversa.

---

2010 *Mathematics Subject Classification*. 00A72; 11K45; 65C05.

*Palabras clave*. Simulación estocástica, método del cociente, regiones condicionantes.

Otro método bastante usado para generar valores de una variable aleatoria es el así llamado *método de aceptación y rechazo*. En una de sus versiones simples, y que nos será de utilidad en este trabajo, se establece que si se desea obtener un punto al azar con distribución uniforme dentro de una cierta región  $S \subseteq (0, 1) \times (0, 1)$  de área positiva, es suficiente tomar un punto  $(u, v)$  dentro del cuadrado unitario (lo cual es sencillo) y si el punto cae dentro de la región  $S$ , se acepta el punto como válido, en caso contrario, se rechaza. De esta manera sencilla es posible obtener valores dentro de  $S$  con distribución uniforme. En la Figura 1 se muestra esta situación y la *eficiencia* del método de muestreo se define como el área de  $S$  entre el área del rectángulo que contiene a  $S$ . En este caso el rectángulo es el cuadrado unitario.

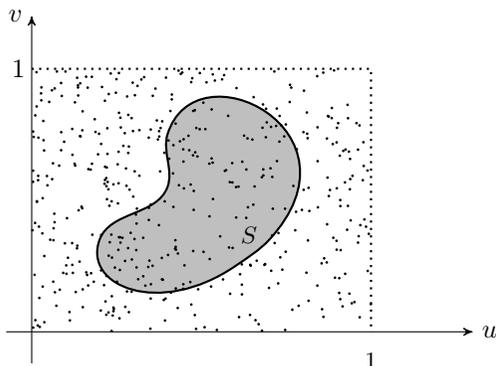


FIGURA 1. Región  $S$  dentro de  $(0, 1) \times (0, 1)$ .

Otro de tales métodos de simulación de variables aleatorias es el llamado *método del cociente* y es el que nos ocupa en el presente trabajo. Este método es válido bajo ciertas condiciones generales y hace uso del hecho interesante de que algunas variables aleatorias pueden expresarse como el cociente  $V/U$  de dos variables aleatorias  $U$  y  $V$  con distribución uniforme. No es difícil convencerse de que tal cociente puede producir cualquier número real cuando, por ejemplo,  $U \sim \text{unif}(0, 1)$  y  $V \sim \text{unif}(-1, 1)$ . Pero, ¿tendrá este cociente una distribución dada particular que uno desee? La respuesta es positiva bajo ciertas condiciones generales, las cuales se especifican en el siguiente enunciado.

**TEOREMA 1.** (*Método del cociente de uniformes*)

Sea  $h(x) \geq 0$  una función continua, integrable, acotada y que satisface:

- a)  $0 < \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx < \infty$ .  
 b)  $\sup_x |x| \sqrt{h(x)} < \infty$ .

Defina la región

$$(2) \quad S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < \sqrt{h(v/u)}, v/u \in \text{Soporte}(h)\}.$$

Si el vector aleatorio  $(U, V)$  tiene distribución uniforme sobre  $S$ , entonces el cociente  $V/U$  tiene función de densidad

$$(3) \quad f(x) = \frac{h(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx}.$$

Este resultado interesante fue publicado en 1977 por A. J. Kinderman y J. F. Mo-nahan [4]. La demostración no es complicada y hace uso de la fórmula para la función de densidad del cociente entre dos variables aleatorias. Pueden encontrarse los detalles de la demostración en [2], por ejemplo. En la demostración se verifica que la condición

(b) del enunciado garantiza que la región  $S$  es acotada, de modo que  $S$  puede ser encerrada en un rectángulo de área finita. En consecuencia, una distribución uniforme sobre  $S$  puede ser definida.

En resumen, el método del cociente asegura que si se toma  $(u, v) \in S$  con distribución uniforme, entonces  $v/u$  es un valor de  $X$ . Debido a que este teorema es la base de nuestro estudio, mantendremos la notación  $h(x)$  para una función que cumpla las condiciones anteriores, incluyendo el caso cuando  $h(x)$ , de inicio, es una función de densidad. La aplicación del teorema se ilustra mejor con algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.** (Distribución exponencial)

Esta distribución es importante, tanto desde el punto de vista teórico, como práctico. Se ha utilizado para modelar tiempos de espera. La función de densidad de la distribución  $\exp(\lambda)$  es

$$h(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 < x < \infty,$$

en donde  $\lambda > 0$  es un parámetro. En la expresión (1) hemos indicado que el método de la función inversa proporciona una manera muy efectiva para obtener valores de una variable con esta distribución. Sin embargo, a manera de ejemplo ilustrativo, determinaremos la región  $S$  que genera la expresión (2) para el caso exponencial.

No es difícil comprobar que se cumplen las condiciones del Teorema 1 para esta distribución. Tampoco es muy complicado encontrar la especificación de la región  $S$  asociada a la distribución  $\exp(\lambda)$ , para cualquier valor del parámetro  $\lambda > 0$ , sin embargo, para simplificar los cálculos, supondremos por ahora que  $\lambda = 1$ . Después de un análisis cuidadoso, se puede comprobar que la región  $S$  especificada en (2) puede expresarse de la siguiente manera:

$$S = \{(u, v) : 0 < u < 1, \quad 0 < v < -2u \ln u\}.$$

Esta región se encuentra contenida en el cuadrado  $(0, 1) \times (0, 1)$  del plano  $uv$  y se muestra en la Figura 2. Puede comprobarse que su área es  $|S| = 1/2$ . Así, la eficiencia del proceso de muestreo definida como el área de  $S$  entre el área del cuadrado es  $1/2$ , es decir, en promedio uno de cada dos puntos generados será útil. Es evidente que se puede mejorar la eficiencia tomando la coordenada  $v$  en el intervalo  $(0, m)$ , en donde  $m$  es la segunda coordenada del punto máximo en la región  $S$ , véase la Figura 2. En este caso, puede comprobarse que  $m = 2/e$  y la eficiencia se incrementa a  $(1/2)/(2/e) \approx 0.67$ .

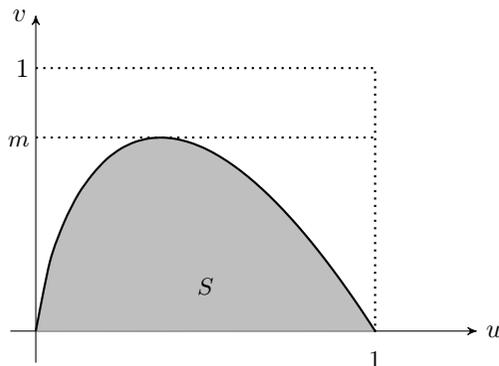


FIGURA 2. Región condicionante  $S$  para la distribución  $\exp(1)$ .

Si  $u$  y  $v$  son dos valores generados de manera independiente de la distribución  $\text{unif}(0, 1)$ , entonces se acepta el valor  $v/u$  como un valor de  $X$  con distribución  $\exp(1)$

sólo cuando  $(u, v) \in S$ . Una vez obtenido un valor aceptado, se puede usar el resultado que establece que si  $X$  tiene distribución  $\exp(1)$ , entonces  $X/\lambda$  tiene distribución  $\exp(\lambda)$ , es decir, multiplicar un valor exitoso de  $X$  por  $1/\lambda$  produce un valor de la distribución  $\exp(\lambda)$ . En la Sección 6 estudiaremos la forma en la que cambia la región  $S$  de una distribución cuando a la variable aleatoria se le aplica una transformación lineal. De esta manera pueden encontrarse las distintas regiones  $S$  de cada elemento de la familia parametral  $\exp(\lambda)$ . Véase la Figura 9 que aparece más adelante.

Usando el procedimiento descrito líneas arriba, pueden generarse múltiples valores  $x_1, \dots, x_n$  de la distribución  $\exp(1)$ , y al elaborar un histograma se encontrará aproximadamente la gráfica conocida de esta función de densidad. Esto sería una comprobación empírica de que el método funciona.

### Ejemplo 2. (Distribución normal)

Esta es, posiblemente, la distribución de probabilidad más importante. La función de densidad de la distribución  $N(\mu, \sigma^2)$  es

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

en donde  $\mu$  y  $\sigma^2 > 0$  son dos parámetros. La curva que dibuja esta función es la famosa campana de Gauss centrada en el parámetro  $\mu$ , que es la media de la distribución, y el contorno de la campana lo determina el segundo parámetro,  $\sigma^2$ , que resulta ser la varianza. Cuando  $\sigma^2$  es grande la campana es amplia, mientras que para  $\sigma^2$  pequeña la campana es delgada. Al caso  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$  se le denomina distribución *normal estándar*.

Dada la importancia y el amplio uso de la distribución normal, se han propuesto varios métodos para generar sus valores. Uno de tales métodos surge, precisamente, del método del cociente. No es difícil comprobar que se cumplen las condiciones del Teorema 1 para esta distribución. Por ahora aplicaremos este teorema al caso  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ , y omitiremos la constante  $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$  que aparece antes de la exponencial en (4), es decir, tomaremos la función simplificada

$$(5) \quad h(x) = e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Esta no es una función de densidad pero nos servirá para aplicar el Teorema 1 y obtener un mecanismo para generar valores de la densidad normal estándar. Después de algunos cálculos sencillos, se puede comprobar que la región  $S$  especificada en (2) para la función  $h(x)$  toma la siguiente forma:

$$S = \{(u, v) : 0 < u < 1, \quad 0 < v^2 < -4u^2 \ln u\}.$$

Esta región se encuentra contenida en el rectángulo  $(0, 1) \times (-1, 1)$  del plano  $uv$  y se muestra en la Figura 3. Puede comprobarse que su área es  $|S| = \sqrt{2\pi}/2 \approx 1.25$ .

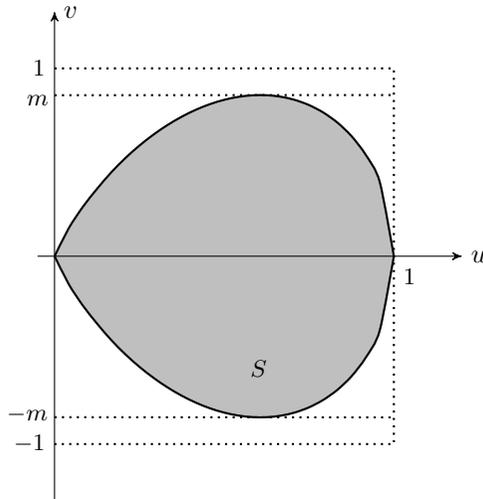


FIGURA 3. Región condicionante  $S$  para la función  $h(x) = e^{-x^2/2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ .

Si  $u$  y  $v$  son dos valores generados de manera independiente de las distribuciones  $\text{unif}(0, 1)$  y  $\text{unif}(-1, 1)$ , respectivamente, entonces se acepta el valor  $v/u$  como un valor de  $X$  con distribución  $N(0, 1)$  sólo cuando  $(u, v) \in S$ . En este caso, la región condicionante  $S$  está contenida en el rectángulo  $(0, 1) \times (-1, 1)$  y la eficiencia del proceso de muestreo es  $|S|/2 = \sqrt{2\pi}/4 \approx 0.62$ . Se puede mejorar la eficiencia tomando la coordenada  $v$  en el intervalo  $(0, m)$ , en donde  $m$  es la segunda coordenada del punto máximo en la región  $S$ , véase la Figura 3. En este caso, puede comprobarse que  $m = \sqrt{2}e^{-1/2} \approx 0.857$  y la eficiencia se incrementa ligeramente a  $(\sqrt{2\pi}/2)/(2m) \approx 0.730$ .

Una vez obtenido un valor aceptado, se puede usar el resultado que establece que si  $X$  tiene distribución  $N(0, 1)$ , entonces  $\mu + \sigma X$  tiene distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ , es decir, esta transformación lineal de un valor exitoso de  $X$  produce un valor de la distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ . Reiteramos que en la Sección 6 estudiaremos la forma en la que cambia la región  $S$  de una distribución cuando a la variable aleatoria se le aplica una transformación lineal como la indicada. De esta manera pueden encontrarse las regiones  $S$  de la familia parametral  $N(\mu, \sigma^2)$ . Véase la Figura 11.

Desde un punto de vista experimental, pueden generarse múltiples valores  $x_1, \dots, x_n$  de la distribución  $N(0, 1)$  usando el procedimiento descrito líneas arriba y al elaborar un histograma se encontrará aproximadamente la gráfica de esta función de densidad. Se puede también aplicar la transformación lineal indicada en el párrafo anterior a cada uno de los datos y el histograma correspondiente será una aproximación de la densidad  $N(\mu, \sigma^2)$ .

En la Figura 4 se muestran las regiones condicionantes de varias distribuciones de probabilidad. El área de cada una de ellas es  $|S| = 1/2$ .

- Distribución  $\text{unif}(a, b)$ . Se muestra el caso  $0 < a < b$ .
- Distribución mezcla de las distribuciones  $\text{unif}(a, b)$  y  $\text{unif}(c, d)$ . Se muestra el caso  $0 < a < b < c < d$ .
- Distribución Cauchy estándar, cuya función de densidad, para  $-\infty < x < \infty$ , es  $h(x) = (1/\pi)(1/(1+x^2))$ .
- Distribución doble exponencial, cuya función de densidad es  $h(x) = (1/2)\lambda e^{-\lambda|x|}$ , para  $-\infty < x < \infty$ . Se muestra el caso  $\lambda = 1$ .

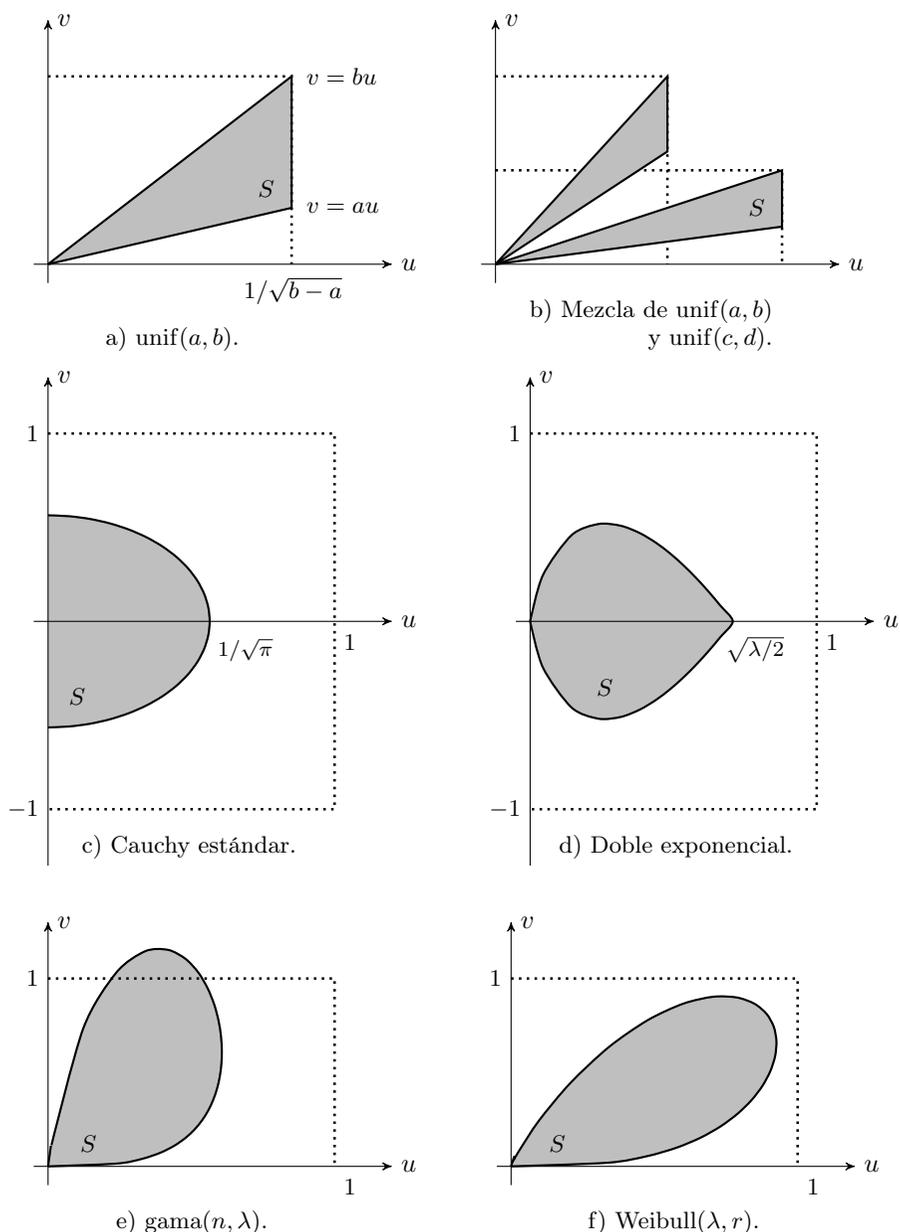


FIGURA 4. Regiones condicionantes de algunas distribuciones.

- e) Distribución gama( $n, \lambda$ ), cuya función de densidad es  $h(x) = (\lambda x)^{n-1} / (n - 1)! \lambda e^{-\lambda x}$ , para  $0 < x < \infty$ . Se muestra el caso  $n = 2$  y  $\lambda = 1$ .
- f) Distribución Weibull( $\lambda, r$ ), cuya función de densidad es  $h(x) = \lambda r x^{r-1} e^{-\lambda x^r}$ , para  $0 < x < \infty$ . Se muestra el caso  $\lambda = 1$  y  $r = 2$ .

## 2. EXPERIMENTACIÓN EN COMPUTADORA

Es claro que surge de inmediato el interés por determinar y mostrar gráficamente la región  $S$  para las distintas distribuciones de probabilidad continuas univariadas que satisfacen las condiciones del Teorema 1. Dada una de tales funciones de densidad, no es muy complicado determinar analíticamente la región  $S$  a partir de su especificación (2) en coordenadas cartesianas, o bien, su representación en coordenadas

polares (11), la cual veremos un poco más adelante.

Alternativamente, puede utilizarse un procedimiento computacional sencillo para mostrar gráficamente una región  $S$ . La idea es crear una malla de puntos  $(u, v)$  dentro del rectángulo  $(0, 1) \times (-1, 1)$ , por ejemplo, la malla puede ser  $\{0.1, \dots, 0.9\} \times \{-0.9, \dots, 0.9\}$ . Para cada uno de estos puntos se verifica si se satisface la condición que aparece en (2). Si la condición se cumple se marca el punto en el plano cartesiano, en caso contrario, se omite. El rectángulo indicado puede ampliarse dependiendo de la función  $h(x)$  considerada. La precisión de la malla también puede incrementarse sin que los cálculos presenten una demanda extrema de procesamiento para una computadora actual.

Hemos hecho este experimento numérico en el paquete estadístico R y se han encontrado regiones como las que se muestran en la Figura 5 para las distribuciones exponencial y normal. Como era de esperarse, estas regiones son una versión discreta de las presentadas antes en las Figuras 2 y 3.

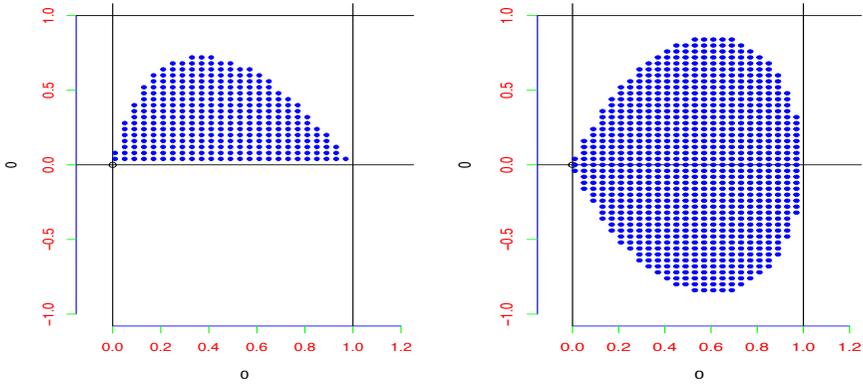


FIGURA 5. Regiones condicionantes  $S$  para la distribución  $\exp(1)$  y la función  $h(x) = e^{-x^2/2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ , obtenidas por experimentación en computadora.

### 3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Supongamos que  $X$  una variable aleatoria con función de densidad  $h(x)/\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx$ , que satisface las condiciones del Teorema 1 y con región asociada  $S$  contenida en un rectángulo  $(0, a) \times (b, c)$  y con área  $|S|$ . Sea  $(U, V)$  un vector con distribución uniforme en  $(0, a) \times (b, c)$ . Entonces, el evento  $((U, V) \in S)$  tiene probabilidad igual al área favorable entre el área total, es decir,

$$(6) \quad P((U, V) \in S) = \frac{|S|}{a(c-b)}.$$

Por otro lado, para cada número real  $x$ , defina el evento  $S_x = (V \leq xU, (U, V) \in S)$ , cuya probabilidad es

$$(7) \quad P((U, V) \in S_x) = \frac{|S_x|}{a(c-b)}.$$

Por el Teorema 1, la variable  $X$  se puede expresar como el cociente  $V/U$  siempre y cuando  $(U, V) \in S$ . Es decir, la distribución de  $X$  coincide con la distribución condicional de  $V/U$  dado el evento  $((U, V) \in S)$ . Por lo tanto, la función de distribución

de  $X$  se puede calcular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= P(X \leq x) \\
 &= P(V/U \leq x \mid (U, V) \in S) \\
 &= P(V \leq xU \mid (U, V) \in S) \\
 &= \frac{P((U, V) \in S_x)}{P((U, V) \in S)} \\
 (8) \qquad &= \frac{|S_x|}{|S|}, \quad -\infty < x < \infty.
 \end{aligned}$$

Esta expresión significa que la función de distribución evaluada en  $x$  es el área relativa de la región que se encuentra bajo el rayo  $v = xu$ , en el plano  $uv$ , respecto del área de la región completa. Claramente, el valor  $x$  (positivo, negativo o cero) representa la pendiente de la recta  $v = xu$ . Al recorrer los valores de la pendiente  $x$ , se obtienen los distintos valores de la función de distribución.

A continuación se muestra la aplicación de la fórmula (8) para los casos de las distribuciones exponencial y normal.

**Ejemplo 3.** Para la distribución  $\exp(1)$ , se ha indicado que  $|S| = 1/2$ , de modo que (8) se reduce a

$$(9) \qquad F(x) = 2|S_x|,$$

Para  $x = 0$  (rayo horizontal o pendiente cero) o para  $x < 0$  (pendiente negativa), el valor del área  $|S_x|$  es cero pues no hay intersección el rayo con la región  $S$ . Véase la Figura 6. Conforme la pendiente  $x$  crece tomando valores positivos, el área se incrementa y sólo cuando  $x \rightarrow \infty$  (rayo vertical o pendiente infinita positiva) se alcanza la probabilidad máxima 1.

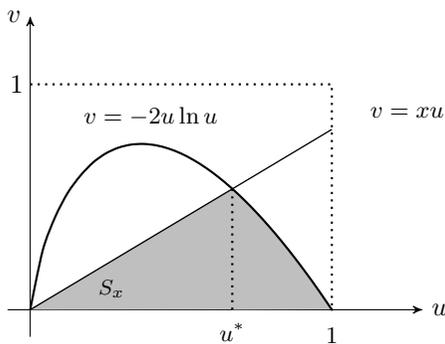


FIGURA 6. Probabilidad  $F(x) = P(X \leq x) = 2|S_x|$  para la distribución  $\exp(1)$ .

El área de la región sombreada en la Figura 6 puede encontrarse observando que la recta y la curva se intersecan cuando  $u^* = e^{-x/2}$ . Después de algunos cálculos se encuentra que la expresión (9) produce la fórmula conocida para la función de distribución  $\exp(1)$ , es decir, para  $x > 0$ ,

$$F(x) = 2 \int_0^{u^*} xu \, du + 2 \int_{u^*}^1 -2u \ln u \, du = 1 - e^{-x}.$$

Todos los valores o pendientes  $x > 0$  son tales que producen una probabilidad positiva en (9). En efecto, puede comprobarse que la pendiente de la curva en  $u = 0$  es infinita, es decir,

$$\lim_{u \searrow 0} \frac{d}{du} -2u \ln u = \infty.$$

Esto comprueba que, como se esperaba, el soporte de la distribución es  $(0, \infty)$ .

**Ejemplo 4.** Para la distribución  $N(0, 1)$  y considerando  $h(x) = e^{-x^2/2}$ , se ha señalado que  $|S| = \sqrt{2\pi}/2$ , de modo que (8) se reduce a

$$(10) \quad F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} |S_x|.$$

La región correspondiente a (10) se muestra en la Figura 7 en el caso  $x > 0$ . El contorno de la región completa está dada por la ecuación  $v^2 = -2u^2 \ln u^2$ , para  $0 < u < 1$ . Para cualquier valor de  $x$ , el rayo  $v = xu$  siempre intersecta a la región  $S$ , de modo que la probabilidad asociada siempre es positiva. Conforme la pendiente  $x$  crece, el área se incrementa y sólo cuando  $x \rightarrow \infty$  (rayo vertical o pendiente infinita positiva) se alcanza la probabilidad máxima 1.

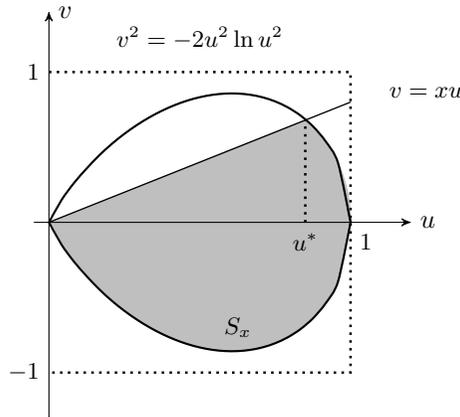


FIGURA 7. Probabilidad  $F(x) = P(X \leq x) = (2/\sqrt{2\pi}) |S_x|$  para la distribución  $N(0, 1)$ .

En la situación que se muestra en la Figura 7, puede comprobarse que la intersección de la recta con pendiente  $x > 0$  y la frontera superior de la región  $S$  ocurre en el punto  $(u^*, v^*) = (e^{-x^2/4}, xe^{-x^2/4})$ . Se puede seccionar la región  $S_x$  en las tres partes sugeridas en la Figura 7. Calculando el área de estas tres partes se encuentra que la función de distribución en  $x$  es

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{u^* \cdot xu^*}{2} + \int_{x^*}^1 \sqrt{-2u^2 \ln u^2} du \right], \quad x > 0.$$

En la integral se aplica el cambio de variable  $v = e^{-u^2/4}$  y después se usa el método de integración por partes para corroborar que

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Se puede comprobar también que la pendiente de la curva en  $u = 0$  es, en valor absoluto, infinita, es decir,

$$\lim_{u \searrow 0} \frac{d}{du} \sqrt{-2u^2 \ln u^2} = \infty.$$

Este resultado no es evidente en la gráfica de la Figura 7, pero ocurre. Indica que el soporte de la distribución es  $(-\infty, \infty)$ .

## 4. FUNCIONES RADIALES Y ÁREAS

En algunas ocasiones puede ser conveniente expresar la región condicionante  $S$  asociada a una función  $h(x)$  en coordenadas polares. Estamos suponiendo que  $h(x)$  satisface las condiciones del Teorema 1. Haciendo el cambio de variable  $(u, v) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  se encuentra que la condición que aparece en la definición de  $S$  se puede escribir como

$$0 < u < \sqrt{h(v/u)} \iff 0 < r \cos \theta < \sqrt{h(\tan \theta)}.$$

Como la región  $S$  se encuentra siempre en el semiplano  $u > 0$ , el ángulo  $\theta$  se restringe al intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ . De esta manera, la región  $S$  del Teorema 1 se puede expresar en coordenadas polares como

$$(11) \quad S = \left\{ (r, \theta) : \theta \in (-\pi/2, \pi/2), 0 < r < \frac{\sqrt{h(\tan \theta)}}{\cos \theta} \right\}.$$

En realidad los posibles valores del ángulo  $\theta$  son aquellos tales que el valor  $x = \tan \theta$  es un elemento del soporte de la función  $h$ . Para tales valores  $\theta$  se tendrá que la función radial o curva polar  $\rho(\theta)$  que se define a continuación es positiva,

$$(12) \quad \rho(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{h(\tan \theta)}, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Esta es otra representación de las regiones condicionantes que surgen en el método del cociente. Es conocido, ver [9], que el área que encierra esta curva está dada por

$$(13) \quad |S| = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2(\theta) d\theta.$$

**PROPOSICIÓN 2.** *Sea  $h(x)$  una función como en el Teorema 1 y sea  $\rho(\theta)$  la función radial de la región condicionante definida en (12). Entonces la siguiente función es de densidad,*

$$\theta \mapsto \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx} \rho^2(\theta), \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

*Demostración.* Sea  $X$  con función de densidad  $f(x) = h(x) / \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx$ . Por el teorema de cambio de variable, la función de densidad de  $Y = \arctan(X)$  es

$$\begin{aligned} f_Y(\theta) &= \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx} h(\tan \theta) \left| \frac{d}{d\theta} \tan \theta \right| \\ &= \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx} \frac{1}{\cos^2 \theta} h(\tan \theta) \\ &= \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx} \rho^2(\theta), \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2. \end{aligned}$$

□

Usando este último resultado y la ecuación (13), se obtiene que

$$(14) \quad |S| = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx.$$

Por supuesto, si  $h(x)$  es de inicio una función de densidad, se concluye que la función radial al cuadrado es una función de densidad sobre el conjunto de ángulos  $(-\pi/2, \pi/2)$  y que  $|S| = 1/2$ . Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 5.** (Distribución exponencial con  $\lambda = 1$ )

El soporte de esta distribución es el conjunto de valores  $x$  (pendientes de las rectas  $v = xu$ ) que son positivos, es decir,  $0 < \tan \theta < \infty$ . Esto significa que  $0 < \theta < \pi/2$  y la función radial que delimita la región  $S$  que se muestra en la Figura 2 es

$$(15) \quad \rho(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \tan \theta \right\}, \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

Si se grafica esta curva polar, se obtiene el contorno de la región condicionante  $S$  de la Figura 2. Usando (13), se corrobora que  $|S| = 1/2$ .

**Ejemplo 6.** (Distribución normal estándar considerando  $h(x) = e^{-x^2/2}$ )

En este caso el soporte de la distribución es el conjunto de todos los valores  $x$  (pendientes de las rectas  $v = xu$ ) sin ninguna restricción, es decir, los ángulos  $\theta$  son tales que  $-\infty < \tan \theta < \infty$ . Esto significa que  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  y la función radial que delimita la región  $S$  que se muestra en la Figura 3, tomando a  $h(x)$  como en (5), es

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \exp\left\{-\frac{1}{4} \tan^2 \theta\right\}, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Como es de esperarse, la gráfica de esta curva polar es el contorno de la región condicionante  $S$  que se muestra en la Figura 3. Se tiene que  $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = \sqrt{2\pi}$  y, por (14), el área de  $S$  es

$$|S| = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}.$$

Finalmente, a partir de la función radial (12), las coordenadas cartesianas  $(u, v)$  del contorno de la región  $S$  pueden parametrizarse por  $x = \tan \theta$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u &= \rho(\theta) \cos \theta = \sqrt{h(\tan \theta)} = \sqrt{h(x)}, \\ v &= \rho(\theta) \sin \theta = \tan \theta \sqrt{h(\tan \theta)} = x \sqrt{h(x)}, \end{aligned}$$

en donde  $x$  es cualquier valor en el soporte de la función  $h$ .

## 5. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD Y SUS REGIONES CONDICIONANTES

Es evidente que toda función  $h(x)$  que satisfaga las condiciones del Teorema 1 determina de manera única una región acotada  $S$  definida en (2), y cuyo contorno está delimitado por la función radial  $\rho(\theta)$  definida en (12). El siguiente resultado establece condiciones sobre una función radial  $r(\theta)$  de una región de la forma

$$(16) \quad S = \{(r, \theta) : \theta \in (-\pi/2, \pi/2), 0 < r < r(\theta)\},$$

de tal manera que corresponda a la región de una función  $h(x)$  que satisfaga las condiciones del Teorema 1. De esta manera se tiene una correspondencia biunívoca entre las funciones  $h(x)$  y las regiones  $S$  definidas en (2) ó (11).

**PROPOSICIÓN 3.** (*Caracterización de una función radial*)

Sea  $r(\theta) \geq 0$  una función continua, acotada, definida sobre  $A \subseteq (-\pi/2, \pi/2)$ , y tal que su cuadrado integra 1. Entonces la función  $h(x)$  especificada abajo es de densidad, satisface las condiciones del Teorema 1 y su región condicionante  $S$  es de la forma (16),

$$(17) \quad h(x) := \frac{r^2(\arctan x)}{1+x^2} \mathbb{1}_A(\arctan x), \quad -\infty < x < \infty.$$

*Demostración.* La función  $h(x)$  definida en (17) es no negativa, acotada y es continua en aquellos valores  $x$  en donde  $\arctan(x) \in A$ . Haciendo el cambio de variable  $x = \tan \theta$ , se comprueba que su integral es finita pues

$$\begin{aligned} 0 < \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(\tan(\theta)) (1 + \tan^2(\theta)) \mathbb{1}_A(\theta) d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2(\theta) \mathbb{1}_A(\theta) d\theta \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Además, esta función es tal que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x| \sqrt{h(x)} &= \sup_{-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2} |\tan \theta| \sqrt{h(\tan \theta)} \\ &= \sup_{-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2} |\sen(\theta)| r(\theta) < \infty. \end{aligned}$$

Esto comprueba que  $h(x)$  satisface las condiciones del Teorema 1. Sea  $\rho(\theta)$  su función radial de acuerdo a la definición que aparece en la ecuación (12). Haciendo el cambio a coordenadas polares, la condición que define a la región condicionante  $S$  asociada a  $h(x)$  es de la forma (16) pues

$$\begin{aligned} 0 < u < \sqrt{h(v/u)} &\iff 0 < r \cos \theta < \sqrt{h(\tan \theta)} \\ &\iff 0 < r < \rho(\theta). \end{aligned}$$

□

De esta manera, cada función radial  $r(\theta)$  que cumpla las condiciones de la proposición anterior, determina el contorno de una región condicionante  $S$  asociada a la función  $h(x)$  definida en (17). Cuando  $r^2(\theta)$  integra 1, la función  $h(x)$  es una función de densidad.

No es difícil darse cuenta que pueden existir otras regiones  $S$  en el plano cartesiano tales que su intersección con los semiplanos  $\{(u, v) : u > 0, v < xu\}$ , para  $-\infty < x < \infty$ , coincidan con los distintos valores de una función de distribución dada  $F(x)$ . Sin embargo la caracterización de los contornos de las regiones condicionantes como curvas polares con las condiciones de la Proposición 3 hacen que dichas representaciones sean únicas.

## 6. TRANSFORMACIONES

Nos interesa descubrir lo que ocurre con la región condicionante  $S$  asociada a una variable aleatoria continua  $X$ , con función de densidad  $h_X(x)$ , cuando se le aplica una transformación que cumple ciertas condiciones. Al conjunto de valores que  $X$  puede tomar lo denotaremos por  $\text{Rango}(X)$ . Si  $\varphi(x) : \text{Rango}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  es una transformación continua, estrictamente creciente o decreciente y con inversa diferenciable, entonces la función de densidad de  $Y = \varphi(X)$  es

$$h_Y(y) = h_X(\varphi^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} \varphi^{-1}(y) \right|, \quad y \in \text{Rango}(\varphi(X)).$$

Este resultado es bien conocido en la teoría de la probabilidad y se puede encontrar, por ejemplo, en el texto de A. Gut [3]. Supondremos que  $\varphi$  es tal que  $h_Y(y)$  también satisface las condiciones del Teorema 1. Usando esta función de densidad se puede escribir la expresión para la región condicionante  $S_Y$  a partir de su especificación (2), sin embargo, no escribiremos tal expresión general pues no nos será de utilidad por ahora. De la misma forma, puede escribirse la función radial  $\rho_Y(\theta)$  a partir de (12), pero tampoco escribiremos tal expresión general. En contraste, en la siguiente subsección estudiaremos el caso simple cuando la transformación  $\varphi(x)$  es lineal.

**Transformación lineal.** Para la transformación  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$ , en donde  $\mathbf{a} \neq 0$  y  $\mathbf{b}$  son dos constantes, puede comprobarse que la función de densidad de  $Y$  es

$$h_Y(y) = \frac{1}{|\mathbf{a}|} h_X((y - \mathbf{b})/\mathbf{a}), \quad -\infty < y < \infty.$$

Si  $h_X(x)$  satisface las condiciones del Teorema 1, entonces también  $h_Y(x)$  cumple las condiciones y la región condicionante  $S_Y$  asociada a  $h_Y(x)$ , según la especificación (2), es

$$(18) \quad S_Y = \{(u, v) : 0 < u < \sqrt{\frac{1}{|\mathbf{a}|} h_X((v/u - \mathbf{b})/\mathbf{a})}, (v/u - \mathbf{b})/\mathbf{a} \in \text{Soporte}(h_X)\}.$$

Debe observarse que  $|S_X| = |S_Y| = 1/2$  para cualesquiera valores de  $\mathbf{a} \neq 0$  y  $\mathbf{b}$ .

En coordenadas polares, si  $\rho_X(\theta)$  es la función radial asociada a la región condicionante  $S$  de una variable aleatoria  $X$ , entonces la función radial de  $Y$  es

$$(19) \quad \rho_Y(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\frac{1}{|\mathbf{a}|} h_X((\tan \theta - \mathbf{b})/\mathbf{a})}.$$

**Ejemplo 7.** (Distribución exponencial)

Sea  $X$  con distribución  $\exp(1)$ , es decir, su función de densidad es  $h(x) = e^{-x}$ ,  $0 < x < \infty$ . Recordemos que la región condicionante asociada es

$$S_X = \{(u, v) : 0 < u < 1, \quad 0 < v < -2u \ln u\},$$

con área  $|S_X| = 1/2$ . Usando la expresión (18) y después de algunos cálculos, puede comprobarse que la región condicionante asociada a la variable  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$ , con  $\mathbf{a} > 0$ , es

$$S_Y = \{(u, v) : 0 < u < 1/\sqrt{|\mathbf{a}|}, \quad 0 < v < u\mathbf{b} - 2\mathbf{a}u \ln(\sqrt{|\mathbf{a}|} u)\},$$

cuya área también es  $|S_Y| = 1/2$ . En la Figura 8 se muestran los efectos de la transformación lineal de esta región en dos casos:  $\mathbf{a} = 2, \mathbf{b} = 0$  (gráfica de la izquierda), y  $\mathbf{a} = 1, \mathbf{b} = -1/2$  (gráfica de la derecha). En el primer caso, la región se alarga verticalmente y se reduce su base en el eje horizontal. Si  $\mathbf{a}$  es menor a 1, la región se acorta verticalmente y se amplía su base en el eje horizontal. Véase también la Figura 9. Cuando se toman valores negativos de  $\mathbf{a}$ , la región se refleja respecto del eje horizontal. En el segundo caso mostrado, la región y su base sufren una especie de estiramiento hacia abajo. Este movimiento no es una rotación. Si  $\mathbf{b}$  es positivo, la región y su base sufren un estiramiento hacia arriba. En el caso de una combinación lineal arbitraria ( $\mathbf{a} \neq 0$ ), la región resultante es una combinación de las dos deformaciones anteriores.

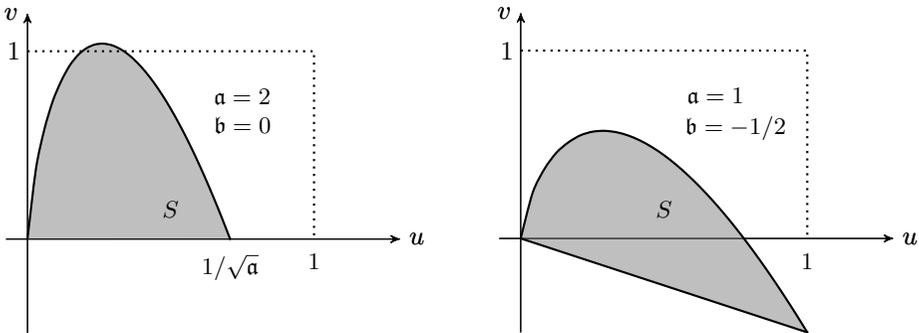


FIGURA 8. Dos regiones condicionantes  $S$  para  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$  con  $X \sim \exp(1)$ .

En particular, tomando  $\mathbf{a} = 1/\lambda > 0$  y  $\mathbf{b} = 0$ , sabemos que la variable  $Y = X/\lambda$  tiene distribución  $\exp(\lambda)$ . La región  $S_Y$  toma la forma

$$S_{X/\lambda} = \{(u, v) : 0 < u < \sqrt{\lambda}, \quad 0 < v < -2 \frac{u}{\lambda} \ln \frac{u}{\sqrt{\lambda}}\}.$$

Esta familia de regiones condicionantes se muestra en la Figura 9 para tres valores de  $\lambda$ . Cada una de estas regiones está asociada a una distribución  $\exp(\lambda)$ . Cuando  $\lambda$  es pequeña, la región es alargada hacia arriba, mientras que, cuando  $\lambda$  es grande, la región se alarga horizontalmente.

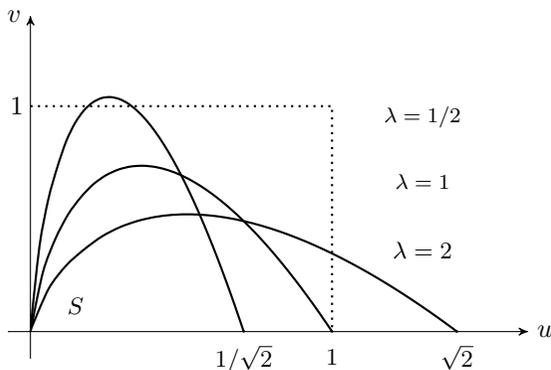


FIGURA 9. Regiones condicionantes  $S$  de la familia parametral  $\exp(\lambda)$ .

Observe que las regiones condicionantes  $S$  de la Figura 8, y las de la Figura 9, pueden no estar contenidas en el cuadrado unitario, de modo que para generar puntos al azar con distribución uniforme sobre ellas, según el método del cociente, es necesario considerar rectángulos adecuados que las contengan. Observe también que el área de las regiones de las Figuras 8 y Figuras 9 es siempre  $1/2$ .

Por otro lado, usando (19) puede comprobarse que la función radial asociada a la variable  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$  es

$$\rho_{\mathbf{a}X+\mathbf{b}}(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{a}|}} \exp\{-(\tan \theta - \mathbf{b})/2\mathbf{a}\}, \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

En particular, para  $\mathbf{a} = 1/\lambda > 0$  y  $\mathbf{b} = 0$ ,

$$\rho_{X/\lambda}(\theta) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\cos \theta} \exp\{-\frac{\lambda}{2} \tan \theta\}, \quad 0 < \theta < \pi/2.$$

Esta es la función radial de las regiones condicionantes de la familia  $\exp(\lambda)$  que se muestran en la Figura 9. Cuando  $\lambda = 1$  se obtiene (15).

**Ejemplo 8.** (Distribución normal)

Sea  $X$  con distribución  $N(0, 1)$ , es decir, con función de densidad  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ . Esta vez tomaremos a  $h(x)$  como la función de densidad completa, esto es, con la constante  $1/\sqrt{2\pi}$  añadida. Puede comprobarse que la región condicionante asociada es

$$S_X = \{(u, v) : 0 < u < (2\pi)^{-1/4}, \quad 0 < v^2 < -4u^2 \ln(u(2\pi)^{1/4})\},$$

con área  $|S_X| = 1/2$ . Usando la expresión (18) y después de algunos cálculos, se puede demostrar que la región condicionante asociada a la variable  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$  es

$$S_Y = \{(u, v) : 0 < u < \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{a}|}} (2\pi)^{-1/4}, \\ u\mathbf{b} - u\sqrt{-4\mathbf{a}^2 \ln(u\sqrt{|\mathbf{a}|}(2\pi)^{1/4})} < v < u\mathbf{b} + u\sqrt{-4\mathbf{a}^2 \ln(u\sqrt{|\mathbf{a}|}(2\pi)^{1/4})}\},$$

con área  $|S_Y| = 1/2$ . En la Figura 10 se muestran los efectos de la transformación lineal de esta región en dos casos:  $\mathbf{a} = 2$ ,  $\mathbf{b} = -1$  (gráfica de la izquierda), y  $\mathbf{a} = 1$ ,  $\mathbf{b} = 2$  (gráfica de la derecha). Observe que el signo de  $\mathbf{a}$  es irrelevante en la determinación de la región  $S$ .

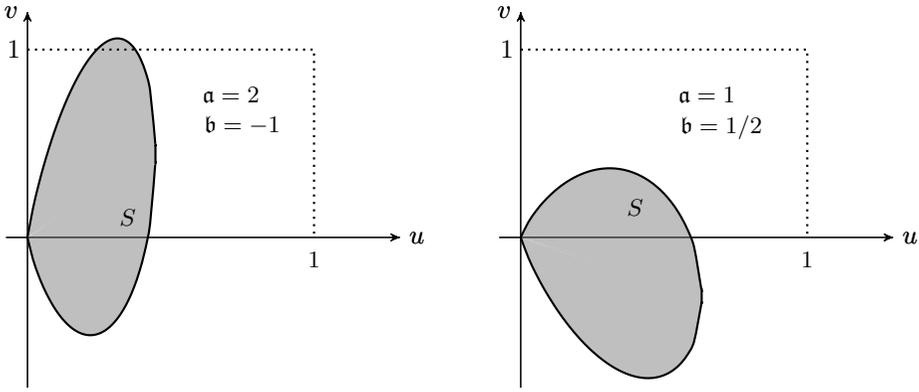


FIGURA 10. Dos regiones condicionantes  $S$  para  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$  con  $X \sim N(0, 1)$ .

En particular, tomando  $\mathbf{a} = \sigma > 0$  y  $\mathbf{b} = \mu$ , sabemos que la variable  $Y = \sigma X + \mu$  tiene distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ . La región  $S_Y$  toma la forma

$$S_{\sigma X + \mu} = \left\{ (u, v) : 0 < u < \frac{1}{\sqrt{\sigma}} (2\pi)^{-1/4}, \right. \\ \left. u\mu - u\sqrt{-4\sigma^2 \ln(u\sqrt{\sigma}(2\pi)^{1/4})} < v < u\mu + u\sqrt{-4\sigma^2 \ln(u\sqrt{\sigma}(2\pi)^{1/4})} \right\}.$$

Esta familia de regiones condicionantes se muestra en la Figura 11 para algunos valores de los parámetros. Cada una de estas regiones está asociada a una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$  y el conjunto de todas ellas caracteriza a la familia parametral  $N(\mu, \sigma^2)$ . El área de cualquiera de estas regiones es  $|S_{\sigma X + \mu}| = 1/2$ .

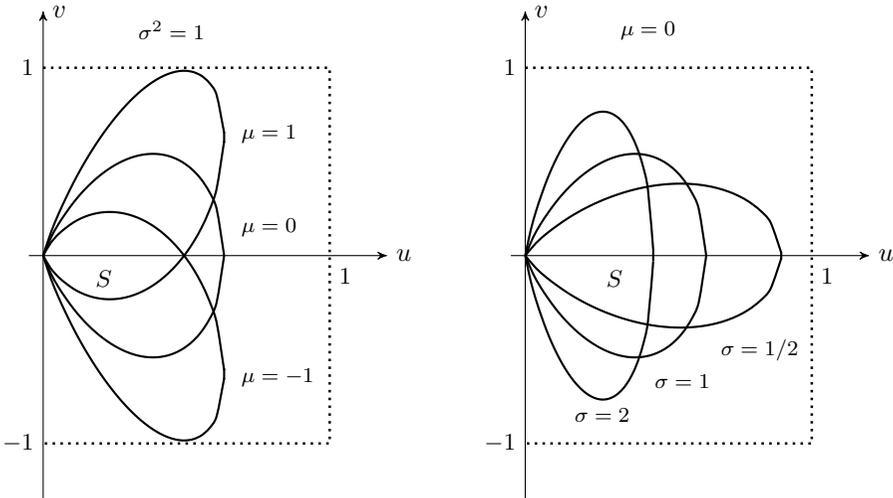


FIGURA 11. Regiones condicionantes  $S$  de la familia parametral  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Por otro lado, recordemos que la función radial de la región condicionante de una variable aleatoria  $X$  con distribución  $N(0, 1)$  es

$$\rho_X(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \tan^2 \theta \right\}, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

Usando (19), se encuentra que la función radial de la región condicionante asociada a la variable  $Y = \mathbf{a}X + \mathbf{b}$  es

$$\rho_{\mathbf{a}X + \mathbf{b}}(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{a}|}} \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{1}{4\mathbf{a}^2} (\tan \theta - \mathbf{b})^2 \right\}, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

En particular, para  $\mathbf{a} = \sigma > 0$  y  $\mathbf{b} = \mu$  se obtiene la expresión que aparece abajo y que corresponde a la función radial de las regiones condicionantes de la familia parametral  $N(\mu, \sigma^2)$ , ver Figura 11.

$$\rho_{\mathbf{a}X+\mathbf{b}}(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma^2} (\tan \theta - \mu)^2 \right\}, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2.$$

## 7. COMENTARIOS FINALES

Se ha ilustrado en este breve trabajo el método del cociente para generar valores de una variable aleatoria  $X$  con distribución de probabilidad que satisface ciertas condiciones generales. Tal variable aleatoria se puede expresar como el cociente  $V/U$ , en donde el vector  $(U, V)$  tiene distribución uniforme sobre cierta región  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ , a la que hemos llamado condicionante. Esta representación es la que permite poder generar valores de la variable aleatoria objetivo. Lo que es interesante recalcar es que la región condicionante  $S$  caracteriza de manera única a la distribución de  $X$ , de modo que tales regiones son una manera geométrica de representar a las distribuciones.

Como se ha indicado, el método requiere generar puntos al azar  $(u, v)$  de manera uniforme dentro de la región acotada  $S$ . Para ello se puede encerrar tal región dentro de un rectángulo acotado, generar puntos de manera uniforme dentro de tal rectángulo y validar sólo aquellos puntos que quedan dentro de  $S$ . Esta es una aplicación del método de aceptación y rechazo. Es claro que el procedimiento de validación es más eficiente cuando se toma el rectángulo de área más pequeña que contiene a  $S$ .

Nos interesó en este trabajo mostrar el cambio que tiene una región condicionante  $S$  cuando a la variable aleatoria  $X$  se le aplica una transformación lineal. Se mostraron algunos de estos cambios y se ilustró que tal transformación puede ser útil para obtener la región condicionante de una familia paramétrica de distribuciones a partir de considerar un caso particular de los valores de los parámetros. Nuestra primera motivación en este sentido fue descubrir la región condicionante asociada a la suma de dos variables aleatorias independientes, aunque este problema parece ser más difícil de analizar y queda pendiente de resolver. Por supuesto, nuestro interés es poder demostrar algún teorema límite de la probabilidad usando esta herramienta. Por otro lado, las características numéricas y otras propiedades de las distribuciones deben poder obtenerse a través de las regiones  $S$ , sin embargo, no es claro cómo llevar a cabo tal tarea. Por ejemplo, ¿cómo se calcula  $E(X)$  ó  $\text{Var}(X)$  a partir de  $S$ ? ¿Tienen estas cantidades algún significado geométrico dentro de  $S$ ?

Finalmente, debemos mencionar que el método del cociente se puede extender sin muchas dificultades al caso de vectores aleatorios. Además, se pueden proponer algunas generalizaciones que incorporan ciertas transformaciones, ver por ejemplo, Martino L., Luengo D. y Míguez J. [5] ó Wakefield J. C., Gelfand A. E. y Smith A. F. M. [10]. Esperamos continuar el presente trabajo con otros ensayos en donde se ilustren estas extensiones y algunas mejoras del método del cociente.

**AGRADECIMIENTOS.** Los autores agradecen a los árbitros por sus valiosos comentarios y sugerencias.

## REFERENCIAS

- [1] Asmussen S. y Glynn P. W. *Stochastic simulation: algorithms and analysis*. Springer, 2007.
- [2] Devroye L. *Non-uniform random variate generation*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [3] Gut A. *Probability: a graduate course*. Springer, 2005.
- [4] Kinderman A. J. y Monahan J. F. Computer generation of random variables using the ratio of uniform deviates. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **3**, 257-260, 1977.
- [5] Martino L., Luengo D. y Míguez J. *Independent random sampling methods*. Springer, 2018.
- [6] Ripley B. D. *Stochastic simulation*. John Wiley & Sons, 1987.

- [7] Rubinstein R. Y. y Kroese D. P. *Simulation and the Monte Carlo method*. John Wiley & Sons, 2008. Second edition.
- [8] Sóbol I. M. *Método de Monte Carlo*. Lecturas Populares de Matemáticas. Mir, 1983. Segunda edición.
- [9] Stewart J., Clegg D. K. y Watson S. *Calculus*. Cengage Learning, 2020. Ninth edition.
- [10] Wakefield J. C., Gelfand A. E. y Smith A. F. M. Efficient generation of random variates via the ratio-of-uniforms method. *Stat. Comput.* **1**(2), 129-133, 1991.

*Luis Rincón*

Departamento de Matemáticas,  
Facultad de Ciencias, UNAM,  
Circuito Exterior de CU, 04510 CDMX, México.  
e-mail: [lars@ciencias.unam.mx](mailto:lars@ciencias.unam.mx)

*Emmanuel Delgadillo*

Departamento de Matemáticas,  
Facultad de Ciencias, UNAM,  
Circuito Exterior de CU, 04510 CDMX, México.  
e-mail: [edelgadillo2000@ciencias.unam.mx](mailto:edelgadillo2000@ciencias.unam.mx)



## A NEW PROOF OF IONESCU-WEITZENBÖCK'S INEQUALITY, USING A LINEAR MAP

MARTIN CELLI

ABSTRACT. Using a linear map, we give a new proof of Ionescu-Weitzenböck's inequality.

This note was inspired by the *miniaturas* of the Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española and the *mathbits* of the American Mathematical Monthly. Such a format offers short, elementary, deep and original demonstrations, which can be understood and enjoyed without specific knowledge.

THEOREM. For any triangle  $ABC$  with area  $\mathcal{A}$ , we have:

$$BC^2 + CA^2 + AB^2 \geq 4\sqrt{3}\mathcal{A}.$$

*Proof.* Let us consider the linear map

$$T(\vec{U}) = (\overrightarrow{BC} \cdot \vec{U})\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{CA} \cdot \vec{U})\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{U})\overrightarrow{AB}.$$

We have:

$$\begin{cases} T(\overrightarrow{BC}) = BC^2\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC})\overrightarrow{CA} - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \\ T(\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA})\overrightarrow{BC} + CA^2\overrightarrow{CA} - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \end{cases}$$

This gives us the matrix of  $T$  in the basis  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$ :

$$\begin{pmatrix} BC^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} & (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CA} \\ (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC} & CA^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2BC^2 + P & CA^2 + 2P \\ BC^2 + 2P & 2CA^2 + P \end{pmatrix},$$

denoting  $P = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ . Thus, we can compute the trace and the determinant of  $T$ :

$$\begin{cases} \text{tr}(T) = BC^2 + CA^2 + AB^2 \\ \det(T) = 3(BC^2CA^2 - P^2) = 3(\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}))^2 = 12\mathcal{A}^2 \end{cases}$$

As it is symmetric ( $T(\vec{U}) \cdot \vec{V} = T(\vec{V}) \cdot \vec{U}$ ), the map  $T$  is real diagonalizable. So the discriminant of its characteristic polynomial  $x^2 - \text{tr}(T)x + \det(T)$  is positive:

$$\begin{aligned} (\text{tr}(T))^2 &\geq 4 \det(T), \\ (BC^2 + CA^2 + AB^2)^2 &\geq 48\mathcal{A}^2 = (4\sqrt{3}\mathcal{A})^2. \end{aligned}$$

□

Ionescu-Weitzenböck's inequality was published by I. Ionescu in 1897, in the problems section of the Romanian Mathematical Gazette, and by R. Weitzenböck in 1919. It was also one of the problems to solve at the Third International Mathematical Olympiad in 1961. Many proofs of this inequality have been discovered, all of them are based on arguments different from ours. Some proofs can be found in the references below: visual proofs ([1], [4]), geometric proofs ([2], [3], [5], [6]), vector proofs ([3], [4]). New proofs of classic geometric inequalities regularly inspire tools for more advanced results.

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 15A04, 51M04.

*Key words and phrases.* Ionescu-Weitzenböck's inequality, linear map.

## REFERENCES

- [1] Alsina, C. & Nelsen, R.B. *Geometric proofs of the Weitzenböck and Hadwiger-Finsler inequalities*. Math. Mag., 81, no. 3, 216–219, 2008.  
<https://doi.org/10.1080/0025570X.2008.11953553>
- [2] Băţineţu-Giurgiu, D.M. & Stanciu, N. *Some generalizations of Ionescu-Weitzenböck's inequality*. J. Sci. Arts, 22, no. 1, 27–32, 2013.  
[http://josa.ro/docs/josa.2013\\_1/a.03\\_Batineţu\\_Giurgiu\\_Stanciu\\_1.pdf](http://josa.ro/docs/josa.2013_1/a.03_Batineţu_Giurgiu_Stanciu_1.pdf)
- [3] Stoica, E., Minculete, N. & Barbu, C. *New aspects of Ionescu-Weitzenböck's inequality*. Balk. J. Geom. Appl., 21, no. 2, 95–101, 2016.  
<http://www.mathem.pub.ro/bjga/v21n2/B21-2st-b21.pdf>
- [4] Celli, M. *Vectors and a half-disk of triangle shapes in Ionescu-Weitzenböck's inequality*. Balk. J. Geom. Appl., 24, no. 2, 1–5, 2019.  
<http://www.mathem.pub.ro/bjga/v24n2/B24-2ce-ZG46.pdf>
- [5] Băţineţu-Giurgiu, D.M., Bencze, M. & Sitaru, D. *About Finsler-Hadwiger's inequality*. Rom. Math. Mag., 2021.  
<http://www.ssmrmh.ro/wp-content/uploads/2021/06/ABOUT-FINSLER-HADWIGERS-INEQUALITY.pdf>
- [6] Heo, N.G. *A new proof of the Ionescu-Weitzenböck inequality*. Math. Mag., 94, no. 2, 135–136, 2021.  
<https://doi.org/10.1080/0025570X.2021.1869494>

*Martin Celli*

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1<sup>a</sup> Sección,

Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.

e-mail: [celli@xanum.uam.mx](mailto:celli@xanum.uam.mx)

## AUTOMATIZACIÓN Y SU IMPACTO EN EL QUEHACER MATEMÁTICO

PATRICIA SAAVEDRA BARRERA

RESUMEN. Este texto trata sobre el impacto del conjunto de tecnologías que se denominan inteligencia artificial (IA) tanto en la oferta laboral como en las actividades académicas que desarrollan estadísticos y matemáticos. En particular, se menciona el debate que hay respecto a su utilización en el proceso mismo de la generación de nuevos conocimientos en estos campos.

Este artículo es resultado de mi participación en la mesa redonda sobre automatización y el futuro del empleo en la Semana de las Matemáticas de la UAMI el 12 de julio 2024. Aunque me mantengo informada sobre el avance de lo que se denomina ciencia de datos, debo confesar que hasta ese momento no había reflexionado mucho sobre el impacto que tienen sobre el mercado de trabajo del matemático y sobre las actividades que llevamos a cabo en la academia. Al preparar mi participación en la mesa me di cuenta de que no sólo se afectará el empleo sino que también el trabajo académico sufrirá cambios. Esto ha despertado inquietud en la comunidad matemática internacional. Este texto busca contribuir en la discusión de este tema en la comunidad matemática mexicana.

El texto lo voy a dividir en tres partes: la primera es una comparación de la oferta laboral actual para los matemáticos, estadísticos y actuarios en Estados Unidos y en México. Posteriormente, se presentan algunas proyecciones sobre las perspectivas laborales para estos profesionistas. Por último, haré algunas reflexiones sobre la automatización y su impacto en el trabajo académico del matemático.

### 1. LA OFERTA LABORAL DE MATEMÁTICOS Y PROFESIONALES AFINES

La publicación anual del Bureau of Labor Statistics de Estados Unidos, ver [2], tiene como objetivo presentar la oferta de empleo para diversas profesiones en ese país. En el rubro sobre los matemáticos, estadísticos y actuarios, a quienes se define como trabajadores que usan la aritmética y técnicas avanzadas para realizar cálculos, analizar datos y resolver problemas, se menciona que el empleo para estas profesiones está creciendo mucho más rápido que el crecimiento promedio laboral. Se espera que se abran anualmente 3,500 nuevos puestos de trabajo y los ingresos anuales promedio es de 101,460 dólares, mientras que los ingresos promedio anuales en general es de 48,600 dólares. Tomando en consideración que en ese país se gradúan en promedio anualmente 1960 doctores en matemáticas y estadística, ver [1], éste es un panorama muy optimista.

En México según el INEGI, ver [6], hay 16,000 actuarios, 22,654 estadísticos y 30,327 matemáticos lo que da un total de 68,981 profesionistas. Para poner esta cifra en perspectiva compárela con los 250,000 economistas y 381,245 ingenieros. El salario promedio mensual de un actuario es de \$53,000 mientras que el de un estadístico es de \$29,864 y del matemático es de \$15,542.

Las habilidades que el mercado laboral aprecia en estos profesionistas son: capacidad de plantear y resolver problemas; capacidad para desarrollar un razonamiento matemático y para escoger el mejor método para resolver un problema; capacidad de abstracción y sus habilidades computacionales y estadísticas.

¿Cómo ha evolucionado el mercado de trabajo en México? Cuando terminé la licenciatura en 1974 el panorama laboral del matemático era principalmente la docencia

en las preparatorias y en las universidades de reciente creación, como la UAM. Las plazas de tiempo completo como investigadores eran muy escasas y se concentraban en el Cinvestav y en la UNAM en el IIMASS y el IMATE. Actualmente, los egresados de esta licenciatura pueden colocarse como profesores en instituciones de educación media superior o como profesores temporales en universidades privadas y tienen una oferta más amplia de puestos si adquirieron durante la licenciatura habilidades en cómputo, en estadística o en finanzas. Con una maestría orientada hacia las aplicaciones, la oferta y el salario mejoran sustancialmente, por lo que los encontramos en instituciones financieras, seguros, empresas que realizan encuestas políticas o económicas, en el INEGI, en empresas de logística, en paraestatales como CFE y Pemex, en trabajos de planeación y en ciberseguridad, entre otras posibilidades.

Desde mi punto de vista, con el desarrollo de sistemas de Inteligencia Artificial (IA), el mercado laboral mexicano se ve mucho más amplio y prometedor para los ingenieros en computación, los matemáticos y los estadísticos. Creo que vale la pena especificar el papel que juegan las matemáticas y la estadística en los fundamentos del aprendizaje de máquina. Tanto en aprendizaje supervisado aplicado a regresión y clasificación como en aprendizaje no supervisado hay algunas preguntas comunes que caen en el terreno de la matemática y la estadística. ¿Qué tipo de problema matemático se está resolviendo cuando se implementa un algoritmo de aprendizaje profundo? ¿Qué tan bueno es el algoritmo que estoy implementando? ¿De qué depende que los resultados sean más precisos y confiables? ¿Cómo seleccionar la arquitectura idónea para el problema específico que estoy resolviendo? ¿Cómo se considera en la arquitectura la correlación entre las variables involucradas? ¿Es lo mismo trabajar con observaciones independientes idénticamente distribuidas que con una serie de tiempo?

Todas estas preguntas pueden responderse con conocimientos matemáticos y estadísticos dado que la herramienta natural para plantearlas es el lenguaje matemático. Recordemos que una de las tareas fundamentales de los matemáticos es poner orden y cimentar el conocimiento matemático. Claramente al analizar con cuidado estas preguntas surgen respuestas que mejoran y precisan los alcances y limitaciones de las distintas metodologías empleadas en la IA, por lo que se contribuye al desarrollo de este campo. Hay que decir que la intervención de los matemáticos y estadísticos es un camino de dos vías, ordenan el conocimiento en ciencia de datos y, por otro lado, sus disciplinas se enriquecen al plantearse nuevas preguntas y aplicaciones por lo que hoy en día, por ejemplo, se habla de aprendizaje estadístico como un nuevo campo de la estadística. Por estas razones, es una gran oportunidad laboral y académica para los matemáticos y estadísticos el avance de la inteligencia artificial.

## 2. IMPACTO ACTUAL DE LA IA EN LAS MATEMÁTICAS

¿Debemos alarmarnos por ser remplazados en el futuro por plataformas como ChatGPT o, incluso, por robots? Situación que ya le ha sucedido a otros trabajadores que laboran en líneas de montaje, en la burocracia o en control y distribución de inventarios, por mencionar algunas actividades.

Según un informe reciente de Golden Sachs, ver [9], los sistemas de AI podrían afectar a unos 300 millones de empleos a tiempo completo que representan el 18% de los puestos laborales. Según ellos, se verán afectados los puestos de cuello blanco y se destaca que la matemática podría ser una de las profesiones en las que habrá una mayor reducción. Hay que mencionar que en los últimos días esta institución financiera ha matizado este comentario añadiendo que este cambio se verá en los próximos diez años.

Las plataformas como el ChatGPT han avanzado mucho en el manejo verbal por medio de modelos entrenados con una cantidad enorme de información. Sin embargo, todavía son muy generales y, en ocasiones, reflejan defectos de las fuentes de entrenamiento. El fenómeno de alucinaciones, información inventada, que era muy común en las primeras versiones, se ha reducido con una mejor selección de los datos de

entrenamiento. ChatGPT basa su funcionamiento en la codificación e interpretación semántica de la pregunta que se le hace, conocida como “prompt”. Actualmente, hay toda una línea de ingeniería de “prompts” que mejoran la calidad de las respuestas y que ha dado lugar a sistemas que son capaces de generar imagen o video a partir de ellos como la plataforma SORA, ver [7].

Respecto al impacto de los sistemas de IA en las actividades que realizan los matemáticos, hay que señalar que desde hace tiempo las computadoras realizan los cálculos involucrados en un algoritmo con mayor eficiencia y precisión que los humanos. Por otro lado, desde el 2013 existen plataformas que pueden seguir una demostración en forma interactiva con un usuario. Lean, desarrollado en 2016 por Leonardo de Moura de Microsoft Research, lleva a cabo demostraciones de teoremas y fue utilizado hace dos años para probar que era correcto el resultado de un artículo cuya demostración era muy intrincada y larga. También hay que mencionar la iniciativa de Terry Tao, ver [8], al usar Lean para desarrollar una prueba para la conjetura de Kepler. Por otro lado, Google Deepmind desarrolló una plataforma que resuelve problemas olímpicos en geometría y Symbolab es un programa poderoso capaz de resolver un amplio espectro de problemas matemáticos. Para más información al respecto ver [4] y [9].

Aunque las máquinas sean capaces de resolver cálculos complejos e incluso demostrar teoremas hay hasta ahora varias cosas que son incapaces de hacer: por ejemplo, extraer conceptos abstractos a partir de información concreta, como mencionan los autores de [4]; proponer nuevas conjeturas como resultado de los conocimientos y de la intuición y, por último, ser creativos, lo que Poincaré denominó como el elemento esencial de la matemática. Quizá sea la falta de creatividad lo que para algunos autores, ver [9], impide a los algoritmos de aprendizaje hacer matemáticas profundas, formular problemas equivalentes desde otro punto de vista o establecer relaciones no evidentes entre áreas inconexas, como en muchas ocasiones lo han hecho los matemáticos. ¡Sin embargo, nadie puede predecir el futuro ni el alcance que tendrán las máquinas!

Estas reflexiones nos confirman que la formación de los nuevos matemáticos debe ser sólida y rigurosa en los fundamentos que permitan el desarrollo de la capacidad de abstracción y aliente e impulse la creatividad. Asimismo, debe ser flexible y abierta para incorporar nuevas orientaciones que permitan a nuestros egresados adaptarse a los rápidos cambios del mercado de trabajo.

### 3. IMPACTO EN LA ACADEMIA

El desarrollo vertiginoso de la IA ha prendido las alarmas en todos los ámbitos y en particular en la comunidad matemática en cuanto a su quehacer en la investigación y la docencia. Los números de abril y julio de 2024 correspondientes al volumen 61 del Bulletin of AMS se dedican a este tema con colaboraciones no solo de matemáticos sino también de filósofos y antropólogos. Invito a leer estos números porque exponen con claridad y rigor distintos puntos de vista. Demos algunos ejemplos de los efectos positivos y negativos de los avances tecnológicos en la academia.

En la docencia universitaria y de posgrado el avance de la tecnología nos ha permitido que el tiempo que dedicamos a evaluar, preparar cursos y material se reduzca considerablemente. Asimismo, la difusión y la colaboración se han visto beneficiadas. Ahora se puede escuchar conferencias, asesorar alumnos y colaborar a distancia lo que acelera las conexiones y abarata los costos. Sin embargo, hay que reconocer que nada substituye la interacción informal presencial que da lugar a colaboraciones futuras en charlas de café o cenas posteriores a los eventos académicos, ver [3].

Entre los aspectos negativos, cada vez es más frecuente encontrarse con propuestas de financiamiento e incluso artículos redactados por plataformas como ChatGPT en las que los usuarios no se toman la molestia de verificar la información y, en consecuencia, incluyen terminología disparatada o referencias bibliográficas inexistentes. Nature, Science y otras publicaciones científicas han decidido no aceptar artículos escritos

por medio de un sistema de IA porque violan la legislación sobre derechos de autor y de usarse un sistema de IA en la redacción o en la obtención de resultados, se les exige a los autores que lo especifiquen. Asimismo, es preocupante el uso de estas herramientas para realizar arbitrajes de artículos o propuestas de financiamiento, sin supervisión de un matemático, primero porque se perderá la rigurosidad y segundo, porque se tenderá a no publicar y apoyar investigaciones que sean novedosas, originales o a contracorriente.

Hay otras voces que opinan que el hacer uso de estas plataformas hará que la evolución de la matemática recaiga en las máquinas, lo que repercutirá en la libertad de creación y en la uniformización de la matemática. De hecho, hay un párrafo en el artículo introductorio escrito por los responsables de la publicación de la AMS, ver [5], que ilustra su preocupación. “Los matemáticos han disfrutado de un amplio grado de independencia y de libertad intelectual, una herencia frágil y preciada que puede desaparecer por el uso irresponsable de máquinas. Por otro lado, un acercamiento deliberado y bien pensado a la misma tecnología puede enriquecer nuestro campo de investigación. Somos nosotros quienes debemos decidir cómo se desarrolla nuestra disciplina así que se invita a la comunidad matemática a pensar y discutir seriamente sobre estas cuestiones y escuchar a otros colegas de otras disciplinas que han reflexionado desde hace tiempo sobre estos temas como los filósofos y los antropólogos. Ahora es tiempo que los matemáticos se informen al respecto y decidan el futuro de nuestra disciplina ”.

Creo que los sistemas de IA y otros cambios tecnológicos deben ser analizados con cuidado tratando de distinguir las ventajas que nos ofrecen de los peligros que acarrear. Solo regulando con inteligencia y sentido común su uso, no serán una amenaza sino aliados que nos permitan tener más herramientas y más tiempo disponible para resolver los retos que nos depara el futuro.

#### REFERENCIAS

- [1] American Mathematical Society. The Mathematical and Statistical Science, Annual Survey 2017-2018. <https://www.ams.org/profession/data/annual-survey/phds-awarded>
- [2] Bureau of Labor Statistics de Estados Unidos. <https://www.bls.gov/ooh/math/mathematicians-and-statisticians.htm>.
- [3] Cheng, G., *How machines can make mathematics more congressive*, Bull. Amer. Math. Soc. 61, 305-315. 2024.
- [4] Davies, A., *Working with machines in Mathematics*, Bull. Amer. Math. Soc. 61,3, 387-394. 2024.
- [5] Fraser, M., Granville, A., Harris, M., McLarty, C., Riehl, E. y Venkatesh, A., *Will machines change mathematics?*, Bull. Amer. Math. Soc. 61,3, 373-374, 2024.
- [6] Observatorio Laboral Gobierno de México. Cifras actualizadas al cuarto trimestre de 2023 de la Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo, STPS-INEGI. <https://www.observatoriolaboral.gob.mx/static/estudios-publicaciones/Fisico.html>
- [7] <https://openai.com/index/sora/>
- [8] <https://www.youtube.com/watch?v=AayZuuDDKP0>
- [9] Vélez, M P., León, M. y Trujillo, R., *IA y el mercado laboral para matemáticos: nuevos tiempos, nuevas incertidumbres*, Revista de la RSME, 2023.

*Patricia Saavedra Barrera*

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186. Col. Leyes de Reforma.

Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310, CDMX, México.

e-mail: [psb@xanum.uam.mx](mailto:psb@xanum.uam.mx)

## ONDAS HIPERBÓLICAS, DISPERSIVAS Y NO LINEALES

JESÚS ADRIÁN ESPÍNOLA ROCHA

RESUMEN. En el presente trabajo se describen los elementos básicos de la teoría de la propagación de ondas lineales y no lineales. Se tratan las dos principales clases de ondas, hiperbólicas y dispersivas, y se destaca la importancia de cada una de ellas. Se estudian unos pocos ejemplos y casos de ondas no lineales, dada la gran cantidad de ondas no lineales que existen. En particular, nos enfocamos en ondas no lineales completamente integrables y solitones.

### INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales es un área de las matemáticas la cual tiene muchas vertientes de estudio. De hecho, las ecuaciones diferenciales inicialmente surgen del intento de resolver y describir varios problemas de la física, y en los últimos años para resolver problemas de la química, de la biología, en todas las ramas de la ingeniería, en la economía y muchas otras áreas del conocimiento humano. De igual modo, las ecuaciones diferenciales pueden ser estudiadas desde el punto de vista puro y abstracto de las matemáticas. Aunque los temas que aquí se cubrirán pueden ser estudiados de forma un tanto abstracta, no es el objetivo de estas notas.

Las ecuaciones diferenciales pueden ser lineales o no lineales. Y aunque no todas las ecuaciones diferenciales lineales pueden ser resueltas exactamente, ni tampoco es conocido todo acerca de ellas, casi toda la teoría de ecuaciones diferenciales lineales está bien establecida, puesto que el principio de superposición juega un papel fundamental en ellas. Entonces, el siguiente paso en el estudio de ecuaciones diferenciales es considerar ecuaciones diferenciales no lineales. El estudio de un tipo muy particular de ecuaciones será una buena parte de estas notas: las ecuaciones diferenciales hiperbólicas no lineales y las ecuaciones diferenciales de evolución completamente integrables. “Integrables” desde un punto de vista a ser especificado, pues el concepto de “integrabilidad” no es trivial.

Ahora bien, las ecuaciones diferenciales se dividen en dos principales tipos: ordinarias y parciales. Centraremos nuestra atención principalmente a las ecuaciones diferenciales parciales. Aún cuando las ecuaciones diferenciales ordinarias describen muchos fenómenos en la naturaleza, las ecuaciones diferenciales parciales también surgen en muchas aplicaciones. Las ecuaciones diferenciales parciales es una de las herramientas principales de matemáticos y físicos para el estudio y descripción de la naturaleza. Ellas modelan, por mencionar sólo unos ejemplos, la propagación del calor, la difusión de químicos o contaminantes, el movimiento de membranas, las líneas de fluidos, campos electromagnéticos, ondas electromagnéticas, ondas en el agua, en cables y en el aire.

De igual modo, nos concentraremos específicamente en el estudio de ondas. En cursos de física o elementales de ecuaciones diferenciales parciales, nos enseñan la ecuación de onda, que es una ecuación diferencial parcial en el tiempo y el espacio, de segundo orden, la cual resulta ser *hiperbólica*. Uno puede creer que todos los fenómenos ondulatorios se describen con esta ecuación, pero no es así. Contrario a lo que pueda parecer, la mayoría de los fenómenos ondulatorios en la naturaleza no son descritos por ecuaciones de onda hiperbólicas.

---

2010 *Mathematics Subject Classification*. 35Q51; 37K10; 37K15; 42A38; 74J05; 76B15.

*Palabras clave*. Ondas lineales, ondas no lineales, ondas hiperbólicas, ondas dispersivas, transformadas de Fourier, solitones, pares de Lax, método de dispersión inversa.

Resulta que la mayoría de las ecuaciones que describen ondas son *dispersivas*. Uno de los objetivos principales de estas notas es hacer evidente el hecho de que las **ondas dispersivas** juegan un mayor papel en la descripción de ondas, al contrario de las ondas hiperbólicas. Como ejemplo particular veremos que las ecuaciones de Schrödinger y de Dirac de la teoría cuántica describen ondas dispersivas de materia.

Por lo dicho anteriormente, en la primer parte de este trabajo, que constituye las secciones 1 a la 5, se estudiarán ondas hiperbólicas y dispersivas, principalmente dentro de la teoría lineal. Aquí jugará un papel fundamental el análisis de Fourier.

En la segunda parte (secciones 6 a la 9) se considerará el tipo especial de ecuaciones de evolución de ondas *no lineales* que son **completamente integrables**. Insisto que comentaremos en qué sentido son “integrables.” Este tipo de ecuaciones admiten un tipo muy especial de solución, llamadas **solitones**. Así pues en esta segunda parte estudiaremos solamente una porción muy pequeña de la teoría no lineal, y de ésta también una muy pequeña de la teoría de solitones.

Estas notas van dirigidas a estudiantes avanzados de licenciatura o primeros años de posgrado en Matemáticas, Física, Ingeniería y áreas afines.

Para seguir estas notas se requiere principalmente un sólido conocimiento de Cálculo y de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. También el lector necesita Cálculo de Varias Variables y la teoría de Análisis de Fourier. Es recomendable, pero no forzoso, un curso de Ecuaciones Diferenciales Parciales, pues parte de lo que se ve en dicho curso se cubrirá en estas notas. No obstante, el principal ingrediente para seguir estas notas es ¡un gran entusiasmo por aprender nuevas cosas!

Este conjunto de notas surgió de algunos cursos ofrecidos por el autor. Una parte fue desarrollada durante el curso “*Temas Selectos de Ingeniería Física: Matemáticas de la Mecánica Cuántica*”, ofrecido en la UAM-Azcapotzalco el trimestre 21-P; otra fue ofrecida en el *Segundo Simposio Internacional de Análisis y sus Aplicaciones* celebrado en septiembre de 2016 en Metepec, Puebla, México, organizado por la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Iztapalapa; y, finalmente, otra porción fue elaborada para el curso corto de la Escuela Taller de Verano 2022 realizado en la Facultad de Matemáticas de la UAGro en Chilpancingo, Guerrero, México, en septiembre de 2022.

Se agradece el apoyo de CONAHCYT para la escritura de este texto y la retroalimentación por parte de los estudiantes que las han utilizado.

Agradezco enormemente al profesor **Roberto Quesada Batalla** de la UAM-iztapalapa por su gentil invitación a este proyecto.

Agradecimiento especial a *Carlos Iván Ávila Joachin* y *Daniela Yuliana Juárez Estrada*, por su apoyo en la elaboración de los dibujos y gráficas que aparecen en estas notas.

## Índice

<b>Introducción</b>	<b>175</b>
<b>1. ¿Qué es una onda?</b>	<b>179</b>
1.1. Consideraciones generales . . . . .	179
1.2. ¿Qué es una onda? . . . . .	179
1.2.1. Clasificación . . . . .	179
1.3. Tarea . . . . .	180
<b>2. Ondas hiperbólicas</b>	<b>180</b>
2.1. Aplicaciones de ondas hiperbólicas . . . . .	181
2.1.1. Acústica . . . . .	181
2.1.2. Electromagnetismo . . . . .	181
2.2. El caso más simple: ecuación de onda 1-dimensional . . . . .	181
2.2.1. Ondas no lineales . . . . .	182
2.3. Notación. Definición de ondas hiperbólicas . . . . .	183
2.4. Curvas características . . . . .	184

2.5.	La ecuación de onda . . . . .	186
2.6.	Sistemas de ecuaciones hiperbólicas . . . . .	188
2.7.	Una onda hiperbólica y dispersiva . . . . .	188
2.8.	Tarea . . . . .	188
<b>3.</b>	<b>Ondas dispersivas y Relaciones de Dispersión</b>	<b>189</b>
3.1.	Conceptos básicos. Relación de dispersión. . . . .	189
3.2.	Superposición de modos: Principio de Superposición . . . . .	191
3.3.	¿Cómo calcular la relación de dispersión? . . . . .	192
3.4.	Algunas consideraciones importantes . . . . .	194
3.4.1.	Dispersión vs. hiperbolicidad . . . . .	194
3.4.2.	Ondas planas . . . . .	195
3.5.	Trenes de onda. Más relaciones de dispersión . . . . .	196
3.6.	Principio de superposición. (Continuación.) . . . . .	196
3.7.	Medios no uniformes . . . . .	197
3.8.	Dispersión no lineal . . . . .	198
3.9.	Tarea . . . . .	200
<b>4.</b>	<b>Ondas Dispersivas y Ecuaciones Diferenciales Parciales</b>	<b>202</b>
4.1.	Relaciones de dispersión. (Continuación.) . . . . .	202
4.2.	Superposición. Representación en $N$ dimensiones . . . . .	203
4.2.1.	Superposición. . . . .	203
4.2.2.	En más dimensiones . . . . .	203
4.3.	Clasificación de ondas dispersivas . . . . .	205
4.4.	Correspondencia entre Ecuaciones Diferenciales Parciales y Relaciones de Dispersión . . . . .	206
4.5.	Relación de Dispersión y EDPs . . . . .	207
4.6.	Tarea . . . . .	209
<b>5.</b>	<b>Ondas dispersivas: Solución por Transformadas de Fourier</b>	<b>209</b>
5.1.	Definición de ondas dispersivas (continuación.) . . . . .	209
5.2.	Solución de ecuaciones de onda dispersivas por Transformadas de Fourier . . . . .	210
5.2.1.	Un par de hechos curiosos . . . . .	216
5.3.	La ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica . . . . .	217
5.3.1.	Construcción de la ecuación de Schrödinger . . . . .	217
5.3.2.	Mecánica Clásica . . . . .	217
5.3.3.	Mecánica cuántica . . . . .	217
5.3.4.	Solución de la ecuación de Schrödinger libre . . . . .	218
5.4.	La ecuación de Dirac de la Mecánica Cuántica . . . . .	220
5.4.1.	Mecánica relativista . . . . .	220
5.4.2.	Factorización del operador “momentum cuadrado” libre relativista: Construcción de la ecuación de Dirac. . . . .	222
5.4.3.	Solución de la ecuación de Dirac libre. . . . .	225
5.5.	Tarea . . . . .	225
<b>6.</b>	<b>Pares de Lax: ejemplos básicos</b>	<b>226</b>
6.1.	Los ejemplos más elementales de pares de Lax: el oscilador armónico	226
6.1.1.	El oscilador armónico . . . . .	226
6.2.	Ecuación de Lax para EDOs . . . . .	227
6.3.	Resolución del oscilador armónico: el método de dispersión inversa	228
6.3.1.	El problema de valores iniciales . . . . .	228
6.3.2.	Los valores propios . . . . .	228
6.3.3.	Los vectores propios . . . . .	229
6.4.	Los ejemplos más elementales de pares de Lax: el cuerpo rígido . .	231

6.4.1. El cuerpo rígido . . . . .	231
<b>7. Transformaciones isospectrales</b>	<b>237</b>
7.1. Consideraciones generales . . . . .	237
7.2. Operadores isoespectrales de Lax . . . . .	238
7.3. Ecuaciones generalizadas de KdV y sus pares de Lax . . . . .	240
7.4. Ecuaciones Lax: idea intuitiva . . . . .	241
7.4.1. Preguntas sobre ecuaciones de Lax . . . . .	242
7.5. Ecuaciones de Lax: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) . . . . .	243
7.6. Ecuaciones de Lax: Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) . . . . .	251
7.7. Resumen. . . . .	260
Referencias . . . . .	261
7.8. Tarea . . . . .	261
<b>8. El Método de Dispersión Inversa.</b>	<b>262</b>
8.1. Invarianza de Galileo . . . . .	262
8.2. La transformación de Miura y la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica . . . . .	262
8.3. Los Espectros Discretos y Continuos. . . . .	264
8.4. La Invarianza del Espectro en el Tiempo. . . . .	267
8.5. Evolución de las Funciones de Onda. . . . .	268
8.5.1. Panorama del método de dispersión inversa: resolución de la ecuación de KdV . . . . .	270
8.6. Problemas de Dispersión. . . . .	270
8.7. La Expresión Integral para la Función de Onda . . . . .	271
8.8. Datos de Dispersión. . . . .	273
8.9. El Espectro Continuo: el Coeficiente de Reflexión. . . . .	274
8.10. El Espectro Discreto: Estados Acotados, Constantes de Normalización y Valores Propios. . . . .	277
8.11. La Ecuación de Gel'fand-Levitan. . . . .	279
8.12. Evolución Temporal de los Datos de Dispersión. . . . .	282
8.13. Esquema del Método de Dispersión Inversa. . . . .	284
8.14. Ejemplo. . . . .	286
8.14.1. Otra forma de abordar el problema . . . . .	291
8.15. ¿Qué hace el Espectro Continuo? . . . . .	294
Apéndice A . . . . .	295
Apéndice B . . . . .	296
Apéndice C . . . . .	297
Apéndice D . . . . .	298
8.16. Tarea . . . . .	299
<b>9. Transformaciones de Bäcklund</b>	<b>300</b>
9.1. Comentarios iniciales . . . . .	300
9.2. Las transformaciones de Bäcklund más elementales . . . . .	300
9.2.1. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann . . . . .	300
9.2.2. La ecuación de sine-Gordon . . . . .	301
9.2.3. La ecuación Liouville . . . . .	301
9.3. Problemas de valores propios de segundo orden y sistemas de ecuaciones de primer orden . . . . .	301
9.4. Relación entre sistemas de una y dos componentes y ecuaciones de Ricatti . . . . .	302
9.5. Propiedades generales de ecuaciones de Ricatti . . . . .	303
9.6. Ecuaciones asociadas de Sturm-Liouville . . . . .	304
9.7. La transformación de Bäcklund para la ecuación de KdV . . . . .	306
9.8. Tarea . . . . .	308

## 1. ¿QUÉ ES UNA ONDA?

**1.1. Consideraciones generales.** La propagación de ondas es uno de los fenómenos más viejos y más estudiados en la naturaleza. Puede ser estudiada desde un punto de vista muy intuitivo y también de una manera muy profunda y técnica también. Junto con el estudio técnico, se puede efectuar también un análisis profundo y abstracto en el estudio de propagación de ondas.

De este modo, el estudio de propagación de ondas es tan vasto que ha sido desarrollado para crear e inventar nuevos conceptos matemáticos abstractos, así como también desarrollar el interés práctico para resolver problemas específicos y desarrollar o encontrar nuevas aplicaciones. Estos conceptos matemáticos ayudan a unificar los problemas que surgen en el estudio de propagación de ondas (aunque no todos.) Usaremos estos conceptos generales para el caso particular de nuestro estudio de propagación de ondas.

El estudio presentado aquí no será abstracto, sino más bien pretende mostrar las ideas generales que están dentro de estos fenómenos. Las dos fuentes principales de esta sección son [11] y [43].

## 1.2. ¿Qué es una onda?

**Definición 1.2.1** (Definición de onda). Una **onda** es una *señal reconocible* que se translada de una parte de su medio de propagación, a otra parte del mismo, con una *“velocidad de propagación” reconocible*.

La señal puede ser cualquier característica o alteración en su forma o propiedades (máximos, mínimos, cambios abruptos, o alguna característica inherente), siempre y cuando pueda ser reconocible, medible y su ubicación puede ser determinada en cualquier momento; *i.e.*, podemos observarla.

La señal puede distorsionar la magnitud o propiedades de la señal, cambiar su velocidad, pero siempre con la condición de que sea aún reconocible y medible.

*1.2.1. Clasificación.* Hay dos subclases principales:

- a: Ondas hiperbólicas y**
- b: ondas dispersivas.**

Con un poco más de detalle tenemos que:

- a:** La definición de **onda hiperbólica** es matemática y está dada en términos de una **ecuación diferencial parcial (EDP) hiperbólica**. (Ver detalles más adelante.)
- b:** La segunda clase, **ondas dispersivas**, está dada en términos de la forma de la solución (no en términos de la ecuación diferencial que satisface.) No es fácil dar una definición general, pero se comienza de la onda lineal y dispersiva más sencilla para, de ahí, partir y construir tipos más sofisticados y desarrollados de ondas dispersivas. La famosa ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica es un ejemplo de este desarrollo y es una de estas ecuaciones dispersivas, la cual es una generalización de una ecuación de onda lineal dispersiva usual (asociada a una EDP lineal con coeficientes constantes.)

*Observación 1.2.2.* Estas dos subclases **no** son exclusivas. Algunas ondas satisfacen ambos tipos de comportamiento, mientras que hay ondas que no pertenecen a ninguna de estas clases.

### 1.3. Tarea.

TAREA 1.1. De tres ejemplos de fenómenos que identifiquemos en la vida cotidiana como “ondas.” Verifique que estos fenómenos son efectivamente ondas de acuerdo a nuestra definición de onda, usando también la información dada en los párrafos anteriores.

## 2. ONDAS HIPERBÓLICAS

Las dos ondas hiperbólicas estándar son las descritas por las soluciones de la ecuación de onda en una dimensión:

$$(1) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c_o^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi = 0,$$

y en tres dimensiones:

$$(2) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c_o^2 \Delta \varphi = 0,$$

(en donde  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  es el operador de Laplace,) así como también la ecuación de onda uni-direccional (también llamada ecuación de *reacción* o de *transporte*):

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi - c_o \frac{\partial}{\partial x} \varphi = 0.$$

La ecuación de onda uni-direccional tiene soluciones de la forma:

$$(4) \quad \varphi = f(x - c_o t).$$

Si  $c_o > 0$ , el movimiento es hacia la derecha en el eje  $x$ , mientras que si  $c_o < 0$ , el movimiento es hacia la izquierda. Ver figura 1.

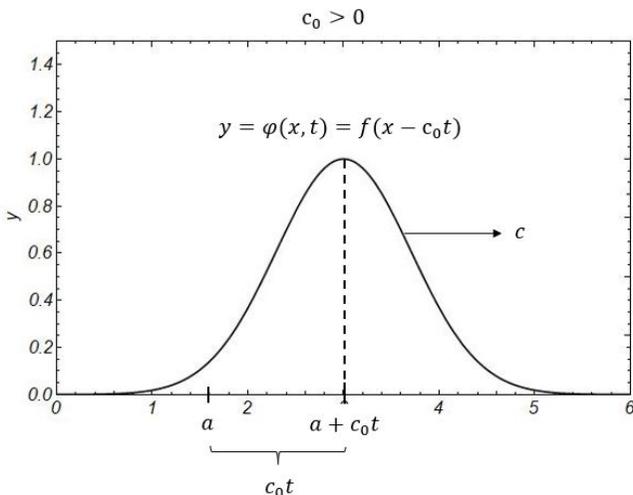


FIGURA 1. Evolución de la solución de la ecuación de onda unidireccional

La ecuación de onda en una dimensión (1-dimensional), ecuación (1), tiene como solución una función de la forma:

$$(5) \quad \varphi = F(x - c_o t) + G(x + c_o t),$$

la cual considera una onda moviéndose a la derecha y otra a la izquierda. (Regresaremos a esto más adelante.)

**2.1. Aplicaciones de ondas hiperbólicas.** Las aplicaciones de ondas hiperbólicas son muy amplias y aparecen en acústica, elasticidad y electromagnetismo.

*2.1.1. Acústica.* En acústica tenemos las funciones  $\rho(x, t)$ ,  $P(x, t)$  y  $v(x, t)$ , la densidad y presión del aire, y la velocidad de una partícula de aire en el punto  $(x, t)$ . La solución más simple es cuando no hay sonido:  $\rho_0(x, t) \equiv \rho_0 = \text{const}$ ,  $P_0(x, t) \equiv P_0 = \text{const}$ ,  $v_0(x, t) \equiv 0$ . Definimos el cambio en la densidad del aire por  $\Delta\rho(x, t) = \rho(x, t) - \rho_0(x, t)$  y suponiéndola suficientemente pequeña, satisface la ecuación de onda

$$(6) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta\rho - c_o^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta\rho = 0,$$

en donde  $c_o = \frac{dP}{d\rho}(\rho_0)$  y se considera la aproximación adiabática (no hay pérdidas de energía por calor)  $P(\rho) = \text{const} \cdot \rho^\gamma$ , para cierto exponente  $\gamma > 0$ . La misma ecuación se cumple para  $\Delta P(x, t) = P(x, t) - P_0(x, t)$  y  $\Delta v(x, t) = v(x, t) - v_0(x, t) = v(x, t)$  pequeños. Para más detalles consulte *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I. [13].

Para ondas provocadas por explosiones y aviones muy veloces, las aproximaciones no pequeñas son necesarias en estos casos. Por lo tanto, la teoría lineal no es suficiente para describir estos fenómenos ondulatorios y la teoría no lineal será requerida.

*2.1.2. Electromagnetismo.* Las ecuaciones de Maxwell gobiernan todos los fenómenos electromagnéticos a escalas humanas. En el vacío, el campo eléctrico  $\vec{E}(x, y, z, t)$  cumple la ecuación de onda 3-dimensional, ecuación (2), que en este caso es vectorial:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(x, y, z, t) - c_o^2 \Delta \vec{E}(x, y, z, t) = 0,$$

en donde  $c_o = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  es la velocidad de la luz en el vacío, siendo  $\mu_0, \epsilon_0$ , la permeabilidad magnética y permitividad eléctrica en el vacío, respectivamente.

Si no se está en el vacío, se puede generar una polarización del material que depende del campo eléctrico y que, inclusive para campos eléctricos altos, depende de la intensidad del mismo,

$$\vec{P} = n_0 \vec{E} + n_2 \|\vec{E}\|^2 \vec{E},$$

siendo  $n_0, n_2$ , los coeficientes de refracción en el material de propagación. Esto da como consecuencia la óptica no lineal y una de sus aplicaciones es la comunicación en sistemas de fibras ópticas.

**2.2. El caso más simple: ecuación de onda 1-dimensional.** El caso más simple es el estudio de la ecuación de onda 1-dimensional, ecuación (1). Con el cambio de variables (coordenadas características)

$$(7) \quad \begin{aligned} u &= x - c_0 t, \\ v &= x + c_0 t, \end{aligned}$$

se obtiene que  $\varphi$  cumple la ecuación:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \varphi = 0.$$

Después de integrar dos veces

$$\varphi(u, v) = F(u) + G(v),$$

en donde  $F$  y  $G$  son dos funciones “generales” con segundas derivadas continuas. Regresando a las variables originales

$$(8) \quad \varphi(x, t) = F(x - c_0 t) + G(x + c_0 t).$$

Si sujetamos la ecuación de onda a las condiciones iniciales:

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \end{aligned}$$

obtenemos la solución de D'Alambert:

$$(10) \quad \varphi(x, t) = \frac{f(x - c_0 t) + f(x + c_0 t)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{x - c_0 t}^{x + c_0 t} g(s) ds.$$

Observemos que la ecuación de onda de D'Alambert se puede “factorizar” en términos de dos operadores diferenciales de primer orden:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = 0.$$

De aquí podríamos considerar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \varphi = 0,$$

volviendo a la ecuación de onda hiperbólica lineal más sencilla.

*2.2.1. Ondas no lineales.* Hay problemas más ricos que pueden describir otros fenómenos y se pueden describir con la ecuación de onda hiperbólica **no** lineal más sencilla:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + c(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} \varphi = 0.$$

En esta ecuación la velocidad de propagación,  $c(\varphi)$ , depende de la amplitud de la onda  $\varphi$ . Ver figura 2. A sus soluciones se les llama **ondas de choque**. Ejemplos de éstas son las ondas de sonido provocadas por explosiones, por aviones supersónicos, y ondas en el océano.

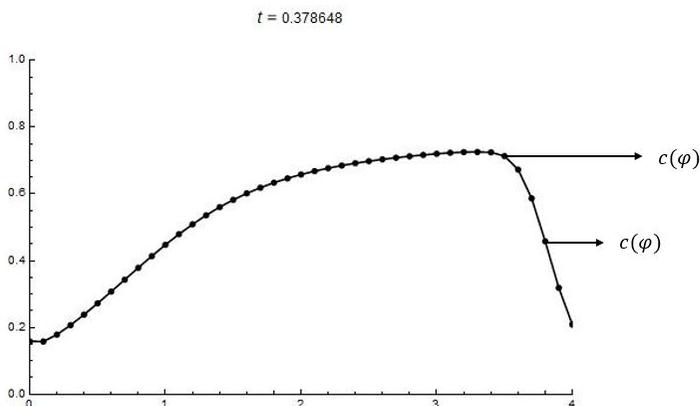


FIGURA 2. Evolución de la solución de la ecuación de onda no lineal unidireccional:  $c(\varphi) = \varphi$

Un ejemplo de estas ecuaciones, es la ecuación de Burgers (también es la ecuación de Navier-Stokes en su reducción 1-dimensional):

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + \varphi \frac{\partial}{\partial x} \varphi = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi.$$

Esta es una ecuación hiperbólica no lineal, que incluye difusión. Esta ecuación tiene soluciones exactas  $k$  relacionadas a la ecuación del calor  $\frac{\partial}{\partial t} \psi = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi$ . a través de una transformación llamada de Cole-Hopf [22].

**2.3. Notación. Definición de ondas hiperbólicas.**

**Definición 2.3.1** (Operador lineal de primer orden). Un **operador lineal de primer orden**,  $\mathcal{P}$ , definido en

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto (x, t),$$

es una expresión lineal en  $\frac{\partial}{\partial t}$  y  $\frac{\partial}{\partial x}$  con coeficientes dependiendo sólo de  $(x, t)$ ,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P} \left( x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = a(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} - d(x, t).$$

**Definición 2.3.2** (Ecuación hiperbólica de primer orden). La ecuación diferencial  $\mathcal{P}[u] = 0$ , *i.e.*,

$$a(x, t) \frac{\partial}{\partial t} u + b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u - d(x, t) u = 0,$$

es **hiperbólica** si  $a(x, t) \neq 0$ .

Para resolver  $\mathcal{P}[u] = 0$ , escribámosla en la forma

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{b(x, t)}{a(x, t)} \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \frac{d(x, t)}{a(x, t)} u.$$

Ahora busquemos curvas en el plano  $(x, t)$  tales que:

$$(11) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{b(x, t)}{a(x, t)}.$$

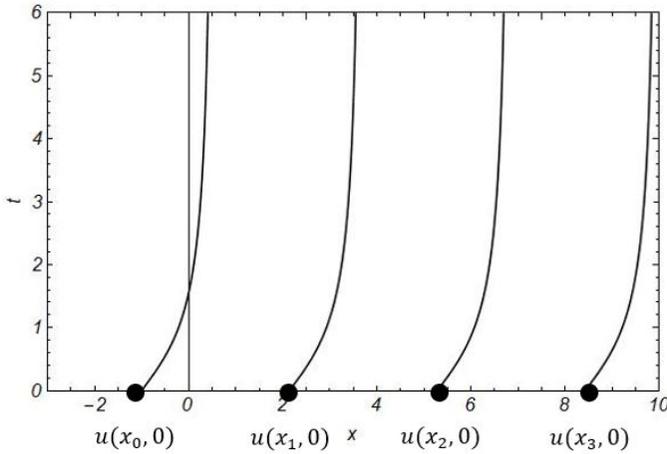


FIGURA 3. Ecuaciones características, soluciones de la ecuación (11)

Entonces

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \frac{d(x, t)}{a(x, t)} u,$$

es decir, la ecuación

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \frac{d(x(t), t)}{a(x(t), t)} u(x(t), t).$$

se cumple a lo largo de las curvas  $x = x(t)$ , soluciones de la ecuación (11). A estas curvas se les llama **curvas características**.

El comportamiento de  $u(x, t)$  a lo largo de las curvas características está bien definido y puede ser bien determinado. (¡Y puede ser constante como en el caso de la ecuación de onda!)

**2.4. Curvas características.** Una propiedad importante de las ecuaciones hiperbólicas es que presentan **curvas características** en el plano  $(x, t)$ .

Las **curvas características** son importantes para resolver ecuaciones diferenciales que describen propagación de ondas. Las curvas características,  $x = x(t)$ , son soluciones de la ecuación diferencial ordinaria

$$(12) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{b(x(t), t)}{a(x(t), t)}.$$

A lo largo de estas curvas, la solución  $u(t) = u(x(t), t)$  de la ecuación de onda unidireccional, satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$(13) \quad \frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{d(x(t), t)}{a(x(t), t)}u(x(t), t).$$

Así, a lo largo de cada *curva característica*, tenemos que la función  $u = u(x(t), t)$  es solución de la ecuación de onda unidireccional. Entonces, las condiciones iniciales deben ser dadas a lo largo de una curva “perpendicular” o, mejor dicho, “transversal” a las curvas características para poder determinar completamente la solución al problema de Cauchy (de valores iniciales.)

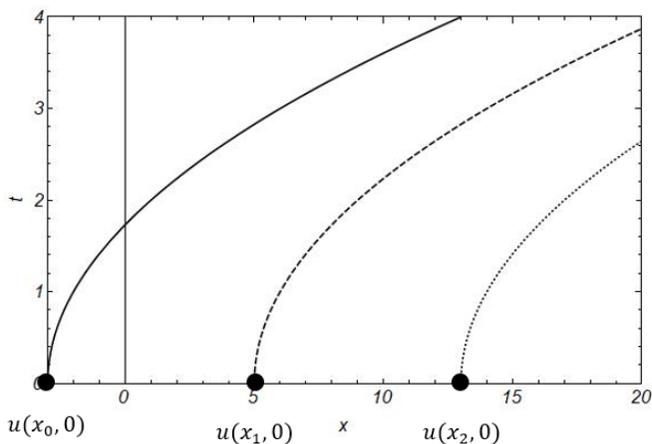


FIGURA 4. Curvas características, soluciones al problema dado por la ecuación (12). Aquí se indican las condiciones iniciales  $u(x, 0)$  en distintos puntos del eje  $x$ .

A la solución de la ecuación diferencial (12) se le puede asignar la condición inicial  $x(0) = x_0$ , y a la ecuación (13) se le asignan entonces las condición inicial:

$$\begin{aligned} u(0) &= u(x(0), 0), \\ &= u(x_0, 0) \end{aligned}$$

y la solución  $u(x, t)$  de la ecuación unidireccional, (3), se construye con dichas curvas, variando  $x_0$ , y así generando una superficie  $z = u(x, t)$ . Ver figura 5.

**Ejemplo 2.4.I.** Consideremos la ecuación de onda unidireccional (3), con condición inicial:

$$(14) \quad u(x, 0) = f(x).$$

Verifiquemos que es hiperbólica:

- $a(x, t) = 1 \neq 0$  (verificado,)
- $b(x, t) = c_0$ ,
- $d(x, t) = 0$ .

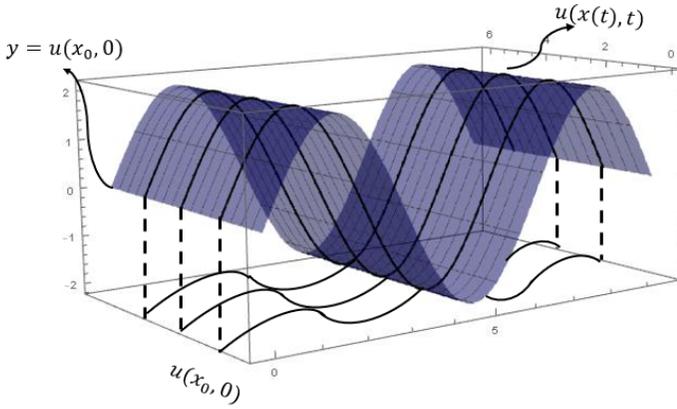


FIGURA 5. Solución a la ecuación hiperbólica de primer orden por el método de las características.

De aquí resulta que la ecuación de las curvas características (12) es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b(x(t), t)}{a(x(t), t)} \implies \frac{dx}{dt} = c_0,$$

por lo que las curvas características son

$$x(t) = c_0 t + \xi,$$

en donde

$$\xi = x(0)$$

es la condición inicial de la curva característica. Observemos que:

$$(15) \quad \xi = x - c_0 t,$$

o bien:

$$t = \frac{x - \xi}{c_0}.$$

Estas últimas son rectas de pendiente  $1/c_0$  en el plano  $t$  vs.  $x$ . Ver figura 6.

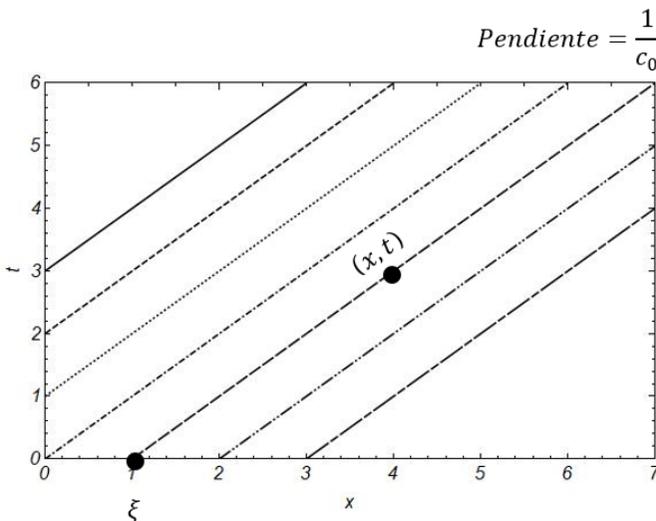


FIGURA 6. Características de la ecuación de onda unidireccional.

Ahora podemos deducir que, a lo largo de las curvas características, la solución  $u(x, t)$  satisface la ecuación:

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{d(x(t), t)}{a(x(t), t)}u(x(t), t) \implies \frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0$$

por lo que para todo valor de  $t$ , tenemos

$$u(x(t), t) = u_0 = \text{const.}$$

¡A lo largo de las curvas características  $u(x, t)$  es constante! Ver figura 7.

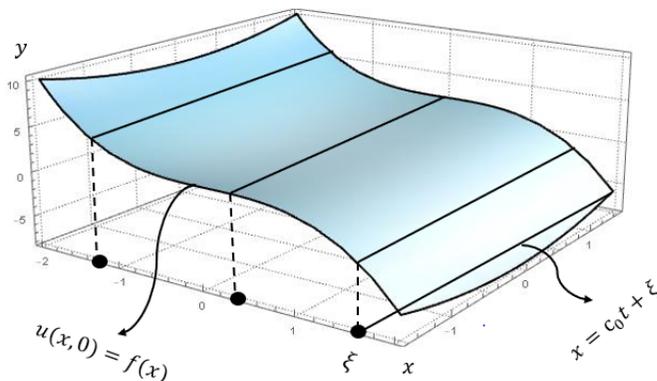


FIGURA 7. Solución de la ecuación unidireccional de onda por el método de las características: superficie.

En  $t = 0$ ,

$$u_0 = u(x(0), 0) = u(\xi, 0) = f(\xi).$$

Por lo tanto:

$$u(x(t), t) = u_0 = f(\xi).$$

Ahora, de (15) concluimos que

$$u(x, t) = f(x - c_0 t)$$

que es la solución al problema de valores iniciales para la ecuación de onda unidireccional. Esta solución es la que generalmente se encuentra de forma intuitiva y se nos da en muchos cursos de ondas sin referencia a este método.

**2.5. La ecuación de onda.** El operador diferencial lineal de segundo orden, en su forma más general, es un operador,  $\mathcal{P}$ , cuadrático en  $\frac{\partial}{\partial t}$  y en  $\frac{\partial}{\partial x}$ , de la forma

$$\mathcal{P}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \alpha(x, t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\beta(x, t)\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} + \gamma(x, t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \text{op. dif lin 1er ord},$$

en donde por “*op. dif lin 1er ord*” queremos decir “operador diferencial lineal de primer orden.”

Uno entonces encuentra dos familias de ecuaciones para curvas características:

$$(16) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}$$

**Definición 2.5.1** (Ecuaciones hiperbólica de segundo orden). La ecuación

$$\mathcal{P}[u] = 0$$

es **hiperbólica** si, y sólo si,

$$\alpha\gamma - \beta^2 \leq 0.$$

De aquí se sigue que las ecuaciones hiperbólicas tienen dos familias reales de curvas características. Ver figura 8.

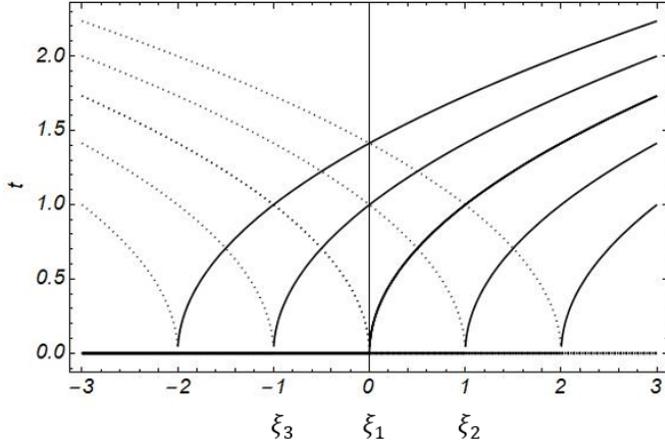


FIGURA 8. Curvas características de la ecuación de segundo orden.

A lo largo de estas curvas, sabemos que  $u(x(t), t)$  es una función conocida de  $t$  y, para cada  $\xi$ , uno encuentra  $u(x, t)$ .

Comparando con la ecuación de onda (1), tenemos que  $\alpha(x, t) = 1$ ,  $\beta(x, t) = 0$ ,  $\gamma(x, t) = -c_0^2$ , y así  $\alpha\gamma - \beta^2 = -c_0^2 < 0$ , por lo que la ecuación de onda es hiperbólica.

Tenemos entonces dos familias de curvas características descritas por las ecuaciones, que de (16) se sigue:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - (1)(-c_0^2)}}{1},$$

i.e.,

$$\frac{dx}{dt} = \pm c_0$$

Por lo tanto, la solución “general”<sup>1</sup> de la ecuación de onda es:

$$u(x, t) = F(x - c_0t) + G(x + c_0t),$$

la cual es la solución encontrada anteriormente, ecuación (8), dada por cambio de variables, ecuación (7). Podríamos seguir desarrollando el método de ecuaciones características para la ecuación de onda y resolver el problema de valores iniciales

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

y obtener la solución de D’Alambert, ecuación (10). No obstante, no lo haremos aquí para proseguir y terminar con nuestro breve estudio de ondas hiperbólicas y enfocarnos en ondas dispersivas.

<sup>1</sup>Para la mayoría de las ecuaciones diferenciales parciales, no es posible dar una solución general como en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Es por esto que indico aquí *general* entrecomillado. En el caso de la ecuación de onda, sí es posible.

**2.6. Sistemas de ecuaciones hiperbólicas.** Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + A(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \vec{v} = B(x, t) \vec{v},$$

en donde  $\vec{v} = \vec{v}(x, t)$  es un vector, función de  $(x, t)$ ;  $A(x, t), B(x, t)$  son matrices cuyas entradas son funciones de  $(x, t)$ . Esta ecuación es **hiperbólica** si, y sólo si,  $A(x, t)$  tiene valores propios distintos.

**Ejemplo 2.6.I.** El sistema de ecuaciones diferenciales que describe un par de ondas que se propagan en dirección contraria en una fibra óptica es el siguiente:

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_f + \frac{\partial}{\partial x} A_f - i\kappa A_b &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} A_b - \frac{\partial}{\partial x} A_b - i\kappa A_f &= 0. \end{aligned}$$

Si llamamos

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} A_f \\ A_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_f(x, t) \\ A_b(x, t) \end{pmatrix},$$

podemos escribir la ecuación (17) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \vec{v} = i\kappa \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}.$$

En este ejemplo,

$$A(x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y tiene a  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = -1$  como valores propios. Siendo valores propios distintos, por lo que el sistema es hiperbólico.

**2.7. Una onda hiperbólica y dispersiva.** Hay muchos ejemplos de ondas que son simultáneamente hiperbólicas y dispersivas. De los más sencillos es el siguiente. Es una ecuación que combina dos diferentes ordenes de las ecuaciones de onda y de onda uni-direccional:

$$(18) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + \eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \varphi + a_0 \frac{\partial}{\partial x} \varphi \right) = 0,$$

en donde  $c_0, \eta$  y  $a_0$  pueden ser funciones de  $(x, t)$ .

## 2.8. Tarea.

**TAREA 2.1.** Verifique que la función  $\varphi$ , dada en la ecuación (4) es, efectivamente, solución de la ecuación de onda unidireccional, ecuación (3). Para ello, simplemente substituya (4) en (3).

**TAREA 2.2.** Verifique que la función  $\varphi$ , ecuación (5) es solución de la ecuación de onda 1-dimensional, ecuación (1). Substituya (5) en (1) para este fin.

**TAREA 2.3.** Construya la ecuación de onda, ecuación (6), que describe la propagación de ondas acústicas. Siga el texto de Feynman [13] y desglose todos los detalles.

**TAREA 2.4.** Construya la ecuación de onda que describe la propagación de ondas en:

1. una cuerda extensible y
2. un cadena de canicas unidas por resortes que satisfacen la ley de Hooke.

Pueden usar los textos de Mattheij, et.al [30] y Haberman [19].

**TAREA 2.5.** Para la ecuación de onda (1), con condiciones iniciales (9), use el cambio de variables (7) y haga todos los detalles para encontrar la solución de D'Alambert (10).

**TAREA 2.6.** Usando el método de las características, resuelva la ecuación de onda unidireccional, ecuación (3), con condición inicial (14).

TAREA 2.7. Construya las ecuaciones características (16), de la ecuación hiperbólica general  $\mathcal{P}[u] = 0$ .

TAREA 2.8. Considere  $c_0, \eta$  y  $a_0$  constantes.

- Encontrar la relación de dispersión de la ecuación (18). Para ello, sustituya la función  $\varphi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ , simplifique, y la relación entre  $k$  y  $\omega$  es la relación de dispersión. (Para más detalles, consultar la siguiente sección para la definición de “relación de dispersión.”)
- Verificar que, efectivamente, la ecuación describe una onda dispersiva. Es decir, calcule (explícita o implícitamente),  $\frac{d\omega(k)}{dk}$ , y cheque que es distinta de 0. (De igual modo, para la definición de “onda dispersiva,” consultar la siguiente sección para aprender cómo determinar si una ecuación de onda es dispersiva o no.)
- Verificar también que es una ecuación hiperbólica.
- Calcule sus velocidades de fase y de grupo y compárelas. (Use las definiciones 3.1.3 y 3.1.4 dadas en la siguiente sección.)

### 3. ONDAS DISPERSIVAS Y RELACIONES DE DISPERSIÓN

**3.1. Conceptos básicos. Relación de dispersión.** Recordemos que las ondas dispersivas son definidas por las soluciones de las ecuaciones diferenciales que las definen. (Recordemos la clasificación 1.2.1.)

**Definición 3.1.1 (ONDA DISPERSIVA).** Una **onda lineal dispersiva** es cualquier sistema físico descrito por funciones de la forma

$$(19) \quad \varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

la cual es un elemento de la **base** del sistema de ondas dispersivas. También se le conoce como **modo** de oscilación. Aquí,  $\omega$  es la frecuencia (angular) y  $k$  es el número de onda.

Podemos decir que  $\omega$  es la **frecuencia** (*temporal*) y  $k$  es como una frecuencia “*espacial*”.

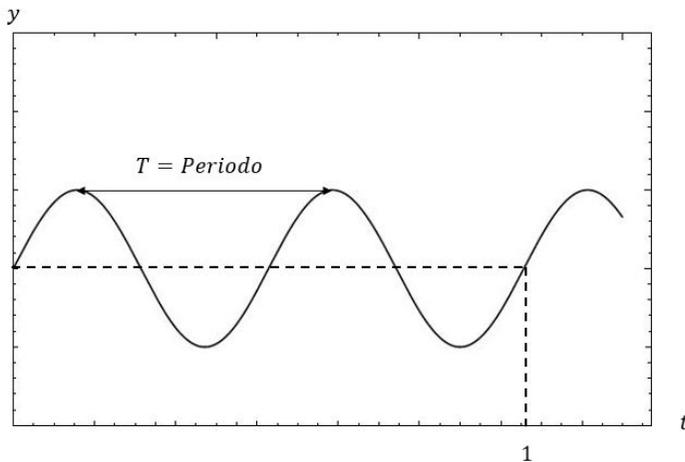


FIGURA 9. Periodo de una onda sinusoidal.

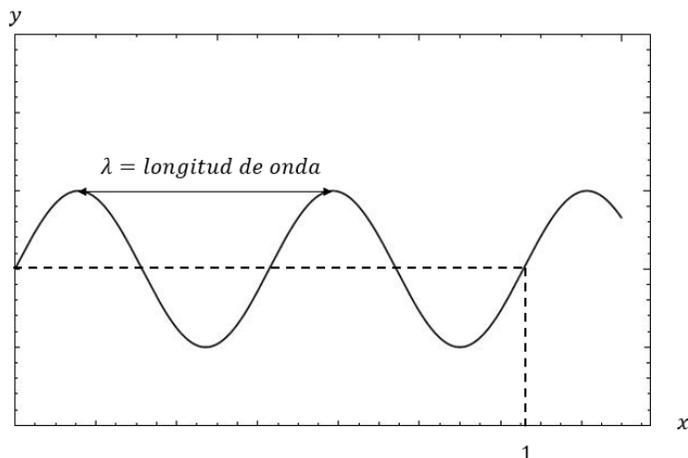


FIGURA 10. Longitud de onda de una onda sinusoidal.

¿Cómo mide uno la frecuencia y el número de onda? Uno lo hace de acuerdo a la siguiente regla:

$$\omega \equiv \frac{2\pi(\# \text{ de oscilaciones})}{\text{unidad de tiempo}}, \quad k \equiv \frac{2\pi(\# \text{ de oscilaciones})}{\text{unidad espacial}}.$$

De aquí uno define el *periodo*  $T$  (ver figura 9) y la *longitud de onda*  $\lambda$  (ver figura 10) de una onda dispersiva:

$$\begin{aligned} \omega T &= 2\pi, \\ k\lambda &= 2\pi. \end{aligned}$$

*Nota.* La frecuencia de una onda se define como  $\nu = 1/T$ , *i.e.*,  $\nu T = 1$ , por lo que  $\omega = 2\pi\nu$ . No obstante, de aquí en adelante nos referiremos a  $\omega$  como la frecuencia, aunque realmente es la frecuencia angular.

**Definición 3.1.2** (Relación de dispersión: primera definición). Resulta también que la frecuencia es función del número de onda:

$$\omega = \omega(k).$$

A esta expresión se le llama **relación de dispersión**.

Volveremos a esta definición más adelante.

Observemos que la base de las ondas dispersivas, se puede escribir como:

$$\varphi(x, t) = A \cos\left(k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)\right),$$

la cual, comparándola con la solución de la ecuación de onda unidireccional  $f(x - ct)$ , obtenemos la siguiente definición.

**Definición 3.1.3** (Velocidad de fase). La velocidad de propagación de la onda es:

$$(20) \quad c = c_f(k) = \frac{\omega(k)}{k}.$$

A esta velocidad se le llama **velocidad de fase**.

Generalmente, la *velocidad de fase* es función de  $k$ . Esta dependencia es lo que provoca el fenómeno de **dispersión**.

Si  $c_f(k) = c_0 = \text{const.}$ , entonces la onda es **no dispersiva**. Así:

$$\frac{\omega(k)}{k} = c_0 \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = c_0 k \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega(k)}{dk} = c_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} = 0.}$$

Podemos definir entonces una onda como dispersiva de la siguiente manera.

**Definición 3.1.4** (Velocidad de grupo). La **velocidad de grupo** de una onda dispersiva se define como:

$$(21) \quad c_g(k) \equiv \frac{d}{dk}\omega(k).$$

**Definición 3.1.5** (Onda dispersiva). Una onda se dice **dispersiva** si, y sólo si, su velocidad de grupo es **no constante**. Es decir, si su derivada respecto a  $k$  es distinta de cero:

$$(22) \quad \frac{d}{dk}c_g(k) = \frac{d^2}{dk^2}\omega(k) \neq 0.$$

**3.2. Superposición de modos: Principio de Superposición.** Si consideramos la superposición de varios modos de ondas dispersivas de la forma (19), para diferentes valores de  $k$ , podemos definir una solución de onda más general. Para dichos valores de  $k$ , tenemos diferentes velocidades de fase,  $c_f(k)$ , causando que la onda se *disperse*.

**Definición 3.2.1** (SUPERPOSICIÓN DISCRETA: SERIES DE FOURIER). A la **superposición** la podemos escribir como una serie de Fourier finita:

$$\varphi(x, t) = \sum_{j=1}^N A_j \cos(k_j x - \omega_j t),$$

en donde  $\omega_j = \omega(k_j)$ .

Para los valores de  $k$ :

$$k_1 \neq k_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1}{k_1} \neq \frac{\omega_2}{k_2} \quad \Rightarrow \quad c_1 \neq c_2.$$

Entonces, para diferentes  $k$ 's, uno tiene (en general) diferentes velocidades. Así, diferentes modos se propagan a diferentes velocidades: esto es el fenómeno de **dispersión**.

Para superposiciones más generales se necesita la **transformada de Fourier**.

**Definición 3.2.2** (SUPERPOSICIÓN CONTINUA: TRANSFORMADA DE FOURIER). Si tenemos ahora que los números de onda corren en los números reales,  $k \in \mathbb{R}$ , la **superposición** la podemos escribir como la **transformada inversa de Fourier**:

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \cos(kx - \omega(k)t) dk,$$

en donde  $F(k) = \widehat{\varphi}(k, 0)$  es la **transformada de Fourier** de la condición inicial  $\varphi(x, 0)$ .

Observemos que el modo

$$\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

resuelve la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = 0,$$

siempre y cuando

$$\frac{\omega(k)}{k} = c_0, \quad \text{o bien} \quad \frac{\omega(k)}{k} = -c_0,$$

*i.e.*,

$$\omega(k) = \pm c_0 k \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dk^2}\omega(k) = 0,$$

Esto significa que las soluciones de la ecuación de onda

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} = 0$$

son **ondas no dispersivas**.

**3.3. ¿Cómo calcular la relación de dispersión?** Aquí se trata de encontrar la relación de dispersión, si de antemano tenemos la ecuación de la onda dispersiva. No obstante, el problema **real** es encontrar la relación de dispersión de las observaciones y datos experimentales, lo cual no haremos aquí, pero sólo para un par de casos: las *ecuaciones de Schrödinger y de Dirac* de la mecánica cuántica. Por lo pronto, tenemos la siguiente forma de encontrar la relación de dispersión.

**PROBLEMA 3.3.1.** *Cómo encontrar la relación de dispersión si conocemos la ecuación de la onda dispersiva.*

1. *Primero, debemos tener una EDP (Ecuación Diferencial Parcial) **LINEAL, homogénea y de coeficientes constantes.***
2. *Entonces, sustituir*

$$\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

*o, equivalentemente,*

$$\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)},$$

*en la ecuación.*

3. *Eliminar  $A \cos(kx - \omega t)$  o bien  $Ae^{i(kx - \omega t)}$ , para entonces obtener la relación de dispersión.*

**Ejemplo 3.3.I** (Ecuación de onda). Encontrar la relación de dispersión de la ecuación de onda. Tenemos que:

1. La ecuación de onda

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} = 0$$

*es una EDP lineal, homogénea y de coeficientes constantes.*

2. Sustituyamos entonces  $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ , en la ecuación:

$$\begin{aligned} (Ae^{i(kx - \omega t)})_{tt} - c_0^2 (Ae^{i(kx - \omega t)})_{xx} &= 0, \\ A(-i\omega)^2 e^{i(kx - \omega t)} - c_0^2 A(ik^2) e^{i(kx - \omega t)} &= 0. \end{aligned}$$

3. Eliminar  $A \cos(kx - \omega t)$  o bien  $Ae^{i(kx - \omega t)}$ , para entonces obtener la relación de dispersión.

$$\begin{aligned} (-i\omega)^2 - c_0^2(ik^2) &= 0, \\ -\omega^2 + c_0^2 k^2 &= 0, \end{aligned}$$

*i.e.,*

$$(23) \quad \omega^2 - c_0^2 k^2 = 0,$$

siendo ésta la relación de dispersión de la ecuación de onda.

Notemos que podemos factorizar la relación de dispersión de la ecuación de onda (23):

$$(\omega - c_0 k)(\omega + c_0 k) = 0,$$

por lo que tenemos dos “componentes” (que llamaremos **modos de oscilación o vibración**) de la relación de dispersión:

$$\begin{aligned} \omega_1(k) &= c_0 k, \\ \omega_2(k) &= -c_0 k, \end{aligned}$$

las cuales nos indican las ondas contrapropagantes que muestra la solución de D’Alambert (10).

**Ejemplo 3.3.II** (Ecuación de Klein-Gordon). Encontrar la relación de dispersión de la ecuación de Klein-Gordon:

$$(24) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + a^2 \varphi = 0,$$

con  $a > 0$  una constante. Este es un ejemplo de una ecuación que es ambas, **hiperbólica y dispersiva**.

Busquemos entonces su relación de dispersion.

1. La ecuación de Klein-Gordon,

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} + a^2 \varphi = 0,$$

es una *EDP lineal, homogénea y de coeficientes constantes*.

2. Sustituyamos entonces  $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ , en la ecuación:

$$\begin{aligned} (Ae^{i(kx - \omega t)})_{tt} - c_0^2 (Ae^{i(kx - \omega t)})_{xx} + a^2 Ae^{i(kx - \omega t)} &= 0, \\ A(-i\omega)^2 e^{i(kx - \omega t)} - c_0^2 A(ik^2) e^{i(kx - \omega t)} + a^2 Ae^{i(kx - \omega t)} &= 0. \end{aligned}$$

3. Eliminar  $A \cos(kx - \omega t)$  o bien  $Ae^{i(kx - \omega t)}$ , para entonces obtener la relación de dispersión.

$$\begin{aligned} (-i\omega)^2 - c_0^2(ik^2) + a^2 &= 0, \\ -\omega^2 + c_0^2 k^2 + a^2 &= 0, \end{aligned}$$

*i.e.*,

$$(25) \quad \omega^2 = c_0^2 k^2 + a^2,$$

siendo ésta la relación de dispersión de la ecuación de Klein-Gordon.

Podemos también escribir:

$$(26) \quad \omega(k) = \pm \sqrt{c_0^2 k^2 + a^2},$$

y calculemos su primera y segundas derivadas. Usando (25) y la regla de la cadena:

$$(27) \quad 2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2c_0^2 k \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_0^2 k}{\omega}.$$

Ahora, calculando la derivada en la primer ecuación que aparece en (27),

$$(28) \quad 2 \left( \frac{d\omega}{dk} \right)^2 + 2\omega \frac{d^2\omega}{dk^2} = 2c_0^2 \Rightarrow \omega \frac{d^2\omega}{dk^2} = c_0^2 - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)^2 \Rightarrow \frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{c_0^2}{\omega} - \frac{1}{\omega} \left( \frac{d\omega}{dk} \right)^2.$$

Observemos que, de (27), la velocidad de grupo (21), es inversamente proporcional a la velocidad de fase:  $c_g(k) = c_0^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c_0^2}{c_f(k)}$ ,

Usando (26) y (27), obtenemos:

$$\frac{d\omega}{dk} = \pm \frac{c_0^2 k}{\sqrt{c_0^2 k^2 + a^2}},$$

la cual es no constante. Ahora bien, de (25) , (27) y (28):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\omega}{dk^2} &= \frac{c_0^2}{\omega} - \frac{1}{\omega} \left( \frac{d\omega}{dk} \right)^2, \\ &= \frac{1}{\omega} \left( c_0^2 - \left( \frac{c_0^2 k}{\omega} \right)^2 \right), \\ &= \frac{c_0^2}{\omega} \left( 1 - \frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} \right), \\ &= \frac{c_0^2}{\omega^3} (\omega^2 - c_0^2 k^2), \\ &= \frac{c_0^2}{\omega^3} (c_0^2 k^2 + a^2 - c_0^2 k^2), \\ &= \frac{c_0^2 a^2}{\omega^3}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = \pm \frac{a^2 c_0^2}{(c_0^2 k^2 + a^2)^{3/2}} \neq 0,$$

la cual es distinta de cero, por tanto describe una onda dispersiva.

Ahora bien, de la ecuación de Klein-Gordon (24), los términos  $\alpha(x, t) = 1 \neq 0$ ;  $\beta(x, t) = 0$ ;  $\gamma(x, t) = -c_0^2$ , tenemos que

$$\alpha(x, t)\gamma(x, t) - \beta^2(x, t) = (1)(-c_0^2) - 0^2 = -c_0^2 < 0,$$

por lo que la ecuación es hiperbólica. Entonces **la ecuación de Klein-Gordon es tanto hiperbólica como dispersiva.**

*Observación 3.3.2.* Escribamos la ecuación de Klein-Gordon (24) usando dimensiones físicas, *i.e.*,  $a^2 = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \varphi = 0,$$

Usando el modo fundamental  $\varphi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + m^2 c^4 \varphi &= 0, \\ \hbar^2 (-i\omega)^2 \varphi - (ik)^2 c^2 \hbar^2 \varphi + m^2 c^4 \varphi &= 0, \\ -\hbar^2 \omega^2 + k^2 c^2 \hbar^2 + m^2 c^4 &= 0. \end{aligned}$$

Si usamos la expresión de Planck-Einstein,  $E = \hbar\omega$ , y la longitud de onda de De Broglie,  $p = \hbar k$ , obtenemos la ecuación de la energía cinética relativista de una partícula libre:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4.$$

De hecho, Klein y Gordon procedieron al revés para obtener su ecuación. Volveremos a esto más adelante.

### 3.4. Algunas consideraciones importantes.

*3.4.1. Dispersión vs. hiperbolicidad.* La mayoría de la gente cree que casi todas las ondas se describen con ecuaciones hiperbólicas. De hecho, creen que absolutamente todas las ondas son hiperbólicas o, aún peor, que la única ecuación que describe propagación de ondas es la ecuación de onda (1). Sin embargo, este no es el caso: la mayoría de las ondas son dispersivas y se describen con EDPs (Ecuaciones Diferenciales Parciales) dispersivas.

*La forma en que debe ser enseñado,* creo, *es la siguiente:* Las ondas hiperbólicas describen muchos fenómenos, pero **la mayoría de las ondas son dispersivas.**

Cuando era estudiante, de hecho yo pensaba precisamente esto, que las ondas eran descritas únicamente por la ecuación de onda:  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = 0$ . No obstante, tiempo después, me di cuenta que hay muchas ecuaciones que describen movimientos ondulatorios.

3.4.2. *Ondas planas.* Todas las ecuaciones lineales cumplen el **principio de superposición**. Gracias a esto, podemos construir soluciones más sofisticadas a partir de soluciones más simples. Si las ondas están en 3-dim,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ , la soluciones más simples son generalizaciones de (19) en forma compleja:

$$u_{\vec{k}}(x, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{k} \in \mathbb{R}^3.$$

A estas ondas también se les llama **ondas planas**. Esto por la siguiente razón: supongamos que la fase es constante:  $\theta(x, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{const.}$  Entonces:

$$u_{\vec{k}}(x, t) = e^{i(\text{const.})} = \text{const.}$$

Si  $t = t_0$  es fijo:  $\theta(x, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t_0 = \text{const.}$ , así:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \omega t_0 + \text{const.}$$

Ésta es la ecuación de un plano en el espacio, perpendicular al vector  $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$  que describe la misma fase de la onda. Para diferentes valores de  $t_0$ , tenemos diferentes planos, todos perpendiculares a  $\vec{k}$ , que se van moviendo con una rapidez  $\omega/||\vec{k}||$ . Es por esto que se llaman **ondas planas**.

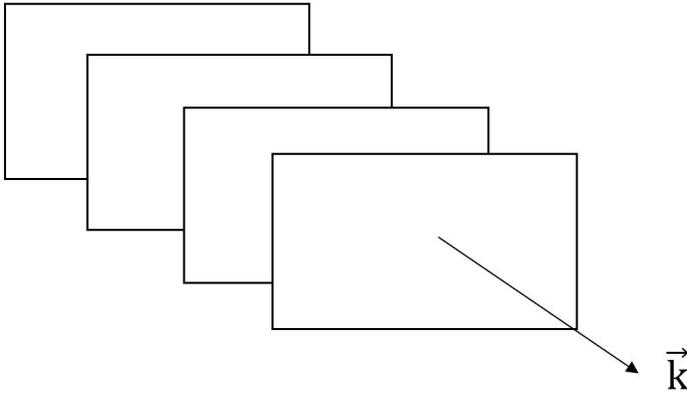


FIGURA 11. Ondas planas.

Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} u_{\vec{k}} &= ik_j u_{\vec{k}}, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_{\vec{k}} &= -i\omega u_{\vec{k}}. \end{aligned}$$

Es por esto que se hace la correspondencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} &\longleftrightarrow ik_j, \\ \frac{\partial}{\partial t} &\longleftrightarrow -i\omega. \end{aligned}$$

Pero recordemos que **esto sólo aplica a ondas planas**, o para **combinaciones lineales de las mismas**, (discretas: series de Fourier; o continuas: transformadas de Fourier.) Para generalizaciones, se parte de esta idea.

**3.5. Trenes de onda. Más relaciones de dispersión.** Como hemos comentado en diversas ocasiones, para una EDP (Ecuación Diferencial Parcial) lineal, homogénea, con coeficientes constantes, cuya solución es  $\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ , decimos que la EDP describe el movimiento ondulatorio de una onda dispersiva.

**Definición 3.5.1.** Combinaciones lineales de los modos fundamentales de ondas dispersivas son llamadas **trenes de onda**. Cada componente del tren, *i.e.*, cada solución (19) es llamada **modo fundamental** de la onda, o bien, **modo de oscilación** o de **vibración**. Y todos ellos son los **modos fundamentales** de la onda.

Estas combinaciones lineales pueden ser **discretas** (numerables; series de Fourier) o **continuas** (transformadas de Fourier.) También aprendimos que para cada ecuación de onda dispersiva, existe una expresión asociada que relaciona la *frecuencia*,  $\omega$ , con el *número de onda*,  $k$ :

$$R(\omega, k) = 0.$$

Algunas veces podemos despejar la  $\omega$ :  $\omega = \omega_1(k), \omega = \omega_2(k), \dots, \omega = \omega_n(k)$ , y obtener varias raíces de la relación de dispersión.

El origen de la relación de dispersión depende del movimiento ondulatorio en particular a ser estudiado.

Otras relaciones de dispersión son las siguientes:

1. Para ondas generales en agua, se tiene la siguiente relación de dispersión para las ondas superficiales:

$$(29) \quad \omega^2 = gk \tanh(hk),$$

en donde  $g$  es la constante de gravedad (cerca de la superficie terrestre) y  $h$  es la profundidad del agua en reposo.

2. Las ondas dispersivas en electromagnetismo tiene la siguiente relación de dispersión:

$$(30) \quad (\omega^2 - \nu_0^2)(\omega^2 - c_0^2 k^2) = \omega^2 \nu_p^2,$$

en donde  $c_0$  es la velocidad de la luz;  $\nu_0$  es la frecuencia natural de oscilación y  $\nu_p$  es la frecuencia de oscilación del plasma.

**3.6. Principio de superposición. (Continuación.)** Regresamos nuevamente al **principio de superposición**. En el caso discreto, tenemos la serie de Fourier:

$$\varphi(x, t) = \sum_{j=1}^N A_j \cos(k_j x - \omega_j t),$$

en donde  $\omega_j = \omega(k_j)$ . Aquí  $N < \infty$  o  $N = \infty$ .

Para la superposición continua hacemos uso de la transformada de Fourier:

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \cos(kx - \omega(k)t) dk,$$

en donde  $F(k) = \widehat{\varphi}(k, 0)$  es la **transformada de Fourier** de la condición inicial  $\varphi(x, 0)$ .

La notación usual es con la exponencial compleja:

$$\varphi(x, t) = \sum_{j=-N}^N a_j e^{i(k_j x - \omega_j t)},$$

donde

$$a_j = \frac{k_j}{2\pi} \int_{-\pi/k_j}^{\pi/k_j} f(x) e^{-ik_j x} dx,$$

y  $\varphi(x, 0) = f(x)$  es la condición inicial.

Para el caso continuo, la notación usual es:

$$(31) \quad \varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk,$$

con

$$F(k) = \widehat{\varphi}(k, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx,$$

es la transformada de Fourier de la condición inicial  $\varphi(x, 0) = f(x)$ .

Nuevamente, sea con series o transformadas de Fourier, tenemos una superposición de diferentes modos dispersivos,  $e^{i(kx - \omega(k)t)}$ , los cuales se mueven a diferentes velocidades dependiendo del número de onda  $k$ .

**Definición 3.6.1** (Velocidad de fase). Considerando un tren de ondas discreto, la velocidad

$$c_f(k) = \frac{\omega(k)}{k},$$

se llama **velocidad de fase**. Esta velocidad provoca que el tren de ondas se **disperse**. Esto nos dice qué tan rápido se mueve una onda con fase constante:  $\theta = kx - \omega(k)t$ .

**Definición 3.6.2** (Velocidad de grupo). Una aproximación para la solución que aparece en (31) puede ser hecha usando análisis asintótico. A diferencia del caso (mucho más sencillo) de fase constante, aquí uno se fija en un número de onda fijo,  $k = k_0$  y calcula la velocidad a la que se mueve ese modo. Uno encuentra que el tren de ondas, alrededor del número de onda  $k = k_0$ , se mueve con una velocidad

$$c_g(k_0) = \frac{d\omega}{dk}(k_0),$$

la cual es llamada **velocidad de grupo**. Se puede mostrar que la energía que se propaga con la onda es la velocidad de grupo, por lo que es de fundamental importancia en el estudio de propagación de ondas.

Notemos que en el caso de la ecuación de onda:  $\omega(k) = \pm c_0 k$ , se tiene que las velocidades de onda y de grupo son iguales:

$$c_f(k) = \frac{\omega(k)}{k} = c_0 = \frac{d\omega}{dk}(k) = c_g(k).$$

De este modo, si  $c_f(k) = c_g(k)$ , tenemos una onda **no dispersiva**. Podemos decir entonces una onda dispersiva de la siguiente forma.

**Definición 3.6.3** (Onda dispersiva definida a través de velocidades de fase y de grupo).

Onda dispersiva	$\iff$	$\frac{\omega(k)}{k} \neq \frac{d\omega}{dk}(k).$
-----------------	--------	---

La **velocidad de grupo**,  $c_g(k_0) = \frac{d\omega}{dk}(k_0)$ , es la velocidad que juega el papel principal en propagación de ondas.

**3.7. Medios no uniformes.** Hasta aquí hemos considerado que la amplitud de la onda,  $A$ , la frecuencia,  $\omega$ , y el número de onda,  $k$ , son constantes. Pero, ¿qué tal si conforme se desplaza la onda estos van cambiando? Entonces tenemos que pueden ser funciones de  $(x, t)$ .

$$\begin{aligned} k &= k(x, t), & \text{número de onda variable,} \\ \omega &= \omega(x, t), & \text{número de onda variable,} \\ A &= A(x, t), & \text{amplitud de onda variable,} \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que un modo dispersivo no uniforme será:

$$\varphi = A(x, t) \cos(\theta(x, t)),$$

en donde  $A = A(x, t)$  es la amplitud,  $\theta = \theta(x, t) = k(x, t)x - \omega(x, t)t$  es la **fase** y la **frecuencia** será función del número de onda,  $\omega(x, t) = \omega(k(x, t))$ .

Una clase especial es un tren de ondas uniforme, en el cual

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \text{const.}, \\ \theta &= kx - \omega t, \end{aligned}$$

pero aún con  $k = k(x, t)$  y  $\omega = \omega(x, t)$ .

En el caso general, cuando  $\theta = \theta(x, t)$ , tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.7.1.** Si la fase  $\theta = \theta(x, t)$  de un movimiento ondulatorio dispersivo es función del tiempo y espacio,  $(x, t)$ , se definen el **número de onda no uniforme** y la **frecuencia no uniforme** de la siguiente manera:

$$(32) \quad k(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t),$$

$$(33) \quad \omega(x, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \theta(x, t).$$

Por lo tanto, de la relación de dispersión  $\omega = \omega(k)$  y usando estas definiciones tenemos:

$$- \frac{\partial}{\partial t} \theta = \omega \left( \frac{\partial}{\partial x} \theta \right),$$

es decir, obtenemos la EDP,

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta + \omega \left( \frac{\partial}{\partial x} \theta \right) = 0,$$

La solución de esta EDP proporciona las propiedades cinemáticas de **trenes de onda**.

También podemos eliminar  $\theta$  de las ecuaciones (32) y (33) con derivadas cruzadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \theta(x, t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} k(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \omega(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, puesto que la relación de dispersión es  $\omega = \omega(k)$ ,  $c_g(k) = \frac{d\omega}{dk}$  y por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial t} k(x, t) + \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial}{\partial x} k(x, t) = 0,$$

*i.e.*,

$$\frac{\partial}{\partial t} k + c_g(k) \frac{\partial}{\partial x} k = 0,$$

la cual es una ecuación hiperbólica no lineal. De aquí podemos concluir que existe un comportamiento hiperbólico escondido en ondas dispersivas no uniformes.

Podemos mostrar también que, usando la solución de transformada de Fourier de ondas lineales dispersivas, que **la energía se propaga con la velocidad de grupo**. (Consultar [43].)

**3.8. Dispersión no lineal.** George Stokes, en 1847, propuso que las ondas de elevación de una superficie de un fluido son ondas no lineales. Enseguida se explica cómo es esto.

Si  $\eta = \eta(x, t)$  es la elevación de la superficie con respecto de una línea horizontal (el eje  $x$ ), entonces Stokes demostró que las ondas se propagan de la siguiente manera:

$$(34) \quad \eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2} k a^2 \cos 2(kx - \omega t) + \frac{3}{8} k^2 a^3 \cos 3(kx - \omega t) + \dots,$$

con relación de dispersión

$$\omega^2 = gk(1 + k^2 a^3 + \dots)$$

En el caso lineal:

$$(35) \quad \omega^2 = gk,$$

lo cual coincide con el límite  $hk \rightarrow \infty$  para la relación de dispersión en la ecuación (29).

En estos hechos, hay dos ideas clave.

**AFIRMACIÓN 3.8.1.** *La existencia de trenes de onda periódicos, en los cuales la variable dependiente,  $\eta(x, t)$ , depende de la fase*

$$\theta(x, t) = kx - \omega t,$$

*pero ya no son ondas sinusoidales. Es decir, la suma en (34) es infinita (ya  $\eta(x, t)$  deja de ser sinusoidal).*

**AFIRMACIÓN 3.8.2.** *La relación de dispersión depende de la amplitud,  $a$ . Es decir, al substituir  $ae^{i(kx - \omega t)}$  en la ecuación dispersiva, no se cancelan las amplitudes en los términos no lineales. Esta es una característica importante en ondas no lineales.*

La afirmación 3.8.1 se puede verificar explícitamente en ondas periódicas de la ecuación de Korteweg-deVries (KdV)

$$(36) \quad \frac{\partial}{\partial t} u + (c_0 + c_1 u) \frac{\partial}{\partial x} u + \nu \frac{\partial^3}{\partial x^3} u = 0,$$

cuyas soluciones pueden ser escritas en términos de las funciones *cnoidales*,  $\text{cn}(\theta)$ , i.e., las funciones elípticas de Jacobi. (Ver [43] o [21].)

La afirmación 3.8.2, por otra parte, se puede verificar con la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS):

$$(37) \quad i \frac{\partial}{\partial t} u = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \pm \gamma \|u\|^2 u.$$

Linearizando la ecuación de KdV (36), alrededor de  $u(x, t) = 0$ , obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + c_0 \frac{\partial}{\partial x} u + \nu \frac{\partial^3}{\partial x^3} u = 0.$$

Substituyendo  $u = ae^{i(kx - \omega t)}$ :

$$\begin{aligned} -i\omega + c_0(ik) + \nu(ik)^3 &= 0, \\ -i^2\omega + c_0(i^2k) + \nu i^4 k^3 &= 0, \\ \omega - c_0k + \nu k^3 &= 0, \\ \omega &= c_0k - \nu k^3. \end{aligned}$$

que es la relación de dispersion de la ecuación linealizada de KdV. Esto puede ser mejorado por el postulado de Stokes, ecuación (34). Sin embargo, como se mencionó anteriormente, Korteweg y deVries (1895) [23] encontraron soluciones periódicas en términos de las funciones elípticas de Jacobi: *entonces tenemos soluciones **periódicas y no sinusoidales** a una ecuación de onda dispersiva no lineal.*

Si uno busca soluciones a la ecuación de KdV (36), de la forma

$$u(x, t) = f(\theta), \quad \text{con} \quad \theta(x, t) = kx - \omega t,$$

se obtiene uno de los dos siguientes casos:

1.  $f(\theta) = \text{cn}(\theta)$ , o bien,
2.  $f(\theta)$  contiene una amplitud arbitraria  $a$ , y la solución (como si fuera solución de una ecuación lineal) involucra cierta relación de dispersión que relaciona  $\omega$ ,  $k$  y  $a$ .

¿Cuál es la **relación de dispersión no lineal** para la ecuación de KdV? Dicha relación de dispersión está dada por:

$$\omega = c_0 \left( 1 + \frac{2\alpha - \beta}{2} \right) k,$$

en donde  $\alpha = a/h_0$ ,  $\beta = h_0^2/l^2$ , con  $a$  la amplitud del modo fundamental,  $h_0$  la profundidad del agua en reposo y  $l$  es una longitud de escala típica en la dirección  $x$ . (Ver [43], sección 13.12, *Solitary and Cnoidal Waves*, ecuación (13.111).)

Aún más, para las soluciones de la forma  $f(\theta) = \text{cn}(\theta)$ , se pueden deducir las siguientes dos soluciones en los siguientes límites. Si  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$f(\theta) = \text{cn}(\theta) \rightarrow \cos \theta = \cos(kx - \omega t),$$

es decir, recuperamos el caso lineal.

Por otra parte, si  $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 1$ , tenemos

$$f(\theta) = \text{cn}(\theta) \rightarrow \eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{ac_1}{12\nu}} (x - Ut) \right],$$

con  $U = c_0 + \frac{1}{3}ac_1$ . Esta es la onda solitaria que observó Russell en Edinburgo, Escocia, en 1834. (Consultar [21].)

Algunas otras ecuaciones han sido estudiadas en otros contextos. Ya mencionamos la ecuación no lineal de Schrödinger, ecuación (37).

Otra ecuación importante es la ecuación no lineal de Klein-Gordon:

$$(38) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + V'(\varphi) = 0,$$

la cuál es una generalización de la ecuación relativista y cuántica de Klein-Gordon (24).

La existencia de trenes de onda periódicos es una característica típica de las ondas dispersivas no lineales, las cuales deben seguir del postulado de Stokes. De otro modo, estudios más detallados deben ser realizados.

En este caso, una extensión del modo fundamental de ondas dispersivas,

$$\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

solamente por una simple superposición de Fourier, no es posible.

Muchas técnicas han sido desarrolladas como el método de dispersión inversa, las transformadas de Bäcklund, las funciones propias cuadradas, superficies de Riemann, el método de la monodromía, el método de Hirota y el de la función  $\tau$  (tau), para el estudio y para resolver las ecuaciones de KdV, NLS y sine-Gordon (ecuación (38) con  $V(\varphi) = \cos \varphi$ ), entre muchas otras, siendo estos los más típicos.

Todos estos métodos pueden ser estudiados a fondo y por separado, pero no lo haremos en este curso. Para tal fin, pueden consultar [10], [21], [34], [37], [39], [43].

### 3.9. Tarea.

**TAREA 3.1.** *En la tarea 2.8, se consideró la ecuación (18), la cual describe una onda dispersiva e hiperbólica. Calcule su velocidad de fase, (20). ¿Cuál es su velocidad de grupo, (21)? ¿Son iguales su velocidad de fase y su velocidad de grupo? ¿Por qué sí lo son o por qué no? (Hint: Use las definiciones 3.1.3 y 3.1.4.)*

**TAREA 3.2.** *Usando el modo fundamental de una onda dispersiva,  $\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ , verifique que la relación de dispersión dada corresponde a las siguientes ecuaciones.*

*También intente encontrar la relación de dispersión considerando modos fundamentales de la forma  $\varphi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ . ¿Con cuál de las dos formas les fue más sencillo encontrar la relación de dispersión?*

1. **La ecuación del haz:**

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi + \gamma^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi = 0; \quad \omega(k) = \pm \gamma k^2.$$

2. **La ecuación lineal de Korteweg-de Vries.** Aparece en ondas de onda largas y poco profundas:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + c_0 \frac{\partial}{\partial t} u + \nu \frac{\partial^3}{\partial x^3} u = 0; \quad \omega(k) = c_0 k - \nu k^3.$$

3. **La ecuación lineal de Boussinesq.** También aparece en ondas de onda largas y poco profundas:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi = \beta^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \varphi; \quad \omega(k) = \pm \alpha k \frac{\alpha k}{\sqrt{1 + \beta^2 k^2}}$$

TAREA 3.3. Para las ecuaciones que aparecen en la tarea 3.2:

1. Encuentre las velocidades de fase 3.1.3, de grupo 3.1.4 y compárelas.
2. Determine, según nuestra definición, ecuación (22), si son ondas dispersivas o no lo son.

TAREA 3.4. Para las ecuaciones (29) y (30):

1. También encuentre las velocidades de fase, definición 3.1.3,  $c_f(k)$ , de grupo, definición 3.1.4,  $c_g(k)$ , y compárelas.
2. ¿Son ondas dispersivas o no lo son? (Ecuación (22).) Explique.

TAREA 3.5. Usando el método de la fase estacionaria de Análisis asintótico, aplicado a la solución de onda dispersiva (31), encuentre que la velocidad de grupo en el número de onda  $k_0$  es, precisamente,  $c_g(k_0) = \frac{d\omega}{dk}(k_0)$ . (Este problema es un poco más avanzado en donde conocimientos de Análisis asintótico son requeridos, los cuales usualmente se dan en cursos de primer año posgrado.)

TAREA 3.6. Demuestre que la energía de una onda dispersiva se mueve con la velocidad de grupo. Consultar [43].

TAREA 3.7. Usando el modo fundamental de ondas dispersivas,  $u = Ae^{i(kx - \omega t)}$ , verifique las afirmaciones 3.8.1 y 3.8.2 para las ecuaciones KdV (36) y NLS (37), respectivamente. Para la afirmación 3.8.1, vaya a las referencias [43] o [21].

TAREA 3.8. Para la ecuación de KdV (36), usando soluciones de la forma

$$u(x, t) = f(x - ct),$$

encuentre las soluciones periódicas cnoidales de Jacobi

$$u(x, t) = a + b \operatorname{cn}^2(\alpha(x - ct - x_0)|m)$$

(para ciertas constantes  $a, b, \alpha$  y  $m$ ) y la solución de onda solitaria:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \kappa^2 \operatorname{sech} \left( \frac{1}{2} \kappa (x - \kappa^2 t - x_0) \right).$$

Puede consultar [10] o [21].

TAREA 3.9. Considere la ecuación (29). En el límite,  $hk \rightarrow \infty$ , encuentre la relación de dispersión dada en la ecuación (35).

## 4. ONDAS DISPERSIVAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

En esta sección trataremos a mayor detalle la relación entre ondas dispersivas y las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) que las describen. En la sección siguiente veremos cómo resolver estas EDPs usando la Transformada de Fourier.

Como mencionamos anteriormente, ésta es una de las dos clases principales de ondas, para no llamarla “la primera” ni “la principal”, aunque por el número de aplicaciones puede ser así. El primer estudio es el de ondas hiperbólicas, que forman una de las clases principales de ondas, principalmente descrita por la ecuación clásica de onda o ecuación de D’Alambert:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - c_0^2 \Delta u = 0.$$

Sin embargo, como también fue mencionado anteriormente, no todas las ondas pueden ser descritas por ecuaciones hiperbólicas. Podríamos entonces desarrollar física y matemáticas más elaboradas para extender el estudio de ecuaciones hiperbólicas empujando la teoría a comportamientos específicos de ondas hiperbólicas.

Sin embargo, estas ondas pueden ser parte de la otra categoría principal de ondas, **ondas dispersivas**.

La **definición** de **ondas dispersivas**, como decíamos, es menos precisa. Entonces definiciones más restrictivas serán dadas, y ondas dispersivas más complejas, elaboradas o sofisticadas se estudiarán dependiendo del problema en particular por resolver.

Por esta razón, las ondas dispersivas cubrirán una amplia gama de posibilidades de estudio. Enfatizamos que esta definición está **enfocada al tipo de soluciones**, *no a la forma de la EDP* que debe ser satisfecha.

Para mayores detalles puede consultar el texto de G.B: Whitham [43].

**4.1. Relaciones de dispersión. (Continuación.)** Para ondas lineales, la dispersión es encontrada por la existencia de soluciones elementales a Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) (a ser determinadas) de la forma:

$$\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)},$$

las cuales, al combinarlas linealmente, forman trenes de onda sinusoidales, con

$k$ : el número de onda (equivalente a una “frecuencia” espacial);

$\omega$ : la frecuencia de oscilación (que en realidad es la frecuencia angular, pero se le llama simplemente *frecuencia* en este contexto);

$A$ : amplitud de la solución elemental dispersiva.

**Definición 4.1.1.** El caso más simple es el de ondas lineales, que corresponden a EDPs lineales (homogéneas y de coeficientes constantes). Este caso nos lleva a poner atención en el factor  $A$  y notamos que se elimina por linealidad, por lo que deducimos que en las ecuaciones lineales  $A$  es **arbitraria**. Por tanto, sólo permanece una relación entre  $k$  y  $\omega$ :

$$R(\omega, k) = 0,$$

la cual es la **relación de dispersión**. Aquí  $R$  es una función de dos variables (o de tres o cuatro si  $k = \vec{k} \in \mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^3$ ) y depende del problema específico en consideración.

**Ejemplo 4.1.I** (*La ecuación del haz*). Buscando soluciones de la forma  $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$  en la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi + \gamma^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi = 0,$$

obtenemos

$$R(\omega, k) = \omega^2 - \gamma^2 k^4 = 0.$$

*Hecho importante.* En general, para ecuaciones lineales, homogéneas y con coeficientes constantes, no se requerirá la ecuación una vez la relación de dispersión sea conocida.

Similarmente, una vez la relación de dispersión sea conocida, ¡la Ecuación Diferencial Parcial (EDP) que gobierna el movimiento ondulatorio puede ser construída!

Si podemos resolver la relación de dispersión  $R(\omega, k) = 0$  para  $\omega$ :

$$\omega = \omega(k),$$

todas sus raíces necesitan ser *raíces reales*, a saber:

$$\omega = \omega_1(k),$$

$$\omega = \omega_2(k),$$

$$\vdots$$

$$\omega = \omega_N(k),$$

deben ser reales, si la ecuación es un polinomio de grado  $N$ .

**Ejemplo 4.1.II.** Para la ecuación del haz,

$$(39) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi + \gamma^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi = 0,$$

encontramos

$$\omega^2 - \gamma^2 k^4 = 0.$$

la cual tiene dos diferentes modos:

$$(40) \quad \omega = \omega_1(k) = \gamma k^2 = 0,$$

$$\omega = \omega_2(k) = -\gamma k^2 = 0,$$

## 4.2. Superposición. Representación en $N$ dimensiones.

*4.2.1. Superposición.* En problemas lineales, combinaciones lineales de los modos (principio de superposición) pueden ser escritas para crear la solución completa del sistema.

Es más sencillo trabajar con exponenciales complejas que con funciones trigonométricas sinusoidales. El principio de superposición nos permite trabajar con:

$$\varphi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)},$$

puesto que es equivalente a  $\varphi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + iA \sin(kx - \omega t)$ . Es decir,  $\text{Re}[\varphi(x, t)] = A \cos(kx - \omega t)$ . O, en el caso de que  $A$  sea compleja,  $A = |A|e^{i\eta}$ ,

$$\varphi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} = |A| e^{i(kx - \omega t + \eta)},$$

y así,  $\text{Re}[\varphi(x, t)] = A \cos(kx - \omega t + \eta)$ .

*4.2.2. En más dimensiones.* En más dimensiones,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\vec{k} \in \mathbb{R}^N$ , tenemos

$$\varphi(\vec{x}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}.$$

A la función

$$\theta(\vec{x}, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t,$$

se le llama **fase** y nos dice en cuál parte del ciclo oscilatorio está nuestra onda. Por decir, si  $\theta(\vec{x}, t) = \pi/4$ , estamos en  $1/8$  parte del ciclo:  $2\pi/8 = \pi/4$ .

Ahora bien,

$$\nabla \theta(\vec{x}, t) \equiv \vec{k},$$

es llamado **vector de onda** (como similitud al número de onda). Nos dice en qué dirección se mueve la onda plana descrita por esta fase. Es decir,  $\vec{k}$  es normal (perpendicular) al plano  $\theta(\vec{x}, t) = \text{constante}$ .

**Definición 4.2.1.** Para calcular la “frecuencia espacial”, necesitamos calcular la norma del vector de onda  $\vec{k}$ :

$$k \equiv \|\nabla\theta(\vec{x}, t)\| = \|\vec{k}\|,$$

y ésta la definimos como el **número de onda**, la cual podríamos decir que corresponde a una “frecuencia espacial.”

**Definición 4.2.2.** De manera similar. calculamos la frecuencia (angular),

$$\omega \equiv -\frac{\partial}{\partial t}\theta(\vec{x}, t).$$

**Definición 4.2.3.** Ya con estas definiciones, podemos definir la **longitud de onda** y el **periodo** de una onda.

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|},$$

$$T \equiv \frac{2\pi}{\omega}.$$

Cualquier valor particular (fijo) de la fase,  $\theta(\vec{x}, t) = \theta_0$ , se mueve en la dirección  $\vec{k} = \|\vec{k}\|\hat{k}$  (con  $\|\hat{k}\| = 1$ ), con una velocidad de fase:

$$\vec{c}_f(\vec{k}) = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}\hat{k}.$$

La **rapidez de fase** es entonces  $c_f(\vec{k}) = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}$ .

**Ejemplo 4.2.I.** Para la ecuación de onda en  $\mathbb{R}^N$ ,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - c_0^2\Delta\varphi = 0,$$

la relación de dispersión es:

$$\omega^2 - c_0^2\|\vec{k}\|^2 = 0,$$

con dos modos:

$$\omega = \omega_1(\vec{k}) = c_0\|\vec{k}\|,$$

$$\omega = \omega_2(\vec{k}) = -c_0\|\vec{k}\|.$$

De aquí que las rapidezces de propagación son:

$$c_1(\vec{k}) = \frac{\omega_1}{\|\vec{k}\|} = c_0,$$

$$c_2(\vec{k}) = \frac{\omega_2}{\|\vec{k}\|} = -c_0,$$

con velocidades de propagación:

$$\vec{c}_1(\vec{k}) = c_0\hat{k},$$

$$\vec{c}_2(\vec{k}) = -c_0\hat{k},$$

*i.e.*, la velocidad de fase coincide con la velocidad de propagación en este caso. (Aquí,  $\hat{k}$  el vector unitario en la dirección de  $\vec{k}$ .)

En general,  $\vec{c} = \vec{c}(\vec{k})$  es de hecho una función de varias variables,  $k_1, k_2, \dots, k_N$ , y ésta es la razón de que el fenómeno de dispersión ocurra.

De esta forma, en las combinaciones lineales de Fourier (sean éstas series o transformadas) tenemos componentes con diferentes números y vectores de onda, teniendo entonces paquetes o trenes de onda que se propagan a diferentes velocidades y el fenómeno de dispersión es observado.

**4.3. Clasificación de ondas dispersivas.** Ahora bien, para clasificar (identificar) ondas dispersivas comenzamos excluyendo el caso

$$c(k) = \text{constante},$$

puesto que observamos que todas las componentes del tren de onda se propagan a la misma velocidad,  $c(k) = \text{constante}$ , *i.e.*, **no hay dispersión**.

También se requieren **soluciones reales** de la relación de dispersión  $R(\omega, k) = 0$ .

Por ejemplo, para la ecuación del calor esto no es posible. La ecuación del calor es  $\varphi_t = \gamma \Delta \varphi$ . Buscando soluciones de forma dispersiva,  $\varphi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ , obtenemos  $-i\omega = -\gamma k^2 \implies \omega = -i\gamma k^2$ . Por tanto, la ecuación del calor no tiene soluciones de onda dispersiva. Esta relación de dispersión es compleja.

**Definición 4.3.1 (ONDA DISPERSIVA LINEAL).** Una **onda dispersiva lineal** es una onda cuya relación de dispersión  $\omega = \omega(\vec{k})$ , es tal que:

(a):

$$\omega = \omega(\vec{k}) \in \mathbb{R}$$

*i.e.*, es real, y

(b):

$$(41) \quad \det \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} \right) \neq 0.$$

Para problemas en una dimensión, la relación (41) coincide con la condición antes encontrada:

$$\frac{d^2}{dk^2} \omega \neq 0.$$

Esta condición es más fuerte que  $\frac{dc}{dk} \neq 0$ , puesto que  $\frac{d^2}{dk^2} \omega \neq 0$  excluye el caso  $\omega(k) = c_0 k + d$ , el cual corresponde a una onda hiperbólica, como veremos adelante.

Sin embargo,

$$\frac{dc_f}{dk} = 0 \implies c_f(k) = c_0 \implies \frac{\omega(k)}{k} = c_0 \implies \omega(k) = c_0 k,$$

siendo un caso particular de  $\omega(k) = c_0 k + d$ .

Ahora bien, si

$$(42) \quad \omega(k) = c_0 k + d, \quad \text{con} \quad d \neq 0,$$

entonces

$$c_f(k) = \frac{\omega(k)}{k} = c_0 + \frac{d}{k},$$

por lo que

$$\frac{dc_f}{dk} = -\frac{d}{k^2},$$

lo cual parece como si fuera una onda dispersiva, pero **no** lo es. Para verificar que no es dispersiva, observemos lo siguiente. Tomemos una componente de Fourier de esta onda:

$$\varphi_k(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} = e^{i(kx - (c_0 k + d)t)} = e^{-idt} e^{i(kx - c_0 kt)}.$$

Tomando una combinación lineal (Transformada de Fourier):

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \varphi_k(x, t) dk, \\ &= e^{-idt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx - c_0 kt)} F(k) dk, \\ &= e^{-idt} u(x, t), \end{aligned}$$

siendo  $u(x, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx - c_0 kt)} F(k) dk$ , solución de  $\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , la cual es una

ecuación **hiperbólica**. El factor  $e^{-idt}$  es sólo un factor (de la amplitud) oscilante en el tiempo, mas no dispersivo.

Esto significa que la relación de dispersión  $\omega(k) = c_0 k + d$  ( $d \neq 0$ ), corresponde a una ecuación de onda no dispersiva, a saber:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + id \varphi = 0.$$

La condición  $\frac{dc_f}{dk} \neq 0$  no excluye este caso (ecuación (42)), al contrario, lo incluye; por tanto, ésta no debe ser la definición de ondas dispersivas. Por otra parte, la condición  $\frac{dc_f}{dk} = 0$  sólo considera el caso  $\omega(k) = c_0 k$ .

*Observación 4.3.2.* Podríamos tener

$$\lim_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}_0} \left( \frac{\partial^2}{\partial k_i \partial k_j} \right) \omega(\vec{k}) = 0 \quad \text{ó} \quad \pm \infty.$$

Entonces, con una condición como ésta, un análisis asintótico (aproximativo) se debe llevar a cabo en detalle.

**4.4. Correspondencia entre Ecuaciones Diferenciales Parciales y Relaciones de Dispersión.** Este es un tema clave para propósitos de modelación matemática o descripciones fundamentales de otros fenómenos como sucede, por ejemplo, en la teoría cuántica. Como se mencionó anteriormente, es equivalente (hasta cierto punto) trabajar con la **relación de dispersión** que con una **ecuación diferencial parcial lineal, homogénea, con coeficientes constantes**, que describa efectos dispersivos.

Dados los ejemplos anteriores, para obtener la relación de dispersión (la cual debe ser real), necesitamos **potencias pares** (o derivadas pares) y/o **potencias impares** (derivadas impares).

- Debemos tener  $(-i\omega)^2, (ik)^2 \rightarrow -\omega^2, -k^2$ ,
- o bien,  $(-i\omega)^3, (ik)^3 \rightarrow i\omega^3, -ik^3$ , y entonces eliminar  $i$  de la ecuación.

De esta manera, en general, necesitamos *coeficientes reales* con potencias pares y *coeficientes puramente imaginarios* con potencias impares. Por ejemplo:

$$(43) \quad R(\omega, k) = \alpha(ik)^2 + \beta(-i\omega)^4 = -\alpha k^2 + \beta\omega^4 = 0,$$

es una relación de *dispersión real*. O bien,

$$(44) \quad R(\omega, k) = i\gamma(-i\omega)^3 + i\delta(ik)^5 = -i^4\gamma\omega^3 + i^6\delta k^5 = -\gamma\omega^3 - \delta k^5 = 0,$$

es también una relación de *dispersión real*.

La misma cosa sucede con derivadas. La onda plana  $\varphi(x, t) = Ae^{ikx - \omega t}$  debe satisfacer un ecuación diferencial con derivadas de orden par con coeficientes reales:

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + \beta \frac{\partial^4}{\partial t^4} \varphi = \alpha(ik)^2 \varphi + \beta(-i\omega)^4 \varphi = (-\alpha k^2 + \beta\omega^4) \varphi = 0$$

la cual es una expresión con **valores reales**.

De manera similar, para coeficientes *puramente imaginarios* tenemos:

$$i\gamma \frac{\partial^3}{\partial t^3} \varphi + i\delta \frac{\partial^5}{\partial x^5} \varphi = i\gamma(-i\omega)^3 \varphi + i\delta(ik)^5 \varphi = -i^4\gamma\omega^3 \varphi + i^6\delta k^5 \varphi = -(\gamma\omega^3 + \delta k^5) \varphi = 0,$$

se necesitan derivadas de orden impar.

De esta discusión podemos concluir que en una Ecuación Diferencial Parcial podemos mezclar derivadas de orden par e impar siempre y cuando se tengan los coeficientes reales e imaginarios apropiados con el fin de obtener una relación de dispersión real.

**Ejemplo 4.4.I.** La ecuación de Schrödinger mezcla derivadas pares e impares:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi,$$

la cual tiene una relación de dispersión asociada:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m} k^2,$$

siendo ésta una expresión real.

Esto fue posible dado que podemos admitir coeficientes puramente imaginarios.

**4.5. Relación de Dispersión y EDPs.** Considere un polinomio  $P$  con:

- *coeficientes reales para potencias pares, y*
- *coeficientes puramente imaginarios para potencias impares.*

Entonces, este polinomio define una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) **lineal, homogénea y de coeficientes constantes**:

$$(45) \quad P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi = 0,$$

de forma tal que, cuando usamos ondas planas como soluciones

$$\varphi(x, y, z, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (\vec{x} = (x, y, z)),$$

obtenemos la **relación de dispersión**:

$$(46) \quad P(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3) = 0.$$

De este argumento resuelta evidente la correspondencia usual que nos enseñan en nuestros cursos de propagación de ondas en las carreras de física e ingenierías:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi = -i\omega \varphi \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi = ik_j \varphi, \quad (j = 1, 2, 3),$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\omega \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \longleftrightarrow ik_j, \quad (j = 1, 2, 3),$$

o bien,

$$\omega \longleftrightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad k_j \longleftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, 3),$$

**Por lo tanto, es equivalente tener una EDP lineal, homogénea y de coeficientes constantes para un movimiento ondulatorio dispersivo, ecuación (45), a tener la relación de dispersión misma, ecuación (46).**

*Observación 4.5.1.* Esto obviamente restringe a relaciones de dispersión del tipo polinomial. Podríamos entonces preguntarnos si hay relaciones de dispersión de una forma funcional más general. La respuesta es **sí**. Estas se pueden obtener usando funciones no sólo algebraicas (que generalizan los polinomios), sino también con funciones trascendentes como para ondas de gravedad en superficies de ondas en el agua, como en el mar, en donde se tiene una relación de dispersión muy general como  $\omega^2 = gk \tanh(hk)$ , en donde  $g$  es la aceleración de gravedad cerca de la superficie terrestre y  $h$  es la profundidad del agua en reposo. (*Nota:* no confundir con *ondas gravitacionales*.) Ver por ejemplo, [43].

Soluciones de la forma de onda plana  $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$  pueden describir el comportamiento de ondas en unas coordenadas, pero un comportamiento más complejo en otras coordenadas.

**Ejemplo 4.5.I** (Teoría de ondas en agua profunda). Se supone que las ondas se propagan de forma horizontal, pero la dependencia sobre la coordenada vertical no es oscilatoria

**Ejemplo 4.5.II** (Comportamiento tipo ondulatorio en todas las variables). Se requiere una ecuación integro-diferencial, en una dimensión:

$$(47) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, t) d\xi = 0,$$

en donde  $\varphi = \varphi(x, t)$  y  $K(x)$  es el kernel de la ecuación y es una función dada de antemano. Notemos que la ecuación es lineal. Podemos entonces buscar soluciones de onda plana,  $\varphi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ , por lo que:

$$\begin{aligned} -i\omega\varphi + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) ik\varphi(\xi, t) d\xi &= 0, \\ -i\omega Ae^{i(kx - \omega t)} + ikAe^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) e^{ik\xi} d\xi &= 0, \\ \omega e^{ikx} - k \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) e^{ik\xi} d\xi &= 0. \end{aligned}$$

Definamos  $\zeta = x - \xi$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \omega e^{ikx} - k \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{ik(x - \zeta)} d\zeta &= 0, \\ \omega e^{ikx} - k e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta &= 0, \\ \omega - k \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta &= 0, \end{aligned}$$

es la relación de dispersión. De esta manera, la velocidad de fase es:

$$c_f(k) = \frac{\omega}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta.$$

Así pues,  $c = c_f(k)$  es la transformada de Fourier del kernel  $K(x)$  y así:

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_f(k) e^{ikx} dk.$$

Por tanto, dada cualquier relación de dispersión  $\omega = \omega(k)$ , podemos construir un kernel  $K(x)$ , para obtener la ecuación de onda dispersiva deseada, (47).

En particular, sea:

$$c(k) = c_0 + c_2 k^2 + c_4 k^4 + \dots + c_{2M} k^{2M}.$$

Entonces,

$$K(x) = c_0 \delta(x) - c_2 \delta''(x) + c_4 \delta^{(4)}(x) + \dots + (-1)^M c_{2M} \delta^{(2M)}(x),$$

en donde  $\delta(x)$  es la función delta de Dirac. De aquí se sigue que la ecuación (47) resulta ser:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + c_4 \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} + \dots + (-1)^M c_{2M} \frac{\partial^{2M+1} \varphi}{\partial x^{2M+1}} = 0.$$

Cuando  $c(k)$  es más general, (como una serie de Taylor), tendríamos una ecuación diferencial con una serie infinita en derivadas. Dichas derivadas se suman usando la ecuación (47).

#### 4.6. Tarea.

TAREA 4.1. Encuentre los modos de vibración, ecuación (40), de la ecuación del haz, (39).

TAREA 4.2. Para las siguientes ecuaciones, verifique que la relación de dispersión asociada es la indicada. Verifique también que todas son ondas dispersivas de acuerdo a nuestra definición. Encuentre sus velocidades de fase y de grupo.

1.

$$(48) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \alpha^2 \Delta \varphi + \beta^2 \varphi = 0, \quad \omega(k) = \pm \sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2}.$$

2.

$$(49) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \alpha^2 \Delta \varphi = \beta^2 \Delta \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi \right), \quad \omega(k) = \pm \frac{\alpha k}{\sqrt{1 + \beta^2 k^2}}.$$

3.

$$(50) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi + \gamma^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi = 0, \quad \omega(k) = \pm \gamma k^2.$$

4.

$$(51) \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \varphi + \beta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \varphi = 0, \quad \omega(k) = \alpha k - \beta k^3.$$

Observación 4.6.1.

1. La ecuación (48) es hiperbólica y dispersiva:  $\frac{d^2}{dk^2} \omega(k) \neq 0$ . Representa vibraciones de amplitud  $\varphi$ , con fuerzas restaurativas  $-\beta^2 \varphi$ . Es la ecuación de Klein-Gordon que aparece en Teoría Cuántica. Las ecuaciones (49), (50) y (51) ya no son hiperbólicas, pero son de hecho dispersivas.
2. La ecuación (49) aparece en elasticidad para ondas longitudinales en barras. Aparece también en ondas en el agua, como la ecuación de Boussinesq para ondas largas.
3. La ecuación (50) modela vibraciones de flexión en barras y haces.
4. La ecuación (51) es la ecuación linealizada de Korteweg-deVries, cuya ecuación no lineal correspondiente modela ondas largas en agua poco profunda.

TAREA 4.3. Para las relaciones de dispersión, ecuaciones (43) y (44), encuentre las EDPs correspondientes que modelan ondas dispersivas.

TAREA 4.4. Construya la EDP correspondiente a la relación de dispersión:

$$\omega^2 = gk \tanh(hk).$$

Puede consultar el texto de Whitham [43].

#### 5. ONDAS DISPERSIVAS: SOLUCIÓN POR TRANSFORMADAS DE FOURIER

**5.1. Definición de ondas dispersivas (continuación.)** Revisemos nuevamente la definición de ondas dispersivas para posteriormente aprender cómo generalizarla y estudiar cómo resolver la ecuación dispersiva.

**Definición 5.1.1** (Definición de Ondas Dispersivas). Una definición restrictiva de **ondas dispersivas** está contenida con la solución de onda plana

$$\varphi(\vec{x}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)},$$

junto con la **relación de dispersión**

$$R(\omega, \vec{k}) = 0, \quad \text{o bien,} \quad \omega = \omega(\vec{k}),$$

que satisface:

$$\begin{aligned} \omega = \omega(\vec{k}) &\in \mathbb{R}, \\ \det \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_i \partial k_j} \right) &\neq 0. \end{aligned}$$

Esta definición es demasiado restrictiva, pues considera sólo ondas asociadas a Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) lineales, homogéneas, con coeficientes constantes. No obstante, éste es el punto de partida para generalizar a otras ecuaciones que no son lineales, ni homogéneas, ni de coeficientes constantes para clasificarlas como dispersivas.

**Ejemplo 5.1.I.** Entonces, uno generaliza un paso a la vez. Por ejemplo, la **ecuación del haz** con coeficientes **no** constantes:

$$(52) \quad \varphi_{tt} + \gamma^2(x)\varphi_{xxxx} = 0,$$

no tiene soluciones del tipo onda plana  $\varphi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ . Esta ecuación representa la evolución de una **onda del haz dispersiva** en un medio **no uniforme**, con  $\gamma = \gamma(x)$ .

El tipo de soluciones de onda plana podría existir localmente, es decir, en intervalos del tipo  $(x_o - \Delta x, x_o + \Delta x)$  con  $|\Delta x| \ll |x_o|$ .

Para soluciones de la ecuación (52) se espera tener un comportamiento similar al caso cuando  $\gamma = \gamma_0$  es constante, pues la estructura de la ecuación es básicamente la misma.

Podemos considerar una separación de variables de la forma:

$$(53) \quad \varphi(x, t) = F(kx)e^{-i\omega t}, \quad \text{con } \omega = \omega(k),$$

en donde  $F$  es una función oscilatoria (quizá  $F$  podría ser una función de Bessel o de Airy.) Esta solución también describe una **onda dispersiva**, pero es difícil incluirla en la definición compacta de ondas dispersivas dada anteriormente.

Sin embargo, oscilaciones en el espacio están acopladas con oscilaciones en el tiempo a través de la **relación de dispersión**. Debemos entonces esperar las propiedades características de ondas dispersivas, **pero sólo localmente**, en problemas no homogéneos como el aquí mencionado.

Cabe hacer notar que la ecuación de Schrödinger cae en este tipo de ecuaciones, por lo que representa una onda dispersiva.

La misma idea aplica para **problemas no lineales** (ecuaciones no lineales): restringimos el tipo de soluciones o, mucho mejor, linealizamos la ecuación y determinamos si la linealización es una ecuación dispersiva. Decimos entonces que la generalización no lineal es una **ecuación de onda dispersiva no lineal**.

Una planteamiento aún más general es el de una formulación variacional de EDPs. Bajo este punto de vista variacional (integral de acción, ecuaciones de Euler-Lagrange, Hamiltoniano, ecuaciones de Hamilton) podemos definir ondas dispersivas que cubren un tipo más amplio de ecuaciones. Para más detalles de principios variacionales en el estudio de propagación de ondas, véase [43], capítulo 14.

**5.2. Solución de ecuaciones de onda dispersivas por Transformadas de Fourier.** El **método de Transformadas de Fourier** es muy restrictivo y se limita a Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) que describen ondas dispersivas, y se limitan a ecuaciones<sup>2</sup>:

<sup>2</sup>Aplica lo mismo que para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs). La ecuación:

$$a_0 \ddot{y} + b_0 \dot{y} + c_0 y = 0,$$

la cual es lineal, homogénea y de coeficientes constantes, tiene soluciones de la forma

$$y(t) = e^{rt},$$

como lo aprendemos en nuestro primer curso de EDOs en la universidad.

1. lineales,
2. con coeficientes constantes, y
3. homogéneas.

Aquí, tenemos un polinomio  $P$  de grado  $N$  en la variable  $\omega$ , de tal forma que tenemos una PDE de orden  $N$  en  $t$ :

$$(54) \quad P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = 0.$$

Esta sería una PDE la cual satisface las propiedades 1, 2, 3 arriba mencionadas. Entonces, admite soluciones de la forma:

$$(55) \quad \varphi(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \text{con } A = \text{constante},$$

en donde  $\vec{x} = (x, y, z)$  y  $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$  es el **vector de onda**. De esta forma, tenemos la relación de dispersión

$$P(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3) = 0.$$

Esta es la **relación de dispersión**, la cual puede ser escrita como

$$R(\omega, \vec{k}) = 0.$$

Habíamos pedido que esta ecuación es de grado  $N$  en  $\omega$ . Así, en principio, podemos resolver para  $\omega$  y entonces obtener  $N$  diferentes **modos de onda** (diferentes formas o frecuencias de oscilación):

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1(\vec{k}), \\ \omega &= \omega_2(\vec{k}), \\ &\vdots \\ \omega &= \omega_N(\vec{k}). \end{aligned}$$

Puesto que la ecuación (54) es lineal, podemos obtener una combinación lineal de las soluciones de onda plana, ecuación (55), como una serie o transformada de Fourier:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \Psi(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t)} d\vec{k}.$$

Para cada modo de onda  $\omega = \omega_j(\vec{k})$ , ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), tenemos una expresión como la anterior, de forma tal que, tomando la combinación lineal de ellas, obtenemos la expresión general:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_1(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_1(\vec{k})t)} d\vec{k} + \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_2(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_2(\vec{k})t)} d\vec{k} \\ &+ \dots + \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_N(\vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_N(\vec{k})t)} d\vec{k}. \end{aligned}$$

Las funciones  $\Psi_j(\vec{k})$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) se encuentran dando  $N$  condiciones iniciales para  $\varphi(\vec{x}, t)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, 0) &= f_1(\vec{x}), \\ \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{x}, 0) &= f_2(\vec{x}), \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{N-1}}{\partial t^{N-1}}\varphi(\vec{x}, 0) &= f_N(\vec{x}), \end{aligned}$$

En seguida tomaremos como ejemplo el caso  $N = 2$ .

**Ejemplo 5.2.I.** Supongamos que la relación de dispersión,  $R(\omega, \vec{k}) = 0$ , es una función de grado  $N = 2$  en  $\omega$ . Supongamos además que  $\vec{x} = (x, 0, 0)$  y  $\vec{k} = (k, 0, 0)$  son solamente vectores uni-dimensionales. Encontrar la solución de la ecuación que describe una onda dispersiva.

En este caso, la relación de dispersión,  $R(\omega, k) = 0$ , tiene dos raíces, las cuales deben ser reales de acuerdo a nuestra definición de ondas dispersivas:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1(\vec{k}) = \omega(\vec{k}), \\ \omega &= \omega_2(\vec{k}) = -\omega(\vec{k}).\end{aligned}$$

(Esto, el hecho de que  $\omega_2 = -\omega_1$ , supone que el coeficiente de grado 1 en  $\omega$  en la relación de dispersión es cero.) Así pues, requerimos dos funciones,  $\Psi_1(k)$  y  $\Psi_2(k)$  (las cuales están por determinarse) tales que:

$$(56) \quad \varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(k) e^{i(kx + \omega(k)t)} dk.$$

Debemos proporcionar dos condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\varphi(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) &= g(x),\end{aligned}$$

para encontrar  $\Psi_1(k)$  y  $\Psi_2(k)$ .

Por tanto, evaluando (56) en  $t = 0$ ,

$$f(x) = \varphi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(k) e^{ikx} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(k) e^{ikx} dk.$$

Calculando la derivada de (56) respecto a  $t$  y evaluando en  $t = 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega(k) \Psi_1(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} i\omega(k) \Psi_2(k) e^{i(kx + \omega(k)t)} dk.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega(k) \Psi_1(k) e^{ikx} dk + \int_{-\infty}^{\infty} i\omega(k) \Psi_2(k) e^{ikx} dk.$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}f(x) = \varphi(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_1(k) + \Psi_2(k)) e^{ikx} dk, \\ g(x) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega(k) (\Psi_1(k) - \Psi_2(k)) e^{ikx} dk.\end{aligned}$$

Estas son Transformadas de Fourier inversas. Por el Teorema de inversión de Fourier, obtenemos:

$$\begin{aligned}\Psi_1(k) + \Psi_2(k) = F(k) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \\ -i\omega(k) (\Psi_1(k) - \Psi_2(k)) = G(k) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx.\end{aligned}$$

Podemos resolver este sistema para  $\Psi_1(k)$  y  $\Psi_2(k)$ :

$$(57) \quad \begin{aligned} \Psi_1(k) &= \frac{1}{2} \left[ F(k) + i \frac{G(k)}{\omega(k)} \right], \\ \Psi_2(k) &= \frac{1}{2} \left[ F(k) - i \frac{G(k)}{\omega(k)} \right]. \end{aligned}$$

Al sustituir estas dos funciones en (56), obtenemos la solución  $\varphi$  en términos de  $F(k)$  y  $G(k)$  (las Transformadas de Fourier de  $f(x)$  y  $g(x)$ , respectivamente.) La integración de estas expresiones depende de la forma de la relación de dispersión  $\omega = \omega(k)$ .

De esta manera, la solución, ecuación (56), toma la forma:

$$(58) \quad \begin{aligned} \varphi(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) (e^{i(kx - \omega(k)t)} + e^{i(kx + \omega(k)t)}) dk \\ &+ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k)}{\omega(k)} (e^{i(kx - \omega(k)t)} - e^{i(kx + \omega(k)t)}) dk. \end{aligned}$$

También puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( F(k) + i \frac{G(k)}{\omega(k)} \right) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( F(k) - i \frac{G(k)}{\omega(k)} \right) e^{i(kx + \omega(k)t)} dk. \end{aligned}$$

A pesar de su forma, esta solución es real. Procedamos a checar esto. Puesto que  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones reales, los complejos conjugados de sus Transformadas de Fourier son:

$$\begin{aligned} F^*(k) &= F(-k), \\ G^*(k) &= G(-k). \end{aligned}$$

Entonces, de la ecuación (57), y recordando que  $\omega(k)$  es real:

$$\begin{aligned} \Psi_1^*(k) &= \frac{1}{2} \left[ F^*(k) - i \frac{G^*(k)}{\omega^*(k)} \right] = \frac{1}{2} \left[ F(-k) + i \frac{G(-k)}{-\omega(k)} \right], \\ \Psi_2^*(k) &= \frac{1}{2} \left[ F^*(k) + i \frac{G^*(k)}{\omega^*(k)} \right] = \frac{1}{2} \left[ F(-k) + i \frac{G(-k)}{\omega(k)} \right]. \end{aligned}$$

Tenemos entonces dos casos.

(a) Si  $\omega(k)$  es impar, entonces  $-\omega(k) = \omega(-k)$  y así:

$$\begin{aligned} \Psi_1^*(k) &= \frac{1}{2} \left[ F(-k) + i \frac{G(-k)}{\omega(-k)} \right] = \Psi_1(-k), \\ \Psi_2^*(k) &= \frac{1}{2} \left[ F(-k) - i \frac{G(-k)}{\omega(-k)} \right] = \Psi_2(-k). \end{aligned}$$

(b) Y si  $\omega(k)$  es par,  $\omega(k) = \omega(-k)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \Psi_1^*(k) &= \frac{1}{2} \left[ F(-k) - i \frac{G(-k)}{\omega(-k)} \right] = \Psi_2(-k), \\ \Psi_2^*(k) &= \frac{1}{2} \left[ F(-k) + i \frac{G(-k)}{\omega(-k)} \right] = \Psi_1(-k). \end{aligned}$$

Ahora bien, tomando el conjugado de  $\varphi(x, t)$  de la ecuación (56)

$$\varphi^*(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^*(k) e^{-i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2^*(k) e^{-i(kx + \omega(k)t)} dk.$$

Considerando los dos casos anteriores:

(a) Si  $\omega(k)$  es impar, entonces

$$\varphi^*(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(-k) e^{-i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(-k) e^{-i(kx + \omega(k)t)} dk.$$

Con el cambio de variables  $\kappa = -k$  se tiene  $\omega(k) = \omega(-\kappa) = -\omega(\kappa)$  y de esta forma

$$\varphi^*(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(\kappa) e^{i(\kappa x - \omega(\kappa)t)} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(\kappa) e^{i(\kappa x + \omega(\kappa)t)} d\kappa = \varphi(x, t),$$

*i.e.*,  $\varphi^*(x, t) = \varphi(x, t)$  es una solución real.

(b) Y si  $\omega(k)$  es par,

$$\varphi^*(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(-k) e^{-i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(-k) e^{-i(kx + \omega(k)t)} dk.$$

Realizando el mismo cambio de variable  $\kappa = -k$  se tiene  $\omega(k) = \omega(-\kappa) = \omega(\kappa)$ , y así

$$\varphi^*(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(\kappa) e^{i(\kappa x + \omega(\kappa)t)} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(\kappa) e^{i(\kappa x - \omega(\kappa)t)} d\kappa = \varphi(x, t).$$

*i.e.*, nuevamente tenemos  $\varphi^*(x, t) = \varphi(x, t)$  una solución real.

En ambos casos tenemos una solución real para una ecuación real.

**Ejemplo 5.2.II.** Hay soluciones estándar de las cuales se pueden obtener el resto de las soluciones. Una de éstas es una solución con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \delta(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Encontrar esta solución estándar. Tenemos que  $\delta(x)$  es la función delta de Dirac. (En el siguiente ejemplo veremos cómo obtener la otra solución estándar.)

Recordemos que la Transformada de Fourier de la delta de Dirac  $\delta(x)$  es:

$$\widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi}$$

Ahora bien, de la ecuación (57), obtenemos:

$$\begin{aligned} \Psi_1(k) &= \frac{1}{2} \left[ \widehat{\delta}(k) + i \frac{\widehat{0}(k)}{\omega(k)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2\pi} + 0 \right] = \frac{1}{4\pi}, \\ \Psi_2(k) &= \frac{1}{2} \left[ \widehat{\delta}(k) - i \frac{\widehat{0}(k)}{\omega(k)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2\pi} - 0 \right] = \frac{1}{4\pi}. \end{aligned}$$

Entonces, la solución (56) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} e^{i(kx + \omega(k)t)} dk, \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (e^{-i\omega(k)t} + e^{i\omega(k)t}) dk, \\
 &= \frac{2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \cos(\omega(k)t) dk, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) \cos(\omega(k)t) dk.
 \end{aligned}$$

La última igualdad es debido a que  $\sin(kx)$  es impar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \cos(\omega(k)t) dk = 0,$$

y  $\cos(\omega(k)t)$  es par, independientemente si  $\omega(k)$  es par o impar. De este modo, obtenemos:

$$(59) \quad \varphi_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) \cos(\omega(k)t) dk.$$

Todo esto, por supuesto, es calculado en el sentido de las “distribuciones” o “funciones generalizadas.” (Por ejemplo, la función delta de Dirac,  $\delta(x)$ , y el Valor Principal de Cauchy al calcular las integrales, son distribuciones o funciones generalizadas.)

**Ejemplo 5.2.III.** De igual modo, podemos pedir condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, 0) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) &= \delta(x),
 \end{aligned}$$

para encontrar la segunda solución estándar.

Nuevamente, usando la ecuación (57), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(k) &= \frac{1}{2} \left[ \widehat{0}(k) + i \frac{\widehat{\delta}(k)}{\omega(k)} \right] = \frac{1}{2} \left[ 0 + i \frac{1}{2\pi\omega(k)} \right] = \frac{i}{4\pi\omega(k)}, \\
 \Psi_2(k) &= \frac{1}{2} \left[ \widehat{0}(k) - i \frac{\widehat{\delta}(k)}{\omega(k)} \right] = \frac{1}{2} \left[ 0 - i \frac{1}{2\pi\omega(k)} \right] = -\frac{i}{4\pi\omega(k)}.
 \end{aligned}$$

En este caso, la solución (56) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(x, t) &= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(kx - \omega(k)t)}}{\omega(k)} dk - \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(kx + \omega(k)t)}}{\omega(k)} dk, \\
 &= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\omega(k)} (e^{-i\omega(k)t} - e^{i\omega(k)t}) dk, \\
 &= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\omega(k)} (-2i \sin(\omega(k)t)) dk, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\omega(k)} \sin(\omega(k)t) dk, \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) \frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)} dk.
 \end{aligned}$$

Nuevamente usamos la paridad de las funciones, y la última igualdad es debido a que  $\sin(kx)$  es impar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)} dk = 0,$$

y  $\frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)}$  es par, independientemente si  $\omega(k)$  es par o impar. Finalmente obtenemos:

$$(60) \quad \varphi_2(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) \frac{\sin(\omega(k)t)}{\omega(k)} dk.$$

De esta forma, con  $\varphi_1(x, t)$  y  $\varphi_2(x, t)$  (ecuaciones (59) y (60)), podemos construir la solución general con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, 0) &= f(x), \\
 \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) &= g(x),
 \end{aligned}$$

usando una combinación lineal continua en forma de convolución:

$$(61) \quad \varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi - x, t) f(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\xi - x, t) g(\xi) d\xi.$$

Nuevamente, estas integrales deben pensarse en el sentido de las “distribuciones”.

**5.2.1. Un par de hechos curiosos.** Para terminar esta sección, tenemos las siguientes afirmaciones.

**AFIRMACIÓN 5.2.1.** *Tenemos que para una relación de dispersión cuadrática en  $\omega$ , la solución de la ecuación dispersiva es la siguiente (ecuación (56)):*

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2(k) e^{i(kx + \omega(k)t)} dk.$$

Entonces;

- si  $\omega = \omega(k)$  es impar, entonces el primer término de la solución representa un tren de onda moviéndose a la derecha y el segundo otro tren de onda moviéndose a la izquierda;
- si  $\omega = \omega(k)$  es par, entonces trenes de onda moviéndose a la izquierda y la derecha están presentes en ambas integrales.

**5.3. La ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica.** En esta subsección y en la siguiente, construiremos la ecuaciones de Schrödinger y de Dirac de la Mecánica Cuántica. Veremos que son ecuaciones de onda dispersivas con coeficientes no constantes, las cuales corresponden a generalizaciones de relaciones de dispersión y, como consecuencia, a generalizaciones de ecuaciones de onda con coeficientes constantes.

*5.3.1. Construcción de la ecuación de Schrödinger.* Mas que una “derivación”, “construcción”, o “deducción” de la ecuación de Schrödinger, aquí daremos una **motivación** de por qué la ecuación de Schrödinger es la que conocemos y por qué tiene esa forma (y no otra forma distinta.)

Cuando estaba en la licenciatura, un compañero estaba llevando el curso de Mecánica Cuántica y le hice la pregunta: *¿Cómo se deduce la ecuación de Schrödinger?*, a lo que me respondió: *No se deduce, se postula.* Pues sí, se postula, como muchas afirmaciones en Física, pero ¿por qué se postula de esa forma y no de otra?, me pregunté en ese momento y muchos años después también, pero pues en aquel momento no me quedaba nada claro qué más preguntar, ni siquiera mi pregunta me quedaba clara, ni a qué se refería con “postular.” La respuesta a esta pregunta, sorpresivamente, la encontré por primera vez en un libro de Matemáticas [31], mas no en uno de Física, y es la motivación que a mí me hubiera gustado escuchar en ese entonces y que a continuación describo.

*5.3.2. Mecánica Clásica.* Para ello, recordemos la ecuación de **la conservación de la energía** de la **mecánica clásica** (en una dimensión):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x),$$

en donde  $v$  es la velocidad de la partícula y  $U(x)$  es la energía potencial. Recordemos también que el **momentum** se define como  $p = mv$ , por lo que la energía toma la forma:

$$E = \frac{1}{2m}p^2 + U(x),$$

Consideremos el caso particular de una *partícula libre*:

$$U(x) = U_0 = \text{constante},$$

por lo que:

$$(62) \quad E = \frac{1}{2m}p^2 + U_0.$$

*5.3.3. Mecánica cuántica.* Ahora bien, hagamos uso de los conceptos encontrados a principios del siglo XX de la incipiente Mecánica Cuántica. Max Planck y Louis De Broglie propusieron que debe haber un análogo cuántico a las cantidades clásicas, en particular, a la energía  $E$  y al momentum  $p$ :

$$\begin{aligned} E &= h\nu = \frac{h}{2\pi}(2\pi\nu), \\ p &= \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}k, \end{aligned}$$

en donde  $\nu$  es la frecuencia y  $\lambda$  la longitud de onda de “la onda de materia”;  $h$  es la *constante de Planck*, y se usó el hecho que  $2\pi = \lambda k$ . Estas relaciones fueron encontradas **experimentalmente** (lo cual enfatizo.)

Sabiendo que  $\omega = 2\pi\nu$  es la frecuencia angular y definiendo:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi},$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega, \\ p &= \hbar k. \end{aligned}$$

Substituyendo estas expresiones en la ecuación (62), obtenemos:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 + U_0.$$

### ¿Qué es esto? ¡ES UNA RELACIÓN DE DISPERSIÓN!

Y bien, ya aprendimos que para una relación de dispersión, polinomial en  $\omega$  y  $k$ , corresponde una ecuación en derivadas parciales (EDP) (1) lineal, (2) con coeficientes constantes y, (3) homogénea, bajo la “transformación” o “equivalencia”

$$\begin{aligned}\omega &\longleftrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \\ k &\longleftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial x},\end{aligned}$$

por lo que  $k^2 \longleftrightarrow -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

¿Cuál es la EDP asociada a esta relación de dispersión?

$$(63) \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + U_0\psi.$$

Esta es la *ecuación de Schrödinger de la partícula libre*, la cual es, insisto, una EDP (1) lineal, (2) con coeficientes constantes y, (3) homogénea. La generalización sencilla es suponer ahora el potencial, que era constante  $U_0$ , pensarlo ahora variable, teniendo entonces una ecuación de onda dispersiva con coeficientes variables:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + U(x)\psi,$$

que es la famosa **ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica**. Aquí,  $\psi = \psi(x, t) \in \mathbb{C}$ . Si estamos en 3 dimensiones, obtenemos:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(x, y, z)\psi,$$

En donde  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  es el Laplaceano.

*5.3.4. Solución de la ecuación de Schrödinger libre.* En esta subsección resolveremos la ecuación de Schrödinger libre, es decir, con potencial constante  $U_0$ , y en una dimensión, ecuación (63). Dado que es una EDP lineal y coeficientes constantes, usaremos la Transformada de Fourier como lo hicimos en la sección anterior, sección 5.2.

Así pues, tenemos la ecuación (63):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + U_0\psi,$$

con condición inicial

$$\psi(x, 0) = f(x),$$

y comportamiento al infinito

$$|\psi(x, t)| \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } x \longrightarrow \pm\infty, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Requerimos, para empezar, la transformada de Fourier de la función Gaussiana:

$$g(x) = e^{-bx^2}, \quad \hat{g}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{k^2}{4b}}.$$

**Definición 5.3.1** (La Transformada de Fourier). En esta subsección definimos la transformada de Fourier como:

$$\mathcal{F}[u](k, t) \equiv \hat{u}(k, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{ikx} dx,$$

de forma tal que el Teorema de Fourier es

$$u(x, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(k, t) e^{-ikx} dk.$$

**El Teorema de Convolución** en este caso se escribe como

$$\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k) \widehat{g}(k).$$

Estamos listos. Tomemos la transformada de Fourier, miembro a miembro, a la ecuación de Schrödinger libre, ecuación (63)<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \widehat{\psi} &= -\frac{\hbar^2}{2m} (-ik)^2 \widehat{\psi} + U_0 \widehat{\psi}, \\ \widehat{\psi}(k, 0) &= \widehat{f}(k) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\frac{d}{dt} \widehat{\psi} = -i \left( \frac{\hbar}{2m} k^2 + \frac{U_0}{\hbar} \right) \widehat{\psi}.$$

Cada una de estas ecuaciones tiene por solución

$$\widehat{\psi}(k, t) = \widehat{f}(k) e^{-i \frac{\hbar}{2m} k^2 t} e^{-i \frac{U_0}{\hbar} t}.$$

Ahora bien, sabemos que:

$$e^{-\frac{k^2}{4b}} = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \widehat{g}(k) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \widehat{e^{-bx^2}}(k)$$

Entonces, definiendo  $b = \frac{m}{2i\hbar t}$ , la exponencial que aparece en  $\widehat{\psi}(k, t)$  se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} e^{-i \frac{\hbar t}{2m} k^2} &= e^{-\frac{k^2}{4b}} \\ &= \sqrt{\frac{b}{\pi}} \widehat{e^{-bx^2}}(k). \end{aligned}$$

El siguiente paso no es riguroso, pues  $b$  se supone real, pero puede probarse con la teoría de variable compleja:

$$\begin{aligned} e^{-i \frac{\hbar t}{2m} k^2} &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{-\left(\frac{m}{2i\hbar t}\right) x^2}(k) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{i\left(\frac{m}{2\hbar t}\right) x^2}(k). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(k, t) &= \widehat{f}(k) e^{-i \frac{\hbar}{2m} k^2 t} e^{-i \frac{U_0}{\hbar} t} \\ &= \widehat{f}(k) e^{-i \frac{U_0}{\hbar} t} e^{-i \frac{\hbar t}{2m} k^2} \\ &= \widehat{f}(k) e^{-i \frac{U_0}{\hbar} t} \sqrt{\frac{m}{2i\hbar t \pi}} e^{i\left(\frac{m}{2\hbar t}\right) x^2}(k) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2i\hbar t \pi}} e^{-i \frac{U_0}{\hbar} t} \widehat{f}(k) e^{i\left(\frac{m}{2\hbar t}\right) x^2}(k). \end{aligned}$$

Y, por el teorema de convolución:

$$\widehat{\psi}(k, t) = \sqrt{\frac{m}{2i\hbar t \pi}} e^{-i \frac{U_0}{\hbar} t} \mathcal{F}[f(x) * e^{i\left(\frac{m}{2\hbar t}\right) x^2}](k).$$

---

<sup>3</sup>Nota. Para la equivalencia  $\widehat{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = -ik\widehat{\psi}$ , se necesita el comportamiento asintótico  $|\psi(x, t)| \rightarrow 0$ , cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Entonces, por el Teorema de Fourier, finalmente obtenemos

$$(64) \quad \psi(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2i\hbar\pi t}} e^{-i\frac{U_0}{\hbar}t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{i\left(\frac{m}{2\hbar t}\right)y^2} dy$$

es la solución de la ecuación de Schrödinger libre.

*Observación 5.3.2.* Observemos que esta solución no se puede encontrar por la técnica de separación de variables, pues ésta  $\psi(x, t)$  **no** es de la forma  $F(x)G(t)$ .

*Observación 5.3.3.* Si la ecuación (63) la escribimos de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = i\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{U_0}{i\hbar} \psi,$$

y ponemos la constante  $\gamma = i\frac{\hbar}{2m}$  y  $U_0 = 0$ , obtenemos la ecuación del calor:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi.$$

Así, usando la solución (64), obtenemos:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\gamma\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-\frac{1}{4\gamma t}y^2} dy,$$

es la conocida solución de la ecuación del calor. Esto es de esperarse. Usamos la misma técnica para resolver la ecuación del calor que aprendimos en nuestros cursos de Transformadas Integrales.

**5.4. La ecuación de Dirac de la Mecánica Cuántica.** La ecuación de Schrödinger proviene de la cuantización de la energía cinética clásica (equivalentemente, de la energía total de una partícula clásica libre, *i.e.*, con potencial constante que bien puede valer cero y, posteriormente, a ecuaciones con coeficientes variables.) No obstante, dado que la física relativista era también de recién creación, una idea es incorporar la mecánica relativista a la cuántica. Ese fue el objetivo de varios físicos, como Klein, Gordon y Dirac. Para ello, es necesario cuantizar la energía cinética de una partícula relativista, como el electrón. Esto fue lo que hizo Dirac en [7, 8, 9]. Aquí daremos una breve descripción del trabajo de Dirac e incluiremos brevemente la contribución de Klein y Gordon.

Dada que la ecuación de Dirac es una ecuación cuántica y, a su vez, relativista, quizá vale la pena revisar los conceptos principales de Relatividad Especial. Para este fin, puede usar el texto *Mathematical Aspects of Quantum Field Theory*, por Edson de Faria (Universidade de São Paulo) y Welington de Melo (IMPA) [12].

Una pregunta que me surge justo en este momento es la siguiente: si la ecuación de Schrödinger es no relativista y si suponemos que en el mundo atómico-cuántico se mueven las cosas a velocidades cercanas a la de la luz, ¿por qué es más usada la ecuación de Schrödinger que la de Dirac? Esta pregunta aún la tengo sin respuesta.

*5.4.1. Mecánica relativista.* Este texto [12] es, en muchas partes, un tanto descuidado en cuanto a su manejo de las matemáticas, pero uno puede seguir muchas de las ideas físicas que presenta. Los puntos importantes los podemos enumerar, *grosso modo*, y son los siguientes:

1. La energía cinética clásica  $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}p^2$  tiene su equivalente relativista:

$$(65) \quad E^2 = c^2p^2 + m^2c^4,$$

en donde  $m$  es la masa de la partícula en movimiento,  $p$  su momentum lineal y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Si  $p = 0$ , obtenemos la famosa ecuación de Einstein de la energía de un cuerpo de masa  $m$  en reposo:

$$E = mc^2.$$

Si se considera el límite  $v/c \rightarrow 0$  ( $v$  es la velocidad de la partícula), se recupera la energía cinética clásica.

- De la ecuación (65) uno puede construir la ecuación de Klein-Gordon, que fue el primer intento de “relativizar” la mecánica cuántica. De la relación frecuencia-energía de Planck-Einstein,  $E = h\nu = \hbar\omega$ , y de la relación de longitud de onda de De Broglie,  $p = h/\lambda = \hbar k$  ( $h$  es la constante de Planck,  $\hbar = h/(2\pi)$ ,  $\omega$  es la frecuencia angular y  $k$  el número de onda) obtenemos:

$$\hbar^2\omega^2 = c^2\hbar^2k^2 + m^2c^4.$$

**¡Esta es una relación de dispersión correspondiente a una onda dispersiva!** Esta onda es de la forma usual,  $\exp(i(kx - \omega t))$ , cuya ecuación diferencial parcial correspondiente se sigue de la correspondencia  $\partial_t \longleftrightarrow -i\omega$  y  $\partial_x \longleftrightarrow ik$ , es decir,  $\omega \longleftrightarrow i\partial_t$  y  $k \longleftrightarrow -i\partial_x$ :

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = -c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + m^2 c^4 \psi.$$

Reescribiendo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi = 0,$$

y ésta es la ecuación de Klein-Gordon.

- Ahora bien, la ecuación de Klein-Gordon no convencía mucho a los físicos de aquella época pues era de segundo orden. En principio no me queda claro por qué el segundo orden no los convencía, pero haciendo una analogía con la energía cinética clásica, en la que  $E \geq 0$  y en la ecuación (65) podemos tener  $E \geq 0$  o bien  $E < 0$ , mejor se debe tener:

$$(66) \quad E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2},$$

como la energía cinética clásica en donde  $E \geq 0$ . Además, en la conservación de energía clásica, la energía total aparece con potencia de grado 1.

Si usamos ahora la relación de Planck-Einstein y la longitud de onda de De Broglie, obtenemos

$$\hbar\omega = c\sqrt{\hbar^2k^2 + m^2c^2},$$

pero esta relación de dispersión no es un polinomio en  $\omega$  y  $k$ , por lo que no podemos asociarle inmediatamente una ecuación en derivadas parciales, lineal, homogénea con coeficientes constantes.

- Es por esto que Dirac ideó una forma de escribir  $\hbar^2k^2 + m^2c^2 = (\text{algo})^2$  de forma tal que

$$\hbar\omega = c\sqrt{(\text{algo})^2} = c(\text{algo}),$$

y ésta deba ser una relación de dispersión polinomial, a saber, de primer grado en  $\omega$  y  $k$ , de donde se sigue (se debe seguir) la ecuación de Dirac.

- Si  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ , entonces  $p^2 \equiv \|\vec{p}\|^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ , la ecuación de Klein-Gordon en 3 dimensiones es:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - c^2 \Delta \psi + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi = 0,$$

con  $\Delta$  es el Laplaceano en 3-dim. De esta forma, se espera encontrar una relación de dispersión equivalente a (66)

$$E = c\sqrt{\|\vec{p}\|^2 + m^2c^2},$$

y asociarle una ecuación diferencial parcial lineal, homogénea y de coeficientes constantes.

Uno esperaría que esta ecuación sea de primer orden en las tres dimensiones espaciales. El término  $E$  indica que se tiene una derivada de primer orden temporal. Los brasileños [12] factorizan el D’Alambertiano  $\square^2 = \partial_t^2 - \Delta \equiv D^2$ , para algún operador  $D$  a ser determinado, pero no es la forma correcta de

proceder. En las siguiente sección, “factorizaremos” el operador  $-c^2\hbar^2\Delta + m^2c^4$ , para de esta manera construir la ecuación de Dirac.

5.4.2. *Factorización del operador “momentum cuadrado” libre relativista: Construcción de la ecuación de Dirac.* En esta sección seguiremos el trabajo de Dirac [7], pero podemos comparar con el trabajo en su libro [9], en el cual la única diferencia es un signo “-”, pero no tiene relevancia física ni matemática. Son equivalentes como veremos.

Tenemos que la energía cinética de una partícula relativista libre (sin potencial) con momentum  $\vec{p}$  y masa  $m$ , cumple la relación como en la ecuación (65):

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4.$$

Ahora, escribiendo la energía cinética como en (66)

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2},$$

y bajo la aproximación asintótica  $v/c \rightarrow 0$  ( $v$  = velocidad de la partícula;  $c$  = velocidad de la luz) se recupera la energía cinética clásica:

$$E = mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + O(v^4/c^2) \right) = mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + O(v^4/c^2).$$

(Ésta es una de las razones por las que se debe de encontrar una relación de dispersión para la ecuación (66) y no para (65)).

Dado que para ecuaciones dispersivas necesitamos  $\omega \longleftrightarrow i\partial_t$ , entonces la relación de dispersión relativista debe ser de primer orden en el tiempo.

Ahora bien, la primera cuantización indica que:

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega, & (\text{Planck-Einstein,}) \\ \vec{p} &= \hbar\vec{k}, & (\text{DeBroglie.}) \end{aligned}$$

de lo que obtenemos:

$$(67) \quad \hbar\omega = c\sqrt{\hbar^2k^2 + m^2c^2},$$

(en donde  $k^2 = \|\vec{k}\|^2$ .) Esta es la relación de dispersión para partículas cuánticas relativistas. Queremos encontrar una ecuación diferencial parcial (EDP) asociada a esta relación de dispersión. No es posible hacer directo el cambio  $\omega \longleftrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$  y  $k_a \longleftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial x_a}$ , ( $a = 1, 2, 3$ ), porque se requieren relaciones de dispersión polinomiales, como es el caso de la ecuación (65). Por esta razón se trabaja con esta ecuación cuya EDP asociada es la ecuación de Klein-Gordon

$$(68) \quad \hbar^2\omega^2 = c^2\hbar^2k^2 + m^2c^4 \implies -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -c^2\hbar^2\Delta\psi + m^2c^4\psi.$$

Notemos que de (67), efectivamente, la EDP debe ser de primer orden en el tiempo. Entonces quisiéramos una EDP de la forma:

$$(69) \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \widehat{\mathcal{P}}\psi,$$

con  $\widehat{\mathcal{P}}$  un operador diferencial de primer orden en las variables  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ , de forma tal que:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \widehat{\mathcal{P}}^2\psi,$$

es decir,  $E^2 = (\text{“algo”})^2$ . Aquí “algo” =  $\widehat{\mathcal{P}}$ , el cual es el operador diferencial por determinar.

Comparando con la ecuación de Klein-Gordon que aparece en la ecuación (68), definimos  $\widehat{\mathcal{P}}$  tal que:

$$(70) \quad \widehat{\mathcal{P}}^2\psi \equiv -c^2\hbar^2\Delta\psi + m^2c^4\psi.$$

Notemos que queremos calcular la “raíz cuadrada” del operador  $\widehat{\mathcal{L}} = -c^2\hbar^2\Delta + m^2c^4\text{Id}$ :

$$\widehat{\mathcal{P}} \equiv \sqrt{\widehat{\mathcal{L}}},$$

en donde Id es la matriz identidad.

Es aquí en donde a Dirac se le ocurrió escribir al operador  $\widehat{\mathcal{P}}$  como sigue:

$$\widehat{\mathcal{P}} = c \left( -\alpha_1\hbar i \frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha_2\hbar i \frac{\partial}{\partial x_2} - \alpha_3\hbar i \frac{\partial}{\partial x_3} + mc\alpha_4 \right),$$

de forma tal que la ecuación (70) en términos dispersivos, *i.e.*,

$$k_a \longleftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial x_a}, a = 1, 2, 3,$$

se escribe como:

$$c^2 (\alpha_1\hbar k_1 + \alpha_2\hbar k_2 + \alpha_3\hbar k_3 + mc\alpha_4)^2 = (c^2\hbar^2 k^2 + m^2c^4)\text{Id},$$

*i.e.*:

$$(71) \quad (\alpha_1\hbar k_1 + \alpha_2\hbar k_2 + \alpha_3\hbar k_3 + mc\alpha_4)^2 = (\hbar^2 k^2 + m^2c^2)\text{Id},$$

que si usamos la relación de DeBroglie,  $p = \hbar k$ :

$$(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + mc\alpha_4)^2 = (p^2 + m^2c^2)\text{Id},$$

que es la ecuación con la que trabaja Dirac, pero no lo muestra directamente en su artículo pues incluye al operador temporal  $p_0 = W/c = \hbar\omega/c = i(\hbar/c)\partial_t$ , pero este lo tratamos más adelante. Es así como Dirac estuvo trabajando en términos de ondas dispersivas sin decirlo (¿o sin saberlo?)

De esta forma Dirac trabaja con la expresión en términos dispersivos (71) y no con operadores diferenciales, aunque tampoco lo diga de forma explícita en su trabajo.

Para ello, expande el lado izquierdo de la ecuación (71), pensando en las  $\alpha_\mu$ 's como matrices y no como escalares (¿cómo se le ocurrió esto de pasar de un ecuación escalar a una matricial? No tengo la menor idea) para, al hacer corresponder los términos obtenidos con el lado derecho de la misma ecuación, obtener las relaciones de conmutación:

$$(72) \quad \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \alpha_4^2 = \text{Id},$$

$$(73) \quad \alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 0, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \quad \mu \neq \nu.$$

En este punto es en donde uno encuentra las Álgebras de Clifford en su representación matricial,  $\alpha_\mu \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ . Entonces, la ecuación (69) es la ecuación de Dirac:

$$(74) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = c \left( -i\hbar\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \psi - i\hbar\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \psi - i\hbar\alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \psi + mc\alpha_4 \psi \right),$$

Aquí,  $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^4$ . Dado que

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \hbar\omega = E = W = cp_0$$

y

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_a} \leftrightarrow \hbar k_a = p_a,$$

se sigue la relación de dispersión,

$$\hbar\omega \text{Id} = c(\hbar\alpha_1 k_1 + \hbar\alpha_2 k_2 + \hbar\alpha_3 k_3 + mc\alpha_4),$$

con Id, la matriz identidad, pues aquí estamos manejando matrices.

En términos de las variables dinámicas, la relación de dispersión se escribe

$$p_0 \text{Id} = (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + mc\alpha_4),$$

y es la ecuación que aparece en su libro [9]. En el artículo [7] tiene:

$$p_0 \text{Id} = -(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + mc\alpha_4).$$

¿Por qué se pueden admitir estos dos signos? Esto es lo que se dejó pendiente anteriormente.

Para argumentar (no necesariamente demostrar) que las dos ecuaciones son plausibles, procedemos como sigue. Consideremos los operadores

$$\begin{aligned} i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}, \\ i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathcal{P}}, \end{aligned}$$

y apliquémoslos uno tras otro a la función  $\psi$  y en order inverso, es decir:

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}\right)\left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathcal{P}}\right)\psi &= -\hbar^2\text{Id}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi + i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathcal{P}} - \widehat{\mathcal{P}}i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}^2, \\ \left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathcal{P}}\right)\left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}\right)\psi &= -\hbar^2\text{Id}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathcal{P}} + \widehat{\mathcal{P}}i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}^2, \end{aligned}$$

Ahora bien, como la matriz identidad, Id, conmuta con las matrices  $\alpha_\mu$ , así como la derivada,  $\partial_t$ , conmuta con cada una de las derivadas espaciales,  $\partial_{x_a}$ , que aparecen en  $\widehat{\mathcal{P}}$ , se sigue que  $\partial_t$  y  $\widehat{\mathcal{P}}$  conmutan y, así:

$$+i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\mathcal{P}} - \widehat{\mathcal{P}}i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} = 0,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}\right)\left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathcal{P}}\right)\psi &= -\hbar^2\text{Id}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \widehat{\mathcal{P}}^2\psi = 0, \\ \left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathcal{P}}\right)\left(i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{P}}\right)\psi &= -\hbar^2\text{Id}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \widehat{\mathcal{P}}^2\psi = 0. \end{aligned}$$

Esto último por la definición de  $\widehat{\mathcal{P}}^2$ , ecuación (70), y la ecuación de Klein-Gordon, ecuación (68).

Podemos concluir entonces que las “raíces” de la ecuación de Klein-Gordon,  $-\hbar^2\text{Id}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \widehat{\mathcal{P}}^2\psi$ , son:

$$\begin{aligned} i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \widehat{\mathcal{P}}\psi, \\ i\hbar\text{Id}\frac{\partial}{\partial t}\psi &= -\widehat{\mathcal{P}}\psi, \end{aligned}$$

por lo que ambas ecuaciones, la que aparece tanto en el artículo como en el libro de Dirac, son válidas.

De forma explícita tenemos:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= -i\hbar c\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}\psi + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}\psi + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\psi + i\frac{mca_4}{\hbar}\psi\right), \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= +i\hbar c\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}\psi + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}\psi + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\psi + i\frac{mca_4}{\hbar}\psi\right). \end{aligned}$$

Es de aquí de donde se sigue que la partícula cuántica relativista puede tener tanto energía positiva como negativa y la predicción de la existencia del positrón sigue de esta conclusión.

Para terminar esta sección, escribimos de forma explícita las matrices de Dirac:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0_2 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \\ \alpha_4 &= \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

en donde  $0_2$  es la matriz  $2 \times 2$  de ceros,  $I_2$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ , y  $\sigma_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , son las matrices de Pauli:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Si la partícula está bajo la influencia de un potencial externo, la generalización es similar como para la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -i\hbar c \left( \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \psi + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \psi + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \psi + i \frac{mc\alpha_4}{\hbar} \psi \right) + U(x)\psi.$$

Ésta es la ecuación de Dirac con potencial externo.

5.4.3. *Solución de la ecuación de Dirac libre.* En esta sección resolveremos la ecuación de Dirac libre, es decir, con  $U(x) = 0$ , como en la ecuación (74):

$$(75) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -i\hbar c \left( \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} \psi + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} \psi + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z} \psi + i \frac{mc\alpha_4}{\hbar} \psi \right),$$

y condición inicial:

$$\psi(x, y, z, 0) = f(x, y, z).$$

Tomemos la transformada de Fourier en (75):

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi} = -ic \left( \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \frac{mc\alpha_4}{\hbar} \right) \hat{\psi}.$$

En donde la transformada de Fourier de  $\psi = \psi(x, y, z, t)$  es  $\hat{\psi} = \hat{\psi}(k_1, k_2, k_3, t)$ . Resolviendo este último sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\hat{\psi}(k_1, k_2, k_3, t) = e^{-ict(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \frac{mc\alpha_4}{\hbar})} \hat{f}(k_1, k_2, k_3),$$

Aquí,  $\hat{f}(k_1, k_2, k_3) = \hat{\psi}(k_1, k_2, k_3, 0)$  es la transformada de Fourier de  $f(x, y, z)$ . Aplicando la transformada inversa, obtenemos.

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i((k_1 x + k_2 y + k_3 z) \text{Id} + ct(\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \frac{mc\alpha_4}{\hbar}))} \hat{f}(k_1, k_2, k_3) d\vec{k},$$

con  $d\vec{k} = dk_1 dk_2, dk_3$ .

Notemos que aquí debemos ser cuidadosos porque tenemos la exponencial de matrices que no conmutan entre sí.

## 5.5. Tarea.

TAREA 5.1. *Resuelva la ecuación (52) usando la separación de variables dada en la ecuación (53). Para ello, comience resolviendo la ecuación con coeficientes constantes,  $\gamma(x) = \gamma_0$ .*

TAREA 5.2. *Usando este método de la Transformada de Fourier, resuelva la ecuación de onda:*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi = 0,$$

con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\varphi(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0) &= g(x),\end{aligned}$$

para obtener la solución de D'Alambert, ecuación (10).

TAREA 5.3. Si  $\omega = \omega(k)$  no es par ni impar, entonces  $\omega(k)$  será una función compleja. Recuerde que, en este caso, los coeficientes de potencias pares de  $k$  deben ser pares y los coeficientes de las potencias impares de  $k$  deben ser puramente imaginarios. Bajo estas consideraciones, demuestre que la solución (58) es real.

TAREA 5.4. Partiendo de la solución de la ecuación dispersiva usando soluciones estándares, ecuación (61), construya la solución encontrada directamente por transformadas de Fourier, ecuación (58).

TAREA 5.5. Pruebe la afirmación 5.2.1

TAREA 5.6. Expandiendo el lado izquierdo en la ecuación (71), encuentre las relaciones de conmutación (72) y (73).

## 6. PARES DE LAX: EJEMPLOS BÁSICOS

Comenzando con esta sección podemos decir que comenzamos con la segunda parte de estas notas, con el estudio de ondas no lineales. Como veremos, la teoría lineal será de suma importancia para el estudio no lineal. Comenzaremos estudiando los afamados “pares de Lax”, los cuales son centrales para una formulación de integrabilidad de EDPs, las cuales forman un caso muy particular de ecuaciones de onda dispersivas y no lineales. Veremos cómo se integran todas ellas más adelante. “Integran” en ambos sentidos, de aprender cómo se juntan en un todo y también en el sentido de calcular sus soluciones exactas.

### 6.1. Los ejemplos más elementales de pares de Lax: el oscilador armónico.

6.1.1. *El oscilador armónico.* Sabemos que el oscilador armónico tiene, como Hamiltoniano:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2,$$

con ecuaciones de evolución (ecuaciones de movimiento de Hamilton):

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m}p, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq.\end{aligned}$$

Si definimos  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{1}{m}p, \\ \dot{p} &= -m\omega^2q,\end{aligned}$$

resulta la ecuación del oscilador armónico:

$$\ddot{q} = -\omega^2q.$$

También podemos escribir

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2.$$

Algunos autores normalizan con  $m = 1$ , pero aquí mantenemos nosotros la masa  $m$  arbitraria.

**Definición 6.1.1.** El **par de Lax** del oscilador armónico es un par de operadores lineales (en este caso, matrices) dados por [5]:

$$(76) \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p & \omega q \\ \omega q & -\frac{1}{m}p \end{pmatrix}; \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación de Lax es (en la siguiente sección veremos por qué es esta ecuación):

$$(77) \quad \dot{\mathcal{L}} + [\mathcal{L}, \mathcal{P}] = 0,$$

la cual, para el caso del oscilador armónico, resulta:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m}\dot{p} & \omega\dot{q} \\ \omega\dot{q} & -\frac{1}{m}\dot{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^2q & -\frac{\omega}{m}p \\ -\frac{\omega}{m}p & -\omega^2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí se sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}\dot{p} + \omega^2q &= 0, \\ \omega\dot{q} - \frac{\omega}{m}p &= 0, \end{aligned}$$

las cuales son las ecuaciones de Hamilton para el oscilador armónico. Por tanto,  $\dot{q} = -\omega^2q$ , que es la ecuación del oscilador armónico.

### Cálculos.

Aquí calculamos el conmutador  $[\mathcal{L}, \mathcal{P}]$ :

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}, \mathcal{P}] &= \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p & \omega q \\ \omega q & -\frac{1}{m}p \end{pmatrix} \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p & \omega q \\ \omega q & -\frac{1}{m}p \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} \omega q & -\frac{1}{m}p \\ -\frac{1}{m}p & -\omega q \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} -\omega q & \frac{1}{m}p \\ \frac{1}{m}p & \omega q \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 2\omega q & -\frac{2}{m}p \\ -\frac{2}{m}p & -2\omega q \end{pmatrix} \\ &= \omega \begin{pmatrix} \omega q & -\frac{1}{m}p \\ -\frac{1}{m}p & -1\omega q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**6.2. Ecuación de Lax para EDOs.** Dados dos operadores lineales,  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{P}$ , podemos considerar un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$(78) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \mathcal{L}\Psi,$$

$$(79) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{P}\Psi.$$

Para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), no hay dependencia explícita de  $x$ , así que tomemos:

$$\Psi(x, t) = \psi(t)e^{\lambda x}.$$

Por lo tanto, la ecuación (78) resulta ser:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi(t)e^{\lambda x}) = \mathcal{L}(\psi(t)e^{\lambda x}) \Rightarrow \lambda\psi(t)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\mathcal{L}\psi(t).$$

(El caso más general será considerado posteriormente). Entonces, el sistema de ecuaciones (78)-(79), se convierte en

$$(80) \quad \mathcal{L}\psi = \lambda\psi,$$

$$(81) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{P}\psi.$$

Este es un sistema de ecuaciones sobredeterminado para  $\psi$ . Hay una condición de compatibilidad que hace de estas dos ecuaciones (80)-(81) ser consistentes. Para ello, debemos eliminar la función  $\psi$  del sistema. Notemos que la ecuación (80) es un problema de valores propios. Derivando miembro a miembro dicha ecuación con respecto a  $t$ , se tiene

$$\mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\psi_t = \lambda_t\psi + \lambda\psi_t.$$

Ahora, usando la ecuación (81),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\mathcal{P}\psi &= \lambda_t\psi + \lambda\mathcal{P}\psi, \\ &= \lambda_t\psi + \mathcal{P}(\lambda\psi), \quad \text{dado que } \mathcal{P} \text{ es lineal} \\ &= \lambda_t\psi + \mathcal{P}\mathcal{L}\psi, \quad \text{por la ecuación (80)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\mathcal{P}\psi = \lambda_t\psi + \mathcal{P}\mathcal{L}\psi,$$

i.e.,

$$\mathcal{L}_t\psi + (\mathcal{L}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L})\psi = \lambda_t\psi.$$

Si esto se cumple para cualquier  $\psi$  que satisface (80)-(81), se tiene

$$\mathcal{L}_t + [\mathcal{L}, \mathcal{P}] = \lambda_t.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_t + [\mathcal{L}, \mathcal{P}] = 0 \quad \iff \quad \lambda_t = 0.$$

Entonces los valores propios son constantes de movimiento, si la ecuación de Lax (77) se cumple.

**TEOREMA 6.2.1.** ([26, 27]) *Para los operadores lineales  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{P}$  que definen el sistema (80)-(81), entonces los valores propios de  $\mathcal{L}$  son constantes de movimiento si, y sólo si, la ecuación de Lax:*

$$\dot{\mathcal{L}} + [\mathcal{L}, \mathcal{P}] = 0$$

se satisface.

En seguida, veremos cómo resolver el oscilador armónico usando su par de Lax (76).

### 6.3. Resolución del oscilador armónico: el método de dispersión inversa.

En esta subsección resolveremos el oscilador armónico usando el *método de dispersión inversa*. Veremos que es muy elaborado y pues uno se preguntaría por qué no mejor uno lo resuelve con los métodos clásicos de EDOs. Pues porque, por una parte, los métodos clásicos ya los conocemos y, por otra, para aprender en qué consiste el método de dispersión inversa y así poder aplicarlo a ecuaciones como la de Korteweg-deVries (KdV) y también darnos cuenta desde ahora que es un método muy elaborado, que lleva tiempo digerirlo y entenderlo.

**6.3.1. El problema de valores iniciales.** Queremos resolver el problema de valores iniciales del oscilador armónico:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{m}p, & q(0) &= q_0, \\ \dot{p} &= -m\omega^2q, & p(0) &= p_0. \end{aligned}$$

Consideremos el problema espectral (80) en  $t = 0$ ,  $\mathcal{L}(0)\psi(0) = \lambda(0)\psi(0)$ , i.e.,

$$(82) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p_0 & \omega q_0 \\ \omega q_0 & -\frac{1}{m}p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^{(0)} \\ \psi_2^{(0)} \end{pmatrix} = \lambda(0) \begin{pmatrix} \psi_1^{(0)} \\ \psi_2^{(0)} \end{pmatrix}.$$

**6.3.2. Los valores propios.** Calculemos los valores propios  $\lambda(0)$  resolviendo la ecuación característica:

$$\det(\mathcal{L}(0) - \lambda(0)I) = 0,$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p_0 - \lambda(0) & \omega q_0 \\ \omega q_0 & -\frac{1}{m}p_0 - \lambda(0) \end{pmatrix} &= 0 \\ \left( \frac{1}{m}p_0 - \lambda(0) \right) \left( -\frac{1}{m}p_0 - \lambda(0) \right) - \omega^2 q_0^2 &= 0 \\ - \left( \frac{1}{m}p_0 - \lambda(0) \right) \left( \frac{1}{m}p_0 + \lambda(0) \right) - \omega^2 q_0^2 &= 0 \\ \left( \lambda(0) - \frac{1}{m}p_0 \right) \left( \lambda(0) + \frac{1}{m}p_0 \right) - \omega^2 q_0^2 &= 0 \\ \lambda^2(0) - \frac{1}{m^2}p_0^2 - \omega^2 q_0^2 &= 0, \end{aligned}$$

la cual es la ecuación característica. Las soluciones a esta ecuación son los valores propios del problema y, dado que sabemos que son independientes del tiempo,

$$\lambda_{1,2} \equiv \lambda_{1,2}(t) = \lambda_{1,2}(0) = \pm \sqrt{\frac{p_0^2}{m^2} + \omega^2 q_0^2}.$$

Ahora, usando la ecuación característica,

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2\lambda_1^2 = 2 \left( \frac{p_0^2}{m^2} + \omega^2 q_0^2 \right) = 2 \frac{p_0^2}{m^2} + 2\omega^2 q_0^2,$$

*i.e.*,

$$\frac{m}{4} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_0^2.$$

Por lo tanto,

$$\text{Energía}(0) = \frac{m}{4} \text{Tr}(\mathcal{L}^2(0)).$$

De forma similar,

$$\text{Energía}(t) = \frac{m}{4} \text{Tr}(\mathcal{L}^2(t)).$$

Puesto que las  $\lambda$ 's son cantidades conservadas,

$$\text{Tr}(\mathcal{L}^2(t)) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \text{Tr}(\mathcal{L}^2(0)).$$

Y así,

$$\text{Energía}(t) = \frac{m}{4} \text{Tr}(\mathcal{L}^2(0)).$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano se conserva:

$$H(q, p) = \frac{m}{4} \text{Tr}(\mathcal{L}^2(0)).$$

*6.3.3. Los vectores propios.* Tenemos que resolver el sistema (82) en  $\lambda(0) = \lambda_j$  (con  $j = 1, 2$ ),

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m} p_0 - \lambda_j & \omega q_0 \\ \omega q_0 & -\frac{1}{m} p_0 - \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{1,j}^{(0)} \\ \psi_{2,j}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las dos ecuaciones son equivalentes (porque el determinante es 0). Por lo tanto, la primera de las ecuaciones es

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{m} p_0 - \lambda_j \right) \psi_{1,j}^{(0)} + \omega q_0 \psi_{2,j}^{(0)} &= 0, \\ \text{i.e.,} \quad \left( \lambda_j - \frac{1}{m} p_0 \right) \psi_{1,j}^{(0)} &= \omega q_0 \psi_{2,j}^{(0)}, \end{aligned}$$

*i.e.*, los vectores propios son

$$\vec{\psi}_{1,2}^{(0)} = \begin{pmatrix} \omega q_0 \\ \lambda_{1,2} - \frac{1}{m} p_0 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces un conjunto propio  $(\lambda_{1,2}, \vec{\psi}_{1,2}^{(0)})$ . Deseamos calcular la evolución en el tiempo de este conjunto propio. Esto nos ayudará a calcular  $\mathcal{L}(t)$ , la cual contiene  $q(t), p(t)$ , es decir, las soluciones del oscilador armónico. Este es la parte del problema inverso, de donde proviene el nombre del método.

En este punto, ya conocemos la evolución en el tiempo de los valores propios  $\lambda_{1,2}(t) = \lambda_{1,2}(0)$ , puesto que son constantes de movimiento. Para encontrar  $\vec{\psi}_{1,2}(t)$ , haremos uso de la ecuación (81):

$$(83) \quad \frac{\partial \vec{\psi}_j}{\partial t} = \mathcal{P} \vec{\psi}_j \quad \Longrightarrow \quad \vec{\psi}_j(t) = e^{\mathcal{P}t} \vec{\psi}_j(0), \quad j = 1, 2.$$

Ahora necesitamos calcular  $e^{\mathcal{P}t}$ . Esta es una tarea sencilla puesto que  $\mathcal{P}$  es la matriz constante:

$$(84) \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2} \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad e^{\mathcal{P}t} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

con  $\theta = \frac{1}{2}\omega t$ . Notemos que  $e^{\mathcal{P}t} = U(t)$  es una matriz unitaria:

$$U(t)U^*(t) = U^*(t)U(t) = I.$$

### Cálculo de la matriz $e^{\mathcal{P}t}$ .

La matriz  $\mathcal{P}$  tiene valores propios

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{1}{2}i\omega$$

y su matriz de vectores propios es

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},$$

con matriz inversa

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2)^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Si  $M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$ , entonces

$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \end{pmatrix}$$

y así,

$$e^{\mathcal{P}t} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) e^{Mt} (\vec{v}_1, \vec{v}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

la cual es la matriz que aparece en (84).

Ahora ya sabemos cómo es la evolución temporal de los valores y vectores propios,  $\lambda_j(t) = \lambda_j(0)$ ,  $\vec{\psi}_j(t) = e^{\mathcal{P}t}\vec{\psi}_j(0)$  ( $j = 1, 2$ ), de la matriz  $\mathcal{L}$ , y también sabemos que la ecuación:

$$(85) \quad \mathcal{L}(t)\vec{\psi}_j(t) = \lambda_j(0)\vec{\psi}_j(t),$$

se cumple; pero ignoramos qué es  $\mathcal{L}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p & \omega q \\ \omega q & -\frac{1}{m}p \end{pmatrix}$ , la cual contiene la solución a nuestro problema.

Ahora bien, ¿cómo encontrar  $\mathcal{L}(t)$ ? Procedemos como sigue. Sustituyamos  $\vec{\psi}_j(t)$  dada en la ecuación (83) en la ecuación (85),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t)\vec{\psi}_j(t) &= \lambda_j(0)\vec{\psi}_j(t), \\ \mathcal{L}(t)U(t)\vec{\psi}_j(0) &= \lambda_j(0)U(t)\vec{\psi}_j(0), \\ U^{-1}(t)\mathcal{L}(t)U(t)\vec{\psi}_j(0) &= \lambda_j(0)\vec{\psi}_j(0). \end{aligned}$$

Evaluemos la ecuación (85) en  $t = 0$  y comparemos con la ecuación anterior. Se sigue que:

$$U^{-1}(t)\mathcal{L}(t)U(t) = \mathcal{L}(0),$$

i.e.,

$$\mathcal{L}(t) = U(t)\mathcal{L}(0)U^{-1}(t).$$

- (i) Notemos que ¡hemos “vestido” (“dressed”) al operador inicial  $\mathcal{L}(0)$  para obtener al operador que evoluciona en el tiempo  $\mathcal{L}(t)$ ! (Este no es el método de “vestir” (*dressing method*), pero una idea muy similar está detrás de él.)
- (ii) También notemos que, dado que  $U(t)$  es unitario, ¡entonces el espectro de  $\mathcal{L}(0)$  y de  $\mathcal{L}(t)$  es el mismo! Consecuentemente, los valores propios  $\lambda(t)$  de  $\mathcal{L}(t)$  son independientes del tiempo

$$\lambda(t) = \lambda(0),$$

lo cual fue ya demostrado.

Por lo tanto, podemos calcular:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p_0 & \omega q_0 \\ \omega q_0 & -\frac{1}{m}p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p_0}{m}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \omega q_0 2 \cos \theta \sin \theta & \frac{p_0}{m} 2 \cos \theta \sin \theta + \omega q_0(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \frac{p_0}{m} 2 \cos \theta \sin \theta + \omega q_0(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & -\frac{p_0}{m}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \omega q_0 2 \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p_0}{m} \cos 2\theta - \omega q_0 \sin 2\theta & \frac{p_0}{m} \sin 2\theta + \omega q_0 \cos 2\theta \\ \frac{p_0}{m} \sin 2\theta + \omega q_0 \cos 2\theta & -\frac{p_0}{m} \cos 2\theta + \omega q_0 \sin 2\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

i.e.,

$$(86) \quad \mathcal{L}(t) = \begin{pmatrix} \frac{p_0}{m} \cos(\omega t) - \omega q_0 \sin(\omega t) & \frac{p_0}{m} \sin(\omega t) + \omega q_0 \cos(\omega t) \\ \frac{p_0}{m} \sin(\omega t) + \omega q_0 \cos(\omega t) & -\frac{p_0}{m} \cos(\omega t) + \omega q_0 \sin(\omega t) \end{pmatrix},$$

ya que definimos  $\theta = \frac{1}{2}\omega t$ . Usando la definición de  $\mathcal{L}(t)$ , la ecuación (76) y comparando con la ecuación (86),

$$\begin{aligned}p(t) &= p_0 \cos(\omega t) - m\omega q_0 \sin(\omega t), \\ q(t) &= \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) + q_0 \cos(\omega t),\end{aligned}$$

es la solución del oscilador armónico!

Vemos que las ecuaciones de Hamilton  $\dot{q} = \frac{p}{m}$  y  $\dot{p} = -m\omega^2 q$ , son satisfechas. De esta manera, resolvimos el problema de valores iniciales del oscilador armónico usando el formalismo de los pares de Lax.

#### 6.4. Los ejemplos más elementales de pares de Lax: el cuerpo rígido.

6.4.1. *El cuerpo rígido.* Supongamos que un cuerpo rígido rota con una velocidad angular  $\vec{\Omega}$  y que tiene un *momentum angular*  $\vec{L}$ . La ecuación de movimiento para una partícula en rotación es:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}.$$

Componente a componente,

$$(87) \quad \begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_2 L_3 - \Omega_3 L_2 \\ -(\Omega_1 L_3 - \Omega_3 L_1) \\ \Omega_1 L_2 - \Omega_2 L_1 \end{pmatrix}.$$

Estas ecuaciones pueden también ser escritas en forma matricial como sigue. Sean las matrices,

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & 0 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este es el par de Lax del cuerpo rígido. Calculando:

$$\begin{aligned}\hat{L}\hat{\Omega} &= \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & 0 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Omega_1 L_1 + \Omega_2 L_2 & -\Omega_2 L_3 & -\Omega_1 L_3 \\ -\Omega_3 L_2 & \Omega_1 L_1 + \Omega_3 L_3 & -\Omega_1 L_2 \\ -\Omega_3 L_1 & -\Omega_2 L_1 & \Omega_2 L_2 + \Omega_3 L_3 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}\hat{L} &= \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & 0 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_1 \Omega_1 + L_2 \Omega_2 & -L_2 \Omega_3 & -L_1 \Omega_3 \\ -L_3 \Omega_2 & L_1 \Omega_1 + L_3 \Omega_3 & -L_1 \Omega_2 \\ -L_3 \Omega_1 & -L_2 \Omega_1 & L_2 \Omega_2 + L_3 \Omega_3 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

podemos ahora calcular el conmutador

$$[\hat{L}, \hat{\Omega}] = \begin{pmatrix} 0 & L_2\Omega_3 - \Omega_2L_3 & L_1\Omega_3 - \Omega_1L_3 \\ L_3\Omega_2 - \Omega_3L_2 & 0 & L_1\Omega_2 - \Omega_1L_2 \\ L_3\Omega_1 - \Omega_3L_1 & L_2\Omega_1 - \Omega_2L_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando la ecuación (87):

$$[\hat{L}, \hat{\Omega}] = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{L}_1 & \dot{L}_2 \\ \dot{L}_1 & 0 & -\dot{L}_3 \\ -\dot{L}_2 & \dot{L}_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$[\hat{L}, \hat{\Omega}] = \dot{\hat{L}}.$$

Es decir, podemos escribir las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido como un conmutador de sus pares de Lax. Esto significa que el cuerpo rígido también es integrable.

### Los valores propios de $\hat{L}$ . Cantidades conservadas.

La ecuación característica de  $\hat{L}$  se calcula de la forma usual,

$$P(\lambda) = \det(\hat{L} - \lambda I).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -L_1 & L_2 \\ L_1 & -\lambda & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 + L_3^2) - (-L_1)(-L_1\lambda - L_2L_3) + L_2(L_1L_3 - L_2\lambda) \\ &= -\lambda^3 - \lambda(L_3^2 + L_1^2 + L_2^2) - (L_1L_2L_3) + (L_1L_2L_3), \end{aligned}$$

*i.e.*,

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda(L_3^2 + L_1^2 + L_2^2).$$

Los ceros del polinomio característico,  $P(\lambda) = 0$ , son los valores propios de  $\hat{L}$ ,

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i\|\vec{L}\|.$$

Notemos que  $\text{Tr}(\hat{L}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ , la cual es una cantidad conservada trivial. También  $\text{Tr}(\hat{L}^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = -2\|\vec{L}\|^2$ . Esto significa que la magnitud del momentum angular se conserva. No hay más cantidades conservadas desde este punto de vista ( $\text{Tr}\hat{L}^3 = 0$ ,  $\text{Tr}\hat{L}^4 = 2\|\vec{L}\|^4$ , las cuales son cantidades ya obtenidas).

Ahora, usando un cambio de variables, podemos escribir las ecuaciones del cuerpo rígido con un par de Lax diferente. Para ver esto, regresemos al movimiento del cuerpo rígido y a la rotación de una partícula.

### Velocidad angular

La velocidad angular  $\vec{\omega}$  es un vector perpendicular al plano de rotación de la partícula, la cual rota con una rapidez (no velocidad) angular (¡un escalar!)  $\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$ , en donde  $\theta = \theta(t)$  es la posición angular de la partícula al tiempo  $t$ . De este modo,  $|\omega| = \|\vec{\omega}\|$ . También se sigue por la regla de la mano derecha. Ver figura 12.

### El momentum angular y el tensor de inercia

El **momentum angular** (a diferencia del momentum lineal) de una partícula que rota se denota con  $\vec{L}$  y se define como

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p},$$

en donde  $\vec{r}$  es la posición de la partícula y  $\vec{p} = m\vec{v}$  es su momentum lineal. Ver figura 13.

La relación entre velocidad angular y la velocidad de la partícula está dada por

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v},$$

y se rige de la regla de la mano derecha. Ver figura 14..

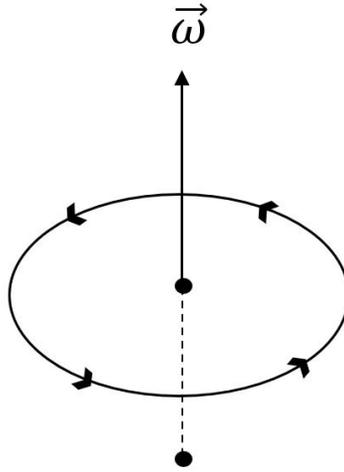


FIGURA 12. Velocidad angular: regla de la mano derecha

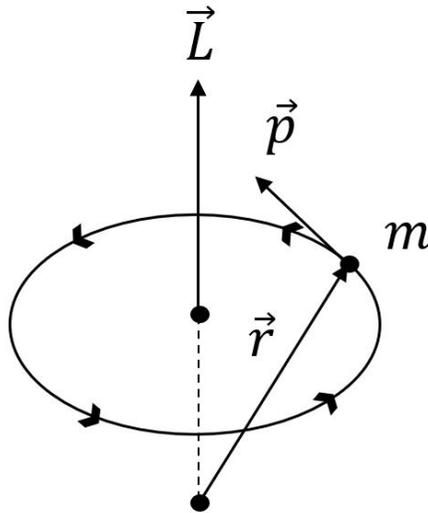


FIGURA 13. Momentum angular

Observemos que  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$ , *i.e.*,

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

En el mismo orden de ideas,  $\vec{p} = m\vec{v}$  es una transformación lineal,  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\vec{v} \mapsto \vec{p}$ , *i.e.*,  $f(\vec{v}) = m\vec{v} = \vec{p}$ . Aquí,  $m$  es la constante de proporcionalidad. Es decir, la transformación es una operación de multiplicación.

Ahora, para el momentum angular, tenemos que  $\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  es también una transformación lineal que toma la forma,  $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\vec{\omega} \mapsto \vec{L}$  *i.e.*,

$$\vec{F}(\vec{\omega}) = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{L}.$$

Puesto que cada transformación lineal puede ser representada por una matriz, tenemos que

$$\vec{F}(\vec{\omega}) = \tilde{I}\vec{\omega}, \quad \text{i.e.,} \quad \vec{L} = \tilde{I}\vec{\omega},$$

en donde  $\tilde{I}$  es una matriz (un tensor) llamado **momento de inercia** de la partícula rotante (o bien, el **operador de inercia**, o el **tensor de inercia**).

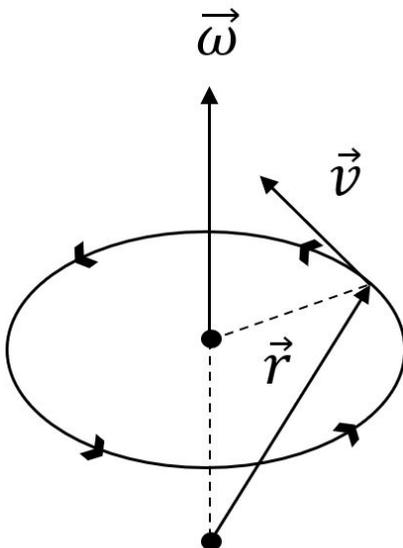


FIGURA 14. Velocidad angular como producto cruz

Notemos que, como tenemos  $\vec{p} = m\vec{v}$  y  $\vec{L} = \tilde{I}\vec{\omega}$ ,  $\tilde{I}$  juega el papel de “la masa angular” de la partícula rotante, en el mismo papel que la masa juega en el momentum lineal. También notemos que el momento de inercia,  $\tilde{I}$ , depende de  $m$  y de  $\vec{r}$ .

AFIRMACIÓN 6.4.1. *El momento de inercia es simétrico.*

**Prueba.** Si  $(\cdot, \cdot)$  denota el producto interno usual en  $\mathbb{R}^3$ , debemos probar que

$$(\vec{F}(\vec{\omega}_1), \vec{\omega}_2) = (\vec{\omega}_1, \vec{F}(\vec{\omega}_2)), \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^3.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} (\vec{F}(\vec{\omega}_1), \vec{\omega}_2) &= m(\vec{r} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}), \vec{\omega}_2) \\ &= m(\vec{r} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r})) \cdot \vec{\omega}_2 \\ &= m((\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) \times \vec{\omega}_2) \cdot \vec{r} \\ &= m(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}), \quad (\text{aquí vemos que es simétrico}) \\ &= m(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}, \vec{\omega}_1 \times \vec{r}), \\ &= m(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}, \vec{\omega}_2 \times \vec{r}), \quad (\text{dado que el producto interno es simétrico}) \\ &= m(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}), \\ &= m(\vec{r} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}), \vec{\omega}_1), \\ &= m(\vec{\omega}_1, \vec{r} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r})), \quad (\text{puesto que el producto interno es simétrico}) \\ &= m(\vec{\omega}_1, \vec{F}(\vec{\omega}_2)), \end{aligned}$$

i.e.,  $\vec{F}$  es simétrico, así también lo es el tensor de inercia  $\tilde{I}$ . □

Dado que el tensor de inercia  $\tilde{I}$  es simétrico, entonces es diagonalizable. Si estamos en el marco de referencia en donde  $\tilde{I}$  es diagonal, tenemos:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{F}(\vec{\omega}), \quad \text{en donde } I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

y la energía cinética resulta ser,

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2.$$

AFIRMACIÓN 6.4.2. *La energía cinética es*

$$K = \frac{1}{2} (\tilde{I} \vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} (I \vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2,$$

en donde  $\vec{\omega} = P \vec{\omega}$  es la velocidad angular en el marco de referencia del tensor de inercia diagonal  $I$ , y  $P$  es la matriz de vectores propios del tensor de inercia.

**Prueba.**  $K = \frac{1}{2} m(\vec{v}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m(\vec{\omega} \times \vec{r}, \vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} m(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} m(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \vec{\omega}) = \frac{1}{2} (\vec{F}(\vec{\omega}), \vec{\omega}) = (\tilde{I} \vec{\omega}, \vec{\omega}) = (P^{-1} I P \vec{\omega}, \vec{\omega}) = (I P \vec{\omega}, P \vec{\omega}) = (I \vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2.$

□

Ahora, de la expresión de la energía cinética, podemos encontrar la expresión para el momento de inercia,  $\tilde{I}$ .

Puesto que la energía cinética es  $K = \frac{1}{2} (\tilde{I} \vec{\omega}, \vec{\omega})$ , entonces,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} (\vec{F}(\vec{\omega}), \vec{\omega}) = \frac{m}{2} (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \vec{\omega}) = \frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}, \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{m}{2} \|\vec{\omega} \times \vec{r}\|^2 \\ &= \frac{m}{2} (\|\vec{\omega}\|^2 \|\vec{r}\|^2 - |\vec{\omega} \cdot \vec{r}|^2) \\ &= \frac{m}{2} \left( \sum_i \omega_i^2 \sum_i r_i^2 - \left( \sum_i \omega_i r_i \right)^2 \right) \\ &= \frac{m}{2} \left( \sum_i \omega_i^2 \sum_j r_j^2 - \left( \sum_i \omega_i r_i \right) \left( \sum_j \omega_j r_j \right) \right) \\ &= \frac{m}{2} \sum_{i,j} (\omega_i^2 r_j^2 - \omega_i \omega_j r_i r_j) \\ &= \frac{m}{2} \sum_{i,j} (\omega_i \omega_j \delta_i^j r_j^2 - \omega_i \omega_j r_i r_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \left( m (\delta_i^j r_j^2 - r_i r_j) \right), \end{aligned}$$

y comparando con  $K = \frac{1}{2} (\tilde{I} \vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \tilde{I}_{i,j}$ , encontramos que

$$\tilde{I}_{i,j} = m (\delta_i^j r_j^2 - r_i r_j)$$

son las componentes del tensor de inercia.

### Regreso a los pares de Lax

Ya aprendimos que las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido son

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{\Omega}, \hat{L}],$$

en donde

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & 0 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puede ser definido un nuevo par de Lax de la siguiente manera:

$$\hat{L}(\lambda) = \mathcal{I}^2 + \frac{1}{\lambda} \hat{L}, \quad \text{y} \quad \hat{M}(\lambda) = \lambda \mathcal{I} + \hat{\Omega},$$

en donde

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_1 + I_2 - I_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 + I_3 - I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 + I_3 - I_1 \end{pmatrix},$$

(suponiendo  $I_i \neq I_j$  para  $i \neq j$ ) y  $\lambda$  siendo el parámetro espectral.

Podemos verificar que:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \mathcal{I} &= \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 I_1 & -\Omega_2 I_2 \\ -\Omega_1 I_1 & 0 & \Omega_3 I_3 \\ \Omega_2 I_2 & -\Omega_3 I_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & L_1 & -L_2 \\ -L_1 & 0 & L_3 \\ L_2 & -L_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en el eje principal de inercia,} \end{aligned}$$

*i.e.*,

$$(88) \quad \mathcal{I} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \mathcal{I} = \hat{L},$$

en el marco de referencia del eje principal del tensor de inercia.

**AFIRMACIÓN 6.4.3.** *Las ecuaciones*

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{\Omega}, \hat{L}] \quad \text{y} \quad \frac{d\hat{L}(\lambda)}{dt} = [\hat{M}(\lambda), \hat{L}(\lambda)]$$

*son equivalentes.*

**Prueba.** Supongamos que se cumple que

$$\frac{d\hat{L}(\lambda)}{dt} = [\hat{M}(\lambda), \hat{L}(\lambda)]$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \frac{d\hat{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \mathcal{I}^2 + \frac{1}{\lambda} \hat{L} \right), \quad \text{puesto que } \mathcal{I} \text{ es constante,} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \hat{L}(\lambda) \right), \quad \text{por la definición de } \hat{L}(\lambda), \\ &= [\hat{M}(\lambda), \hat{L}(\lambda)] \quad \text{por hipótesis,} \\ &= [\lambda \mathcal{I} + \hat{\Omega}, \mathcal{I}^2 + \frac{1}{\lambda} \hat{L}] \\ &= \lambda [\mathcal{I}, \mathcal{I}^2] + [\mathcal{I}, \hat{L}] + [\hat{\Omega}, \mathcal{I}^2] + \frac{1}{\lambda} [\hat{\Omega}, \hat{L}], \\ (89) \quad &= [\mathcal{I}, \hat{L}] + [\hat{\Omega}, \mathcal{I}^2] + \frac{1}{\lambda} [\hat{\Omega}, \hat{L}]. \end{aligned}$$

Ahora observemos que,

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}, \hat{L}] + [\hat{\Omega}, \mathcal{I}^2] &= \mathcal{I} \hat{L} - \hat{L} \mathcal{I} + \hat{\Omega} \mathcal{I}^2 - \mathcal{I}^2 \hat{\Omega} \\ &= \mathcal{I}(\mathcal{I} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \mathcal{I}) - (\mathcal{I} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \mathcal{I}) \mathcal{I} + \hat{\Omega} \mathcal{I}^2 - \mathcal{I}^2 \hat{\Omega}, \quad \text{de la ecuación (88)} \\ &= \mathcal{I}(\hat{\Omega} \mathcal{I}) - (\mathcal{I} \hat{\Omega}) \mathcal{I}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, de (89),  $\frac{1}{\lambda} \frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{1}{\lambda} [\hat{\Omega}, \hat{L}]$ , y así

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{\Omega}, \hat{L}],$$

como queríamos probar. Procediendo al revés, obtenemos la implicación en la dirección opuesta. □

Entonces, los valores propios de  $\hat{L}(\lambda)$  son constantes de movimiento Así,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\hat{L}^2(\lambda)) &= \mathrm{Tr}(\mathcal{I}^4 - \frac{2}{\lambda}\hat{L}^2), \\ \mathrm{Tr}(\hat{L}^4(\lambda)) &= \mathrm{Tr}(\mathcal{I}^6 - \frac{3}{\lambda^2}(\mathrm{Tr}\mathcal{I})^2\hat{L}^2 - I_1I_2I_3H),\end{aligned}$$

son cantidades conservadas adicionales, en donde  $H$  representa el Hamiltoniano,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{L_i^2}{I_i^2}.$$

## 7. TRANSFORMACIONES ISOSPECTRALES

Las *transformaciones isoespectrales* son ciertas transformaciones de operadores que dejan intacto el espectro de dichos operadores. Uno de los “milagros” de los sistemas integrables es que los operadores que en estos aparecen de forma “natural”(!?) son isoespectrales. En esta sección explicaremos qué son y veremos dos ejemplos de sistemas integrables, la latiz de Toda y la ecuación de Korteweg-deVries, en los que aparecen este tipo de transformaciones.

### 7.1. Consideraciones generales. Sea

$$\mathcal{L}(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t)$$

el operador de Schrödinger en donde  $u(x, t)$  es cierto potencial periódico (o no periódico con “periodo”  $\infty$ ) y  $\mathcal{L}(t)$  actúa en funciones periódicas (*i.e.*, en  $L^2([0, P])$ ,  $P > 0$ ) o no periódicas (*i.e.*, en  $L^2(\mathbb{R})$ ), cuyo espectro puntual es:

$$\sigma_{\mathrm{point}}(\mathcal{L}(t)) = \{\lambda_i\}_{i=1}^N$$

y suponemos que es finito.

Dado el potencial,  $u(x, t)$ , los valores propios están completamente determinados. La contrapuesta no es verdad: dados los valores propios, el operador  $\mathcal{L}(t)$  **no está completamente determinado**.

En particular, si  $u(x, t)$  resuelve la ecuación de Korteweg-deVries (KdV),

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

con condición inicial  $u(x, 0)$  (periódicas o no periódicas), entonces los operadores

$$(90) \quad \begin{aligned}\mathcal{L}(0) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, 0), \\ \mathcal{L}(t) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t),\end{aligned}$$

tienen el mismo espectro,  $\lambda(0) = \lambda(t)$ .

- Esto es, el operador  $\mathcal{L}(t)$  es **isoespectral**, siempre y cuando  $u(x, t)$  satisfaga la ecuación de KdV [15].
- En 1968, P. Lax [26] encontró una forma de construir operadores isoespectrales; *i.e.*, encontró una manera de generar una sucesión infinita de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones tienen la propiedad de que  $\mathcal{L}(0)$  y  $\mathcal{L}(t)$  son isoespectrales.
- C. Gardner identificó este conjunto de ecuaciones como un conjunto generalizado de ecuaciones de KdV. (Ver sección 5 en el artículo de P. Lax, [27]).

Explicamos estos resultados en esta sección.

**7.2. Operadores isoespectrales de Lax.** Sea  $\mathcal{L}(t)$  una familia de un parámetro de operadores auto-adjuntos (más generalmente, no es necesario que sean auto-adjuntos) en un espacio de Hilbert. Sus valores propios y espectro en general, en el caso de operadores auto-adjuntos, son reales. Para detalles, vea [26, 27].

*AFIRMACIÓN 7.2.1.* El espectro de  $\mathcal{L}(t)$  es independiente del tiempo, si todos los elementos de la familia de operadores  $\mathcal{L}(t)$  son unitariamente equivalentes uno a otro; i.e., si existe una familia de operadores  $U(t)$ , de un parámetro  $t$ , tal que:

$$(91) \quad U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t) = \mathcal{L}(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Prueba.** Es muy conocido el hecho de Álgebra Lineal y Análisis Funcional que el espectro  $\mathcal{L}(t)$  y  $\mathcal{L}(0)$  coinciden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(0) - \lambda I &= U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t) - \lambda U^*(t)U(t) \\ &= U^*(t)(\mathcal{L}(t) - \lambda I)U(t). \end{aligned}$$

Si  $\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(t))$ , entonces  $\mathcal{L}(t) - \lambda I$  es invertible, con inversa  $(\mathcal{L}(t) - \lambda I)^{-1}$ . Ahora,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(0) - \lambda I)^{-1} &= (U(t))^{-1}(\mathcal{L}(t) - \lambda I)^{-1}(U^*(t))^{-1} \\ &= U^*(t)(\mathcal{L}(t) - \lambda I)^{-1}U(t), \end{aligned}$$

dado que es unitario:  $U(t)U^*(t) = U^*(t)U(t) = I$ . Puesto que  $(\mathcal{L}(t) - \lambda I)^{-1}$  existe, entonces  $(\mathcal{L}(0) - \lambda I)^{-1}$  también existe, y así

$$\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(0)).$$

Éste es un argumento de “*si, y sólo si*”, por lo que

$$\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(t)) \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(0)),$$

i.e.,

$$\lambda \in \sigma(\mathcal{L}(t)) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(\mathcal{L}(0)),$$

i.e.,

$$\sigma(\mathcal{L}(t)) = \sigma(\mathcal{L}(0)).$$

□

Supongamos que ambos operadores  $\mathcal{L}(t)$  y  $U(t)$  son diferenciables respecto a  $t$ . Entonces, de  $U(t)U^*(t) = I$  se sigue lo siguiente:

$$(92) \quad \begin{aligned} \dot{U}(t)U^*(t) + U(t)\dot{U}^*(t) &= 0, \\ \dot{U}(t)U^*(t) &= -U(t)\dot{U}^*(t), \\ \dot{U}(t) &= -U(t)\dot{U}^*(t)(U^*(t))^{-1}, \\ \dot{U}(t) &= -U(t)\dot{U}^*(t)U(t), \end{aligned}$$

o bien

$$\dot{U}^*(t) = -U^*(t)\dot{U}(t)U^*(t).$$

Definamos

$$(93) \quad B(t) \equiv \dot{U}(t)U^*(t),$$

por lo que

$$(94) \quad B^*(t) \equiv U(t)\dot{U}^*(t).$$

Sustituyamos (93) y (94) en (92) para obtener

$$B(t) = -B^*(t),$$

i.e.,  $B$  es un operador **anti-simétrico** (o anti-hermiteano, o skew-simétrico).

Ahora, de la definición de  $B(t)$ , de  $U^*(t)U(t) = U(t)U^*(t) = I$ , y de la ecuación (93),

$$\dot{U}(t)U^*(t) = B(t) \Rightarrow \dot{U}(t)U^*(t)U(t) = B(t)U(t),$$

y así

$$(95) \quad \dot{U}(t) = B(t)U(t).$$

Por el contrario, dado  $B(t)$ , podemos probar que existe un operador  $U(t)$  tal que

1.  $\dot{U}(t) = B(t)U(t)$ , y
2.  $U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t) = \mathcal{L}(0)$ .

De hecho, resolviendo el problema de valores iniciales,

$$(96) \quad h_t(t) = B(t)h(t), \quad h(t_0) = h_0,$$

( $h$  es un vector), pongamos

$$h(t) \equiv U(t)h(0).$$

Esta operación es isométrica para  $U(t)$  unitario:

$$\begin{aligned} \|h(t)\|_2^2 &= (h(t), h(t)) = (U(t)h(0), U(t)h(0)) = (U^*(t)U(t)h(0), h(0)) \\ &= (h(0), h(0)) = \|h(0)\|_2^2. \end{aligned}$$

Si para cada  $t_0$ , la ecuación (96) puede ser resuelta en un conjunto denso cerca de  $h_0$ , entonces  $U(t)$  y su inversa están densamente definidos. Por lo tanto, la cerradura es unitaria.

Puesto que  $h_t(t) = B(t)h(t)$  y  $U(t)h(0) = h(t)$ , entonces  $\dot{U}h_0 = \dot{h} = B(t)h(t) = B(t)U(t)h_0$ , y así:

$$\dot{U}(t) = B(t)U(t).$$

Ahora, conjugando la ecuación anterior,  $(\dot{U})^* = (BU)^* = U^*B^* = -U^*B$ . Multiplicando desde la izquierda por  $U$ ,

$$(97) \quad U\dot{U}^* = -UU^*B.$$

Conjugando la expresión anterior,  $\dot{U}U^* = -B^*UU^*$  y, dado que  $B$  es anti-simétrico,

$$(98) \quad \dot{U}U^* = BUU^*.$$

Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones previas, (ecuaciones (97) y (98)), obtenemos  $U\dot{U}^* + \dot{U}U^* = -UU^*B + BUU^*$ , *i.e.*,

$$\frac{d}{dt}(UU^*) = BUU^* - UU^*B.$$

Si el operador  $U$  es unitario,  $UU^* = I$ , entonces la última ecuación se cumple idénticamente.

Por otra parte,  $U_t = BU$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^t B(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) U(t_0), \\ \Rightarrow U^*(t) &= U^*(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t B^*(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) \\ &= U^*(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^t B(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) \\ &= U^*(t_0)U(t_0)U^{-1}(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^t B(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) \\ &= U^*(t_0)U(t_0)U^{-1}(t), \end{aligned}$$

en donde usamos el hecho de que  $B$  es anti-hermiteana. Por lo tanto,

$$U^*(t) = U^*(t_0)U(t_0)U^{-1}(t) \Rightarrow U^*(t)U(t) = U^*(t_0)U(t_0).$$

Escojamos  $U(t_0) = I$ , para obtener

$$U^*(t)U(t) = U(t)U^*(t) = I,$$

i.e.,  $U$  es unitario. Entonces,  $\dot{U} = BU \Rightarrow \dot{U}U^* = B$ , y la cerradura es unitaria.

Ahora diferenciamos (91) con respecto a  $t$ ,

$$\begin{aligned} (U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t))_t &= (\mathcal{L}(0))_t \\ \dot{U}^*\mathcal{L}U + U^*\dot{\mathcal{L}}U + U^*\mathcal{L}\dot{U} &= 0 \\ -(U^*B)\mathcal{L}U + U^*\dot{\mathcal{L}}U + U^*\mathcal{L}BU &= 0 \quad \text{por la ecuación (95) y } B^* = -B. \\ U^*(-B\mathcal{L} + \dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}B)U &= 0 \\ -B\mathcal{L} + \dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}B &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(99) \quad \dot{\mathcal{L}} + [\mathcal{L}, B] = 0,$$

en donde  $[\mathcal{L}, B] = \mathcal{L}B - B\mathcal{L}$  es el conmutador de  $\mathcal{L}$  y  $B$ . La ecuación (99) es conocida como la **ecuación de Lax**.

Si procedemos en sentido contrario, la ecuación (99) implica (91), como queríamos demostrar. Esto prueba el siguiente teorema de P. Lax. [26, 27]

**TEOREMA 7.2.2.** *Sea  $\mathcal{L}(t)$  una familia, con parámetro  $t$ , de operadores auto-adjuntos. Supongamos que la ecuación (99) se cumple y que (96) puede ser resuelta para un conjunto denso en la vecindad de  $h_0$ . Entonces, los operadores  $\mathcal{L}(t)$  son unitariamente equivalentes.*

Apliquemos el teorema a  $\mathcal{L}$ , el operador de Schrödinger, ecuación (90):  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$ , de tal manera que la ecuación (99) se convierta en

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B\mathcal{L} - \mathcal{L}B$$

Esta es la ecuación de evolución de  $u(x, t)$ .

**7.3. Ecuaciones generalizadas de KdV y sus pares de Lax.** El operador

$$B_m = \partial_x^{2m+1} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j^{(m)} \partial_x^{2j+1} + \partial_x^{2j+1} b_j^{(m)},$$

genera una jerarquía de ecuaciones [26, 27, 10],

$$\frac{\partial u}{\partial t_m} = B_m \mathcal{L} - \mathcal{L} B_m.$$

Ahora no las estudiaremos, pero las estudiaremos pronto.

En el mismo orden de ideas, veremos que estas ecuaciones pueden ser escritas en forma variacional como sigue

$$(100) \quad u_{t_m} = c_m \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta T_m}{\delta u} \right),$$

en donde  $T_m[u]$  son las cantidades conservadas de

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = B_1 \mathcal{L} - \mathcal{L} B_1,$$

y se expresan como

$$T_m[u] = \int_{-\infty}^{\infty} P_m dx,$$

en donde  $P_m$  es un polinomio en  $u$  y sus derivadas hasta orden  $m$ . Para  $m = 0, 1, 2$ , obtenemos,

$$(101) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_0} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t_1} &= 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} &= -30u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 20 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}, \end{aligned}$$

y estas son las primeras tres ecuaciones que son elementos de **la jerarquía de Lax de la ecuación de KdV**. Las correspondientes cantidades conservadas son

$$(102) \quad \begin{aligned} T_1[u] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx, \\ T_2[u] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^3 + \frac{1}{2} u_x^2 dx, \\ T_3[u] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 21u^5 + 105u^2 u_x^2 + 21uu_{xx}^2 + \frac{3}{2} u_{xxx}^2 dx. \end{aligned}$$

Veremos después cómo es que uno puede generar estas cantidades conservadas,  $T_n[u]$ , funciones de  $u$  y, consecuentemente, poder generar (100). Por el momento, continuemos estudiando los pares de Lax como primeras impresiones.

**7.4. Ecuaciones Lax: idea intuitiva.** Esta sección y las secciones posteriores fueron escritas con base a [14].

Estudiaremos algunos ejemplos de ecuaciones en dimensiones finita e infinitas. Todas ellas tendrán en común la ecuación de Lax

$$(103) \quad \dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}],$$

en donde  $\mathcal{L}$  y  $B$  son operadores diferenciales, ( $\mathcal{L}$  está en un Álgebra de Lie o un dual de uno, de acuerdo con Flaschka [14]).

Esta ecuación, (103) es llamada **ecuación de Lax**. Tenemos entonces que

- tiene propiedades muy especiales,
- conduce a la mecánica Hamiltoniana,
- también a la mecánica Hamiltoniana integrable,
- hay una relación entre ecuaciones solubles con teoría espectral y geometría algebraica.

**De forma intuitiva.** Hagamos unos ejemplos concretos. Tomemos  $\mathcal{L}, B \in M^{n \times n}$  y consideremos la ecuación (103). Calculemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^2)_t &= \dot{\mathcal{L}}\mathcal{L} + \mathcal{L}\dot{\mathcal{L}}, & (\mathcal{L} \text{ y } \dot{\mathcal{L}} \text{ no siempre conmutan}) \\ &= [B, \mathcal{L}]\mathcal{L} + \mathcal{L}[B, \mathcal{L}], \\ &= (B\mathcal{L} - \mathcal{L}B)\mathcal{L} + \mathcal{L}(B\mathcal{L} - \mathcal{L}B), \\ &= B\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}B\mathcal{L} + \mathcal{L}B\mathcal{L} - \mathcal{L}^2B, \\ &= B\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^2B, \\ &= [B, \mathcal{L}^2]. \end{aligned}$$

En general,

$$(\mathcal{L}^k)_t = [B, \mathcal{L}^k], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

De álgebra lineal,  $\text{Tr}[A, B] = 0$ , siempre. Por tanto,  $\text{Tr}(\mathcal{L}^k)_t = \text{Tr}[B, \mathcal{L}^k] = 0$  y así

$$(104) \quad \text{Tr}(\mathcal{L}^k) = \text{constante en } t, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, las ecuaciones de Lax (103) tienen un montón de constantes de movimiento,  $\text{Tr}(\mathcal{L}^k)$ .

Ahora, por el teorema de Cayley-Hamilton,  $\mathcal{L}^{n+1} = c_n \mathcal{L}^n + \dots + c_1 \mathcal{L} + c_0$ , ( $c_0$  es una matriz de  $n \times n$ ), de forma tal que  $\text{Tr}(\mathcal{L}^{n+1}) = c_n \text{Tr}(\mathcal{L}^n) + \dots + c_1 \text{Tr}(\mathcal{L}) + \text{Tr}(c_0)$ , por lo tanto, a lo más  $n$  de estas constantes de movimiento son independientes. Esto lo podemos sintetizar como un teorema que es el siguiente.

**TEOREMA 7.4.1.** *Supongamos ahora que  $\mathcal{L}$  es diagonalizable. Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , sus valores propios. Entonces, por la ecuación (104),*

$$(105) \quad \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k = \text{constante en } t, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

*Es claro de (105), que  $\lambda_i(t) = \lambda_i(0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , i.e.,  $\lambda_i$  es independiente del tiempo, i.e.,  $\lambda_i$  es una constante de movimiento ( $i = 1, \dots, n$ .)*

*Demostración.* Esto es cierto. Para cada  $k = 1, \dots, n$ , tenemos una ecuación con  $n$  incógnitas:  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Entonces, para todo  $k$ , tenemos un sistema de  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas (de hecho, un sistema de ecuaciones no lineales.) Este sistema, en principio, puede ser invertido. Puesto que el término no homogéneo es independiente de  $t$ , cada  $\lambda_i$  es también independiente de  $t$ . Esto conduce a la idea original, fundamental y seminal de Peter Lax.  $\square$

**TEOREMA 7.4.2** (Lax (1968)[26]). *Si la función matricial  $\mathcal{L}(t)$  satisface una ecuación diferencial de la forma*

$$(106) \quad \boxed{\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]},$$

*entonces el espectro de  $\mathcal{L}(t)$  es independiente del tiempo.*

Decimos que la matriz  $\mathcal{L}(t)$  es *deformada* conforme  $t$  cambia, pero el espectro permanece siendo el mismo. Es por esto que este cambio de  $\mathcal{L}$  es llamado una **transformación iso-espectral**. Más adelante daremos ejemplos con operadores diferenciales actuando en espacios de Hilbert,  $\mathcal{H}$ .

**7.4.1. Preguntas sobre ecuaciones de Lax.** Una lista de preguntas acerca de las ecuaciones de Lax está ahora ya lista para ser planteada, para poder escribirla, y tenerla en mente durante este curso.

1. **¿Cuándo una ecuación diferencial puede ser escrita en forma de pares de Lax?** Si tenemos una ecuación  $\dot{x} = f(x)$  el problema es encontrar un par de matrices (u operadores), el **par de Lax**,  $\mathcal{L}, B$  tal que

$$\dot{x} = f(x) \iff \dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}], .$$

Entonces tendríamos un montón de propiedades para  $\dot{x} = f(x)$ .

Equivalentemente, ¿cuándo una ecuación diferencial puede ser resuelta exactamente? Esta pregunta es muy difícil de responder (y, probablemente, quede sin responder.)

2. **Dada una ecuación diferencial,  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ , ¿es Hamiltoniana?** Una vez que se sabe que una ecuación es Hamiltoniana, hay una luz e indicios de si puede ser soluble o no. La mayoría de las ecuaciones que se pueden escribir en la forma de pares de Lax resultan ser Hamiltonianas en Álgebras de Lie duales (o bien, “órbitas co-adjuntas”), pero no hay siempre una manera directa (o receta) de hacer esto.
3. **Dada la ecuación  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$  Hamiltoniana, y que los valores propios de  $\mathcal{L}$  son constantes de movimiento, ¿éstas están en involución? ¿Son suficientes para integrar el problema?**
4. **Dado que  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$  puede “en principio” ser resuelta, en la práctica ¿cómo obtiene uno la solución?** Ésta es la pregunta que conduce a las superficies de Riemann, a problemas espectrales inversos, y a muchas buenas matemáticas.

Este punto ya lo ejemplificamos al resolver el oscilador armónico con su par de Lax.

5. **Dada una solución explícita, ¿cómo uno extrae información?** Uno puede encontrar una solución en forma integral, o una función complicada (por ejemplo, la función theta de Jacobi de muchas variables.) No es trivial deducir información y propiedades cualitativas o cuantitativas de fórmulas feas.

→ De hecho, responder esta pregunta es lo que hace la diferencia entre un matemático “puro” de un matemático “aplicado.”

6. **¿Qué más sucede?** Una vez que ya hemos respondido a las preguntas anteriores:

- a) ¿Similaridades con otras ecuaciones de Lax?
- b) ¿Otros campos de las matemáticas?
- c) ¿“Simetrías” geométricas no explicadas?
- d) ¿“Simetrías” calculadas y no explicadas?

Estas preguntas abren nuevas perspectivas de ecuaciones no solubles y en matemáticas.

**7.5. Ecuaciones de Lax: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs).**

**Ejemplo 7.5.I. La ecuación de Lax de  $2 \times 2$ .** Sea  $\mathcal{L}$  una matriz de  $2 \times 2$  con traza cero,  $\text{Tr}(\mathcal{L}) = a + d = 0$ ,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

Tomemos

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Por tanto, de la ecuación de Lax  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \beta c - \gamma b, \\ \dot{b} &= \alpha b + \beta d - \beta a - \delta b, \\ \dot{c} &= -\alpha c - \gamma d + \gamma a + \delta c, \\ \dot{d} &= -c\beta + \gamma b. \end{aligned}$$

Ahora, sabemos por nuestro argumento anterior, que  $\text{Tr}(\mathcal{L}) = a + d$  es constante en el tiempo. (Esto coincide con nuestra primera y última ecuaciones de nuestro conjunto anterior de ecuaciones.) Podemos tomar las constantes tal que su traza sea cero:  $\text{Tr}(\mathcal{L}) = a + d = 0 \Rightarrow d = -a$ . Por tanto,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \beta c - \gamma b, \\ \dot{b} &= \alpha b - 2\beta a - \delta b, \\ \dot{c} &= -\alpha c + 2\gamma a + \delta c. \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{L}) &= 0, \text{ es constante en el tiempo,} \\ \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathcal{L}^2) &= a^2 + bc, \text{ también es constante en el tiempo.} \end{aligned}$$

**Principio general.** Las ecuaciones de Lax tienen constantes de movimiento por virtud de su forma especial.

En este ejemplo,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  pueden ser escogidas arbitrariamente como funciones del tiempo,  $t$ , así como también las variables dependientes  $a, b, c$ :  $a^2 + bc$  es independiente de  $t$ .

Sin embargo, no sabemos si esta información es útil para resolver la ecuación diferencial.

**Ejemplo 7.5.II. La latiz de Toda.** Sea  $\mathcal{L}$  una matriz tridiagonal simétrica,

$$(107) \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} \\ & & & & & a_{N-1} & b_N & \end{pmatrix},$$

en donde  $a_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  y  $b_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Con  $a_i > 0$ , y  $b_j \in \mathbb{R}$ , tal que la matriz es llamada **matriz de Jacobi**. También sea

$$(108) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & -a_2 & & & & \\ & a_2 & 0 & -a_3 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_{N-2} & 0 & -a_{N-1} \\ & & & & & a_{N-1} & 0 & \end{pmatrix}.$$

Considere ahora la ecuación de Lax  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ .

Por lo tanto, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$(109) \quad \begin{aligned} \dot{a}_1 &= a_1(b_1 - b_2), \\ \dot{a}_2 &= a_2(b_2 - b_3), \\ &\dots \\ \dot{a}_{N-1} &= a_{N-1}(b_{N-1} - b_N), \\ \dot{b}_1 &= -2a_1^2, \\ \dot{b}_2 &= 2(a_1^2 - a_2^2), \\ &\dots \\ \dot{b}_i &= 2(a_{i-1}^2 - a_i^2), \\ &\dots \\ \dot{b}_N &= 2a_{N-1}^2, \end{aligned}$$

De (109), no podemos directamente determinar que  $\text{Tr}(\mathcal{L}^k)$  sean constantes en el tiempo. Esto se sigue de las ecuación de Lax,  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ .

**Interpretación física de la latiz de Toda.** Tomemos un sistema masa-resorte como un modelo para una cadena unidimensional de átomos interactuando debido a fuerzas no lineales. Ver figura 15.

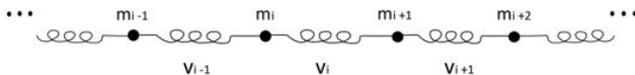


FIGURA 15. Representación física de la latiz de Toda.

Tomemos entonces las siguientes consideraciones.

- Las masas en general son diferentes. La masa de la  $i^{\text{ésima}}$  partícula =  $m_i$ .
- La cantidad de trabajo (energía) para comprimir el resorte una distancia  $r$  la denotamos por  $V_i(r)$  para la  $i^{\text{ésima}}$  partícula. Si  $r < 0$ , el resorte se comprime. Ver figura 16.

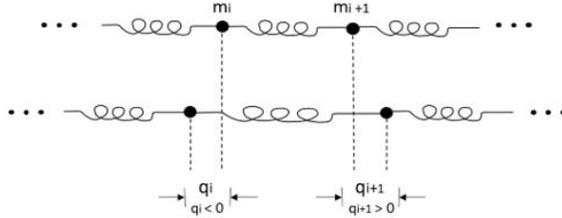


FIGURA 16. Extensión y compresión en la latiz de Toda.

- Los resortes no tienen masa.
- Energía total:

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{q}_i)^2 + V_i(q^{(i+1)} - q^{(i)}).$$

- $q_i$  es el desplazamiento de la  $i^{\text{a}}$  partícula de su posición de equilibrio.
- $q_{i+1} - q_i$  es la extensión total o compresión de el  $i^{\text{ésimo}}$  resorte.
- $V_i(r)$  es el trabajo hecho para comprimir/estirar el resorte = la energía potencial almacenada en el resorte.
- Definamos:

$$p_i = m_i \dot{q}_i = \text{momentum de la } i^{\text{ésima}} \text{ partícula.}$$

- La energía total, o el **Hamiltoniano**, está dada por:

$$(110) \quad H = \sum_i \frac{1}{2m_i} (p_i)^2 + V_i(q^{(i+1)} - q^{(i)}).$$

La suma se extiende sobre todas las partículas.

**Condiciones de frontera.** Información acerca de la primer y última partículas es requerida. Ver figura 17.

- Están atadas.
- están libres o,
- son periódicas (la última se pega con la primera.)

El potencial  $V_i(r)$  modela diferentes clases de fuerzas interatómicas. Además, sistemas generales de masa-resorte no son necesariamente sistemas Hamiltonianos integrables en general. Digamos, para el Hamiltoniano (110),

$$(111) \quad \begin{aligned} \dot{q}^{(i)} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}^{(i)} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

Morikazu Toda [40, 41] inventó un sistema no lineal con:

- $m_i = m, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \dots$ , *i.e.*, todas las masas son iguales,
- y todos los resortes iguales, *i.e.*,  $V_i(r) = V(r), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \dots$
- Entonces también todas las fuerzas son iguales y propuso el potencial

$$(112) \quad V(r) = \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta r} - 1) + \alpha r.$$

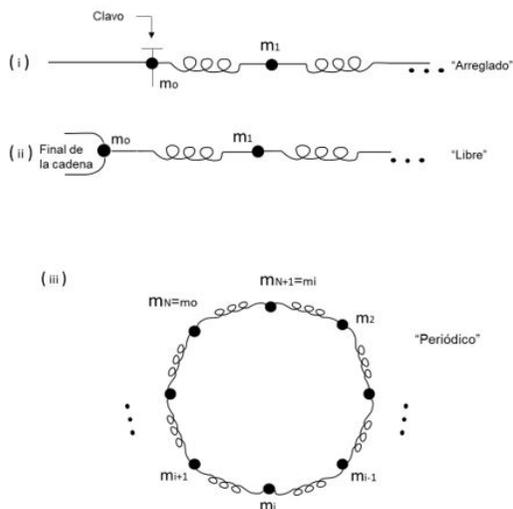


FIGURA 17. Condiciones de frontera de la latiz de Toda.

En casos límite, el potencial  $V(r)$  se aproxima a algunos modelos físicos estándar.

- Si  $k \equiv \alpha\beta$ , sea  $\beta \rightarrow 0$  y mantengamos fija  $\alpha$ ,

$$\frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta r} - 1) + \alpha r = \frac{\alpha}{\beta} \left( -r\beta + \frac{1}{2}\beta^2 r^2 + O(\beta^3) \right) + \alpha r = \frac{1}{2}\alpha\beta r^2 + O(\beta^2)$$

*i.e.*, para  $|\beta| \ll 1$ , tenemos el potencial del oscilador armónico:

$$V(r) = \frac{1}{2}\alpha\beta r^2 + O(\beta^2).$$

- Si  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $V(r) \rightarrow$  potencial que gobierna la interacción de bolas elásticas duras.

Entonces, poniendo  $\alpha = \beta = 1$ ,  $m = 1$  y  $r = r_i = q^{(i+1)} - q^{(i)}$ , el Hamiltoniano es

$$(113) \quad H = \sum_i \frac{1}{2m} (p_i)^2 + e^{-(q^{(i+1)} - q^{(i)})} + (q^{(i+1)} - q^{(i)}) - 1.$$

Si las condiciones de frontera son periódicas,  $q^{(N+1)} = q^{(1)}$  (o bien,  $q^{(N)} = q^{(0)}$ ), entonces la suma de  $(q^{(i+1)} - q^{(i)})$  es telescópica, la cual entonces suma cero, y uno se queda con (más una constante que puede ser despreciada pues eso sólo desplaza el origen en donde la energía valga cero)

$$(114) \quad \boxed{H = \sum_i \frac{1}{2m} (p_i)^2 + e^{-(q^{(i+1)} - q^{(i)})}.$$

Esta es la definición del Hamiltoniano de Toda y las propiedades bajo condiciones periódicas y no periódicas son estudiadas.

Las ecuaciones de Toda son:

$$(115) \quad \begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{1}{m} p_k \\ m\ddot{q}_k &= \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = e^{-(q^{(k)} - q^{(k-1)})} - e^{-(q^{(k+1)} - q^{(k)})} \end{aligned}$$

Si movemos la partícula  $0^{\text{ésima}}$  a  $x \rightarrow -\infty$  y la  $(N + 1)^{\text{ésima}}$  partícula a  $x \rightarrow +\infty$ , entonces

$$(116) \quad \begin{aligned} e^{q^{(0)}} &= 0, \\ e^{-q^{(N+1)}} &= 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Toda, (115), junto con estas condiciones de frontera, son llamadas la **latiz de Toda libre**.

La latiz de Toda con Hamiltoniano general (113) tiene más significados físicos que el de la latiz de Toda libre, pero esta última tiene muchas más propiedades matemáticas interesantes.

Excepto por las condiciones de frontera periódicas, (114) tiene como potencial  $V(r) = e^{-r}$ , el cual para  $r$  pequeña,  $V(r) = 1 - r + \frac{1}{2}r^2 - \dots$  **no** es el potencial del oscilador armónico, al contrario de (112).

Regresando a (109), definamos para  $i = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$(117) \quad \begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2}e^{-(q^{(i+1)} - q^{(i)})/2} \\ b_i &= \frac{1}{2}p_i. \end{aligned}$$

Esto es lo que se conoce como la **Transformación de Flaschka**.

Bajo la transformación de Flaschka, (117), podemos checar que la latiz de Toda, ecuaciones (115), (116), son equivalentes a las ecuaciones de Lax, (109). (¡Calcúlelas!).

Realmente **no** hay una interpretación física de la representación de Lax de la ecuación la latiz de Toda en coordenadas de Flaschka, ecuación (117).

Podemos ahora hacernos entonces varias preguntas.

- Q1.** Si comenzamos con el Hamiltoniano de Toda, (110), (111), (112) (o las ecuaciones (114), (116)), ¿cómo podría uno ir a la representación de Lax de la latiz (109)?
- Q2.** Las ecuaciones físicas son Hamiltonianas. ¿Cómo es que las ecuaciones de Lax son Hamiltonianas? Ellas están sobre una *órbita co-adjunta*.  
 Ecuaciones físicas:  
 Ecuaciones: ✓ ya escritas.  
 Hamiltoniano: ✓ ya escrito.  
 Ecuaciones de Lax:  
 Ecuaciones: ✓ ya escritas.  
 Hamiltoniano: Aún no lo escribimos.
- Q3.** Los valores propios de  $\mathcal{L}$  son constantes de movimiento. ¿Qué representan físicamente?
- Q4.** ¿Cómo resolvemos las ecuaciones?

**Ejemplo 7.5.III. La cadena de Toda periódica.** Sea el par de Lax,

$$(118) \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & & & & a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} & \\ a_N & & & & & & & a_{N-1} & b_N & \end{pmatrix},$$

$$(119) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & a_N \\ a_1 & 0 & -a_2 & & & & & \\ & a_2 & 0 & -a_3 & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & a_{N-2} & 0 & -a_{N-1} \\ -a_N & & & & & & a_{N-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que las esquinas superior derecha e inferior izquierda no son cero. Esto es debido a la periodicidad.

Para el caso periódico, tenemos (en cambio de (109)),

$$(120) \quad \begin{aligned} \dot{a}_1 &= a_1(b_1 - b_2), \\ \dot{a}_2 &= a_2(b_2 - b_3), \\ &\dots \\ \dot{a}_{N-1} &= a_{N-1}(b_{N-1} - b_N), \\ \dot{b}_1 &= 2(a_N^2 - a_1^2), \\ \dot{b}_2 &= 2(a_1^2 - a_2^2), \\ &\dots \\ \dot{b}_i &= 2(a_{i-1}^2 - a_i^2), \\ &\dots \\ \dot{b}_N &= 2(a_{N-1}^2 - a_N^2), \end{aligned}$$

Estas ecuaciones, (109) y (120), tienen la forma,

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= a_i(b_i - b_{i+1}), \\ \dot{b}_i &= 2(a_{i-1}^2 - a_i^2), \end{aligned}$$

En (109),  $a_0 = a_N = 0$ . Y en (120),  $a_0 = a_N$  y  $b_0 = b_N$ .

Las ecuaciones (120) representan la latiz de Toda periódica. Aquí, la transformación (117) es ambigua (de hecho, su inversa es la ambigua). Para quitarle la ambigüedad, requerimos:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \cdots a_N &= 2^N \\ b_1 + b_2 + \cdots + b_N &= 0. \end{aligned}$$

La segunda condición  $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 0$  es la conservación del momentum en mecánica.

**El poder de las nuevas variables.**

En el ejemplo, 7.5.II, tenemos el polinomio característico de  $\mathcal{L}$ ,

$$p_{\mathcal{L}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} b_1 - \lambda & a_1 & & & & & & \\ a_1 & b_2 - \lambda & a_2 & & & & & \\ & a_2 & b_3 - \lambda & a_3 & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} - \lambda & a_{N-1} \\ & & & & & & a_{N-1} & b_N - \lambda \end{pmatrix},$$

$p_{\mathcal{L}}(\lambda)$  es independiente del tiempo, puesto que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  (sus raíces) son independientes de  $t$ .

En el presente ejemplo,  $\mathcal{L}$  y  $B$  se pueden reemplazar por

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & & & \rho a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} & \\ \frac{a_N}{\rho} & & & & & & a_{N-1} & b_N & \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & \rho a_N \\ a_1 & 0 & -a_2 & & & & & & \\ & a_2 & 0 & -a_3 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_{N-2} & 0 & -a_{N-1} & \\ -\frac{a_N}{\rho} & & & & & & a_{N-1} & 0 & \end{pmatrix},$$

en donde  $\rho \neq 0$  es un parámetro arbitrario. Si calculamos  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ , ¡obtenemos (120)!

De nuevo, las raíces de  $\det(\mathcal{L} - \lambda I) = 0$  son independientes del tiempo  $t \Rightarrow$  el polinomio  $\det(\mathcal{L} - \lambda I)$  también es independiente de  $t$ .

Por otra parte, tenemos que la función racional

$$\mathcal{R}(\rho, \lambda) = \det(\mathcal{L} - \lambda I)$$

es un polinomio en dos parámetros,  $\rho$  y  $\lambda$ . Ahora.

$$\mathcal{R}(\rho, \lambda) = 0$$

representa una curva algebraica, ¡y la teoría de superficies de Riemann comienza a aparecer aquí! No obstante, el estudio de ecuaciones periódicas, la teoría de la Geometría Algebraica y las superficies de Riemann las dejaremos para otra ocasión.

**Ejemplo 7.5.IV.** Más notas sobre la cadena de Toda: preguntas de matemáticas. Sea  $\mathcal{L}$  una matriz de la forma (107) o (118), en donde tenemos:

- sea  $N - 1$   $a_n$ 's y  $N$   $b_n$ 's,
- o bien,  $N$   $a_n$ 's y  $N$   $b_n$ 's.

¿Debemos esperar que una deformación iso-espectral exista? *I.e.*, podemos cambiar las entradas de  $\mathcal{L}$  y aún obtener que los valores propios de  $\mathcal{L}$  sean constantes en el tiempo?

Las  $\mathcal{L}$ 's tienen sea  $2N - 1$  o  $2N$  entradas distintas de cero. Los  $N$  valores propios constantes imponen  $N$  condiciones, tales que restan  $N - 1$  o  $N$  relaciones (grados de libertad) para variar las entradas de  $\mathcal{L}$ .

Hasta el momento, tenemos **sólo una** deformación invariante, a saber  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ . De este modo, esperamos  $N - 2$  o  $N - 1$  deformaciones iso-espectrales más, todas ellas, independientes (“*independientes*” en un sentido a ser definido.)

**Q1.** ¿Cómo podría uno dibujar esto geoméricamente? El conjunto de las  $\mathcal{L}$  de la forma

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} \\ & & & & & & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix},$$

puede ser puesto en un espacio de  $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^{N-1}$ . Las  $a_n$ 's viven en  $(\mathbb{R}^+)^{N-1}$  y las  $b_n$ 's viven en  $\mathbb{R}^N$ . ( $\mathbb{R}^+$  es el conjunto de los números positivos reales.) Y la matriz

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & & & & a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} & & \\ a_n & & & & & & a_{N-1} & b_N & & \end{pmatrix},$$

está en  $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^N$  ( $a_n \in \mathbb{R}^+$ ,  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ). Los subconjuntos (en  $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^{N-1}$  o en  $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^N$ ) de  $\mathcal{L}$ 's con valores propios dados  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  son llamados **variedades iso-espectrales**. Estas variedades iso-espectrales son subconjuntos  $(2N - 1)$ - o  $(2N)$ -dimensionales (los cuales, de hecho, son subvariedades.)

Las deformaciones iso-espectrales, como las curvas  $t \mapsto \mathcal{L}(t)$  que resuelven la latiz de Toda, caerán enteramente en estas variedades. Los campos vectoriales, que definen la ecuación de Lax,  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ , son tangentes a la variedad iso-espectral. Ver la figura 18.

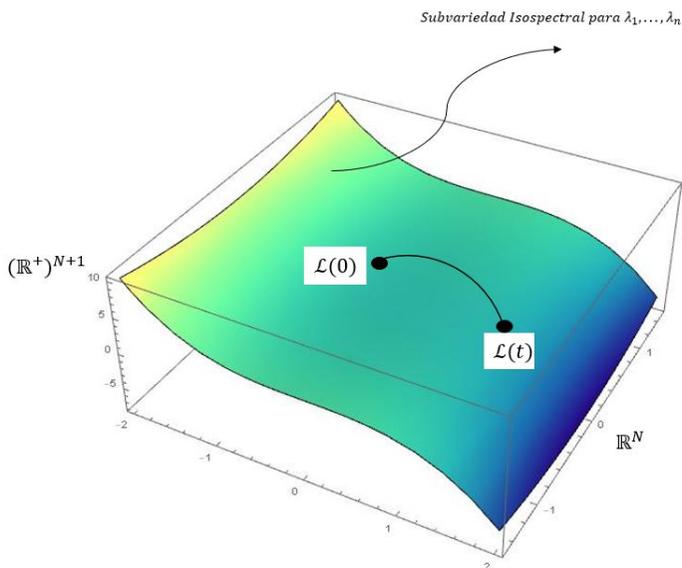


FIGURA 18. Deformación isospectral

PROBLEMA 7.5.1 (**Problema matemático.**). *Aclarar la estructura de las variedades iso-espectrales.*

**Q2.** Para resolver la ecuación diferencial  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ , formulemos otra pregunta: Dados los desplazamientos y las velocidades iniciales de todas las masas de la latiz de Toda libre, en  $t = 0$ :  $\overset{\circ}{q}^1, \dots, \overset{\circ}{q}^N, \overset{\circ}{p}_1, \dots, \overset{\circ}{p}_N$ , queremos resolver las ecuaciones de movimiento de Hamilton, ecuaciones (110), (111).

Primero, consideremos  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ , y calculemos  $\overset{\circ}{a}_1, \dots, \overset{\circ}{a}_{N-1}, \overset{\circ}{b}_1, \dots, \overset{\circ}{b}_N$ , por la transformación de Flaschka, ecuación (117). Ahora, construyamos una matriz de Jacobi,  $\mathcal{L}(0) = \overset{\circ}{\mathcal{L}}$ . Los valores propios de  $\overset{\circ}{\mathcal{L}}$  son constanes en el tiempo.

En orden para resolver  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ , con condiciones iniciales  $\mathcal{L}(0) = \overset{\circ}{\mathcal{L}}$  dadas, “solamente” **necesitamos seguir** otros  $N$  parámetros, las coordenadas que distinguen diferentes matrices sobre una sub-variedad iso-espectral.

**Q3.** ¿Qué cantidades, aparte de los valores propios, determinarán todas las entradas de la matriz de Jacobi? ¿Cómo estas cantidades cambian con  $\mathcal{L}$ ?

**Q4. Relación con mecánica Hamiltoniana.** Dadas las constantes de movimiento, ¿cómo se reduce, de manera efectiva, el número de incógnitas?

**Q5.** Todo esto *implica una teoría espectral inversa*. ¿Hasta que punto el espectro de un operador lineal  $\mathcal{L}$  determina el operador?

Para hacer una analogía, nos referimos al operador de Laplace. Consideremos el problema de valores propios del operador de Laplace en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , con condiciones de frontera de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\lambda u, & x \in \Omega, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

siendo  $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  los valores propios del operador de Laplace, que físicamente representan frecuencias naturales de un tambor de forma  $\Omega$ :

$$\text{Forma de un tambor } \Omega \quad \Rightarrow \quad \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}} - \text{frecuencias.}$$

Ahora, formulemos la pregunta opuesta. Bueno, mas que opuesta, *la pregunta inversa*.

De [20], si uno puede escuchar los sonidos (todos los sonidos) de un tambor (*i.e.*, escuchar todas sus frecuencias), entonces uno puede recobrar todos los valores propios  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$  (hay un número infinito de ellos). Ahora bien, ¿puede conocer la forma del tambor que los genera?

El problema fue resuelto en 1992 por Gordon, Webb, and Wolpert [17, 18], cuya respuesta es **no**.

En [14], se estudian y resuelven varios problemas análogos más sencillos en una dimensión.

## 7.6. Ecuaciones de Lax: Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs).

**Ejemplo 7.6.I. La ecuación de Korteweg-deVries.** Aquí,  $\mathcal{L}$  no es una matriz, es un operador diferencial. Este es el ejemplo original de la ecuación Lax.

Una pregunta auténtica en este sentido es la siguiente. ¿Cómo se ve el conjunto de todas las matrices con espectro fijo? Trataremos de resolver esta pregunta, pero en el contexto de operadores diferenciales.

Sea  $\mathcal{L}$  el operador diferencial  $D^2 + q$ , en donde  $D = \frac{d}{dx}$  y  $q = q(x)$ . Éste puede ser definido en  $L^2([a, b])$ , con  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  y condiciones de frontera apropiadas.

**Ejemplo 7.6.II. El operador Laplaceano en una dimension.** Consideremos el problema de valores propios con  $q = 0$  y condiciones de frontera periódicas:

$$(121) \quad \begin{aligned} y''(x) &= \lambda y(x), & -\infty \leq a < b \leq +\infty, \\ y(a) &= y(b), \\ y'(a) &= y'(b). \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$(122) \quad \lambda_0 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -\left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2, \dots, \lambda_{2j-1} = \lambda_{2j} = -\left(\frac{2j\pi}{b-a}\right)^2, \dots,$$

con funciones propias

$$(123) \quad y_0(x) = 1, y_1(x) = \sin(\sqrt{\lambda_1}x), y_2(x) = \cos(\sqrt{\lambda_1}x), \dots$$

Si  $q(x) \neq 0$ , los valores propios están separados:  $\lambda_1 \neq \lambda_2, \dots$ , etc. Veremos los detalles más adelante.

Hay más posibilidades de condiciones de frontera. Podemos pensar también en  $D^2 + q$ , como una matriz grandotota con valores propios y, como las matrices usuales, tiene valores propios. Similarmente,  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$  debe implicar que estos valores propios son independientes de  $t$ .

Intentemos encontrar un operador  $B$ , asociado a  $\mathcal{L}$ , tal que,

$$\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}].$$

Comencemos con  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t) = D^2 + q(x; t)$ . Para cada  $t$ , tenemos un operador en la variable  $x$ . El coeficiente es diferente para cada  $t$ . Entonces, el operador es una función,  $\mathcal{L}(t)$ , del tiempo  $t$  y es *deformado* en el tiempo  $t$ . También suponemos que  $q(x, t)$  es suave en  $t$ .

El operador  $\mathcal{L}$  aplicado a  $f(x)$  es

$$\mathcal{L}f(x) = f''(x) + q(x, t)f(x),$$

de tal forma que si tomamos  $\frac{\partial}{\partial t}$  a  $\mathcal{L}f(x)$ , obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}f(x)) = \left(\frac{\partial}{\partial t}q(x, t)\right)f(x).$$

De esta forma, definamos:

$$\dot{\mathcal{L}} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} = q_t,$$

el cual es un operador de multiplicación:  $\dot{\mathcal{L}}f = q_t f$ . Así, debemos requerir que de igual modo  $[B, \mathcal{L}]$  sea un operador de multiplicación, de forma tal que todos los cálculos de derivadas se cancelen.

**Caso 1.  $\mathbf{B} = \mathbf{D}$ .** Aquí,  $\dot{\mathcal{L}} = q_t = [B, \mathcal{L}] = [D, D^2 + q]$ . Calculemos separadamente el lado derecho de esta ecuación.

$$\begin{aligned} [D, D^2 + q]\psi &= D(D^2 + q)\psi - (D^2 + q)D\psi, \\ &= D(\psi'' + q\psi) - (D^2 + q)\psi', \\ &= \psi''' + q'\psi + q\psi' - (\psi''' + q\psi'), \\ &= q'\psi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $[D, D^2 + q] = q_x$ , de forma tal que  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$  es

$$q_t = q_x,$$

la cual tiene solución general

$$q(x, t) = q_0(x + t),$$

en donde  $q_0$  es una función diferenciable,  $q_0 \in C^1(\mathbb{R})$ .

**AFIRMACIÓN 7.6.1.** *Los valores propios de  $D^2 + q_0(x)$  son invariantes bajo traslaciones.*

**Prueba.** Si  $y(x)$  es una solución de

$$y''(x) + q_0(x)y(x) = \lambda y(x),$$

para algún  $\lambda$ , entonces  $z(x) \equiv y(x + t)$  resuelve

$$z''(x) + q_0(x + t)z(x) = \lambda z(x).$$

□

**Caso 3.** (Iremos al caso 2 enseguida.) Echémosle un vistazo al operador de tercer orden  $B$  de la forma,

$$B = a(x)D^3 + u(x)D + v(x),$$

tal que  $[B, \mathcal{L}]$  es un operador de multiplicación. Tenemos que calcular  $[B, \mathcal{L}] = [aD^3 + uD + v, D^2 + q]$ :

$$\begin{aligned} [aD^3 + uD + v, D^2 + q]\psi &= (aD^3 + uD + v)(\psi'' + q\psi) - (D^2 + q)(a\psi''' + u\psi' + v\psi), \\ &= a(\psi^{(5)} + q'''\psi + 3q''\psi' + 3q'\psi'' + q\psi''') \\ &\quad + u(\psi'''' + q'\psi + q\psi')v\psi'' + vq\psi \\ &\quad - (a''\psi'''' + 2a'\psi^{(4)} + a\psi^{(5)}) \\ &\quad - (u''\psi' + 2u'\psi'' + u\psi''') \\ &\quad - (v''\psi + 2v'\psi' + v\psi'') - (qa\psi'''' + qu\psi' + qv\psi), \\ &= a(q'''\psi + 3q''\psi' + 3q'\psi'') \\ &\quad + uq'\psi \\ &\quad - (a''\psi'''' + 2a'\psi^{(4)}) \\ &\quad - (u''\psi' + 2u'\psi'') \\ &\quad - (v''\psi + 2v'\psi'), \\ &= -2a'\psi^{(4)} - a''\psi'''' + (3aq' - 2u')\psi'' \\ &\quad + (3aq'' - u'' - 2v')\psi' + (aq''' + uq' - v'')\psi \\ &= [-2a'D^4 - a''D^3 + (3aq' - 2u')D^2 \\ &\quad + (3aq'' - u'' - 2v')D + (aq''' + uq' - v'')]\psi. \end{aligned}$$

Para tener un operador de multiplicación, necesitamos que los coeficientes del operador de diferenciación sean todos cero:

$$D^4 : \quad a_x = 0 \Rightarrow a = \text{constante.}$$

$$D^3 : \quad a_{xx} = 0, \quad \text{se satisface automáticamente.}$$

$$D^2 : \quad 3aq' - 2u' = 0 \Rightarrow (3aq - 2u)_x = 0, \quad \text{puesto que } a = \text{constante,}$$

$$3aq - 2u = \tilde{c} \Rightarrow u = \frac{3}{2}aq + c,$$

$$D : \quad 3aq'' - u'' - 2v' = 0 \Rightarrow 3aq'' - \frac{3}{2}aq'' - 2v' = 0$$

$$\frac{3}{2}aq'' - 2v' = 0 \Rightarrow v' = \frac{3}{4}aq''$$

$$\Rightarrow v = \frac{3}{4}aq' + d \quad (d = \text{constante}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} q_t &= \dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}] = aq_{xxx} + uq_x - v_{xx} \\ &= aq_{xxx} + \left(\frac{3}{2}aq + c\right)q_x - \frac{3}{4}aq_{xxx} \\ &= \frac{1}{4}aq_{xxx} + \frac{3}{2}aqq_x + cq_x, \end{aligned}$$

*i.e.*,

$$q_t = \frac{a}{4}(q_{xxx} + 6qq_x + 4cq_x),$$

la cual es una EDP no lineal para  $q = q(x, t)$ . Escojamos  $a = 4$ ,  $c = 0$ . De esta manera obtenemos la famosa ecuación de Korteweg-deVries:

$$q_t + q_{xxx} + 6qq_x = 0.$$

**Caso 2.** ¿Por qué nos saltamos este caso de operadores de segundo orden? Por lo siguiente.

Consideremos el operador lineal de segundo orden  $B = \alpha(x)D^2 + \beta(x)D + \gamma(x)$ . Calculemos  $[B, \mathcal{L}]\psi$ :

$$\begin{aligned}
 [B, \mathcal{L}]\psi &= [\alpha D^2 + \beta D + \gamma, D^2 + q]\psi \\
 &= (\alpha D^2 + \beta D + \gamma)(\psi'' + q\psi) - (D^2 + q)(\alpha\psi'' + \beta\psi' + \gamma\psi) \\
 (124) \quad &= \dots \text{ ( algunos cálculos no muy largos ... )} \\
 (125) \quad &= [(-2\alpha')D^3 + (-\alpha'' - 2\beta')\psi D^2 + (2\alpha q_x - \beta'' - 2\gamma')D + (\alpha q_{xx} \\
 &\quad + \beta q_x - \gamma'')]\psi.
 \end{aligned}$$

Como en el caso anterior, requerimos un operador de multiplicación, de forma tal que debemos poner en ceros todos los coeficientes del operador  $D$  y sus potencias:

$$\begin{aligned}
 D^3 : \quad & -2\alpha' = 0 \Rightarrow \alpha = \text{constant} = \alpha_0. \\
 D^2 : \quad & -\alpha'' - 2\beta' = 0 \Rightarrow \beta = \text{constant} = \beta_0. \\
 D : \quad & 2\alpha q_x - \beta'' - 2\gamma' = 0 \Rightarrow \gamma' = \alpha_0 q_x \Rightarrow \gamma = \alpha_0 q + c_1.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[B, \mathcal{L}]\psi = \alpha_0 q_{xx} + \beta_0 q_x - (\alpha_0 q)'' = \beta_0 q_x,$$

y

$$B = \alpha_0 D^2 + \beta_0 D + (\alpha_0 q + c_1) \Rightarrow B = \alpha_0 \mathcal{L} + \beta_0 D + c_1.$$

Podemos verificar que  $[B, \mathcal{L}] = [\alpha_0 \mathcal{L} + \beta_0 D + c_1, \mathcal{L}] = \alpha_0 [\mathcal{L}, \mathcal{L}] + \beta_0 [D, \mathcal{L}] + c_1 [I, \mathcal{L}] = 0 + \beta_0 [D, D^2 + q] + 0 = \dots = \beta_0 q_x$ , el cual es una variación del Caso 1.

**Caso  $2j + 1$ .** Hay operadores diferenciales de todos los ordenes **impares**, tales que  $[B, \mathcal{L}]$  es un operador de multiplicación. Por lo tanto, la ecuación de Lax  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$  se convierte en la EDP

$$q_t = \text{expresión no lineal en } q, q_x, \dots, \frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}} q.$$

**Método general** para encontrar las ecuaciones de Lax de orden “más alto”: se hará más tarde.

**Caso más general:  $2j$ .** Si queremos que  $B$  sea de orden **par** y el  $[B, \mathcal{L}]$  sea un operador multiplicativo, entonces necesitamos:

$$B = \text{const.} \mathcal{L}^j + \text{cosas de orden } (2j - 1),$$

lo cual implica que  $[\mathcal{L}^j, \mathcal{L}] = 0$ , *i.e.*, hay una contribución nula en este orden, y regresamos al caso anterior y  $B$  tiene que ser de orden impar (hecho no obvio por el momento.)

Hemos encontrado entonces una familia de EDPs relacionadas a la ecuación de KdV,

$$q_t = (\text{Operador diferencial no lineal})[q],$$

llamada la **jerarquía de Lax de la ecuación de Korteweg-deVries** o, simplemente, **jerarquía de la ecuación de Korteweg-deVries**. Estos son **flujos Hamiltonianos conmutativos** en un espacio fásico  $\infty$ -dimensional. (El corchete indica “aplicado a ...”).

Las ecuaciones de Lax,  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ , son “*deformaciones*” iso-espectrales del operador diferencial  $\mathcal{L}$ . Hemos considerado este operador diferencial en particular, pero hay otros tipos de operadores los cuales también son iso-espectrales, tales como operadores integro-diferenciales o el operador de Zakharov-Shabat [35]. Esto requiere un entendimiento profundo de teoría espectral.

**Ejemplo 7.6.III. La ecuación de Korteweg-deVries. Interpretación física.**  
La ecuación de Korteweg-deVries

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

es muy importante en hidrodinámica, física de plasmas, etc.

Comencemos con la ecuación de onda más simple, la ecuación uni-dimensional de onda (retomémosla aunque ya la hayamos estudiado,)

$$(126) \quad q_t + aq_x = 0, \quad a = \text{constant.}$$

Si la condición inicial es dada,

$$q(x, 0) = f(x),$$

entonces, la solución es

$$q(x, t) = f(x - at).$$

Si, digamos,  $a > 0$ , tenemos una translación por una distancia,  $at$ , a la derecha. Ver figura 19.

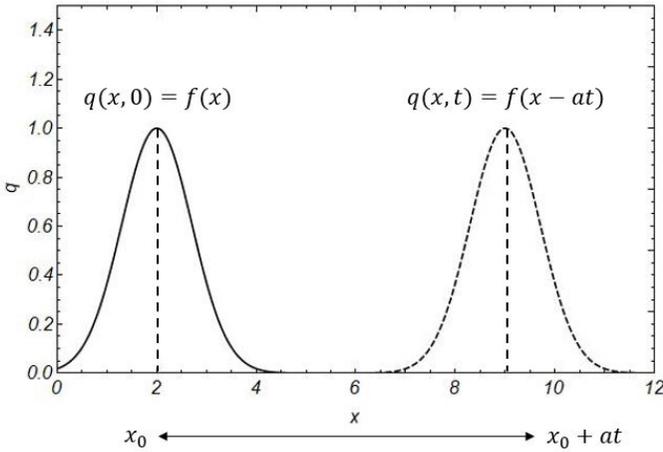


FIGURA 19. Onda translacional

**Disipación.** Es el mecanismo en el cual se le quita energía al sistema. Si a la ecuación (126) le agregamos el término  $bq_{xx}$ , obtenemos:

$$(127) \quad q_t + aq_x = bq_{xx}, \quad b > 0, \quad q(x, 0) = f(x).$$

El término  $bq_{xx}$  es el termino *disipativo*.

Este problema de valores iniciales se puede resolver con el método de transformadas de Fourier cuya solución es:

$$(128) \quad q(x, t) = \frac{1}{\sqrt{b\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(\frac{x - at - y}{bt}\right)^2 dy.$$

Si sustituímos  $q(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$  en (127), obtenemos

$$\omega(k) = ak - ibk^2.$$

Por lo tanto,  $q^{(k)} = e^{ik(x-at) - bk^2t}$  resuelve (127). Tomando, digamos, la parte imaginaria (aplica lo mismo si tomamos la parte real,)

$$e^{-bk^2t} \sin(k(x - at)),$$

describe

- (a) una onda sinusoidal,
- (b) una onda translacional con velocidad  $a$ , y
- (c) una onda con amplitud decreciente por un factor  $e^{-bk^2t}$ .

**Análisis de Fourier.** La solución puede ser escrita en términos de todas las  $q^{(k)}$ :

$$q(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik(x-at) - bk^2t} dk,$$

con condición inicial

$$q(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk,$$

$|A(k)|$  denota la amplitud de la componente  $e^{ikx}$ . Entonces, todas las componentes son trasladadas una distancia  $at$ :

$$e^{ikx} \longrightarrow e^{ik(x-at)}.$$

Asimismo, la amplitud decrece como

$$|A(k)| \longrightarrow e^{-bk^2t} |A(k)|.$$

El factor de amortiguamiento  $e^{-bk^2t}$  eliminará componentes de  $k$  grandes más rápidamente.

### Terminología.

$$\begin{aligned} k &= \text{número de onda,} \\ \omega &= \text{frecuencia,} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \text{longitud de onda,} \\ R(\omega, k) &= 0 : \text{relación de dispersión} \end{aligned}$$

**Efectos dispersivos.** Consideremos la ecuación de onda dispersiva

$$(129) \quad q_t = -aq_x + cq_{xx}.$$

Sustituyamos  $q(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$  para obtener

$$\omega(k) = ak + ck^3.$$

La solución a esta ecuación de onda dispersiva es

$$(130) \quad q(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik(x - (a + ck^2)t)} dk.$$

Notemos que la amplitud **no** es amortiguada. Los modos armónicos se trasladan con **velocidades dependientes de  $k$** .

$$e^{ikx} \longrightarrow e^{ik(x - (a + ck^2)t)},$$

*i.e.*, la velocidad de propagación de un modo depende del número de onda. Ver figuras 20 y 21.

Este fenómeno se llama **dispersion**: la luz pasando a través de un prisma, onditas en el agua después de que una piedra se aventó en un charco, etc.

La ecuación de onda,

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

**no** muestra disipación ni dispersión!

**Efectos no lineales.** Cambiemos  $q_t = -aq_x$  por:

$$q_t = -qq_x,$$

la cual es una ecuación no lineal. La exponencial compleja,  $q(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ , **no** resuelve esta ecuación, precisamente por la no linealidad: el análisis de Fourier no puede ser usado aquí.

En esta situación, busquemos soluciones de la forma

$$q(x, t) = f(x - qt),$$

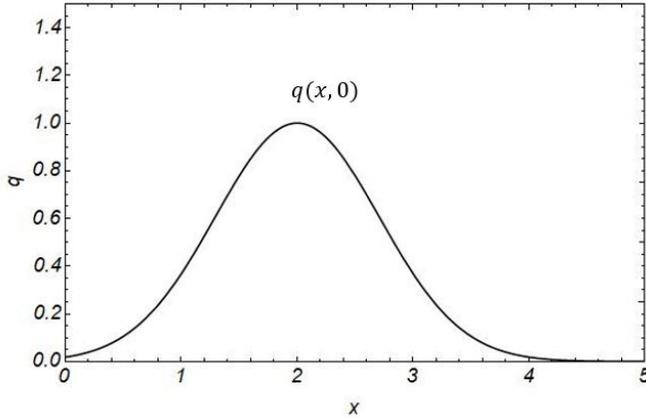


FIGURA 20. Condición inicial para la onda dispersiva

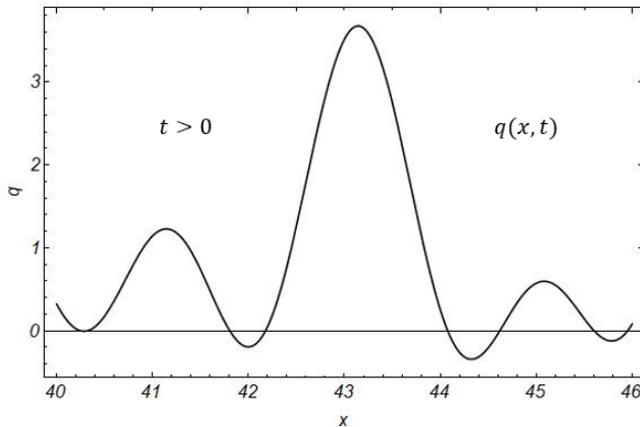


FIGURA 21. Evolución de la onda dispersiva

para alguna función continuamente diferenciable,  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , excepto, quizá, en algunos puntos aislados. Notemos que  $q = q(x, t)$  aparece en el argumento de  $f$ ,

Este tipo de solución, para la condición inicial  $q(x, 0) = f(x)$ , evoluciona como lo muestran las figuras 22, 23 y 24.

Decimos entonces que la onda “se rompe”, “se quiebra” o que ha “desarrollado una discontinuidad” (¡en  $q_x(x, t)$ !) o un “shock” o “choque”. Es común estudiar ondas de choque “promediando” las ondas de choque [28]. Ver figura 25. Por ejemplo, ondas poco profundas en la playa desarrollan ondas de choque, como lo vemos en las olas del mar cuando llegan a la playa.

**La ecuación de Korteweg-deVries.** La ecuación de Korteweg-deVries, como se ha mencionado previamente, es una ecuación que describe propagación de ondas en agua poco profunda [37, 38, 23]. La ecuación incorpora tanto efectos dispersivos, como no lineales. Algo completamente sorprendente (¡**¿o milagroso acaso?!**) es que soluciones a esta ecuación describen el equilibrio entre la dispersión y la no linealidad. Como consecuencia, no hay pérdidas de energía o cambios en la forma de la solución. Ver figuras 26 y 27.

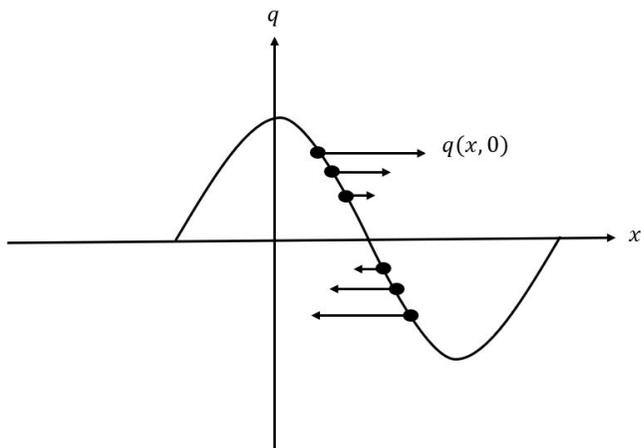


FIGURA 22. Condición inicial para una onda de choque

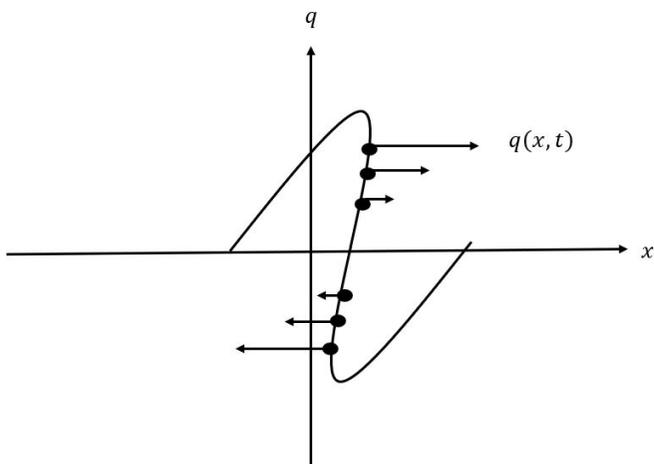


FIGURA 23. Evolución de una onda de choque

La ecuación de KdV,

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0,$$

surge como una aproximación a órdenes mayores de dispersión y no linealidad. Si  $q$  es pequeño,  $|q^2q_x| \ll |qq_x|$ . Puesto que  $q$  no es tan pequeño, *i.e.*, **no** es “infinitesimal”, entonces  $|qq_x|$  contribuye a la ecuación.

Similarmente,  $|q_{xxxx}| \ll |q_{xxx}|$ , lo cual significa que  $e^{i(kx+k^5t)}$  es menos significativo que  $e^{i(kx-k^3t)}$ . Esto funciona si  $k$  es chico. Entonces,  $k^5$  es más pequeño que  $k^3$ . Sin embargo, para valores grandes de  $t$ , entonces  $k^5t$  es grande y podría tener una contribución significativa.

**No linealidad  $\sim$  Amplitud de onda.**

$q$  infinitesimal  $\implies$  no hay términos no lineales (matemáticamente, una ecuación no lineal es reemplazada por su linealización alrededor de cero).

$q$  pequeña  $\implies$  términos no lineales cuadráticos.

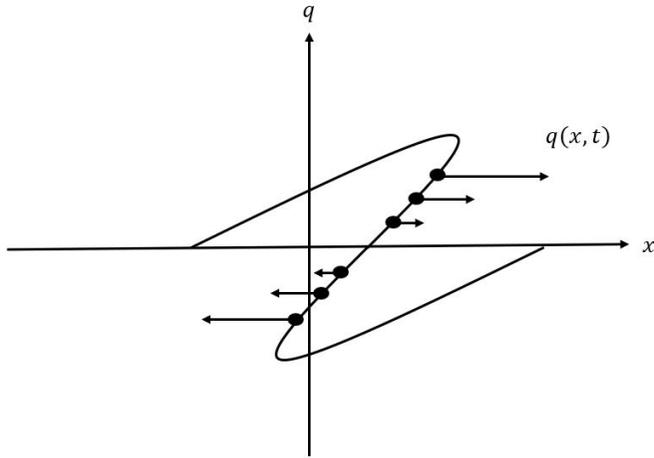


FIGURA 24. Más evolución de una onda de choque

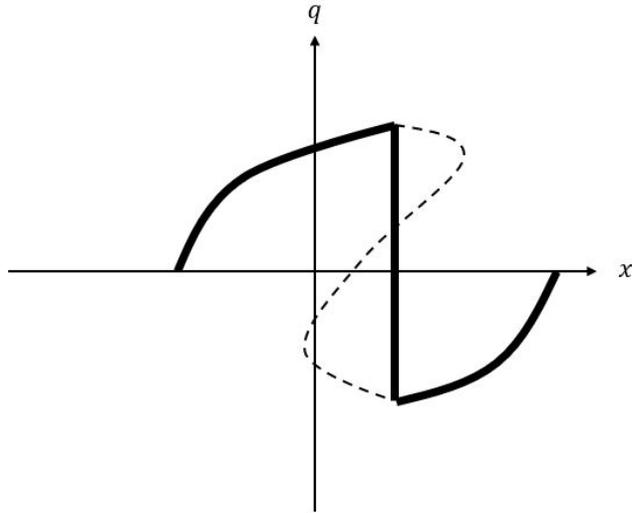


FIGURA 25. Promediando ondas de choque

Esto solamente es una expansión en Taylor en los parámetros que miden el tamaño de  $q$ .

**Dispersion  $\sim$  Longitud de onda.**

- $q$  tiene una longitud de onda “infinita” o  $k \sim 0 \implies$  no hay dispersion.
- $q$  tiene ondas largas solamente. O  $k$  es chica pero no 0  $\implies q_{xxx}$ ,
- $\implies$  dispersion de 3<sup>er</sup> orden

Esto es sólo una expansión en Taylor alrededor del número de onda  $k$ .

Una aproximación más es la derivación de la ecuación de KdV: efectos 2-dimensionales o 3-dimensionales son débiles. Pero aún así podemos tener propagación hacia la izquierda o derecha.

La derivada de primer orden,  $\partial_t$ , restringe el movimiento a la derecha o a la izquierda, como en  $q_t + aq_x = 0$ .

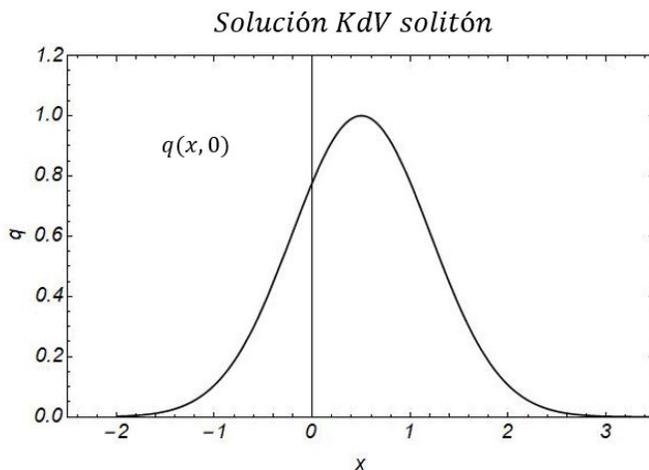


FIGURA 26. Condición inicial del solitón de KdV

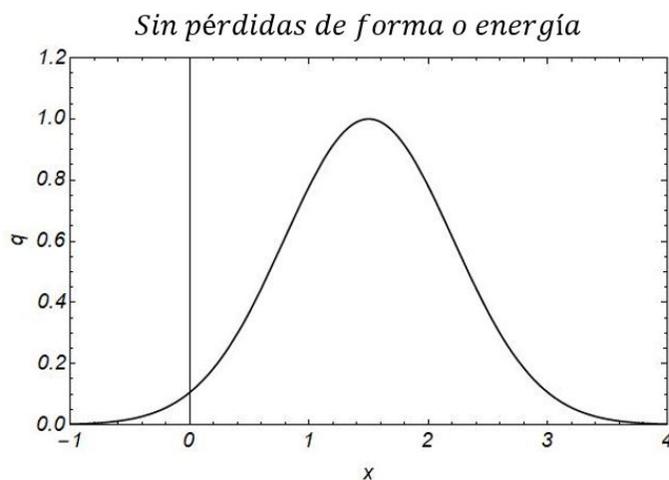


FIGURA 27. El solitón de KdV

**7.7. Resumen.** Tenemos una ecuación para operadores:

$$\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}].$$

Ésta define una “**deformación**” **iso-espectral** del operador  $\mathcal{L}$ . Aquí representa una EDO, o una EDP, o una ecuación discreta, para los coeficientes del operador  $\mathcal{L}$ .

Falta:

- checar que esta ecuación es Hamiltoniana y
- checar cómo podemos extraer información de ella.

No obstante, esto lo dejaremos para otro curso.

**Dos ejemplos.** Se estudiaron dos ejemplos: la cadena de Toda y la ecuación de Korteweg-deVries y se pusieron en forma de la ecuación de Lax. Son los ejemplos de ecuaciones y modelos típicos (y más sencillos) de ecuaciones integrables.

Estos también representan algunas cantidades físicas y fenómenos en la naturaleza.

**Referencias.** Esta sección está basada principalmente en las siguientes cuatro fuentes: [14] H. Flaschka. *Notes on Soliton theory*, [26] P. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolutions and solitary waves*. CPAM **XXI**. 467-490 (1968), [27] P. Lax, *Periodic solutions of the KdV equation*. CPAM **XXVIII**. 141-188 (1975), y [21] A. Kasman. *Glimpses of Soliton Theory*. American Mathematical Society. Student Mathematical Library, vol. **54** (2010).

## 7.8. Tarea.

TAREA 7.1. *Construya las primeras tres ecuaciones de KdV en la jerarquía de Lax, (101), usando la formulación variacional (100) y las primeras tres cantidades conservadas de la ecuación de KdV, (102).*

TAREA 7.2. *Revise la prueba del teorema de Lax, 7.2.2, en [26], [10], [38], [37], [35] o en [21].*

TAREA 7.3. *Considere ahora la ecuación de Lax  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ . Pruebe las siguientes afirmaciones para  $B$  y  $\mathcal{L}$  dadas como en (107) y (108).*

- (i) *Checar que  $[B, \mathcal{L}]$  es tridiagonal y simétrica. Puesto que  $\dot{\mathcal{L}}$  es tridiagonal y simétrica, también  $[B, \mathcal{L}]$  debe ser tridiagonal y simétrica.*
- (ii) *De un cálculo directo, podemos checar que el producto de matrices tridiagonales es tridiagonal. Así,  $[B, \mathcal{L}]$  es tridiagonal. Verifíquelo.*
- (iii) *Ahora  $[B, \mathcal{L}]^T = (B\mathcal{L})^T - (\mathcal{L}B)^T = \mathcal{L}^T B^T - B^T \mathcal{L}^T = \mathcal{L}(-B) - (-B)\mathcal{L} = -\mathcal{L}B + B\mathcal{L} = [B, \mathcal{L}] \Rightarrow [B, \mathcal{L}]$  es simétrica.*
- (iv) *Los elementos fuera de la diagonal de  $\dot{\mathcal{L}}$  no son necesariamente positivos.*

TAREA 7.4. *Construya las ecuaciones (109) usando (107), (108) y la ecuación de Lax (106).*

TAREA 7.5. *Usando el Teorema de Lax, teorema 7.4.2, pruebe que  $\text{Tr}(\mathcal{L}^k)$  son constantes de movimiento*

TAREA 7.6. *Usando la transformación de Flaschka (117), transforme las ecuaciones de Toda (115), para obtener las ecuaciones de Flaschka (109).*

TAREA 7.7. *Constuya las ecuaciones (120) usando los operadores definidos en las ecuaciones (118) y (119), y la ecuación de Lax (106).*

TAREA 7.8. *Verifique que los valores y funciones dados en (122) y en (123) son efectivamente los valores propios y funciones propias correspondientes al problema de valores en la frontera dado en (121).*

TAREA 7.9. *Efectúe los cálculos no muy largos que deben ir en la ecuación (124) para obtener la ecuación (125).*

TAREA 7.10. *Calcule el operador  $B$  de orden 5° y la correspondiente ecuación de Lax  $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ . Debe obtener:*

$$q_t + 3q^2 q_x + 20q_x q_{xx} + 10q_x q_{xxx} + \partial_x^5 q.$$

TAREA 7.11. *Resolver la ecuación (127) con transformadas de Fourier para obtener la solución (128). Puede hacerlo de dos maneras.*

1. *Aplicar la transformada de Fourier a la ecuación (127) y usar propiedades de la transformada.*
2. *Con el camino de variables,  $x = a\tau + y$ ,  $t = \tau$  para obtener la ecuación del calor y resolverla como se hizo en la sección 5.3.*

TAREA 7.12. *Con la transformada de Fourier, encuentre la solución (130) de (129). Describa qué es  $A(k)$  en términos del problema de valores iniciales de (129).*

## 8. EL MÉTODO DE DISPERSIÓN INVERSA.

La ecuación que ahora deseamos resolver es la ecuación de Korteweg-deVries (KdV),

$$(131) \quad u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Notemos que hemos puesto  $q(x, t) = -u(x, t)$ . Como condición inicial para este problema tomemos:

$$(132) \quad u(x, 0) = V(x),$$

donde la función  $V(x)$  es una función dada.

Nuestro problema es un problema de propagación de ondas en un canal con agua poco profunda y también de longitud infinita, por lo que debemos dar el comportamiento de la solución  $u(x, t)$  en el infinito.

Como en cualquier tiempo finito la onda está a una distancia finita, en el infinito el agua debe de estar quieta, en reposo. Por tanto, vamos a pedir para la amplitud de onda

$$(133) \quad u(x, t) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty,$$

para todo tiempo finito  $t$ . Así pues, deseamos resolver la ecuación (131), con condición inicial (132) y comportamiento en el infinito (133).

**8.1. Invarianza de Galileo.** Probaremos enseguida que la ecuación de Korteweg-deVries es invariante bajo transformaciones de Galileo. Este resultado es esperado, pues para la construcción de las ecuaciones se usaron desde un principio la ley de Newton y las leyes de la hidrodinámica. Tomando:

$$(134) \quad u(x, t) = U(\xi, \tau) - \lambda,$$

con:

$$\begin{aligned} \xi &= x - 6\lambda t \\ \tau &= t, \end{aligned}$$

entonces, sustituyendo en (131):

$$(U_\tau - 6\lambda U_\xi) - 6(U - \lambda)U_\xi + U_{\xi\xi\xi} = 0,$$

*i.e.*,

$$U_\tau - 6UU_\xi + U_\xi\xi\xi = 0,$$

la cual es la ecuación de Korteweg-deVries (KdV). Por lo tanto, la ecuación de KdV es invariante bajo transformaciones de Galileo.

**8.2. La transformación de Miura y la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica.** Para su referencia, puede consultar detalles en [41].

La ecuación de KdV (131) es una ecuación **no** lineal, debido al término  $uu_x$ . En general, las ecuaciones no lineales, aún las ordinarias, son muy difíciles de estudiar y aún más, de resolver. Sin embargo, hay algunas ecuaciones que, usando alguna transformación más o menos ingeniosa, pueden ser linealizadas. Por ejemplo, ecuaciones del tipo

$$(135) \quad y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$$

llamadas *ecuaciones de Riccati*, pueden ser linealizadas bajo la transformación:

$$(136) \quad y = \frac{z'}{zP(x)}$$

que conducen a la ecuación:

$$(137) \quad P(x)z'' + (PQ - P')z' + P^2Rz = 0$$

la cual es lineal en  $z$  [24], [33]. La complejidad en el método de solución de esta ecuación depende de las funciones  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R(x)$ , pero el hecho que es *lineal* puede facilitar enormemente la tarea de resolverla.

También existen ecuaciones en derivadas parciales *no* lineales, las cuales pueden ser linealizadas. Por ejemplo, la ecuación de Burgers:

$$(138) \quad u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad (\nu > 0),$$

puede ser linealizada por la transformación

$$(139) \quad u = -2\nu \frac{\phi_x}{\phi},$$

que se le llama **Transformación de Cole-Hopf**, y que conduce a la expresión

$$\left(\frac{\phi_t}{\phi}\right)_x = \nu \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi}\right)_x,$$

que al integrar respecto a  $x$  se obtiene:

$$\phi_t = \nu \phi_{xx} + C(t)\phi,$$

donde  $C(t)$  es constante de integración. Ahora, llamando

$$\phi = \Phi \exp \left[ \int C(t) dt \right],$$

obtenemos la ecuación del calor

$$(140) \quad \Phi_t = \nu \Phi_{xx},$$

por lo que la ecuación de Burgers puede ser integrada para cualquier  $C(t)$ .

Pensamos en utilizar transformaciones del tipo de Cole-Hopf (139),  $u = \psi_x/\psi$ , para tratar de linealizar la ecuación de KdV (131), pero sólo nos lleva a una ecuación más complicada . . . y no lineal:

$$(\psi\psi_{xt} - \psi_x\psi_t)\psi^2 - 6(\psi\psi_{xx} - \psi_x^2)\psi\psi_x + \dots = 0$$

La solución al problema de resolver la ecuación de KdV (131), con condición inicial (132), se encontró por un camino realmente inesperado. Para verlo, definamos primero los operadores  $K$  y  $M$  de la siguiente manera:

$$(141) \quad \begin{aligned} K[u] &= u_t - 6uu_x + u_{xxx} \\ M[v] &= v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} \end{aligned}$$

Con esta notación, la ecuación de KdV se escribe:

$$K[u] = 0$$

Ahora, a la ecuación:

$$M[v] = 0,$$

se le conoce como **ecuación modificada de KdV** (mKdV).

Muchos matemáticos siguieron buscando una transformación que linealizara la ecuación de KdV, mientras R. Miura estudiaba simultáneamente las ecuaciones de KdV y mKdV [32]. En sus estudios, Miura observó que si  $u$  y  $v$  (soluciones a las ecuaciones de KdV y MKdV respectivamente) están relacionadas por la ecuación

$$(142) \quad u = v^2 + v_x,$$

entonces,

$$(143) \quad \frac{\partial}{\partial x} M[v] + 2vM[v] = K[u],$$

donde los operadores  $K$  y  $M$  están dados por (141).

Así, si  $v$  satisface la ecuación mKdV,  $M[v] = 0$ , entonces  $u$  satisface la ecuación de KdV,

$$K[u] = 0.$$

Al revés también es cierto. Esto es, si  $u$  satisface la ecuación de KdV,  $K[u] = 0$ , entonces  $v$  es solución de una ecuación mucho más complicada,  $\frac{\partial}{\partial x} M[v] + 2vM[v] = 0$ , que no necesariamente es la ecuación MKdV, pero que si se pide  $v \rightarrow 0$  para  $x \rightarrow \pm\infty$ , entonces  $M[v] = 0$ .

A la transformación (142), se le conoce como **transformación de Miura**.

El siguiente intento fue linealizar la transformación de Miura (142). Si en dicha transformación  $u(x)$  fuese dada, entonces es una ecuación del tipo de Riccati (135) para la función  $v(x)$ , con  $P(x) \equiv 1$ ,  $Q(x) \equiv 0$  y  $R(x) = -u(x)$ . Podemos así linealizar (142) (cf. (135)) con la transformación (cf. (136)):

$$v = \frac{\psi_x}{\psi},$$

por lo que  $\psi$  satisface la siguiente ecuación:

$$\psi_{xx} - u\psi = 0.$$

Ahora, recordemos que la ecuación de KdV es invariante bajo las transformaciones de Galileo (sección 8.1). Es decir, podemos tomar la transformación (134):

$$u \longrightarrow u - \lambda.$$

Entonces:

$$(144) \quad \psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0$$

¡Pero ésta es la ecuación estacionaria de Schrödinger de la mecánica cuántica!

En este momento, el enfoque ha cambiado. Ahora, más que hablar de una transformación, hablamos más bien de un problema asociado de dispersión (o bien, un problema espectral) para la función  $\psi$ , cuya información puede ser usada para conocer propiedades de  $u = u(x, t)$ . Desde este punto de vista, el perfil de la onda  $u = u(x, t)$  es el potencial de dispersión. El tiempo  $t$  aparece aquí como un parámetro, por lo que hay un problema de dispersión para cada valor del parámetro  $t$ .

Es importante hacer notar que el tiempo  $t$  de la ecuación de KdV **no tiene nada que ver** con la variable temporal de la ecuación dependiente del tiempo de Schrödinger. De esta forma, la idea de Greene (uno de los inventores del *Método de Dispersión Inversa*) fue buscar el “potencial”  $u = u(x, t)$  para todo tiempo  $t$ , a partir de información del espectro  $\lambda = \lambda(t)$  y de las funciones de onda  $\psi = \psi(x, t)$  en todo instante  $t$ . Su idea fue correcta ...

**8.3. Los Espectros Discretos y Contínuos.** Al resolver la ecuación de Schrödinger y buscar cuáles valores toma la energía (*i.e.*, buscar los valores propios), encontraremos que pertenecen a dos tipos de conjuntos: uno **discreto** y otro **contínuo**, y les llamaremos **espectro discreto** y **espectro contínuo**, respectivamente, a dichos conjuntos.

Tomemos  $\lambda \equiv k^2$  en la ecuación (144), por lo que :

$$(145) \quad \psi_{xx} - (u - k^2)\psi = 0$$

En nuestro problema de propagación de ondas en el agua,  $u(x, t) \rightarrow 0$  para  $|x| \rightarrow \infty$ . Así, las asintóticas de las soluciones de la ecuación (145) son:

$$\psi(x, k) \sim e^{ikx} \quad \text{ó} \quad e^{-ikx},$$

pues en el caso  $u(x, t) \equiv 0$ , (145) es

$$\psi_{xx} + k^2\psi = 0.$$

Elijamos el comportamiento:

$$(146) \quad \psi(x, k) \sim e^{ikx}, \quad \text{para } x \sim \infty,$$

debido al hecho de que queremos estudiar un problema de dispersión. Esto es, pedimos que hacia el infinito se propague una onda de módulo 1 (de amplitud 1), después de haber interactuado con el potencial  $u(x, t)$ .

Para estudiar el efecto de  $u$  sobre  $\psi$ , consideremos la ecuación no homogénea:

$$(147) \quad \psi_{xx} + k^2\psi = \eta(x)$$

donde  $\eta(x) \equiv u\psi(x, k)$  es el término no homogéneo. A la ecuación (147), podemos encontrarle una solución particular usando el método de variación de parámetros,

pues conocemos dos soluciones linealmente independientes del problema homogéneo:  $e^{ikx}$  y  $e^{-ikx}$ .

La solución estará dada por

$$(148) \quad \psi(x, k) = e^{ikx} + \psi_p(x, k),$$

donde  $\psi_p(x, k)$  es una solución particular dada por

$$(149) \quad \psi_p(x, k) = A(x)e^{ikx} + B(x)e^{-ikx},$$

con

$$A(x) = - \int_{\infty}^x \frac{e^{-iky} \eta(y)}{W(e^{iky}, e^{-iky})} dy$$

$$B(x) = \int_{\infty}^x \frac{e^{iky} \eta(y)}{W(e^{iky}, e^{-iky})} dy,$$

tales que  $A(x), B(x) \rightarrow 0$ , cuando  $x \rightarrow \infty$ , de tal modo que  $\psi_p(x, k) \rightarrow 0$ , pues pedimos el comportamiento  $\psi(x, k) \sim e^{ikx}$ , si  $x \sim \infty$ . La función  $W$  es el Wronskiano de las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea y su valor es

$$W(e^{iky}, e^{-iky}) = -2ik.$$

Así la solución particular (149) de la ecuación de Schrödinger (147) está dada por:

$$\psi_p(x, k) = \int_x^{\infty} \frac{-e^{-iky} u(y) \psi(y, k) e^{ikx} + e^{iky} u(y) \psi(y, k) e^{-ikx}}{-2ik} dy$$

que simplificando y sustituyendo en (148) obtenemos:

$$(150) \quad \psi(x, k) = e^{ikx} - \int_x^{\infty} \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \psi(y, k) dy$$

Esta es una ecuación integral para la función  $\psi(x, k)$ , solución a la ecuación de Schrödinger. Veremos más adelante que la ecuación integral puede resolverse usando iteraciones, y que, además, es una función analítica de la variable  $k$  para  $\text{Im}(k) \geq 0$ .

Ahora, la ecuación de Schrödinger es un problema de Sturm-Liouville. Sabemos que las funciones propias corresponden a **valores propios discretos**. También sabemos que, cuando se trata de funciones propias, los valores propios son negativos:  $\lambda_j = -\kappa_j^2 < 0$ , ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ), dado que el potencial  $u(x) < 0$  y  $u(x) \rightarrow 0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . Para tener tal comportamiento, pedimos que  $k_j = i\kappa_j$ . La continuación analítica impondrá la condición  $\text{Im}(k_j) = \kappa_j > 0$ . Los estados correspondientes a las funciones propias forman lo que se llama **los estados ligados**.

*Observación 8.3.1.* Para un estudio detallado sobre la continuación analítica de las soluciones, el lector interesado puede consultar [44].

En el caso  $\text{Im}(k) = 0$ , tenemos que  $\lambda = k^2 \geq 0$ . Aquí, las soluciones  $\psi(x, k)$  oscilan y están acotadas, por lo que los valores de  $k$  no están restringidos y pueden tomar cualquier valor real, esto es, pueden variar continuamente en  $\text{Im}(k) = 0$ . Aquí hablamos del **espectro continuo**. Estos son **los estados libres**.

Para visualizar que los estados libres pertenecen al espectro continuo y los acotados al discreto, recurramos a las ideas de la mecánica cuántica. Sabemos que en mecánica cuántica la energía (aquí representada por la letra  $\lambda$ ) es muy probablemente mayor que la “energía potencial”  $u(x)$ . (En mecánica clásica, siempre es mayor). Por tanto,  $\lambda - u = k^2 - u > 0$ . (Figura 28).

Para el valor de  $\lambda = -\kappa^2$  dado en la figura 28, los estados son acotados. Es decir, el dominio de la función de onda  $\psi(x, k)$  es (muy probablemente) acotado, y es dado por la restricción:

$$\lambda - u = -\kappa^2 - u > 0 \quad (\text{muy probablemente})$$

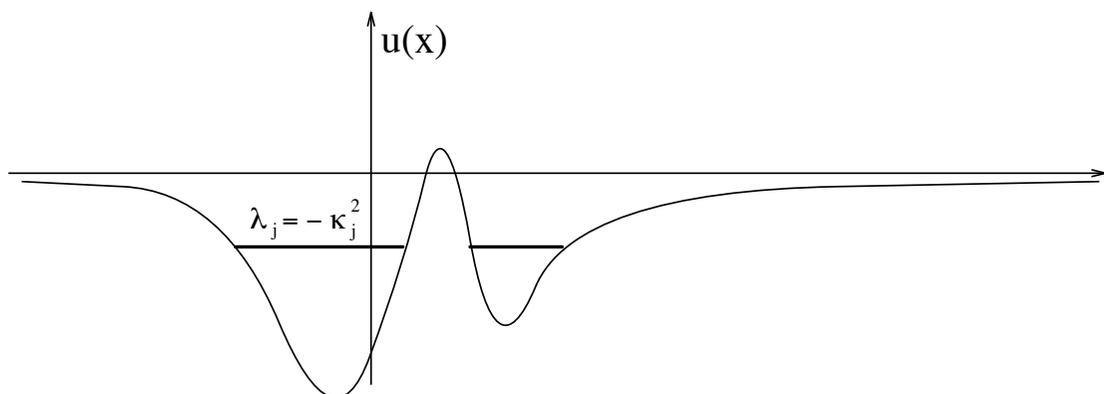


FIGURA 28. El espectro discreto

Cuando ésto sucede (los estados acotados), la energía está cuantizada, es decir, los valores propios toman valores discretos:

$$\lambda = \lambda_j = -\kappa_j^2 < 0.$$

Como estudiamos el caso  $\lambda = k_j^2 = -\kappa_j^2 < 0$ , debemos pedir:  $k_j = i\kappa_j$ . Así, tenemos un energía negativa:  $\lambda_j = -\kappa_j^2 < 0$ . Podemos pensar, por ejemplo, en los *estados acotados* de un electrón atrapado por un núcleo de hidrógeno (esto es, recordemos el modelo atómico de Bohr). En este modelo, los estados de los electrones están *cuantizados*, son *discretos*.

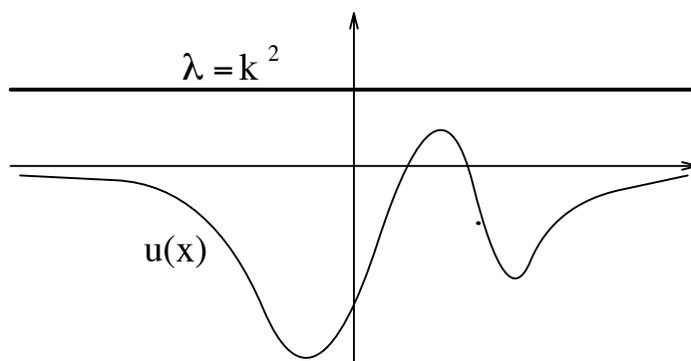


FIGURA 29. El espectro continuo

Si  $\lambda = k^2$  (Figura 29),  $\lambda - u = k^2 - u > 0$ , para *cualquier* valor de  $x$ , de aquí que para el ejemplo o analogía con el electrón en el átomo de hidrógeno de Bohr *no* esté atrapado, es decir, que el estado sea *no* acotado.

En mecánica cuántica, cuando un estado es *no* acotado, se tiene un espectro continuo, esto es, cualquier valor de la energía es un valor permitido. Continuando con la analogía del átomo de hidrógeno, en el caso del estado *no* acotado, el electrón es libre, *no* está atrapado. Cambiar su energía  $\lambda_1 > 0$  por otra arbitraria  $\lambda_2 > 0$ , no altera el estado libre del electrón, pues su energía siempre es positiva. Así, el cambio de energía será siempre en forma continua en el intervalo  $\lambda \geq 0$ , por lo que el **espectro**, en este caso, es **continuo**.

**8.4. La Invarianza del Espectro en el Tiempo.** Como mencionamos al final de la sección 8.2, tenemos un problema de dispersión para cada valor del parámetro  $t$ . Sin embargo, no conocemos la solución  $u(x, t)$  de la ecuación de KdV, por lo que nos gustaría saber si se puede determinar el “potencial”  $u(x, t)$  con cierta información dada de antemano que debe, por supuesto, depender de  $t$ . La respuesta es que **sí es posible** encontrar la solución a tal problema, dando como datos “el coeficiente de reflexión”, “las constantes de normalización” (que más adelante definiremos) y “los valores propios.” Todos deben ser conocidos en el instante  $t$ .

Como veremos a continuación, ¡el espectro es constante en el tiempo  $t$ ! De este modo, lo único necesario es encontrar los valores propios en  $t = 0$ . Esto se puede lograr resolviendo el problema directo:

$$\psi_{xx} + (\lambda(0) - V(x))\psi = 0,$$

pues recordemos que  $V(x) = u(x, 0)$  es la condición inicial del problema de valores iniciales para la ecuación de KdV.

Tenemos pues que a la ecuación de KdV le podemos asociar el problema **lineal** de la ecuación estacionaria de Schrödinger:

$$\psi_{xx} + (k^2 - u)\psi = 0$$

La función de onda  $\psi(x, k)$  es una función de  $x$  y de  $k$ , y el valor propio  $\lambda$  es una constante (¡en  $x$ !). Ahora, el potencial es solución de la ecuación de KdV (131), por lo que depende tanto de la variable espacial  $x$  como de la temporal  $t$ :  $u = u(x, t)$ . Así, el tiempo  $t$  juega el papel de parámetro en la ecuación de Schrödinger (144):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, k; t) + (\lambda(t) - u(x, t))\psi(x, k; t) = 0,$$

por lo que no solo la función de onda  $\psi(x, k; t)$  puede depender del tiempo, *sino también del valor propio*  $\lambda(t)$ .

Ahora, nos podríamos hacer la siguiente pregunta: ¿cómo evoluciona en el tiempo el valor propio  $\lambda(t)$ , si el “potencial”  $u = u(x, t)$  evoluciona de acuerdo a la ecuación de KdV? La respuesta, como lo mencionamos anteriormente, es bastante sorprendente.

Veamos primero cómo evolucionan en el tiempo los valores propios correspondientes al espectro discreto  $\lambda_j(t) = -\kappa_j^2(t)$ . Para ello, escribamos  $u(x, t)$  de la siguiente forma, usando la ecuación de Schrödinger,

$$u(x, t) = \frac{\psi_{xx}(x, i\kappa_j(t), t)}{\psi(x, i\kappa_j(t), t)} - \kappa_j^2(t).$$

Substituyendo esta expresión de  $u(x, t)$  en la ecuación de KdV, tendremos la relación siguiente entre  $\psi(x, i\kappa_j(t), t)$  y sus derivadas con la evolución de  $-\kappa_j^2(t)$ :

$$(151) \quad |\psi_j|^2 \frac{d\kappa_j^2}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi_j \frac{\partial Q_j}{\partial x} - Q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right),$$

donde

$$\psi_j = \psi(x, i\kappa_j, t),$$

$$(152) \quad Q \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_x \psi - 2(u + 2\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

y

$$Q_j = Q|_{k=i\kappa_j}.$$

La prueba de la validez de la ecuación (151) será dada en el apéndice D.

Ahora, por ser  $\psi_j$  función propia:

$$(153) \quad \psi_j \rightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Integrando desde  $-\infty$  hasta  $\infty$  la ecuación (151) y usando el comportamiento (153) de la función propia  $\psi_j$ , obtenemos

$$(154) \quad \frac{d\kappa_j^2}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_j|^2 dx = 0$$

Además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_j|^2 dx \neq 0,$$

y es convergente, por ser  $\psi_j$  función propia. De (154) se concluye que

$$(155) \quad \frac{d\kappa_j^2}{dt} = 0.$$

Esto es,  $i\lambda_j(t) = -\kappa_j^2(t)$  es una *constante de movimiento*!. Por tanto escribiremos:

$$\kappa_j(t) = \kappa_j(0) = \kappa_j.$$

Ahora, ¿qué pasa con el espectro continuo? Sabemos que el espectro continuo consiste de los valores  $\lambda = k^2 > 0$  y esto se cumple *para toda*  $k$  real. Ahora, el *espectro continuo siempre es positivo, independientemente* del parámetro  $t$ . Por tal motivo,

$$\frac{dk^2}{dt} = 0,$$

¡también es constante de movimiento!. Por lo que escribiremos:

$$\lambda(t) = k^2,$$

sin anotar explícitamente el tiempo para recordar que se trata de una constante de movimiento.

**8.5. Evolución de las Funciones de Onda.** Es un hecho también muy sorprendente que podemos “casi” calcular la evolución temporal de las funciones propias  $\psi_j = \psi(x, i\kappa_j; t)$  y de las funciones correspondientes al espectro continuo  $\psi = \psi(x, k; t)$ . Esto nos servirá posteriormente para calcular la evolución temporal de “*las constantes de normalización*” y del “*coeficiente de reflexión*”. Aquí por temporal se refiere a la evolución en el tiempo “ $t$ ” de la ecuación de KdV.

Veamos primero cuál es la ecuación de evolución de las funciones propias. Usando la ecuación de evolución (155) de los valores propios,  $\lambda_j = -\kappa_j^2$ , en la ecuación (151) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \psi_j \frac{\partial Q_j}{\partial x} - Q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) = 0.$$

Integrando con respecto a  $x$  se sigue que:

$$\psi_j \frac{\partial Q_j}{\partial x} - Q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = D(t),$$

donde  $D(t)$  es una función arbitraria del tiempo. Notemos que, dividiendo la ecuación anterior entre  $\psi_j^2$ , la podemos escribir como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q_j}{\psi_j} \right) = \frac{D(t)}{\psi_j^2},$$

que integrando resulta

$$(156) \quad \frac{Q_j}{\psi_j} = D(t) \int_{-\infty}^x \frac{dy}{\psi_j^2} + E(t),$$

donde  $E(t)$  es otra función arbitraria del tiempo. Como  $\psi_j(y) \rightarrow 0$  exponencialmente, cuando  $y \rightarrow \infty$  (ver ecuación (153)), tenemos que  $1/\psi_j^2$  *crece exponencialmente*, por lo que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\psi_j^2}$$

es divergente. Ahora, por (156), tendríamos que  $Q_j$  diverge cuando  $x \rightarrow \infty$ . Pero  $Q_j$  **no** puede diverger, ya que depende de  $\psi_j$  y sus derivadas, por lo que  $Q_j \rightarrow 0$ , si  $x \rightarrow \infty$ . Así, debemos escoger  $D(t) \equiv 0$  en (156), resultando:

$$Q(x, i\kappa_j : t) = \psi(x, i\kappa_j : t)E(t).$$

Usando la definición (152) de  $Q$  y  $\lambda = \lambda_j = -\kappa_j^2$ :

$$(157) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial t} + u_x \psi_j - 2(u - 2\kappa_j^2) \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = E(t) \psi_j,$$

y tomando  $\psi_j = \varphi_j e^{\int E(t) dt}$ , tenemos:

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + u_x \varphi_j - 2(u - 2\kappa_j^2) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = 0,$$

por lo que, equivalentemente, podemos escoger  $E(t) \equiv 0$  en (157), quedando:

$$(158) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial t} + u_x \psi_j - 2(u - 2\kappa_j^2) \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = 0$$

Usando la ecuación de Schrödinger (144), despejemos  $\lambda = \lambda_j = -\kappa_j^2$  y derivemos dicha ecuación respecto a  $x$  para obtener:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_j = -\kappa_j^2 &= u - \frac{(\psi_j)_{xx}}{\psi_j}, & y \\ u_x &= \frac{(\psi_j)_{xxx}}{\psi_j} - \frac{(\psi_j)_{xx}(\psi_j)_x}{\psi_j^2}. \end{aligned}$$

Usando estas expresiones en la ecuación (158), encontramos que la ecuación de evolución de  $\psi_j$  es

$$(159) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial t} + 4 \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial \psi_j}{\partial x} - 3\psi_j u_x = 0.$$

Definamos al operador  $B$  del siguiente modo:

$$(160) \quad B[\varphi] \equiv -4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 3\varphi u_x.$$

Así, la ecuación de evolución (159) de  $\psi_j$  se puede escribir como:

$$(161) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = B[\psi_j]$$

*Observación 8.5.1.* El operador  $B$ , ecuación (160), es uno de los operadores de Lax, y aparece en la ecuación de Lax (99) y del que hablamos en toda la sección 7, pero aquí aplicado a la ecuación de KdV.

Con un razonamiento análogo, podemos llegar a que las funciones  $\psi$  correspondientes al espectro continuo  $\lambda = k^2$  cumplen con la ecuación:

$$\psi \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial \psi}{\partial x} = D(t).$$

Usando la definición (152) de  $Q$  y el comportamiento asintótico  $\psi \sim e^{ikx}$  en  $x \sim \infty$  (ecuación (150)), tenemos:

$$D(t) = \psi \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial \psi}{\partial x} \sim 0, \quad \text{para } x \sim \infty$$

y, por tanto,

$$(162) \quad D(t) \equiv 0,$$

pues es constante en  $x$ .

Así, se cumple la ecuación

$$\psi \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Entonces, y de la misma manera como se hizo para el caso discreto, obtenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + 4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial \psi}{\partial x} - 3\psi u_x = 0,$$

o bien,

$$(163) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = B[\psi],$$

la cual es la ecuación de evolución para las funciones  $\psi(x, k; t)$  correspondientes al espectro continuo, donde  $B$  está definido en (160).

*8.5.1. Panorama del método de dispersión inversa: resolución de la ecuación de KdV.* Notemos ahora que, dado que la condición inicial  $u(x, 0) = V(x)$  (ecuación (132)) es dada de antemano, en principio podemos resolver la ecuación estacionaria de Schrödinger en el instante inicial  $t = 0$ ,

$$\psi_{xx}(x, k, 0) + (\lambda(0) - V(x))\psi(x, k, 0) = 0.$$

Esto es, podemos conocer los valores propios,  $\lambda(0) = -\kappa_j^2(0)$ , y funciones propias,  $\psi(x, i\kappa_j, 0)$ , en el instante inicial  $t = 0$ . Es decir, habremos resuelto *el problema de dispersión directa*.

Conocemos la evolución temporal de los valores propios  $\lambda(t) = -\kappa_j^2$  pues, como vimos, son constantes de movimiento. Además, podemos también “casi” conocer la evolución en el tiempo de las funciones propias  $\psi_j = \psi(x, i\kappa_j, t)$  y de las que corresponden al espectro continuo  $\psi = \psi(x, k; t)$  (ecuaciones (161) y (163)). Y hacemos énfasis en la palabra *casi*, pues en el operador  $B$  (ecuación (160)), aparece la función desconocida  $u(x, t)$ .

Ahora, con esta información de los valores propios  $\lambda_j(t) = \lambda_j = -\kappa_j^2$  (constantes de movimiento), de las funciones propias  $\psi_j = \psi(x, i\kappa_j, t)$  y de las funciones de onda  $\psi = \psi(x, k; t)$ , ¿podemos conocer el potencial  $u(x, t)$ ? Es decir, ahora queremos resolver el problema inverso: dadas las funciones  $\psi(x, i\kappa_j, t)$ ,  $\psi(x, k; t)$  y los valores propios  $\lambda_j(t) = -\kappa_j^2$ , determinar el “potencial”  $u(x, t)$ .

En el año de 1951, Gel’fand y Levitan [16] encontraron que esto **sí es posible**. Aún más, no es necesario conocer completamente las soluciones  $\psi_j$  y  $\psi$ , sino que solo basta conocer “la constante de normalización”  $c_j(t)$  de  $\psi_j$ , y el comportamiento asintótico de la función  $\psi$  en  $x \sim \infty$  y  $x \sim -\infty$ . En estos límites, la función  $u(x, t)$  es conocida, por lo que tomando las asintóticas en las ecuaciones de las funciones  $\psi_j$  y  $\psi$ , (161) y (163), tendremos un medio para conocer la evolución temporal de  $\psi_j$  y  $\psi$  en  $\infty$ .

Gel’fand y Levitan [16] se dieron cuenta además que, dando solamente el comportamiento asintótico de las funciones propias,  $\psi_j$ , y de onda  $\psi$ , las constantes de normalización  $c_j$  y los valores propios  $\lambda_j$ , es posible plantear una ecuación integral **lineal** para cierta función  $K(x, y)$ . De hecho, la ecuación que relaciona el potencial  $u(x, t)$  con la función  $K(x, y; t)$  es:

$$u(x, t) = -2 \frac{dK}{dx}(x, x; t)$$

Por lo que el problema inverso quedaría resuelto y conoceríamos la solución de la ecuación de KdV. Los detalles serán dados más adelante.

**8.6. Problemas de Dispersión.** En esta sección daremos una idea sumamente intuitiva de qué queremos decir con problemas de dispersión, y daremos una idea de lo que queremos decir por datos de dispersión, como coeficientes de transmisión, reflexión y estados ligados. Reitero: será muy intuitiva.

Tenemos entonces que la ecuación de Schrödinger nos plantea dos tipos de problemas:

1. **Problema de dispersión directa** o bien **problema espectral**. Dada  $u(x)$  y su comportamiento en el infinito,  $|x| \rightarrow \infty$ , determinar  $\psi_j(x)$ ,  $\psi(x)$  y  $\lambda_j$ , *i.e.*, las funciones propias, la función de onda y los valores propios.

2. **Problema de dispersión inversa** Dadas  $\psi_j(x), \psi(x)$  y  $\lambda_j$ , determinar el potencial  $u(x)$ .

De manera muy intuitiva y nada rigurosa, veamos la descripción de un sencillo problema que, en cierto modo, se parece al problema *inverso* de dispersión en mecánica cuántica.

Imaginemos que lanzamos  $N$  pelotas desde la derecha sobre algunos obstáculos y valles, cuya forma desconocemos. (Figura 30).

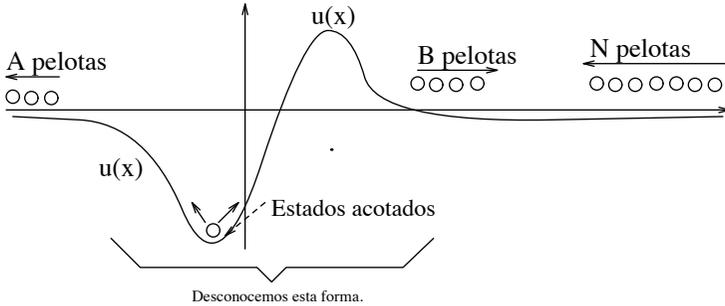


FIGURA 30. Problema de dispersión (imagen descriptiva)

Lo que deseamos conocer es la forma de los obstáculos y valles, i.e., del potencial  $u(x)$ . Para tal fin, será necesario conocer el número  $A$  de pelotas que pasan las barreras y el número  $B$  de pelotas que rebotan en dichos obstáculos. Además, quedarán otras pelotas atrapadas en los valles. La región de movimiento de estas pelotas atrapadas es finita, lo que constituirá los *estados acotados*, pues la región en que se encuentran es acotada (de otra forma serían estados libres).

Ahora, como mencionamos en la sección anterior, para conocer la forma de  $u(x)$ , los datos necesarios son  $B/N$  (el coeficiente de reflexión, el cual se determina del comportamiento asintótico de  $\psi$ ), los valores propios (determinados por los *estados acotados*) y las constantes de normalización (que en este ejemplo no tienen análogo) de las funciones propias  $\psi(x, i\kappa_j)$ . A estos datos se les conoce como **datos de dispersión**. Más adelante daremos expresiones precisas para los coeficientes de reflexión, las constantes de normalización y de los estados acotados en términos de las soluciones  $\psi$  de la ecuación de Schrödinger.

Notemos que el número total de pelotas debe de conservarse, esto es,  $A + B = N$ . O bien:

$$\frac{A}{N} + \frac{B}{N} = 1.$$

Esta ecuación lo que nos dice es que lo que se transmite más lo que se refleja, debe de ser siempre el total, la unidad. (En este dibujo la expresión anterior no es tan precisa, pues quedan pelotas “atrapadas.”) En términos de la función de onda  $\psi$  (solución de la ecuación de Schrödinger), encontraremos una relación similar a ésta.

**8.7. La Expresión Integral para la Función de Onda.** La expresión (150) es una ecuación integral para la función  $\psi(x, k)$ , que podemos escribir en la forma:

$$(164) \quad \psi(x, k) = e^{ikx} + \tilde{T}\psi,$$

donde  $\tilde{T}$  es el operador

$$(165) \quad \tilde{T}[\psi] \equiv - \int_x^\infty \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \psi(y, k) dy$$

Resolvamos la ecuación (164) por iteraciones. Esto es, substituyamos el valor de  $\psi$  dado por (164) en el miembro derecho de esta misma ecuación, resultando:

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \tilde{T}e^{ikx} + \tilde{T}^2\psi.$$

Repitiendo el argumento anterior sucesivamente, eventualmente tendremos una expresión para la solución de la ecuación de Schrödinger (145),

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \tilde{T}e^{ikx} + \tilde{T}^2e^{ikx} + \dots + \tilde{T}^n e^{ikx} + \dots$$

Denotemos por  $L(x, y)$  al kernel del operador  $\tilde{T}$  definido en (165):

$$(166) \quad L(x, y) \equiv -\frac{\sin k(x-y)}{k}u(y)$$

Así,

$$\tilde{T}\psi(x, k) = \int_x^\infty L(x, y)\psi(y, k) dy$$

Tendremos entonces que:

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty L(x, y)e^{iky} dy + \int_x^\infty L^{(2)}(x, y)e^{iky} dy + \dots + \int_x^\infty L^{(n)}(x, y)e^{iky} dy + \dots$$

donde hemos definido

$$L^{(2)}(x, y) = \int_x^y L(x, y_1)L(y_1, y) dy_1,$$

$$L^{(3)}(x, y) = \int_x^y \int_{y_2}^y L(x, y_1)L(y_1, y_2)L(y_2, y) dy_2 dy_1,$$

y, en general,

$$L^{(n)}(x, y) = \int_x^y \dots \int_{y_3}^y \int_{y_2}^y L(x, y_{n-1})L(y_{n-1}, y_{n-2}) \dots L(y_2, y_1)L(y_1, y) dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1}.$$

Notemos que estas integrales definen las desigualdades  $x \leq y_{n-1} \leq y_{n-2} \leq \dots \leq y_2 \leq y_1 \leq y$ , por lo que tenemos:

$$x \leq y$$

La serie de Neumann,

$$(167) \quad K(x, y) \equiv L(x, y) + L^{(2)}(x, y) + \dots + L^{(n)}(x, y) + \dots$$

define una nueva función  $K(x, y)$  en la región  $x \leq y$ . Si esta serie es uniformemente convergente, entonces:

$$\psi = e^{ikx} + \int_x^\infty (L(x, y) + L^{(2)}(x, y) + \dots + L^{(n)}(x, y) + \dots)e^{iky} dy$$

y de la definición (167) de  $K(x, y)$ :

$$(168) \quad \psi = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, y)e^{iky} dy \quad \text{en } x \leq y.$$

Esta es la expresión integral para  $\psi(x, k)$ , solución de la ecuación de Schrödinger (145).

Ahora tenemos que el núcleo  $K(x, y)$  depende de cada una de las funciones  $L^{(k)}(x, y)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Estas dependen de  $L(x, y)$ , quien a su vez depende de  $u(y)$ , por (166). Por tanto, el kernel  $K(x, y)$  debe de tener cierta relación con el potencial  $u(x)$ . Para nuestros fines, no será necesario encontrar todas las  $L^{(k)}(x, y)$ , únicamente es necesario encontrar la  $K(x, y)$ , como veremos enseguida.

Es importante observar que la solución  $\psi$  del problema espectral con  $u(x) \neq 0$ , ¡está dada en términos de las soluciones  $e^{ikx}$  del problema libre! Es decir, la solución  $\psi$  es una combinación lineal (continua) de las funciones  $e^{ikx}$ , como es claro de la ecuación (168).

Desde luego, hay una relación entre  $K(x, y)$  y  $u(x)$ , pero ésta es explícita, como ahora veremos. Para sustituir la representación (168) de la función  $\psi$  en la ecuación (145), necesitamos calcular

$$(169) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2 e^{ikx} - \frac{dK}{dx}(x, x)e^{ikx} - ikK(x, x)e^{ikx} - \frac{\partial K}{\partial x}(x, x)e^{ikx} + \int_x^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y)e^{iky} dy,$$

y, por otra, integrando por partes la representación (168) con la suposición adicional que  $K(x, y) \rightarrow 0$ , si  $y \rightarrow \infty$ :

$$(170) \quad k^2\psi(x, k) = k^2 e^{ikx} + ikK(x, x)e^{ikx} - \frac{\partial K}{\partial y}(x, x)e^{ikx} + \int_x^\infty -\frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y)e^{iky} dy.$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones anteriores, y usando la regla de la cadena,  $\frac{\partial}{\partial x} K(x, x) + \frac{\partial}{\partial y} K(x, x) = \frac{d}{dx} K(x, x)$ , se sigue que:

$$(171) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi(x, k) = \left[-2\frac{d}{dx} K(x, x)\right] e^{ikx} + \int_x^\infty \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y)\right] e^{iky} dy.$$

También tenemos que:

$$u(x)\psi = u(x)e^{ikx} + \int_x^\infty u(x)K(x, y)e^{iky} dy,$$

y como  $\frac{d^2}{dx^2}\psi + k^2\psi(x, k) = u(x)\psi$  (ecuación de Schrödinger (145)), de las últimas dos igualdades obtenemos finalmente

$$(172) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y) = u(x)K(x, y),$$

$$(173) \quad u(x) = -2\frac{d}{dx} K(x, x)$$

La ecuación (173) es la relación buscada entre  $u(x)$  y  $K(x, y)$ . Así, si conocemos  $K(x, y)$ , podemos conocer el potencial  $u(x)$ , y el problema inverso quedaría resuelto.

Vale la pena hacer notar que, para resolver el problema directo (encontrar  $\psi$  conociendo  $K(x, y)$ ), estas relaciones (ecuaciones (172) y (173)) no son tan útiles. Si  $u(x)$  es dado, hay que resolver la ecuación en derivadas parciales (172) con datos (173) dados sobre la característica  $x = y$ , lo cual complica el problema. A este problema se le conoce como *el problema de Goursat* [6], cuyas soluciones también se sabe son únicas, por lo que la función  $K(x, y)$  debe de ser única. Más adelante veremos una forma de encontrar la función  $K(x, y)$  para así poder determinar el potencial  $u(x)$  (ver sección 8.11).

En resumen, hay una relación *simple* entre el potencial  $u(x)$  y el núcleo  $K(x, y)$  de la representación integral (168) de la solución  $\psi(x, k)$  de la ecuación de Schrödinger (145), con  $u(x) \neq 0$ , y en términos de las soluciones  $e^{ikx}$  del problema libre.

**8.8. Datos de Dispersión.** La utilidad del núcleo  $K(x, y)$  es que puede ser determinado a partir de información asintótica. Para esto es conveniente introducir soluciones apropiadas, linealmente independientes, de la ecuación de Schrödinger.

Para tal fin, y usando el mismo razonamiento que en la sección anterior, podemos expresar la otra solución linealmente independiente  $\varphi(x, k)$  de la siguiente manera:

$$\varphi(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, k) e^{-iky} dy,$$

la cual tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$\varphi \sim e^{-ikx}, \quad \text{en } x \sim -\infty.$$

También, como en la sección anterior, existe una relación sencilla entre el potencial  $u(x)$  y el núcleo  $\tilde{K}(x, y)$ :

$$u(x) = 2 \frac{d}{dx} \tilde{K}(x, x)$$

Introduzcamos aquí, un cambio de notación:

$$(174) \quad f(x, k) \equiv \psi(x, k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x, k) e^{iky} dy,$$

$$(175) \quad g(x, k) \equiv \varphi(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, k) e^{-iky} dy,$$

A estas funciones, soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger, se les conoce como **funciones de Jost**.

Podemos tomar la continuación analítica de las **funciones de Jost**, pero esto sólo lo podemos hacer en el plano  $\text{Im}(k) > 0$ . En efecto, escribiendo:

$$k = \mu + i\kappa,$$

con  $\kappa = \text{Im}(k) > 0$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{ikx} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{i\mu x} e^{-\kappa x} = 0, & \text{y} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-ikx} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-i\mu x} e^{\kappa x} = 0, \end{aligned}$$

pues de otro modo las *funciones de Jost* serían divergentes.

Por tanto,  $k$  puede ser, en general, un número complejo. De la definición de  $k$ ,  $\lambda = k^2$ , se sigue que  $\lambda$  puede ser también un número complejo. Sin embargo, es real (como probaremos en el apéndice A). Esto último como consecuencia directa del hecho que  $\lambda$  es valor propio de la ecuación de Schrödinger. Esto también ya fue utilizado en la sección 8.3, en donde comentamos que la energía  $\lambda > 0$  corresponde al espectro continuo, mientras que para los valores  $\lambda < 0$  tenemos el espectro discreto. Como vemos, usamos el hecho de que  $\lambda$  es real.

Por todo esto, los valores posibles que puede tomar  $k$  son de dos tipos:

1.  $k \in \mathbb{R}$ . En este caso,  $\lambda = k^2$  es real *positivo*, y corresponde al espectro *continuo*.
2.  $k = i\kappa$  es imaginario puro, con  $\kappa > 0$ , pues  $\kappa = \text{Im}(k) > 0$ . Aquí,  $\lambda = -\kappa^2$  también es real, pero negativo. Se trata del *espectro discreto*.

**8.9. El Espectro Continuo: el Coeficiente de Reflexión.** Como mencionamos anteriormente, el núcleo  $K(x, y)$  puede ser determinado por información asintótica de las funciones de Jost. Dicha información asintótica es el coeficiente de reflexión, que definiremos enseguida.

Tomemos la función de Jost  $f(x, k)$  (ecuación (174)) solución de la ecuación de Schrödinger (145). Dicha función tiene el siguiente comportamiento asintótico en el infinito,  $\infty$ :

$$f(x, k) \sim e^{ikx}, \quad x \sim \infty.$$

Y, por tanto,

$$f(x, -k) \sim e^{-ikx}, \quad x \sim \infty,$$

es otra solución, linealmente independiente, de la misma ecuación. Como aquí tratamos con el espectro continuo,  $k$  es real.

Consideremos ahora  $g(x, k)$  y  $g(x, -k)$  (ecuación (175)), soluciones también linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger (145), pero con comportamiento en menos infinito,  $-\infty$ :

$$\begin{aligned} g(x, k) &\sim e^{-ikx}, & x \sim -\infty, \\ g(x, -k) &\sim e^{ikx}, & x \sim -\infty \end{aligned}$$

Como la ecuación de Schrödinger es una ecuación de segundo orden, tiene *única-*mente dos soluciones linealmente independientes y cualquier otra solución estará dada como combinación lineal de la dos primeras. Por tanto:

$$(176) \quad g(x, k) = a(k)f(x, -k) + b(k)f(x, k)$$

El comportamiento asintótico de  $g(x, k)$  será entonces:

$$(177) \quad g(x, k) \sim a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, \quad x \sim \infty.$$

$$(178) \quad g(x, k) \sim e^{-ikx}, \quad x \sim -\infty.$$

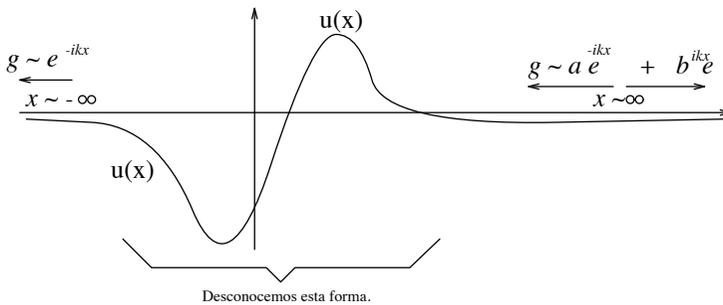


FIGURA 31. Problema de dispersión

Esto significa lo siguiente. (Ver figura 31). Inicialmente mandamos una onda  $a(k)e^{-ikx}$  desde  $+\infty$ , con dirección negativa y amplitud  $a(k)$ . Como resultado de la interacción de la onda con el potencial, seguirán dos ondas: una transmitida y otra reflejada.

La primera,  $e^{-ikx}$ , se dirige hacia  $-\infty$  con amplitud 1 y es la onda transmitida. La segunda es la onda reflejada, pues se dirige hacia  $+\infty$ , llevando ésta una amplitud  $b(k)$ .

Es un resultado de mecánica cuántica (enseguida lo probaremos) que *las probabilidades se conservan*. La **probabilidad** de que una partícula se encuentre en el intervalo  $[a, b]$ , está dada por

$$\int_a^b |\psi(x, k)|^2 dx.$$

A la función  $|\psi(x, k)|^2$  se le llama **densidad de probabilidad**.

**TEOREMA 8.9.1.** *Dado que las probabilidades (las densidades de probabilidad) deben conservarse, entonces la (densidad de) probabilidad  $|a(k)|^2$  que se manda inicialmente, debe de ser igual a la (densidad de) probabilidad 1 que se transmite, más la densidad  $|b(k)|^2$  que se refleja. Esto es:*

$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2,$$

y es la igualdad que debemos probar.

*Demostración.* Para ello, veamos que las soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger:

$$g(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, y) e^{-iky} dy,$$

$$g(x, -k) = e^{ikx} + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, y) e^{iky} dy,$$

están relacionadas por:

$$g^*(x, k) = g(x, -k)$$

en vista de que  $k$  y  $\tilde{K}(x, y)$  son reales ( $\tilde{K}(x, y)$  es real, pues  $u(x) = 2\frac{d\tilde{K}}{dx}$  es real). Aquí  $g^*(x, k)$  denota el complejo conjugado de  $g(x, k)$ . De igual modo:

$$f^*(x, k) = f(x, -k)$$

Calculemos ahora el Wronskiano de las soluciones  $g(x, k)$  y  $g^*(x, k)$ , y tomemos su comportamiento asintótico en  $x \sim \infty$ , usando (177):

$$W(g, g^*) = gg_x^* - g_x g^* \\ \sim 2ik(|a|^2 - |b|^2), \quad \text{si } x \sim \infty$$

y en  $x \sim -\infty$ , usando (178):

$$W(g, g^*) \sim \det \begin{pmatrix} e^{-ikx} & e^{ikx} \\ -ike^{-ikx} & ike^{ikx} \end{pmatrix} \\ = 2ik.$$

Ahora, como el Wronskiano de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger es una constante (la prueba está en el apéndice B), entonces:

$$W(g, g^*)|_{x=\infty} = W(g, g^*)|_{x=-\infty}$$

Por tanto,

$$2ik(|a|^2 - |b|^2) = 2ik,$$

o bien,

$$|a|^2 = |b|^2 + 1,$$

como queríamos probar. □

Si  $|a|^2 \neq 0$ :

$$\frac{1}{|a|^2} + \frac{|b|^2}{|a|^2} = 1$$

Esta es la identidad que define el coeficiente de transmisión  $T(k) \equiv \frac{1}{a(k)}$  y de reflexión:

$$R(k) \equiv \frac{b(k)}{a(k)}$$

Tomamos esta definición, pues  $T(k) = \frac{1}{a(k)}$  es la proporción de la cantidad reflejada 1, sobre la cantidad o amplitud inicial  $a(k)$ . Del mismo modo, el coeficiente de reflexión  $R(k)$  es la proporción de la amplitud reflejada  $b(k)$  a la amplitud inicial  $a(k)$ :  $R(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$ .

La igualdad  $|a|^2 = |b|^2 + 1$  es análoga a la planteada para el caso de “*conservación de pelotas*” que pasan y rebotan por los valles y obstáculos (ejemplo dado en la sección 3.6):

$$\frac{A}{N} + \frac{B}{N} = 1$$

Tenemos pues, la conservación de probabilidades:

$$\frac{1}{|a(k)|^2} + \frac{|b(k)|^2}{|a(k)|^2} \equiv 1$$

i.e.,

$$|T(k)|^2 + |R(k)|^2 \equiv 1$$

**8.10. El Espectro Discreto: Estados Acotados, Constantes de Normalización y Valores Propios.** La función  $g$ , cuando se continúa analíticamente para  $\text{Im}(k) > 0$ , determina toda la información sobre el espectro puntual. En efecto, los ceros de la ecuación  $a(k_j) = 0$  son los puntos del espectro. Es decir, si  $a(k_j) = 0$  tenemos:

$$(179) \quad g(x, k_j) = \rho_j f(x, k_j)$$

donde  $\rho_j$  es la **constante de proporcionalidad**.

Para  $\kappa_j = \text{Im}(k_j) > 0$  sabemos que:

$$\begin{aligned} g(x, k_j) = \rho_j f(x, k_j) &\sim \rho_j e^{ik_j x} = \rho_j e^{-\kappa_j x} \rightarrow 0, & \text{cuando } x \rightarrow \infty \\ g(x, k_j) &\sim e^{-ik_j x} = e^{\kappa_j x} \rightarrow 0, & \text{cuando } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Así pues,  $g(x, ik_j)$  es función propia, con valor propio  $\lambda_j = k_j^2 = -\kappa_j^2 < 0$ , pues recordemos que los valores propios son *negativos*. Para tal  $k_j$ , la función  $g(x, k_j)$  representa un estado acotado, esto es, la probabilidad de que una partícula con función de onda  $g(x, k_j)$  se encuentre en un intervalo acotado es muy alta, debido al decaimiento exponencial de la función de onda cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

Aquí tenemos que  $\text{Im}(k_j) > 0$ , y que  $\lambda_j = k_j^2 = -\kappa_j^2$  es real. Para ello, recordemos que al principio de la sección pedimos que  $k_j$  sea imaginario puro:

$$k_j = i\kappa_j$$

Recordemos también que, cuando nos encontramos en la región donde la energía,  $\lambda_j$ , es negativa, el espectro es discreto. Podemos recordar aquí el espectro discreto del electrón, en el modelo del átomo de Hidrógeno de Bohr. Dicho electrón está atrapado por el núcleo atómico del Hidrógeno y está en un estado acotado. Así, vemos que todo es consistente. (Figura 32).

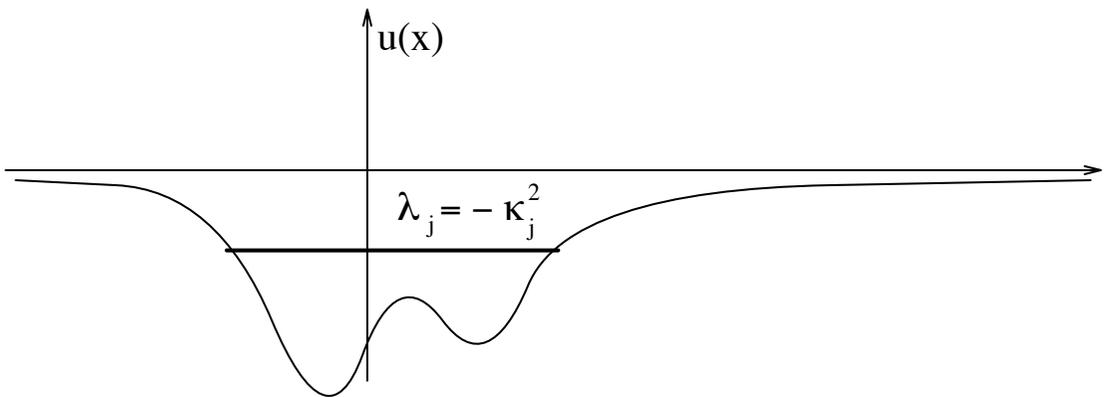


FIGURA 32. Espectro discreto

La raíz  $k = k_j = i\kappa_j$  de la ecuación  $a(k) = 0$ , es un cero simple pues, como probaremos en el apéndice C,

$$\frac{d}{dk} a(i\kappa_j) = -i\rho_j \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, i\kappa_j) dx \neq 0,$$

ya que  $\rho_j \neq 0$  y  $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, i\kappa_j) dx \neq 0$ , dado que queremos soluciones no triviales.

Además,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} &= \lim_{k \rightarrow i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} (k - i\kappa_j), \quad \text{por definición de residuo,} \\ &= \lim_{k \rightarrow i\kappa_j} \frac{k - i\kappa_j}{a(k) - a(i\kappa_j)}, \quad \text{pues } a(i\kappa_j) = 0, \\ (180) \quad &= \frac{1}{\frac{da}{dk} \Big|_{k=i\kappa_j}}. \end{aligned}$$

Y así,

$$\operatorname{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} = \frac{i}{\rho_j \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, i\kappa_j) dx}.$$

Definiendo  $c_j$  del siguiente modo,

$$(181) \quad c_j^2 \equiv \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, i\kappa_j) dx},$$

podemos escribir

$$(182) \quad \operatorname{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} = \frac{ic_j^2}{\rho_j},$$

La constante  $c_j$ , es **la constante de normalización**, pues normaliza la función de Jost,  $f(x, i\kappa_j)$ , del siguiente modo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [c_j f(x, i\kappa_j)]^2 dx = 1.$$

La relación existente entre la *constante de proporcionalidad*  $\rho_j$  y la *constante de normalización*  $c_j$  se sigue de las ecuaciones (180) y (182):

$$(183) \quad \rho_j = ic_j^2 \frac{d}{dk} a(i\kappa_j)$$

De aquí que es *equivalente* dar  $c_j^2$  o dar  $\rho_j$ .

Ahora, si  $u \rightarrow 0$  suficientemente rápido, cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , tenemos el siguiente teorema.

**TEOREMA 8.10.1.** *El número de raíces de la ecuación  $a(k) = 0$  es finito.*

*Demostración.* Esto es una consecuencia de la continuación analítica de las expresiones integrales de las funciones de Jost:

$$\begin{aligned} f(x, k) &= e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x, k) e^{iky} dy, \\ g(x, k) &= e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, k) e^{-iky} dy. \end{aligned}$$

Para  $|k| \rightarrow \infty$ , las integrales se anulan, por el lema de Riemann-Lebesgue (si  $K(x, y)$  y  $\tilde{K}(x, y)$  son absolutamente integrables). Así, cuando  $|k| \sim \infty$ , con  $\operatorname{Im}(k) > 0$ ,

$$\begin{aligned} f(x, k) &\sim e^{ikx} \\ g(x, k) &\sim e^{-ikx}. \end{aligned}$$

Sabemos que el Wronskiano de  $f$  y  $g$  está dado por (apéndice B):

$$W(f(x, k), g(x, k)) = -2ika(k)$$

de donde:

$$a(k) = \frac{i}{2k} W(f, g)$$

Si  $|k| \sim \infty$ :

$$a(k) = \frac{i}{2k} W(f, g) \sim \frac{i}{2k} W(e^{ikx}, e^{-ikx}) = 1$$

Entonces:

$$(184) \quad \lim_{|k| \rightarrow \infty} |a(k)| = 1.$$

Por tanto, los ceros de  $a(k) = 0$  deben de estar en una región acotada  $D$  del plano complejo.

Si el número de ceros es infinito, todos ellos deben de estar en  $D$ , y tendrán al menos un punto de acumulación. Si  $a(k)$  es analítica en  $D$ , de la unicidad de las funciones analíticas se sigue que  $a(k) \equiv 0$  en  $D$ . Ahora, por continuación analítica,  $a(k) \equiv 0$  en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$ . Pero en este caso  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a(k)| = 0$ , lo cual contradice la igualdad (184). Por tanto el número de ceros de  $a(k) = 0$  debe de ser finito.  $\square$

El hecho de que  $|a(k)| \rightarrow 1$ , cuando  $|k| \rightarrow \infty$ , es sencillo de entender en términos de dispersión de ondas en mecánica cuántica. Recordemos que el momentum  $\mathbf{p}$  está relacionado directamente con el número de onda  $\mathbf{k}$ :  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ .

Si una partícula se mueve con gran velocidad, o momentum  $\mathbf{p}$ , será difícil que se refleje, y sí muy fácil de que se transmita totalmente:

$$\begin{aligned} |b(k)| &\rightarrow 0, & \text{y} \\ |a(k)| &\rightarrow 1, \end{aligned}$$

esto si  $\mathbf{p} \rightarrow \infty$ , es decir, si  $\mathbf{k} \rightarrow \infty$ .

Tenemos pues que la ecuación  $a(k) = 0$  tiene un número finito de ceros  $k = i\kappa_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , con  $\lambda_j = -\kappa_j^2$  como *valores propios*. Las constantes de proporcionalidad  $\rho_j$  y de normalización  $c_j$  están dadas por las ecuaciones (181) y (183).

**8.11. La Ecuación de Gel'fand-Levitan.** La ecuación de Gel'fand-Levitan es una ecuación integral **lineal** para la función  $K(x, y)$  en la región  $x \leq y$ , quien determina la función de Jost  $f(x, k)$  bajo la transformación integral (174). Como veremos, dicha ecuación estará determinada por el coeficiente de reflexión  $R(k)$ , por los valores propios  $\lambda_j = -\kappa_j^2$  y por las constantes de normalización  $c_j$  (o por las constantes de proporcionalidad  $\rho_j$ ) los cuales constituyen los **datos de dispersión**.

Partimos de la ecuación (176):

$$g(x, k) = a(k)f(x, -k) + b(k)f(x, k)$$

Dividiendo entre  $a(k)$ ,

$$(185) \quad \frac{g(x, k)}{a(k)} = f(x, -k) + \frac{b(k)}{a(k)} f(x, k)$$

Recordemos que hemos tomado la continuación analítica de  $f$  y  $g$ , para  $\text{Im}(k) > 0$ . Consideremos una curva cerrada  $\mathcal{C}$  que consta de un semicírculo de radio  $A$  y centro en  $k = 0$ , en el semiplano complejo  $\text{Im}(k) \geq 0$ , y el segmento rectilíneo que inicia en el punto  $(-A, 0)$  y termina en  $(A, 0)$ . (Figura 33).

Tomemos  $A$  suficientemente grande de tal modo que contenga todos los ceros de  $a(k)$ :  $k_j = i\kappa_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ . Multiplicando (185) por  $e^{iky}$  para  $y > x$ , e integrando sobre  $\mathcal{C}$ , tenemos

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{g(x, k)}{a(k)} e^{iky} dk = \oint_{\mathcal{C}} f(x, -k) e^{iky} dk + \oint_{\mathcal{C}} R(k) f(x, k) e^{iky} dk,$$

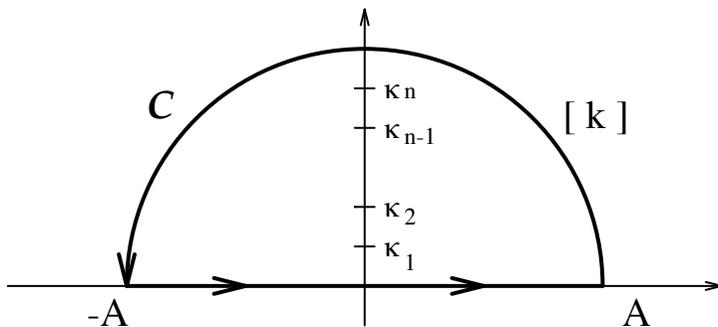


FIGURA 33. El espectro discreto: polos en el plano complejo

donde  $R(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$  es el coeficiente de reflexión. Ahora, la última ecuación se puede escribir como:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

donde:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \oint_C \frac{g(x, k)}{a(k)} e^{iky} dk, \\
 I_2 &= \oint_C f(x, -k) e^{iky} dk, \\
 I_3 &= \oint_C R(k) f(x, k) e^{iky} dk.
 \end{aligned}$$

Calculemos  $I_1$ :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \oint_C \frac{g(x, k)}{a(k)} e^{iky} dk = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{g(x, k)}{a(k)} e^{iky} = \\
 &= 2\pi i \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j y} g(x, i\kappa_j) \text{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{1}{a(k)}
 \end{aligned}$$

De la ecuación (182) tenemos:

$$I_1 = 2\pi i \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j y} g(x, i\kappa_j) \frac{ic_j^2}{\rho_j}$$

y de (179):

$$(186) \quad I_1 = -2\pi \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j y} c_j^2 f(x, i\kappa_j)$$

Por otra parte, usando la representación integral de  $f$  (ecuación (174)), tenemos:

$$f(x, i\kappa_j) = e^{-\kappa_j x} + \int_x^\infty K(x, z) e^{-\kappa_j z} dz,$$

que sustituyendo en (186):

$$I_1 = -2\pi \left( G(x + y) + \int_x^\infty G(y + z) K(x, z) dz, \right)$$

donde:

$$G(s) \equiv \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j s} c_j^2$$

Calculemos ahora  $I_2$ . Usando (174):

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_C e^{ik(y-x)} dk + \oint_C \left( \int_x^\infty K(x, z) e^{ik(y-z)} dz \right) dk \\ &= \oint_C \left( \int_x^\infty K(x, z) e^{ik(y-z)} dz \right) dk \end{aligned}$$

pues la función exponencial es analítica. Tomando el límite cuando  $A \rightarrow \infty$ :

$$I_2 = \int_{-\infty}^\infty \int_x^\infty K(x, z) e^{ik(y-z)} dz dk,$$

ya que la integral sobre el semicírculo se anula cuando  $A \rightarrow \infty$ , pues  $y - z > x - z > 0$ , es la región donde está definida  $K(x, z)$  y  $\text{Im}(k) > 0$ . (Este es el lema de Jordan. Consultar cualquier texto de Variable Compleja.)

Ahora, como  $y > x$ , y usando el teorema de inversión de Fourier obtenemos:

$$I_2 = 2\pi K(x, y)$$

Finalmente, usando la expresión integral de  $f(x, k)$ , calculemos  $I_3$ :

$$I_3 = \oint_C R(k) e^{ik(x+y)} dk + \oint_C \left( \int_x^\infty R(k) K(x, z) e^{ik(y+z)} dz \right) dk.$$

Si  $A \rightarrow \infty$ , las integrales se anulan sobre los semicírculos (por la misma razón que antes), resultando:

$$I_3 = \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{ik(x+y)} dk + \int_x^\infty K(x, z) \left( \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{ik(y+z)} dk \right) dz,$$

donde usamos el teorema de Fubini.

Llamando

$$H(s) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{iks} dk$$

a la transformada inversa de Fourier de  $R(k)$ , entonces

$$I_3 = 2\pi H(x+y) + 2\pi \int_x^\infty K(x, z) H(y+z) dz.$$

Así, la ecuación:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

es:

$$(187) \quad K(x, y) + F(x+y) + \int_x^\infty K(x, z) F(y+z) dz = 0$$

en la región:

$$x \leq y$$

y donde

$$(188) \quad F(s) \equiv G(s) + H(s) = \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j s} c_j^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{iks} dk$$

La ecuación (187) es **la ecuación de Gel'fand-Levitan**. También se le conoce como **ecuación de Marchenko**. Es una ecuación integral para  $K(x, y)$  en el semiplano  $x \leq y$ . Si consideremos  $F(s)$  como dada, el problema es ahora resolver una ecuación **lineal** (lo cual simplifica infinitamente el problema). Esto es, dados *los valores propios*  $\lambda_j = -\kappa_j^2$ , *las constantes de normalización*  $c_j$  y *el coeficiente de reflexión*  $R(k)$  (i.e., **los datos de dispersión**), estará dada  $F(s)$ .

Resolver la ecuación de Gel'fand-Levitan es encontrar  $K(x, y)$  para  $x \leq y$ , lo cual nos llevará inmediatamente al *cálculo del potencial*, a través de la relación (173):

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x)$$

Esto es, ¡recuperamos el potencial de la ecuación de Schrödinger!

**8.12. Evolución Temporal de los Datos de Dispersión.** Como mencionamos en la sección 8.4, los valores propios son constantes de movimiento (155):

$$\frac{d\kappa_j}{dt} = 0,$$

y las funciones de Jost  $f$  y  $g$  (soluciones a la ecuación de Schrödinger) evolucionan de acuerdo a la ecuación ((161) y (163)):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = B[\varphi] \quad (\text{con } \psi = f \text{ ó } g),$$

tanto para el espectro discreto (funciones de Jost,  $f$  y  $g$ , evaluadas en  $k = i\kappa_j$ ) como para el continuo. El operador  $B$  está dado por (ecuación (160)):

$$B[\varphi] \equiv -4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 3\varphi u_x.$$

Pero como hicimos notar en las secciones anteriores, sólo es necesario el comportamiento asintótico de las funciones de Jost en  $|x| \sim \infty$ . Esto nos dará la evolución temporal de los datos de dispersión:

$$\begin{aligned} \kappa_j &= \kappa_j(t) = \kappa_j(0) \quad (\text{ya conocemos esta evolución}), \\ R &= R(k, t), \\ c_j &= c_j(t). \end{aligned}$$

Podemos así, encontrar una solución:

$$K = K(x, y; t)$$

a la ecuación de Gel'fand-Levitan, y encontraremos el "*potencial*" de la ecuación de Schrödinger en todo instante:

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t),$$

¡que es la solución a la ecuación de Korteweg-deVries!

Esto nos da un método, **el método de dispersión inversa**, para resolver la ecuación de KdV, ¡la cual es muy difícil de resolver directamente!. Por ejemplo, podemos buscar soluciones del tipo de onda viajera:

$$u(x, t) = u(x - ct),$$

la cual, como veremos posteriormente, también se encuentra con el método de dispersión inversa. Pero hay otras soluciones que pueden ser encontradas usando dispersión inversa, ¡que **no** pueden ser encontradas usando la suposición de onda viajera! También, como vimos en la sección 8.2, los intentos de linealizar la ecuación de KdV resultaron ser infructuosos.

Así pues, vemos que el **método de dispersión inversa** resulta ser muy efectivo. Calculemos así, la evolución temporal de *las constantes de proporcionalidad*  $\rho_j$  y del *coeficiente de reflexión*  $R(k)$ , para poder determinar completamente la función  $F(s; t)$  en todo instante  $t$ .

Notemos que la asintótica de la ecuación (161) es:

$$(189) \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \sim -4 \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x^3},$$

pues  $u, u_x \sim 0$  en este límite y  $\psi_j$  es una función propia de la ecuación de Schrödinger (145) (no necesariamente la función de Jost  $f(x, i\kappa_j, t)$ ). Consideremos la función de Jost  $g(x, i\kappa_j, t)$ . Como también es solución a la ecuación de Schrödinger (145),  $g_j$  y  $\psi_j$  son proporcionales:

$$(190) \quad \psi(x, i\kappa_j, t) = h(i\kappa_j, t)g(x, i\kappa_j, t)$$

Si escribimos  $h_j = h(i\kappa_j, t)$  y substituyendo en (189) obtenemos:

$$(191) \quad \frac{dh_j}{dt} = -4\kappa_j^3 h_j,$$

donde usamos el comportamiento asintótico  $g_j \sim e^{\kappa_j x}$  en  $x \sim -\infty$ . Ahora, como  $g_j$  y  $f_j$ , son proporcionales, la ecuación (190) se puede también escribir como:

$$(192) \quad \psi(x, i\kappa_j, t) = h(i\kappa_j, t)\rho_j f(x, i\kappa_j, t)$$

Tomando nuevamente la asintótica de (161) en  $x \sim \infty$ , pero con  $\psi_j$  como en (192) obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(h_j \rho_j) = 4\kappa_j^3 \rho_j h_j$$

Usando (191), se sigue

$$\frac{d\rho_j}{dt} = 8\kappa_j^3 \rho_j,$$

la cual describe la evolución temporal de la constante de proporcionalidad  $\rho_j$  y tiene solución:

$$\rho_j(t) = \rho_j(0)e^{8\kappa_j^3 t}.$$

Pero quienes aparecen en la ecuación de Gel'fand-Levitan son las constantes de normalización  $c_j^2(t)$ , relacionadas con  $\rho_j$  según la ecuación (183):

$$c_j^2(t) = -\frac{i\rho_j(t)}{\frac{d}{dk}a(i\kappa_j)} = -\frac{i\rho_j(0)}{\frac{d}{dk}a(i\kappa_j)}e^{8\kappa_j^3 t},$$

por lo que

$$(193) \quad c_j^2(t) = c_j^2(0)e^{8\kappa_j^3 t}$$

es la evolución temporal de  $c_j^2(t)$ .

La evolución temporal del coeficiente de reflexión se encuentra de un modo similar. La asintótica de la ecuación (163) en  $x \sim -\infty$  es:

$$(194) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \sim -4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$$

Si escogemos  $\psi$  proporcional a  $g$ ,

$$\psi(x, k, t) = h(k, t)g(x, k, t),$$

para  $x \sim -\infty$ , obtenemos

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -4ik^3 h.$$

Tomando ahora la asintótica (163) en  $x \sim \infty$ ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \sim -4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$$

con  $\psi(x, k, t) = h(k, t)g(x, k, t)$ , obtenemos, usando (177):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(ha) &= -4ik^3(ha) \\ \frac{\partial}{\partial t}(hb) &= 4ik^3(hb) \end{aligned}$$

Y de la ecuación de evolución de  $h$ , se sigue

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= 8ik^3b\end{aligned}$$

¡Obtenemos nuevamente otra constante de integración  $a(k, t)$ ! Además, como la evolución temporal de  $b(k, t)$  es *muy* sencilla, la evolución temporal del coeficiente de reflexión también será realmente sencilla:

$$R(k, t) = \frac{b(k, 0)}{a(k, 0)} e^{8ik^3t},$$

o bien,

$$(195) \quad R(k, t) = R(k, 0) e^{8ik^3t}.$$

Conocemos entonces  $c_j^2(t)$ ,  $\lambda_j = -\kappa_j^2$  y  $R(k, t)$  en todo instante  $t$ , por lo que el núcleo  $F(s, t)$  de la ecuación de Gel'fand-Levitan está bien determinado:

$$F(s, t) = \sum_{j=1}^n c_j^2(t) e^{-\kappa_j s} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, t) e^{iks} dk$$

La ecuación de Gel'fand-Levitan será

$$K(x, y; t) + F(x + y; t) + \int_x^{\infty} K(x, z; t) F(y + z; t) dz = 0$$

cuya solución  $K(x, y; t)$  determina la función de Jost  $f(x, k; t)$ ,

$$f(x, k; t) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x, y; t) e^{iky} dy \quad \text{en } x \leq y.$$

solución a la ecuación de Schrödinger y también determina el *potencial*

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t)$$

¡solución a la ecuación de KdV!

**8.13. Esquema del Método de Dispersión Inversa.** Podemos dar aquí un esquema del funcionamiento del *método*, el cual es realmente sorprendente, ¡pues es un análogo no lineal de la transformada de Fourier! Para ello, recordemos cómo funciona la transformada de Fourier.

Por ejemplo, resolvamos la ecuación de onda

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= g(x).\end{aligned}$$

Usando la transformada de Fourier obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{tt} + k^2 \tilde{u} &= 0, \\ \tilde{u}(k, 0) &= \tilde{f}(k), \\ \tilde{u}_t(k, 0) &= \tilde{g}(k).\end{aligned}$$

que es un ecuación ordinaria en  $t$  para la función  $\tilde{u}(k, t)$  y cuya solución es

$$\tilde{u}(k, t) = \cos(kt) \tilde{f}(k) + \frac{\sin(kt)}{k} \tilde{g}(k).$$

Lo que permitió encontrar esta solución es que la evolución en el tiempo es *simple*, por ser desacoplada de la variable espacial  $x$ . Invertiendo esta última ecuación obtenemos:

$$u(x, t) = \frac{f(x + t) + f(x - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds.$$

Gráficamente, representamos este método en la figura 34.

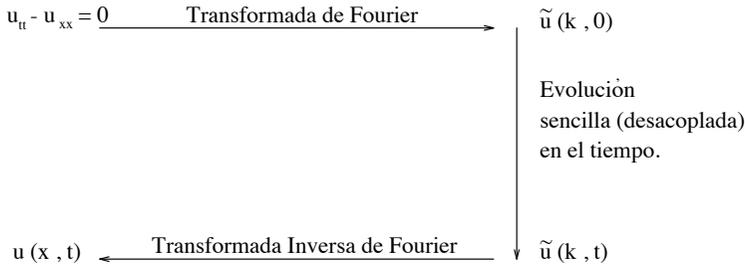


FIGURA 34. Fourier Transform

El problema de resolver la ecuación de KdV mediante el *método de dispersión inversa*, tiene el mismo esquema que de resolver un problema lineal usando la transformada de Fourier. La diferencia consiste que con la transformada de Fourier se obtiene una transformada  $\tilde{u}(k, t)$  de la incógnita  $u(x, t)$ , mientras que en el problema de KdV trabajamos con los datos de dispersión

$$S_n(k, t) = \left\{ \lambda_j(t), c_j^2(t), R(k, t), \text{ donde } j = 1, 2, 3, \dots, n, \text{ y } k \in \mathbb{R} \right\}.$$

En el instante inicial conocemos  $u(x, 0) = V(x)$ , lo que nos permite conocer por dispersión directa (i.e., resolviendo la ecuación de Schrödinger con el potencial  $V(x)$ ) los datos de dispersión  $S_n(k, 0)$  en el instante inicial  $t = 0$ .

Sabemos además, cómo evolucionan los datos de dispersión en el tiempo  $t$ :

$$S_n(k, t) = \left\{ \lambda_j(t) = \lambda_j(0), c_j^2(t) = c_j^2(0)e^{8\kappa_j^3 t}, j = 1, \dots, n, R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3 t}, k \in \mathbb{R} \right\}$$

Usando ahora la ecuación de Gel'fand-Levitan, resolvemos el problema de *Dispersión Inversa*, esto es, encontraremos el potencial  $u(x, t)$ . El esquema del método se da en la figura 35.

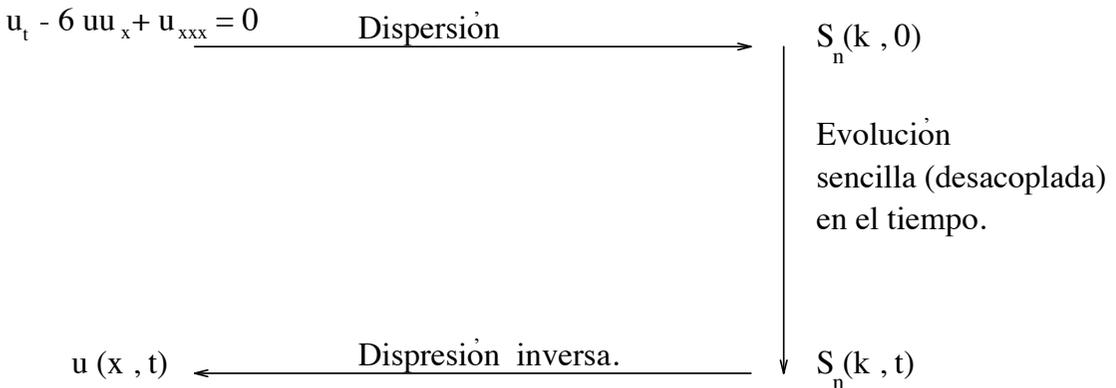


FIGURA 35. El método de dispersión inversa

Debido a esta analogía, el método lleva también el nombre de *Transformada de Dispersión Inversa*, aunque no tratemos con alguna transformada para la función  $u(x, t)$ .

**8.14. Ejemplo.** Queremos resolver la ecuación de KdV (131):

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

sujeta a la condición:

$$u(x, 0) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x)$$

como perfil inicial. La ecuación que debemos resolver corresponde a resolver el problema directo de dispersión o problema de valores propios

$$(196) \quad \psi_{xx} + (k^2 + 2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x))\psi = 0$$

donde  $\psi$  es una función de  $x$  y  $k$ , evaluada en  $t = 0$ ,  $\psi(x, k, 0)$ , y cuyo dominio es  $-\infty < x < \infty$ .

Tomando el siguiente cambio de variable

$$(197) \quad \begin{aligned} \xi &= \tanh(\kappa x), \\ \varphi(\xi) &= \psi(x(\xi)), \end{aligned}$$

tenemos que su dominio es  $-1 < \xi < 1$  y

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= \kappa(1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi}, \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \kappa^2(1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \end{aligned}$$

Así, la ecuación de Schrödinger se transforma en

$$(198) \quad \kappa^2(1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + [2\kappa^2(1 - \xi^2) + k^2]\varphi = 0.$$

Dividiendo entre  $\kappa^2(1 - \xi^2)$ ,

$$(199) \quad \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \left[ 2 + \frac{k^2}{\kappa^2(1 - \xi^2)} \right] \varphi = 0.$$

Ahora, la ecuación,

$$(200) \quad \frac{d}{dz} \left( (1 - z^2) \frac{dw}{dz} \right) + \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{(1 - z^2)} \right] w = 0,$$

es la ecuación asociada de Legendre [29]. Para que la ecuación (199) de Schrödinger sea la asociada de Legendre (200), se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \nu(\nu + 1) &= 2 \\ k_m^2 &= -\kappa^2 m^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

De la primer ecuación,  $\nu = 1$  ó  $-2$ . Pero  $\nu = -2$  es un polo de las funciones asociadas de Legendre  $w(z) = P_n^m(z)$  soluciones de (200). Por tanto,

$$\nu = 1.$$

Ahora,  $m \neq 0$ , pues queremos encontrar valores propios  $\lambda_m = -\kappa^2 m^2 \neq 0$ . Además, como  $\nu = n = 1$  debe ser natural y se debe de cumplir la desigualdad:

$$0 < m \leq \nu = 1,$$

resulta forzosamente  $m = 1$  y tenemos por tanto un único valor propio:

$$\lambda_1 = -\kappa^2.$$

Así, la función de onda  $\varphi(\xi)$ , solución de la ecuación (199) (transformada de Schrödinger) debe de ser proporcional a la función asociada de Legendre  $P_{\nu=1}^{m=1}(\xi)$ :

$$\varphi(\xi) \sim w(\xi) = P_{\nu=1}^{m=1}(\xi) = -2(1 - \xi^2)^{1/2}$$

Como  $\xi = \tanh \kappa x$ , entonces:

$$\psi(x) \sim -2 \operatorname{sech} \kappa x$$

Pero recordando el comportamiento asintótico

$$f(x, i\kappa) \sim e^{-\kappa x}, \quad \text{si } x \sim \infty,$$

se tiene que

$$f(x, i\kappa) = \frac{1}{2} \operatorname{sech} \kappa x$$

y la función  $\psi$  debe de ser proporcional a la función de Jost  $f$ ,

$$\psi(x, k) = cf(x, i\kappa) = \frac{c}{2} \operatorname{sech} \kappa x,$$

donde  $c$  es la constante de normalización por determinar. Para ello, pedimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \frac{c^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{sech} \kappa x|^2 dx = 1.$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \kappa x dx = \frac{1}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (\tanh \kappa x) dx = \frac{2}{\kappa},$$

entonces se sigue

$$c = \sqrt{2\kappa}.$$

Tenemos así el valor propio  $\lambda$  y la constante de normalización  $c$  en el instante inicial  $t = 0$ :

$$(201) \quad \begin{aligned} \lambda(0) &= -\kappa^2 \\ c(0) &= \sqrt{2\kappa} \end{aligned}$$

En lo que sigue, para encontrar información respecto al espectro continuo, seguiremos [25]. Falta entonces encontrar el coeficiente de reflexión  $R(k, 0)$ . Para ello notemos que la ecuación (198) se puede escribir como

$$(202) \quad (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \left[ \nu(\nu + 1)(1 - \xi^2) - \left( \frac{ik}{\kappa} \right)^2 \right] \varphi = 0$$

donde hemos puesto  $2 = \nu(\nu + 1)$ .

Efectuando la substitución

$$(203) \quad \varphi(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{ik}{2\kappa}} \chi(\xi),$$

llegamos a la ecuación

$$(204) \quad - \left( \frac{ik}{\kappa} - \nu \right) \left( \frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1) \right) \chi(\xi) - 2 \left( \frac{ik + \kappa}{\kappa} \right) \xi \chi'(\xi) + (1 - \xi^2) \chi''(\xi) = 0.$$

Usando el cambio de variables,

$$(205) \quad \begin{aligned} \xi &= 1 - 2\eta, \\ H(\eta) &= \chi(\xi(\eta)), \end{aligned}$$

tenemos que la ecuación (204) es:

$$(206) \quad - \left( \frac{ik}{\kappa} - \nu \right) \left( \frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1) \right) H(\eta) + \left( \frac{ik}{\kappa} + 1 \right) (1 - 2\eta) H'(\eta) + \eta(1 - \eta) H''(\eta) = 0.$$

Si tomamos

$$(207) \quad \begin{aligned} \gamma &= \frac{ik}{\kappa} + 1, \\ \alpha + \beta + 1 &= 2 \left( \frac{ik}{\kappa} + 1 \right), \\ \alpha\beta &= \left( \frac{ik}{\kappa} - \nu \right) \left( \frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1) \right), \end{aligned}$$

entonces la ecuación (206) resulta ser

$$-\alpha\beta H(\eta) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)\eta) H'(\eta) + \eta(1 - \eta) H''(\eta) = 0,$$

la cual es la ecuación hipergeométrica, cuya solución es

$$H(\eta) = F(\alpha, \beta, \gamma; \eta).$$

Usando (205), (203) y (197), obtenemos

$$(208) \quad \psi(x, k) = \psi_0 (\operatorname{sech} \kappa x)^{\frac{ik}{\kappa}} F(\alpha, \beta, \gamma; \eta(x))$$

donde

$$\eta(x) = \frac{1 - \tanh \kappa x}{2}$$

y  $\psi_0$  es una constante por determinar.

Del sistema (207) se sigue

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{ik}{\kappa} - \nu, \\ \beta_1 &= \frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1), \\ \gamma_1 &= \frac{ik}{\kappa} + 1. \end{aligned}$$

*Observación 8.14.1.* También podemos escoger:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1) \\ \beta_2 &= \frac{ik}{\kappa} - \nu \\ \gamma_2 &= \frac{ik}{\kappa} + 1 \end{aligned}$$

pero recordemos:

$$F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \eta) = F(\beta_2, \alpha_2, \gamma_2; \eta) = F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \eta)$$

por lo que tenemos la misma solución.

Una posible solución es

$$f^*(x, k) = f_0^* (\operatorname{sech} \kappa x)^{\frac{-ik}{\kappa}} F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \eta(x))$$

Si  $f_0^* = 2^{\frac{-ik}{\kappa}}$ , entonces, para  $x \sim \infty$ :

$$f^*(x, k) \sim e^{-ikx} F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; 0)$$

Pero

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; 0) = 1$$

y así se tiene que

$$f(x, k) = 2^{\frac{ik}{\kappa}} (\operatorname{sech} \kappa x)^{\frac{-ik}{\kappa}} F^*(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \eta(x))$$

es una solución con comportamiento asintótico

$$f(x, k) \sim e^{ikx}, \quad \text{si } x \sim \infty.$$

Ahora, como la ecuación de Schrödinger (196) es invariante si se toman las sustituciones  $k \rightarrow -k$  ó  $x \rightarrow -x$ , podemos tener otra solución  $g(x, k)$ . Haciendo dichas sustituciones en la solución (208):

$$g(x, k) \equiv \psi(-x, -k) = g_0 (\operatorname{sech} \kappa x)^{\frac{-ik}{\kappa}} F(\alpha, \beta, \gamma; \eta(-x))$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-ik}{\kappa} - \nu, \\ \beta &= \frac{-ik}{\kappa} + (\nu + 1), \\ \gamma &= \frac{-ik}{\kappa} + 1 \end{aligned}$$

y

$$\eta(-x) = \frac{1 + \tanh \kappa x}{2}.$$

Tomando  $g_0 = 2^{\frac{ik}{\kappa}}$  y como  $F(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1$ ,

$$g(x, k) \sim e^{-ikx}, \quad \text{si } x \sim -\infty.$$

Entonces  $g(x, k)$  está dada por:

$$(209) \quad g(x, k) = \left( \frac{\operatorname{sech} \kappa x}{2} \right)^{\frac{-ik}{\kappa}} F(\alpha, \beta, \gamma; \eta(-x)).$$

Ahora, para encontrar el coeficiente de reflexión  $R(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$ , debemos tomar la asintótica de  $g(x, k)$  cuando  $x \sim \infty$ , pues determina los factores  $a(k)$  y  $b(k)$  (ecuación (177)):

$$g(x, k) \sim a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, \quad x \sim \infty.$$

Para tal fin, recordemos que la función hipergeométrica puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z), \end{aligned}$$

donde

$$z \equiv \eta(-x) = \frac{1 + \tanh \kappa x}{2}.$$

Para  $x \sim \infty$ , se tiene  $z \sim 1$ :

$$\begin{aligned} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta; 1 - z) &\sim 1 \\ F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z) &\sim 1 \end{aligned}$$

y también

$$1 - z \sim e^{-2\kappa x}.$$

Así, si  $x \sim \infty$ ,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-2ikx} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)},$$

pues  $\gamma - \alpha - \beta = \frac{ik}{\kappa}$ . De aquí, la asintótica de  $g(x, k)$  (209) en  $x \sim \infty$  es

$$g(x, k) \sim \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{-ik}{\kappa}} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-ikx} + \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{-ik}{\kappa}} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} e^{ikx}.$$

Comparando con (177), el coeficiente de reflexión es

$$R(k) = \frac{b(k)}{a(k)} = \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)},$$

con módulo cuadrado

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)} \right|^2 \left| \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \right|^2.$$

Ahora,

$$\left| \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)} \right|^2 = \left| \frac{\Gamma(\frac{ik}{\kappa})}{\Gamma(\frac{-ik}{\kappa})} \right|^2 = 1,$$

pues  $|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sin(\pi y)}$ , para  $y$  real. Así,

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \right|^2.$$

Usando  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  y  $\Gamma(\frac{1}{2}+z)\Gamma(\frac{1}{2}-z) = (-1)^z\pi$  y usando el hecho que  $\nu = 1$ , podemos escribir:

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{(-\frac{ik}{\kappa} + 1)\frac{ik}{\kappa}\Gamma^2(\frac{-ik}{\kappa})}{\pi(\frac{ik}{\kappa} + 1)} \right|^2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

Así,  $iu(x, 0) = 2\kappa^2 \operatorname{sech}\kappa x$  es un potencial sin reflexión!:

$$(210) \quad |R(k)|^2 \equiv 0$$

Conocemos ya los datos de dispersión en el instante  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= -\kappa^2, \\ c(0) &= \sqrt{2\kappa}, \\ R(k) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Ahora viene el paso importante: *podemos conocer la evolución en el tiempo de los datos de dispersión*. Como sabemos, están dados en términos muy sencillos:

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= -\kappa^2 \quad (\text{¡constante de movimiento!}) \\ c(t) &= \sqrt{2\kappa}e^{4\kappa^3 t} \\ R(k) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Ahora, la expresión (188) de  $F(s; t)$  está dada por

$$F(s; t) = 2\kappa e^{8\kappa^3 t - \kappa s},$$

por lo que la ecuación de Gel'fand-Levitan es

$$K(x, y; t) + 2\kappa e^{8\kappa^3 t - \kappa(x+y)} + 2\kappa e^{8\kappa^3 t} \int_x^\infty K(x, z; t) e^{-\kappa(y+z)} dz = 0.$$

Busquemos soluciones del tipo degenerado:

$$K(x, y; t) = A(x; t) e^{-\kappa y}.$$

Entonces, la ecuación de Gel'fand-Levitan se reduce a,

$$A(x; t) + 2\kappa e^{8\kappa^3 t - \kappa x} + e^{8\kappa^3 t - 2\kappa x} A(x; t) = 0,$$

la cual es una ecuación algebraica para  $A(x; t)$ . Entonces,

$$A(x; t) = \frac{-2\kappa e^{8\kappa^3 t + \kappa x}}{e^{2\kappa x} + e^{8\kappa^3 t}},$$

por lo que el kernel de la ecuación de Gel'fand-Levitan es

$$K(x, y; t) = \frac{-2\kappa e^{8\kappa^3 t + \kappa(x-y)}}{e^{2\kappa x} + e^{8\kappa^3 t}}.$$

De este modo,

$$K(x, x; t) = \frac{-2\kappa e^{8\kappa^3 t}}{e^{2\kappa x} + e^{8\kappa^3 t}}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} K(x, x; t) &= \frac{(2\kappa)^2 e^{8\kappa^3 t + 2\kappa x}}{(e^{2\kappa x} + e^{8\kappa^3 t})^2}, \\ &= \kappa^2 \left( \frac{2}{e^{\kappa x - 4\kappa^3 t} + e^{-(\kappa x - 4\kappa^3 t)}} \right)^2, \\ &= \kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t). \end{aligned}$$

Entonces la solución a la ecuación de Korteweg-deVries (131) con condición inicial (132) es

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t).$$

Esta solución también se puede recuperar proponiendo soluciones del tipo de onda viajera  $u(x, t) = u(x - ct)$  como lo mencionamos anteriormente. Sin embargo, para perfiles iniciales de la forma

$$V(x) = -N(N + 1)\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x,$$

tendremos también un potencial sin reflexión,  $R(k) \equiv 0$ , con  $N$  valores propios,

$$\lambda_m = -(m\kappa)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots, N,$$

dando esto como resultado soluciones mucho más complicadas ¡que *no* pueden ser recuperadas con la sencilla suposición de onda viajera! Por ejemplo, si  $N = 2$ , la solución a la ecuación de KdV será:

$$(211) \quad u(x, t) = -12 \frac{3 + 4 \cosh 2\kappa(x - 4\kappa^2 t) + \cosh 4\kappa(x - 16\kappa^2 t)}{[\cosh 3\kappa(x - 12\kappa^2 t) + 3 \cosh \kappa(x - 28\kappa^2 t)]^2}$$

solución que **no** es del tipo de onda viajera y que en  $t = 0$  se reduce a la condición inicial,

$$(212) \quad u(x, 0) = -6\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x.$$

Esta solución tiene valores propios  $\lambda_1 = -\kappa^2$  y  $\lambda_2 = -4\kappa^2$ .

*8.14.1. Otra forma de abordar el problema.* Formulemos la siguiente pregunta: ¿existe potencial  $u(x, 0)$ , tal que el coeficiente de reflexión sea nulo,

$$R(k, 0) \equiv 0?$$

Para dar respuesta, debemos resolver la ecuación de Gel'fand-Levitan,

$$(213) \quad K(x, y) + F(x + y) + \int_x^\infty K(x, z)F(y + z) dz = 0$$

con

$$F(s) = e^{-\kappa s}.$$

Así,

$$K(x, y) + e^{-\kappa(x+y)} + \int_x^\infty K(x, z)e^{-\kappa(y+z)} dz = 0.$$

Como lo hicimos anteriormente, propongamos un kernel degenerado,

$$K(x, y) = A(x)e^{-\kappa y},$$

por lo que debemos de resolver la ecuación algebraica para  $A(x; t)$ ,

$$A(x) + e^{-\kappa x} + A(x) \int_x^\infty e^{-2\kappa z} dz = 0.$$

Entonces

$$A(x) = \frac{-2\kappa e^{-\kappa x}}{2\kappa + e^{-2\kappa x}}$$

y el kernel será

$$K(x, y) = \frac{-2\kappa e^{-\kappa(x+y)}}{2\kappa + e^{-2\kappa x}},$$

por lo que

$$K(x, x) = \frac{-2\kappa e^{-2\kappa x}}{2\kappa + e^{-2\kappa x}}$$

y

$$\frac{d}{dx} K(x, x) = \kappa^2 \left( \frac{2}{\sqrt{2\kappa} e^{\kappa x} + \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} e^{-\kappa x}} \right)^2.$$

Definiendo  $\delta_0$  tal que

$$e^{\delta_0} \equiv \sqrt{2\kappa},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= -2 \frac{d}{dx} K(x, x) = \\ &= -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x + \delta_0). \end{aligned}$$

Aún más, dado que conocemos el kernel  $K(x, y)$ , podemos conocer las funciones de Jost  $f(x, k)$  y  $g(x, k)$ . La función de Jost  $f(x, k)$  es

$$f(x, k) = e^{ikx} - \frac{2\kappa e^{-\kappa x}}{2\kappa + e^{-\kappa x}} \int_x^\infty e^{-(\kappa - ik)y} dy.$$

Integrando y usando  $e^{\delta_0} = \sqrt{2\kappa}$  obtenemos

$$f(x, k) = e^{ikx} \left( 1 - \frac{2ik e^{-2\kappa x}}{(e^{2\delta_0} + e^{-2\kappa x})(k + i\kappa)} \right).$$

Multiplicando y dividiendo por  $e^{\kappa x - \delta_0}$ , sumando y restando  $i\kappa e^{\kappa x + \delta_0}$  en el segundo sumando, encontramos

$$f(x, k) = e^{ikx} \left( \frac{k + i\kappa \tanh(\kappa x + \delta_0)}{k + i\kappa} \right),$$

¡la cual es una solución sorprendentemente sencilla! Notemos que, en efecto,

$$f(x, k) \sim e^{ikx}, \quad \text{si } x \sim \infty$$

Ahora, sabemos que (ver ecuación (177)):

$$g(x, k) = a(k)f^*(x, k) + b(k)f(x, k).$$

Para  $x \sim -\infty$ ,

$$g(x, k) \sim a(k) \left( \frac{k + i\kappa}{k - i\kappa} \right) e^{-ikx} + b(k) \left( \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \right) e^{ikx}.$$

Pero también sabemos que

$$g(x, k) \sim e^{-ikx}, \quad \text{si } x \sim -\infty,$$

para cualquier  $k$ . Por tanto,

$$a(k) = \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \quad \text{y} \quad b(k) \equiv 0.$$

Entonces, la segunda función de Jost es

$$g(x, k) = a(k)f^*(x, k) = e^{-ikx} \left( \frac{k - i\kappa \tanh(\kappa x + \delta_0)}{k + i\kappa} \right).$$

Ahora, sabemos que los valores propios son las raíces de la ecuación

$$a(k) = 0,$$

que en este caso sólo tenemos un valor propio:

$$k = i\kappa$$

Así pues, la función  $F(s; t)$  será

$$F(s; t) = c^2(t)e^{-\kappa s}$$

y la ecuación de Gel'fand-Levitan es

$$K(x, y; t) + c^2(t)e^{-\kappa(x+y)} + c^2(t)e^{-\kappa y} \int_x^\infty K(x, z; t)e^{-\kappa z} dz = 0$$

Suponiendo

$$K(x, y; t) = A(x; t)e^{-\kappa y},$$

tenemos

$$A(x; t) + c^2(t)e^{-\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa} A(x; t)e^{-2\kappa x} = 0.$$

Así,

$$A(x; t) = \frac{-c^2(t)e^{\kappa x}}{e^{2\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa}},$$

por lo que el kernel será

$$K(x, y; t) = \frac{-c^2(t)e^{\kappa(x-y)}}{e^{2\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa}}.$$

Entonces,

$$K(x, x; t) = \frac{-c^2(t)}{e^{2\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa}}$$

y

$$\frac{d}{dx}K(x, x; t) = \frac{2\kappa c^2(t)e^{2\kappa x}}{\left(e^{2\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa}\right)^2} = \kappa^2 \left( \frac{2}{\frac{\sqrt{2\kappa}}{c(t)}e^{\kappa x} + \frac{c(t)}{\sqrt{2\kappa}}e^{-\kappa x}} \right)^2$$

Definiendo  $\delta(t)$  del siguiente modo:

$$e^{\delta(t)} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c(t)},$$

entonces,

$$\frac{d}{dx}K(x, x; t) = \kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x + \delta(t))$$

por lo que la solución de la ecuación de KdV es

$$u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x + \delta(t)).$$

Ahora, si  $\delta_0$  se define como

$$e^{\delta_0} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c(0)},$$

se sigue

$$e^{\delta(t)} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c(t)} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c(0)} e^{-4\kappa^3 t} = e^{-4\kappa^3 t + \delta_0},$$

por lo que,

$$\delta(t) = -4\kappa^3 t + \delta_0.$$

Así,

$$u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x - 4\kappa^3 t + \delta_0).$$

Pero en  $t = 0$ ,  $u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x$ , de donde  $\delta_0 = 0$  y la solución de la ecuación de Korteweg-deVries resulta ser

$$u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x - 4\kappa^3 t),$$

y la constante de normalización

$$c(0) = \sqrt{2\kappa}$$

es la misma que antes. La velocidad de propagación del soliton es

$$\text{Velocidad de propagación} = 4\kappa^2,$$

y como vemos es proporcional a la amplitud

$$\text{Amplitud} = -2\kappa^2.$$

Así, los solitones más altos son los solitones más rápidos.

**8.15. ¿Qué hace el Espectro Continuo?** En la sección anterior vimos un ejemplo en que el coeficiente de reflexión es nulo,  $R(k) \equiv 0$ , pero en general tendremos potenciales en los que dicho coeficiente sea distinto de cero:

$$R(k) \neq 0.$$

Lamentablemente, y a pesar de ser una ecuación lineal, la ecuación de Gel'fand-Levitan *no* podrá ser resuelta explícitamente en la mayoría de los casos.

Veamos qué sucede si la condición inicial es

$$u(x, 0) = -\nu(\nu + 1) \operatorname{sech}^2 x.$$

donde  $\nu > 0$  *no* es un entero. Aquí, los valores propios son

$$\lambda_1 = -(\nu - (N - 1))^2,$$

$$\lambda_2 = -(\nu - (N - 2))^2,$$

$$\vdots$$

$$\lambda_N = -\nu^2,$$

donde  $N$  es el máximo entero tal que  $N < \nu + 1$ . (Ver la nota al final de esta sección).

Si por ejemplo  $\nu = 0,5$ , entonces el perfil inicial tiene amplitud

$$A_i = \nu(\nu + 1) = 0,75.$$

Aquí  $N = 1$  y el solitón correspondiente al valor propio  $\lambda_1 = -\kappa_1^2 = -\nu_1^2 = -0,25$ , tiene amplitud

$$A_1 = 2\kappa_1^2 = 0,5.$$

Notemos que la amplitud inicial es mayor que la amplitud del solitón en cualquier otro instante posterior:

$$A_i > A_1.$$

Y esto es debido a que parte de la amplitud se pierde en **radiación**, debido a que el coeficiente de reflexión **no** es idénticamente cero:  $R(k, 0) \neq 0$ .

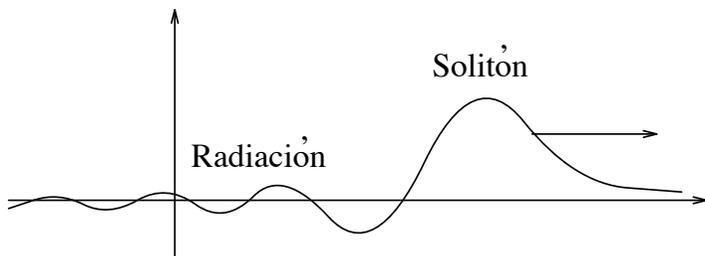


FIGURA 36. Espectro continuo: radiación

Vemos que efectivamente en este caso  $R(k) \neq 0$ , pues:

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \right|^2 \sim \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi$$

lo cual no necesariamente vale *cero*.

*Observación 8.15.1.* Los valores propios están dados por los polos del coeficiente de reflexión:

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \right|^2 = \left| \frac{b(k)}{a(k)} \right|^2$$

Por tanto, los polos de  $|R(k)|^2$  son los polos de  $\Gamma(\alpha)$  y  $\Gamma(\beta)$ , los cuales son los siguientes:

$$\alpha = -ik - \nu = -n,$$

$$\beta = -ik + (\nu + 1) = -m,$$

donde  $m, n = 0, 1, 2, \dots$  Así,

$$k = i(\nu - m) \quad \text{ó} \quad k = -i(n + \nu + 1).$$

Pero como pedimos  $\text{Im}(k) > 0$ ,

$$\begin{aligned} \nu - m &> 0, \\ n + \nu + 1 &< 0, \end{aligned}$$

los valores propios son

$$\begin{aligned} \lambda_{M+1} &= -\nu^2, \\ \lambda_M &= -(\nu - 1)^2, \\ &\vdots \\ \lambda_1 &= -(\nu - M)^2, \end{aligned}$$

donde  $M$  es un entero tal que  $\nu - M > 0$ . Esto es,  $M$  es el máximo entero menor que  $\nu$ . Si definimos

$$M \equiv N - 1,$$

entonces:

$$N < \nu + 1,$$

como deseabamos verificar.

**Apéndice A.** Aquí probaremos que los valores propios de la ecuación de Schrödinger son reales.

Tomemos la ecuación de Schrödinger y también su conjugada:

$$\begin{aligned} \psi_{xx} + (\lambda - u)\psi &= 0 \\ \psi_{xx}^* + (\lambda^* - u)\psi^* &= 0, \end{aligned}$$

donde el asterisco denota conjugación. El potencial  $u = u(x, t)$  es real, por ser la amplitud de nuestra onda. Multiplicando la primera de nuestras ecuaciones por  $\psi^*$  y la segunda por  $\psi$  y restando,

$$\psi^* \psi_{xx} - \psi_{xx}^* \psi + (\lambda - \lambda^*) \psi \psi^* = 0,$$

de donde

$$(214) \quad \frac{d}{dx} (\psi^* \psi_x - \psi_x^* \psi) + (\lambda - \lambda^*) |\psi|^2 = 0.$$

Tenemos ahora dos casos:

a)  $\text{Im}(k) = 0$ . Entonces  $\lambda = k^2$  es real y positivo y corresponde al espectro continuo.

b)  $\text{Im}(k) > 0$ . Tomemos, por ejemplo,  $\psi(x, k) = g(x, k)$  (se hace de igual forma para  $\psi(x, k) = f(x, k)$ ). Como  $g(x, k) \sim e^{-ikx}$  cuando  $x \sim -\infty$  y  $e^{-ikx} \rightarrow 0$ , si  $x \rightarrow -\infty$  (pues  $\text{Im}(k) > 0$ ), entonces

$$g(x, k) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } x \rightarrow -\infty.$$

Sabemos que

$$g(x, k) = a(k)f^*(x, k) + b(k)f(x, k),$$

entonces

$$g(x, k) \sim a(k)e^{-ik^*x} + b(k)e^{ikx} \quad \text{cuando } x \sim \infty.$$

Sea  $k = k_1 + i\kappa$ , con  $\text{Im}(k) = \kappa > 0$ . Entonces

$$g(x, k) \sim a(k)e^{-ik_1x - \kappa x} + b(k)e^{ik_1x - \kappa x} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Por tanto,

$$|g(x, k)|^2 \rightarrow 0$$

exponencialmente, cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

De aquí que al integrar la ecuación (214), desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ , el término de frontera se anule,

$$(g^* g_x - g_x^* g)|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

pues  $|g| \rightarrow 0$ , cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . Entonces:

$$(\lambda - \lambda^*) \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, k)|^2 dx = 0$$

Ahora, la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x, k)|^2 dx$  es convergente, pues  $|g| \rightarrow 0$  exponencialmente, para  $|x| \rightarrow \infty$ . Además es distinta de cero, pues buscamos soluciones no triviales. Entonces

$$\lambda = \lambda^*$$

i.e.,  $\lambda$  es real y es lo que deseábamos probar.

Ahora,

$$\lambda = k^2 = k_1^2 - \kappa^2 + 2ik_1\kappa$$

Como  $\lambda$  es real,  $k_1\kappa = 0$ . Pero  $\kappa = \text{Im}(k) > 0$ . Así  $k_1 = 0$ ,  $\lambda = -\kappa^2 < 0$  y  $k = i\kappa$ . Así pues, tenemos que si  $\text{Im}(k) > 0$ , entonces  $k = i\kappa$ , con  $\kappa = \text{Im}(k) > 0$  y corresponde al caso discreto, por ser  $\lambda < 0$ , esto es, tener energía negativa.

**Apéndice B.** El Wronskiano de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger es una constante independiente de  $x$ .

Sean  $\psi_1$  y  $\psi_2$  soluciones linealmente independientes a la ecuación de Schrödinger,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1 + (k^2 - u)\psi_1 &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_2 + (k^2 - u)\psi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera de las ecuaciones por  $\psi_2$ , la segunda por  $\psi_1$  y restando obtenemos

$$\psi_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1 - \psi_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_2 = 0$$

que podemos escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \psi_2 \frac{\partial}{\partial x} \psi_1 - \psi_1 \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 \right) = 0$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x} (W(\psi_1, \psi_2)) = 0.$$

Y así,

$$W(\psi_1, \psi_2)(x, k) = W(\psi_1, \psi_2)(0, k)$$

es una constante (i.e., independiente de  $x$  pero puede depender de  $k$ ).

Si por ejemplo  $\psi_1 = f(x, k)$ ,  $\psi_2 = g(x, k)$ , entonces

$$\begin{aligned} W(f, g) &= W(f, af^* + bf), \\ &\sim W(e^{ikx}, ae^{-ikx} + be^{ikx}), \end{aligned}$$

en  $x \sim \infty$ . Así,

$$W(f, g) \sim \begin{pmatrix} e^{ikx} & ae^{-ikx} + be^{ikx} \\ ik e^{ikx} & -ika e^{-ikx} + ikb e^{ikx} \end{pmatrix}$$

y, por tanto,

$$(215) \quad W(f, g) = -2ik a(k).$$

De aquí se sigue que si  $k = k_j = i\kappa_j$  es raíz de  $a(k)$ , i.e.,  $a(k_j) = 0$ , entonces  $f(x, i\kappa_j, t)$  y  $g(x, i\kappa_j, t)$  son **linealmente dependientes**:

$$g(x, i\kappa_j, t) = \rho_j f(x, i\kappa_j, t)$$

Dado el comportamiento asintótico en  $x \sim \infty$  y en  $x \sim -\infty$  de  $f(x, i\kappa_j, t)$  y  $g(x, i\kappa_j, t)$  respectivamente, resulta que  $g(x, i\kappa_j, t) = \rho_j f(x, i\kappa_j, t)$  es función propia con valor propio  $\lambda_j = k_j^2 = -\kappa_j^2$ .

**Apéndice C.** Probaremos el siguiente teorema.

TEOREMA Se cumple

$$\frac{d}{dk}a(k_0) = -i\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx,$$

donde  $k_0 = i\kappa_0$  corresponde a un valor propio.

*Demostración.* Sabemos que (ver ecuación (215)):

$$W(f, g) = -2ik a(k).$$

Calculando la derivada en ambos miembros de la ecuación respecto a  $k$ ,

$$(216) \quad \frac{d}{dk}W(f, g) = -2ia(k) - 2ik \frac{d}{dk}a(k).$$

Ahora, la derivada respecto a  $k$  en ambos miembros de la ecuación de Schrödinger es:

$$(217) \quad \frac{d}{dk}f_{xx} + (k^2 - u) \frac{d}{dk}f + 2kf = 0.$$

También tenemos

$$(218) \quad g_{xx} + (k^2 - u)g = 0.$$

Multiplicando (217) por  $g$ , (218) por  $\frac{df}{dk}$  y tomando la diferencia obtenemos

$$g_{xx} \frac{df}{dk} - g \frac{d}{dk}f_{xx} - 2kfg = 0.$$

Así,

$$(219) \quad 2kfg = \frac{d}{dx} \left[ W \left( \frac{df}{dk}, g \right) \right]$$

Intercambiando los papeles de  $f$  y  $g$  en (219), obtenemos:

$$(220) \quad 2kfg = \frac{d}{dx} \left[ W \left( \frac{dg}{dk}, f \right) \right]$$

Integrando (219) desde algún punto  $x_0$  hasta  $l$  y (220) desde  $-l$  hasta  $x_0$ ,

$$(221) \quad 2k \int_{x_0}^l (fg) dx = \left[ W \left( \frac{df}{dk}, g \right) \right]_{x_0}^l,$$

$$(222) \quad 2k \int_{-l}^{x_0} (fg) dx = \left[ W \left( \frac{dg}{dk}, f \right) \right]_{-l}^{x_0}.$$

Ahora, en  $k = k_0 = i\kappa_0$ , ( $\kappa_0 > 0$ ), sabemos

$$g(x, k_0) = \rho_0 f(x, k_0),$$

con

$$\begin{aligned} g(x, k_0) &\rightarrow 0, \\ f(x, k_0) &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \left[ W \left( \frac{df}{dk}, g \right) \right]_{x_0}^l &= - \left[ W \left( \frac{df}{dk}, g \right) \right] (x_0, k_0) \\ \lim_{l \rightarrow \infty} \left[ W \left( \frac{dg}{dk}, f \right) \right]_{-l}^{x_0} &= \left[ W \left( \frac{dg}{dk}, f \right) \right] (x_0, k_0) \end{aligned}$$

Por consiguiente, las ecuaciones (221) y (222) se escriben

$$2k_0 \int_{x_0}^{\infty} (fg) dx = - \left[ W \left( \frac{df}{dk}, g \right) \right] (x_0, k_0),$$

$$2k_0 \int_{-\infty}^{x_0} (fg) dx = \left[ W \left( \frac{dg}{dk}, f \right) \right] (x_0, k_0).$$

Sumando miembro a miembro,

$$2k_0 \int_{-\infty}^{\infty} (fg) dx = - \left[ W \left( \frac{df}{dk}, g \right) \right] (x_0, k_0) - \left[ W \left( f, \frac{dg}{dk} \right) \right] (x_0, k_0)$$

$$= - \frac{d}{dk} [W(f, g)](x_0, k_0)$$

Usando el hecho que  $g(x, k_0) = \rho_0 f(x, k_0)$ :

$$\frac{d}{dk} [W(f, g)](x_0, k_0) = -2k_0 \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx$$

Comparando con (216) evaluada en  $k = k_0$  y recordando que  $a(k_0) = 0$ , tenemos

$$\frac{d}{dk} a(k_0) = -i\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx$$

como deseábamos probar. □

Además, como  $f(x, k_0) \not\equiv 0$ , entonces  $f^2(x, k_0) \not\equiv 0$  y la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx \neq 0$ , por lo que

$$\frac{d}{dk} a(k_0) \neq 0,$$

y así

$$a(k) = 0$$

tiene ceros simples.

**Apéndice D.** Aquí probaremos la igualdad

$$\psi^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right),$$

es válida, en donde

$$Q \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_x \psi - 2(u + 2\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

y

$$\lambda = k^2(t).$$

*Demostración.* Calculemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \psi_{xx} - \psi Q_{xx}$$

Pero para ello necesitamos conocer

$$Q_x = \psi_{xt} + u_{xx} \psi - u_x \psi_x - 2(u + 2\lambda) \psi_{xx},$$

$$Q_{xx} = \psi_{xxt} + u_{xxx} \psi - 3u_x \psi_{xx} - 2(u + 2\lambda) \psi_{xxx},$$

Usando  $\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi$  en la expresión para  $Q_{xx}$  tenemos

$$Q_{xx} = (u_t - \lambda_t)\psi + (u - \lambda)\psi_t + u_{xxx}\psi - 3u_x \psi_{xx} - 2(u + 2\lambda)[u_x \psi + (u - \lambda)\psi_x].$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= Q\psi_{xx} - \psi Q_{xx} \\ &= [\psi_t + u_x\psi - 2(u + 2\lambda)\psi]\psi_{xx} \\ &\quad - \psi\{(u_t - \lambda_t)\psi + (u - \lambda)\psi_t + u_{xxx}\psi \\ &\quad - 3u_x\psi_{xx} - 2(u + 2\lambda)[u_x\psi + (u - \lambda)\psi]\}. \end{aligned}$$

Arreglando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= \psi_{xx}[\psi_t - 2(u + 2\lambda)\psi_x] - \psi(u_{xxx}\psi - 4u_x\psi_{xx}) \\ &\quad + \psi[(\lambda_t - u_t)\psi + (\lambda - u)\psi_t] \\ &\quad + 2\psi(u + 2\lambda)[u_x\psi + (u - \lambda)\psi_x]. \end{aligned}$$

Usando nuevamente la ecuación de Schrödinger  $\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= -\psi^2 u_{xxx} + 4(u - \lambda)u_x\psi^2 - (u_t - \lambda_t)\psi^2 + 2\psi^2(u + 2\lambda)u_x \\ &= \psi^2[-u_{xxx} - u_t + 6uu_x + \lambda_t]. \end{aligned}$$

Como se cumple la ecuación de KdV, entonces

$$\psi^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right).$$

como queríamos probar. □

### 8.16. Tarea.

TAREA 8.1. Use la transformación (136) en la ecuación (135) para obtener (137).

TAREA 8.2. Use la transformación de Cole-Hopf (139) en la ecuación 1-dimensional de Burgers (138) y obtener la ecuación del calor (140).

TAREA 8.3. Usando la transformación de Miura (142) y la definición de los operadores  $K$  y  $M$ , (141), pruebe que la relación (143) es válida.

TAREA 8.4. Termine la prueba de  $K[v] = 0 \implies M[v] = 0$ , usando la ecuación (143).

TAREA 8.5. Complete los detalles del cálculo para encontrar la solución (150) de la ecuación (145) con condiciones de "frontera" (146).

TAREA 8.6. De la ecuación (158), deducir la ecuación (159).

TAREA 8.7. Pruebe que, efectivamente,  $D(t) \equiv 0$  (ecuación (162).)

TAREA 8.8. Demuestre las ecuaciones (169), (170) y (171).

TAREA 8.9. Demuestre las ecuaciones (172) y (173).

TAREA 8.10. Partiendo de las ecuaciones (189) y (194), de todos los detalles para encontrar la evolución temporal de las constantes de normalización  $c_j(t)$  y del coeficiente de reflexión  $R(k, t)$ , ecuaciones (193) y (195).

TAREA 8.11. Partiendo de la ecuación de Schrödinger (196), rellene todos los detalles para encontrar las condiciones iniciales  $\lambda(0), c(0)$ , ecuación (201).

TAREA 8.12. Rellene todos los detalles para demostrar que el coeficiente de reflexión es idénticamente 0, ecuación (210). Parta de la ecuación (202).

TAREA 8.13. Verificar que la solución dada en la ecuación (211) se reduce a la condición inicial dada en (212).

TAREA 8.14. Para un potencial de la forma:

$$V(x) = -N(N+1)\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x,$$

con  $N \in \mathbb{N}$  y siguiendo el mismo argumento que en la presente sección, demuestre que la ecuación de Schrödinger tiene  $N$  valores propios,  $\lambda_n = -(n\kappa)^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, N$  y coeficiente de reflexión  $R(k) \equiv 0$ .

TAREA 8.15. Para la ecuación de Gel'fand-Levitan-Marchenko (213), proponga un núcleo  $F(s)$  como:

$$F(s) = c_1^2 e^{-\kappa_1 s} + c_2^2 e^{-\kappa_2 s},$$

es decir, con datos espectrales que consisten en dos valores propios y cuyo coeficiente de reflexión  $R(k, 0) \equiv 0$ . Aquí,  $c_1 = c_1(0)$  y  $c_2 = c_2(0)$  son las constantes de normalización. **Encontrar la solución de 2-soliton dada en la ecuación (211).**

Para este fin:

1. Proponga una separación de variables en la solución de la forma:

$$K(x, y) = A_1(x)e^{-\kappa_1 y} + A_2(x)e^{-\kappa_2 y}.$$

Usando la ecuación de Gel'fand-Levitan-Marchenko, encuentre un sistema de ecuaciones (¡lineales!) para  $A_1$  y  $A_2$ , resuélvalo. Encuentre así la condición inicial (212)

2. Ahora, proponga

$$F(s; t) = c_1(t)^2 e^{-\kappa_1 s} + c_2(t)^2 e^{-\kappa_2 s}.$$

Recuerde que conoce la evolución de  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  pues su evolución es sencilla. Considerando la separación de variables:

$$K(x, y; t) = A_1(x; t)e^{-\kappa_1 y} + A_2(x; t)e^{-\kappa_2 y},$$

resuelva la ecuación de Gel'fand-Levitan-Marchenko.

3. Encuentre la solución **2-soliton** de la ecuación de KdV (211).

## 9. TRANSFORMACIONES DE BÄCKLUND

**9.1. Comentarios iniciales.** Las transformaciones de Bäcklund fueron llamadas así después del matemático sueco Albert Viktor Bäcklund (1845-1922). Las transformaciones de Bäcklund relacionan soluciones de dos EDPs, de las cuales las más interesantes son las EDPs no lineales. Si las dos EDPs son la misma, entonces se les llama **auto-transformaciones de Bäcklund**.

Los orígenes de las transformaciones de Bäcklund se remontan al trabajo de Bianchi y Bäcklund a principios de la década de 1880. Estaban interesados en encontrar superficies de 2 dimensiones con curvatura negativa. Si se conoce una superficie con curvatura constante negativa, fueron capaces de encontrar otra superficie con la misma propiedad.

Esto tiene una aplicación muy amplia en teoría de solitones. Si uno tiene una EDP que describa solitones, y si tenemos una solución específica de dicha EDP, las transformaciones de Bäcklund pueden generar una nueva solución a esa EDP. Es costumbre que todas las ecuaciones de solitones tengan una transformación de Bäcklund correspondiente. Al revés, no es necesariamente cierto.

## 9.2. Las transformaciones de Bäcklund más elementales.

*9.2.1. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann.* Las ecuaciones de Cauchy-Riemann es el ejemplo más sencillo de transformaciones de Bäcklund:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Sabemos que si  $u$  resuelve la ecuación de Laplace,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

entonces  $u(x, y)$  es la parte real de la función  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  la cual debe ser analítica en la variable compleja  $z = x + iy$ . Entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen y,

$$v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

de forma tal que hemos encontrado otra solución a la ecuación de Laplace. Es decir, las ecuaciones de Cauchy-Riemann son la transformación de Bäcklund de la ecuación de Laplace. De hecho, ellas son una auto-transformación de Bäcklund, es decir, conecta soluciones de la ecuación de Laplace con soluciones de la ecuación de Laplace.

Como ejemplo, consideremos la solución  $u(x, y) = x^2 - y^2$  de la ecuación de Laplace. Sustituyendo en las ecuaciones de Cauchy-Riemann e integrando, encontramos  $v(x, y) = 2xy$ , la cual también resuelve la ecuación de Laplace. Podemos repetir este procedimiento a soluciones polinomiales de grado superior, como también a otros tipos de soluciones de la ecuación de Laplace.

9.2.2. *La ecuación de sine-Gordon.* La ecuación de sine-Gordon,

$$(223) \quad u_{xy} = \sin u,$$

aparece en el contexto de superficies de curvatura constante negativa y en teoría de solitones, y aunque este ejemplo no es elemental, aparece en el trabajo de V. Bäcklund. Esta tiene una auto-transformación de Bäcklund dada por el sistema:

$$(224) \quad \begin{aligned} v_x &= u_x + 2a \sin\left(\frac{u+v}{2}\right), \\ v_y &= -u_y - \frac{2}{a} \sin\left(\frac{u-v}{2}\right), \end{aligned}$$

en donde  $a$  es un parámetro arbitrario. Si sabemos que  $u(x, y)$  resuelve la ecuación de sine-Gordon, entonces resuelve el sistema anterior de ecuaciones de primer orden para  $v(x, y)$  y habremos descubierto que

$$v_{xy} = \sin v.$$

9.2.3. *La ecuación Liouville.* La ecuación Liouville es

$$(225) \quad u_{xy} = e^u.$$

La transformación de Bäcklund para la ecuación de Liouville está dada por el sistema

$$(226) \quad \begin{aligned} v_x &= u_x + 2ae^{\left(\frac{u+v}{2}\right)}, \\ v_y &= -u_y - \frac{1}{a}e^{\left(\frac{u-v}{2}\right)}, \end{aligned}$$

en donde  $a$  es también una parámetro libre. Este sistema conecta la ecuación de Liouville con la ecuación de onda

$$(227) \quad v_{xy} = 0.$$

Así pues, si resolvemos la ecuación de onda, resolvemos la correspondiente transformación de Bäcklund, podremos encontrar soluciones de la ecuación de Liouville.

**9.3. Problemas de valores propios de segundo orden y sistemas de ecuaciones de primer orden.** El resto de este capítulo está basado en *Elements of Soliton Theory*, de George L. Lamb, Jr. [24].

El sistema de ecuaciones

$$\partial_x \Psi = (iED + N)\Psi,$$

siendo  $E$  el parámetro espectral y

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix},$$

en donde  $q = q(x)$  y  $r = r(x)$ . (si  $r = \pm q^*$ ,  $q = u$ , esto corresponde al problema de valores propios de Zakharov-Shabat, asociado a la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) para  $u$ .) Explícitamente,

$$(228) \quad \begin{aligned} \partial_x \psi_1 &= -iE\psi_1 + q\psi_2, \\ \partial_x \psi_2 &= iE\psi_2 + r\psi_1. \end{aligned}$$

Definamos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  tales que

$$(229) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}(\phi_1 + i\phi_2), \\ i\psi_2 &= \frac{1}{2}(\phi_1 - i\phi_2). \end{aligned}$$

Tomemos  $r = -q$ . (Si  $q = u$ , el sistema está asociado a la ecuación modificada de KdV (mKdV) para  $u$ . Si  $u = q_x/2$ , el sistema está asociado a la ecuación de sine-Gordon para  $u$ ). Entonces el sistema (228) con (229) se convierte en

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_1 &= E\phi_2 - iq\phi_1, \\ \partial_x \phi_2 &= -E\phi_1 + iq\phi_2. \end{aligned}$$

O, en forma matricial:

$$\partial_x \Phi = (EJ + iqD)\Phi,$$

con

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando segundas derivadas y haciendo un poco de álgebra, encontramos el sistema desacoplado

$$(230) \quad \begin{aligned} \partial_x^2 \phi_1 + (E^2 + iq_x + q^2)\phi_1 &= 0, \\ \partial_x^2 \phi_2 + (E^2 - iq_x + q^2)\phi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Esto significa que podemos asociar ecuaciones de segundo orden a problemas de valores propios de primer orden.

Si  $q = u$ ,  $r = -1$ , nuevamente calculemos segundas derivadas, y el sistema (228) se puede llevar al sistema,

$$(231) \quad \begin{aligned} \partial_x^2 \psi_2 + u\psi_2 &= -E^2\psi_2, \\ \partial_x^2 \psi_1 + u\psi_1 &= -E^2\psi_1 + u_x\psi^2. \end{aligned}$$

La primer ecuación es un problema de valores propios de segundo orden, el cual corresponde al problema asociado de valores propios para la ecuación de KdV. De hecho, es la ecuación estacionaria de Schrödinger. La segunda ecuación no es propiamente un problema de valores propios. Es decir, esta asignación,  $q = u$ ,  $r = -1$ , corresponde a la ecuación de KdV y  $u$  debe satisfacer dicha ecuación.

**9.4. Relación entre sistemas de una y dos componentes y ecuaciones de Ricatti.** Previamente comenzamos con el sistema (230). Multiplicamos la primer ecuación por  $\phi_2$ , la segunda por  $\phi_1$ , y restamos miembro a miembro; después dividimos por  $\phi_2^2$ . Observemos que aquí está la regla de la derivada de un cociente. Definamos entonces:

$$\varphi \equiv \frac{\phi_1}{\phi_2}.$$

Obtenemos una ecuación para  $\varphi$

$$\partial_x \varphi = E(1 + \varphi^2) - 2iq\varphi,$$

la cual es una ecuación de Ricatti para  $\varphi$ . Sea ahora  $\varphi = -\frac{1}{E\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$ . Obtenemos,

$$-\partial_x^2 \theta = E^2 \theta + 2iq\partial_x \theta,$$

la cual es una ecuación lineal para  $\theta$ ! (En principio, puede ser resuelta.) Ahora pongamos  $\theta = \phi_3 \exp\left(-i \int q(x) dx\right)$ , para obtener

$$(232) \quad \partial_x^2 \phi_3 + (E^2 - iq_x + q^2)\phi_3 = 0.$$

Esta es la segunda ecuación que aparece en (230) obtenida anteriormente.

Esta manera de proceder de sistemas de primer orden a problemas de valores propios de segundo orden puede parecer más complicado. Sin embargo, pasando por una ecuación de Ricatti es un paso crucial, pues la ecuación de Ricatti aparece muchas veces en el análisis de transformaciones de Bäcklund.

*Observación 9.4.1.* El proceso de ir en dirección opuesta partiendo de la ecuación de Ricatti al sistema de primer orden es un proceso más sutil pero puede realizarse.

**9.5. Propiedades generales de ecuaciones de Ricatti.** Comencemos de la ecuación general de Ricatti:

$$(233) \quad \phi_x + A\phi + B\phi^2 = C,$$

donde  $A = A(x)$ ,  $B = B(x)$  y  $C = C(x)$ . Definamos  $\theta = \theta(x)$  de la siguiente manera:

$$\varphi = \frac{\theta_x}{B\theta}.$$

Sustituyamos en la ecuación de Ricatti para obtener una ecuación lineal en  $\theta$ ,

$$\partial_x^2 \theta + \left(A - \frac{B_x}{B}\right) \partial_x \theta = BC\theta,$$

la cual en principio puede ser resuelta.

Si  $\theta_1(x)$  y  $\theta_2(x)$  son dos soluciones linealmente independientes, la solución general está dada por  $\theta(x) = a\theta_1(x) + b\theta_2(x)$ , para  $a$  y  $b$  ciertas constantes. De aquí ( $b \neq 0$ ),

$$(234) \quad \varphi(x) = \frac{\frac{a}{b} \partial_x \theta_1(x) + \partial_x \theta_2(x)}{B(x) \left(\frac{a}{b} \theta_1(x) + \theta_2(x)\right)}$$

es una solución de la ecuación de Ricatti. Podemos entonces imponer una solución general de la ecuación de Ricatti de la siguiente forma:

$$(235) \quad \varphi(x) = \frac{kP(x) + Q(x)}{kR(x) + S(x)},$$

con  $k$  la constante de integración.

De manera similar, se puede demostrar que si  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son soluciones de la ecuación de Ricatti, una nueva solución  $\varphi$  puede ser encontrada resolviendo la siguiente relación

$$(236) \quad \frac{\varphi - \varphi_1(x)}{\varphi - \varphi_2(x)} = K \exp\left(\int B(x)(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) dx\right),$$

siendo  $k$  una constante de integración.

*Observación 9.5.1.* Tenemos un comentario final. La ecuación  $\partial_{xx}^2 \theta + a(x)\partial_x \theta + b(x)\theta = 0$ , usando la siguiente transformación,

$$\theta = \phi \exp\left(-\frac{1}{2} \int a(x) dx\right),$$

puede ser llevada a la siguiente forma

$$(237) \quad \partial_x^2 \phi + \left(b - \frac{1}{4}(a^2 + 2a_x)\right) \phi = 0.$$

Bajo cierta elección de  $a$  y  $b$ , ésta puede ser la ecuación estacionaria de Schrödinger.

### 9.6. Ecuaciones asociadas de Sturm-Liouville. La ecuación

$$-\partial_x^2 \psi + V(x)\psi = \lambda\psi,$$

es la ecuación estacionaria de Schrödinger y es de importancia fundamental en mecánica cuántica y teoría de solitones. De hecho, la teoría de solitones adoptó las ideas y técnicas de la mecánica cuántica para resolver sus propios problemas. Ver, por ejemplo, [10], [21].

Uno de estos problemas es resolver esta ecuación para potenciales sin reflexión para encontrar soluciones exactas de solitón de la ecuación de KdV.

Cómo encontrar soluciones sin reflexión por métodos directos fue adoptado por primera vez por Darboux (1882) y muchos otros. Aquí seguiremos el procedimiento de Darboux, de acuerdo a G.L. Lamb [24].

Supongamos que hay una conexión entre los siguientes problemas de valores propios:

$$(238) \quad y'' = (\lambda + u(x))y,$$

$$(239) \quad z'' = (\lambda + v(x))z.$$

Supongamos además que las soluciones están relacionadas por:

$$(240) \quad z = A(x, \lambda)y + B(x, \lambda)y'.$$

Por simplicidad, tomemos  $B(x, \lambda) = 1$ .

La ecuación (240) será de fundamental importancia dado que nos permitirá encontrar más soluciones a ecuaciones no lineales.

Sustituyendo (240) en (239), usando (238), considerando  $\lambda$  independiente de  $x$ , agrupando términos como factores en  $y$  y  $y'$ , y suponiendo que  $y$  y  $y'$  son linealmente independientes, obtenemos el sistema:

$$(241) \quad A'' + A(u - v) + u' = 0,$$

$$(242) \quad 2A' + (u - v) = 0.$$

Multiplicando (242) por  $A$ , restando de (241), e integrando, obtenemos

$$A' - A^2 + u = -\tilde{\lambda},$$

con  $\tilde{\lambda}$  constante de integración. Esta es una ecuación de Ricatti, la cual la podemos linealizar con

$$A = -\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}},$$

obteniendo

$$(243) \quad \tilde{y}'' = (\tilde{\lambda} + u(x))\tilde{y},$$

*i.e.*,  $\tilde{y}$  es una solución particular de (238)!

$$\text{De la ecuación (242), } v = u + 2A' = u - 2\left(\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}}\right)', \text{ i.e.,}$$

$$v = u - 2(\text{Log } \tilde{y})'',$$

de forma tal que  $z$  resuelve el problema de valores iniciales

$$(244) \quad z'' = [\lambda + u - 2(\text{Log } \tilde{y})'']z.$$

Obtuvimos una ecuación de Schrödinger con un nuevo potencial

$$u(x) \rightarrow u(x) - 2(\text{Log } \tilde{y}(x))''.$$

Ahora, por la identidad  $2(\text{Log } f)'' = \frac{f'''}{f} - f\left(\frac{1}{f}\right)''$ , y usando la ecuación (243),

$$z'' = \left[ \lambda + u - \frac{\tilde{y}''}{\tilde{y}} + \tilde{y}\left(\frac{1}{\tilde{y}}\right)'' \right] z = \left[ \lambda + u - (\tilde{\lambda} + u) + \tilde{y}\left(\frac{1}{\tilde{y}}\right)'' \right] z,$$

i.e.,

$$(245) \quad z'' = \left[ \lambda - \tilde{\lambda} + \tilde{y} \left( \frac{1}{\tilde{y}} \right)'' \right] z.$$

Notemos que la solución de (245) es  $z = \frac{1}{\tilde{y}}$ , siempre y cuando escojamos  $\tilde{\lambda} = \lambda$ , i.e., la ecuación (245) llega a ser:

$$\frac{z''}{z} = \tilde{y} \left( \frac{1}{\tilde{y}} \right)''.$$

Esto nos permite encontrar condiciones iniciales para soluciones de solitones puros (sin radiación) de la ecuación de KdV. Esto se hace de la siguiente manera.

**PROBLEMA 9.6.1.** *El prodecimiento es como sigue. Dado un potencial  $u(x)$ , encontrar una solución  $\tilde{y}(x)$  a*

$$\tilde{y}'' = (\tilde{\lambda} + u(x))\tilde{y},$$

para un valor particular de  $\tilde{\lambda}$ . Entonces, una nueva solución (con un nuevo potencial) a la ecuación

$$y'' = (\lambda + u(x))y,$$

se puede encontrar a través de la ecuación (244),

$$z'' = [\lambda + u - 2(\text{Log } \tilde{y})''] z.$$

y el nuevo potencial es

$$(246) \quad u_{\text{new}}(x) = u - 2(\text{Log } \tilde{y})'',$$

con  $z = A(x, \tilde{\lambda})y + B(x, \tilde{\lambda})y' = -\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}}y + y'$ . El nuevo potencial es la nueva condición inicial para la ecuación de KdV.

**Ejemplo 9.6.I.** Condiciones iniciales para la ecuación de KdV. Considere la ecuación

$$y'' = (\lambda + u(x))y,$$

con  $u(x) = 0$ . Notemos que la ecuación de KdV,  $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$  tiene una solución exacta,  $u(x, t) = 0$  para la cual  $u(x) = 0$  corresponde a su condición inicial. Ahora vamos a generar la condición inicial para la solución de 1-soliton.

Entonces la ecuación previa resulta ser,  $y'' = \lambda y$  y tiene solución general

$$y(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Tomemos  $\lambda = \tilde{\lambda} = 1$ ,  $\alpha = \beta = 1/2$ :

$$\tilde{y}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Por tanto, por (246)

$$u_{\text{new}} = 0 - 2(\text{Log } \tilde{y})'' = -2 \left( \frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}} \right)' = -2 \left( \frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' = -2 \left( \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2} \right),$$

i.e.,

$$u_{\text{new}}(x) = -2 \text{sech}^2 x.$$

la cual es la condición inicial para la solución 1-soliton de la ecuación de KdV.

Ahora la solución del problema de valores iniciales

$$z'' = (\lambda - 2 \text{sech}^2 x)z,$$

está dada por

$$\begin{aligned} z &= y' - \left( \frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}} \right) y \\ &= \alpha \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}x} - \beta \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}x} - (\alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}) \frac{\sinh x}{\cosh x}, \end{aligned}$$

*i.e.*, la función propia asociada al problema de valores iniciales está dada por

$$z(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x}(\sqrt{\lambda} - \tanh x) - \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}(\sqrt{\lambda} + \tanh x).$$

Este procedimiento puede ser repetido iterativamente tantas veces como uno desee, digamos  $N$  veces, para generar la condición inicial para la solución  $N$ -solitón de la ecuación de KdV.

**9.7. La transformación de Bäcklund para la ecuación de KdV.** En la sección anterior aprendimos cómo generar condiciones iniciales para la ecuación de KdV tales que evolucionen como soluciones de  $N$ -solitón puros. Aquí encontraremos tales soluciones de  $N$ -solitón partir de la solución  $(N-1)$ -solitón. Para este fin, requerimos de un sistema de dos problemas de valores propios de Sturm-Liouville, tales que el potencial también dependa del tiempo  $t$ , en donde  $t$  aquí es un parámetro.

**Hipótesis.** El valor propio  $\lambda$  de este sistema de problemas de valores propios de Sturm-Liouville es **independiente de  $t$** .

Tenemos entonces dos problemas de valores propios de Sturm-Liouville,

$$\begin{aligned} y_{xx} &= [\lambda + \varphi(x, t)]y, \\ w_{xx} &= [\lambda + \psi(x, t)]w; \end{aligned}$$

los cuales comparten el mismo valor propio,  $\lambda$ . Las funciones  $\varphi(x, t)$  y  $\psi(x, t)$  se toman como soluciones de la ecuación de KdV y se trata de saber cómo se relacionan.

Las soluciones  $y(x, t)$ ,  $w(x, t)$  de estas ecuaciones están relacionadas por

$$w(x, t) = A(x, t; \lambda)y + y'.$$

Tal y como encontramos en la sección anterior,

$$(247) \quad 2A_x + \varphi - \psi = 0,$$

$$(248) \quad A^2 - A_x - \varphi = \tilde{\lambda}(t),$$

en donde  $\tilde{\lambda}(t)$  es una constante de integración, que podría depender de  $t$ . Linealizando (248) con  $A = -\tilde{y}_x/\tilde{y}$ , obtenemos,

$$\tilde{y}_{xx} = (\tilde{\lambda}(t) + \varphi)\tilde{y}.$$

Puesto que  $\varphi(x, t)$  resuelve la ecuación de KdV,  $\tilde{\lambda}(t) = \tilde{\lambda}$  es independiente del tiempo.

Definamos  $z$  y  $\zeta$  tal que  $\psi = z_x$  y  $\varphi = \zeta_x$ . Integrando (247) y poniendo la constante de integración igual a cero,

$$(249) \quad A = \frac{1}{2}(z - \zeta).$$

Sustituyamos  $A_x$  de la ecuación (247) en (248), para obtener

$$(250) \quad A^2 = \tilde{\lambda} + \frac{1}{2}(\psi + \varphi).$$

Ahora, sustituir (249) en (250) y reorganizando términos,

$$(251) \quad \psi + \varphi = -2\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}(z - \zeta)^2.$$

Esta es una ecuación tipo de Ricatti que relaciona las funciones  $z$  y  $\zeta$ , las cuales están relacionadas por las soluciones  $\psi = z_x$  y  $\varphi = \zeta_x$ , soluciones de la ecuación de KdV.

**AFIRMACIÓN 9.7.1.** *Si  $\psi(x, t)$  satisface la ecuación de KdV*

$$\psi_t - 6\psi\psi_x + \psi_{xxx} = 0,$$

*entonces*

$$(252) \quad \begin{aligned} z_t - 3(z_x)^2 + z_{xxx} &= 0, \\ \zeta_t - 3(\zeta_x)^2 + \zeta_{xxx} &= 0. \end{aligned}$$

Con la ayuda de esta afirmación, se puede encontrar una ecuación de evolución para  $z$  y  $\zeta$ . El punto inicial es calcular la derivada de la ecuación (251) y, después de un proceso largo y no tan obvio, obtenemos

$$z_t + \zeta_t = 2(z_x^2 + z_x \zeta_x + \zeta_x^2) - (z - \zeta)(z_{xx} - \zeta_{xx}).$$

Esta ecuación, junto con la ecuación (251), conforman la transformación de Bäcklund de la ecuación de KdV:

$$(253) \quad \begin{aligned} z_x + \zeta_x &= -2\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}(z - \zeta)^2, \\ z_t + \zeta_t &= 2(z_x^2 + z_x \zeta_x + \zeta_x^2) - (z - \zeta)(z_{xx} - \zeta_{xx}). \end{aligned}$$

Así es como funciona el método de las transformaciones de Bäcklund para sistemas integrables. Encontrar una solución  $\zeta(x, t)$  a (252), en donde  $\zeta_x(x, t) = \phi(x, t)$ , con  $\phi(x, t)$  solución de la ecuación de KdV. Se sustituye  $\zeta(x, t)$  en (253). Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones acopladas para  $z(x, t)$ . Se resuelve y resulta ser que  $\psi(x, t) = \partial_x z$  también es solución de la ecuación de KdV.

**Ejemplo 9.7.I.** La solución de 1-soliton de la ecuación de KdV. Notemos que  $\zeta(x, t) = 0$  resuelve (252),

$$\zeta_t - 3(\zeta_x)^2 + \zeta_{xxx} = 0.$$

Ahora, sustituyamos en la transformación de Bäcklund de la ecuación de KdV (253) para obtener,

$$\begin{aligned} z_x &= -2\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}z^2, \\ z_t &= 2z_x^2 - zz_{xx}. \end{aligned}$$

Diferenciando la primer ecuación y sustituyendo en la segunda,

$$(254) \quad z_x = -2\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}z^2,$$

$$(255) \quad z_t = -4\tilde{\lambda}z_x.$$

Haciendo  $\tilde{\lambda} = \kappa^2$  ( $\kappa > 0$ ), y resolviendo (254) por fracciones parciales, obtenemos

$$\left| \frac{z - 2\kappa}{z + 2\kappa} \right| = e^{2\kappa(x-x_0)},$$

en donde  $x_0$  es la constante de integración. Hay ahora dos casos,  $2\kappa < |z|$  y  $|z| < 2\kappa$ . Resolviendo para  $z$  en ambos casos,

$$\begin{aligned} z_1(x) &= -\frac{2\kappa}{\tanh \kappa(x - x_0)}, \quad \text{for } 2\kappa < |z_1|, \\ z_2(x) &= -2\kappa \tanh \kappa(x - x_0), \quad \text{for } |z_2| < 2\kappa. \end{aligned}$$

Ahora resolviendo (255),  $z(x, t) = f(x - 4\tilde{\lambda}t) = f(x - 4\kappa^2t)$ , obtenemos

$$(256) \quad \begin{aligned} z_1(x, t) &= -\frac{2\kappa}{\tanh \kappa(x - 4\kappa^2t - x_0)}, \quad \text{for } 2\kappa < |z_1|, \\ z_2(x, t) &= -2\kappa \tanh \kappa(x - 4\kappa^2t - x_0), \quad \text{for } |z_2| < 2\kappa. \end{aligned}$$

Puesto que  $\psi_2(x, t) = \partial_x z_2$ , entonces

$$(257) \quad u(x, t) = \psi_2(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - 4\kappa^2t - x_0)$$

es la solución de 1-soliton de la ecuación de KdV.

Podemos construir soluciones más elaboradas, tales como una solución de 2-soliton o de  $N$ -soliton, y podemos usar también el teorema de permutación para encontrar de una forma un poco más fácil soluciones de  $N$ -soliton. Podemos ver detalles del teorema de permutación en [24] o en [36].

### 9.8. Tarea.

TAREA 9.1. Verifique que  $u(x, y) = x^2 - y^2$  es solución de la ecuación de Laplace. Usando las condiciones de Cauchy-Riemann, encuentre la solución  $v(x, y) = 2xy$ .

TAREA 9.2. Compruebe que  $u(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy^2 + 3x^2y$ , resuelve la ecuación de Laplace. Encuentre una segunda solución  $v(x, y)$  usando las condiciones de Cauchy-Riemann.

TAREA 9.3. Considere cualquier solución polinomial de grado  $n$  de la ecuación de Laplace en 2 dimensiones,  $u(x, y)$ . Encuentre una segunda solución  $v(x, y)$  usando las condiciones de Cauchy-Riemann.

TAREA 9.4. Por cálculo directo, verifique que si  $u(x, y)$  satisface la ecuación de sine-Gordon (223), entonces  $v(x, y)$  dada por (224), también la satisface.

TAREA 9.5. Dado que  $u(x, y) \equiv 0$  es solución de la ecuación de sine-Gordon (223), encuentre una segunda solución usando las transformaciones de Bäcklund (224).

TAREA 9.6. Verifique por cálculo directo, que si  $v(x, t)$  satisface la ecuación de onda en coordenadas de curvas características, ecuación (227), entonces  $u(x, t)$  dada por la solución de la transformación de Bäcklund (226), satisface la ecuación de Liouville (225).

TAREA 9.7. Considere la función  $v(x, y) = F(x) + G(y)$ , solución de la ecuación de onda en coordenadas de curvas características, ecuación (227). Encuentre una solución de la ecuación de Liouville (225).

TAREA 9.8. Considere la solución de D'Alambert (10) de la ecuación de onda en coordenadas de laboratorio (1). Encuentre una solución a la ecuación de Liouville en coordenadas de laboratorio:

$$u_{tt} - u_{XX} = e^u.$$

Para ello, use el cambio de variables (7) y proceda usando la transformación de Bäcklund para la ecuación de Liouville en coordenadas de las características (225).

TAREA 9.9.

1. Deduzca la ecuación (230).
2. Deduzca la ecuación (231).

TAREA 9.10. Usando las indicaciones de la sección 9.4, deducir a ecuación (232).

TAREA 9.11.

1. Deducir  $\varphi$ , dada como en (234), solución de la ecuación de Ricatti (233).
2. Verificar por cálculo directo que  $\varphi$  es, efectivamente, solución de la ecuación de Ricatti (233).

TAREA 9.12. Encuentre las condiciones sobre  $P(x), Q(x), R(x)$  y  $S(x)$  para que  $\varphi(x)$  dada en (235), sea solución de la ecuación de Ricatti (233).

TAREA 9.13. Verificar que  $\varphi$  dada en (236) es solución de la ecuación de Ricatti.

TAREA 9.14. Derive la ecuación (237) y, posteriormente, encuentre  $a$  y  $b$  que la transforme en la ecuación de Schrödinger.

TAREA 9.15. Realice todos los detalles del ejemplo 9.6.I para obtener la condición inicial del 1-soliton.

TAREA 9.16. Repita el procedimiento, comenzando con  $u_{old} = -2\text{sech}^2x$ , para obtener la condición inicial del 2-soliton.

TAREA 9.17. Realice todos los detalles del ejemplo 9.7.I.

TAREA 9.18. Encuentre otra solución,  $\psi_1(x, t) = \partial_x z_1$ , de KdV usando la ecuación (256). ¿A qué corresponde esta solución?

TAREA 9.19. Partiendo de la solución 1-soliton de KdV, ecuación (257), encuentre la solución 2-soliton.

**AGRADECIMIENTOS.** El autor desea agradecer a los árbitros anónimos cuya revisión y comentarios mejoraron la presentación de este trabajo. También agradecemos a los lectores, y en particular a los estudiantes, que utilizaron versiones preliminares de estas notas y cuyos valiosos comentarios ayudaron a mejorar las mismas. De igual forma, a la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco. Expreso mi más grato agradecimiento al Profesor Roberto Quezada Batalla por la invitación al proyecto del CONAHCYT y por consiguiente al CONAHCYT (proyecto CF2019-684340). Agradecimiento especial a *Carlos Iván Ávila Joachin* y *Daniela Yuliana Juárez Estrada*, por su apoyo en la elaboración de los dibujos y gráficas que aparecen en esta notas.

## REFERENCIAS

- [1] M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell and H. Segur, *The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems*. Studies in Applied Mathematics. 53 249-315. 1974
- [2] M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell and H. Segur, *Method of Solution for the Sine-Gordon Equation*. Phys. Rev. Lett. 30. 1262-1264. 1973.
- [3] M. Ablowitz and H. Segur Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM, Philadelphia, 1981.
- [4] M. Ablowitz, B. Prinari, and A.D. Trubatch. Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger systems. Cambridge University Press. 2004.
- [5] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, Introduction to Classical Integrable systems. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press. 53 2007.
- [6] R. Courant & D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics. Vol. I. Wiley Classics Library. Wiley Interscience. 1953.
- [7] P.A.M. Dirac. *The Quantum Theory of the Electron*. (Part I.) Proceedings of the Real Society of London. Series A. (Papers of Mathematical and Physical Character.) Vol. 117. No. 778. 610-624. Feb. 1, 1928.
- [8] P.A.M. Dirac. *The Quantum Theory of the Electron*. (Part II.) Proceedings of the Real Society of London. Series A. (Papers of Mathematical and Physical Character.) Vol. 118. No. 779. 351-361. Mar. 1, 1928.
- [9] P.A.M. Dirac. The Principles of Quantum Mechanics. Cambridge University Press. Cambridge Texts in Applied Mathematics. 1989.
- [10] P.G. Drazin and R.S. Johnson. Solitons: an introduction. Cambridge University Press. Cambridge Texts in Applied Mathematics. 1989.
- [11] N.M. Ercolani. Introduction to Linear and Nonlinear Waves. Class notes.
- [12] de Fari, E. & de Melo, W. Mathematical Aspects of Quantum Field Theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2010.
- [13] R.P. Feynman, R.B. Leighton & M. Sands. The Feynman Lectures on Physics. Addison-Wesley Publishing Company. Vols. I, II. III. 1963.
- [14] H. Flaschka. Notes on Soliton theory. Class notes.
- [15] C. Gardner, J. Greene, M. Kruskal and R. Miura, *A Method for Solving the Korteweg-DeVries Equation*. Phys. Rev. Letters, 19 1095-1097. 1967.
- [16] Gel'fand, I. M. & B. M. Levitan. textitOn the determination of a differential equation from its spectral function. American Mathematical Translations (2). 1: 253-304. 1951.
- [17] Gordon, C & Webb, D. *You can't hear the shape of a drum*, American Scientist, 84. 46-55. January/February 1996.
- [18] Gordon, C.; Webb, D. & Wolpert, S. *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Inventiones Mathematicae, 110 (1): 1-22, 1992.
- [19] R. Haberman, Elementary Applied Partial Differential Equations: with Fourier series and Boundary Value problems. 2nd edition. Prentice-Hall, 1987.
- [20] M. Kac.. *Can One Hear the Shape of a Drum?*. American Mathematical Monthly. 73. no. 4, part 2. 1-23. April 1966.
- [21] A. Kasman. Glimpses of Soliton Theory. American Mathematical Society. Student Mathematical Library, vol. 54. 2010.
- [22] J. Kevorkian & J.D. Cole. Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. Springer. 1996.

- [23] Korteweg, D. J.; de Vries, G. *On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves*, Philosophical Magazine, **39** (240): 422-443. 1895.
- [24] G.L. Lamb, Jr. *Elements of soliton theory*. John Wiley & Sons. 1980.
- [25] L.D: Landau & E.M. Lifshitz *Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory.) Course of Theoretical Physics Vol. 3*. Elsevier Science. 2003.
- [26] P. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolutions and solitary waves*. Communications on Pure and Applied Mathematics. XXI. 467-490. 1968.
- [27] P. Lax, *Periodic solutions of the KdV equation*. Communications on Pure and Applied Mathematics. XXVIII. 141-188. 1975.
- [28] P. Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for the industrial and Applied Mathematics, 1973.
- [29] N.N. Levedev. *Special functions and their applications*. Dover Books. 1965.
- [30] R.M.M. Mattheij, S.W. Rienstra and J.H.M. ten Thijs Boonkamp, *Partial Differential Equations: Modeling, Analysis, Computation*. Monographs on Mathematical Modeling and Computation. Society for the Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005.
- [31] P. D. Miller. *Applied Asymptotic Analysis*. Graduate Studies in Mathematics. Volume 75. American Mathematical Society (AMS). 2005.
- [32] R.M. Miura, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation*, J. Math. Phys. 9, 1202-1204. 1968.
- [33] Nagle, Saff &, Snider. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. 6th Edition. Addison-Wesley. 2012.
- [34] A.C. Newell. *Solitons in Mathematics and Physics*. Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for the Industrial and Applied Mathematics (SIAM). 1985.
- [35] S. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii & V.E. Zakarov. *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. Consultants Bureau, New York. 1984.
- [36] C. Rogers & W. K. Schief. *Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*. Cambridge University Press. 2002.
- [37] A.S. Scott. *Nonlinear Science: Emergence, Dynamics of Coherent Structures and Solitons*. Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics. Oxford University Press. 2003.
- [38] A.S. Scott. *The development of nonlinear Science*. Rivista del Nuovo Cimento, vol. 27, Issue 10, 1-115. 2004.
- [39] M. Toda. *Nonlinear Waves and Solitons*. Mathematics and its Applications Kluwer Academic Publishers. 1983.
- [40] M. Toda, *Vibration of a Chain with Nonlinear Interaction*. Journal of the Physics Society of Japan. 22, 1967.
- [41] M. Toda, *Nonlinear waves and Solitons*. Mathematics and its applications. (Japanese Series), KTK Scientific Publishers, Tokyo, 1989.
- [42] M. Toda, *Wave Propagation in Anharmonic Lattices*. Journal of the Physics Society of Japan. 23, 1967.
- [43] G.B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. John-Wiley and Sons, Inc. 1974.
- [44] J. Yang. *Nonlinear waves: in Integrable and Nonintegrable Systems*. Monographs on Mathematical Modeling and Computation. Society for the Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2010.

*Jesús Adrián Espínola Rocha*

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Azcapotzalco,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Ciencias Básicas.

Av. San Pablo 180, Col. Reynosa-Tamaulipas

Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200 CDMX, México

e-mail: jaer@azc.uam.mx

## TALLER DE OTOÑO METROPOLITANO DE MATEMÁTICAS DISCRETAS

A principios de 2017, un grupo de profesoras y profesores de la Universidad Autónoma Metropolitana, de las unidades Cuajimalpa e Iztapalapa, nos propusimos crear un evento dirigido a estudiantes de licenciatura que tuviese el fin de fomentar el interés por cultivar y desarrollar las Matemáticas Discretas. Así surge el Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas (TOMMAD).

Este es un taller de introducción a la investigación, que se realiza durante el periodo intertrimestral (para dar la oportunidad a los estudiantes de la UAM de asistir) y está dirigido a estudiantes de Matemáticas, Computación y disciplinas afines.

La primera edición del taller tuvo lugar en 2017, en la Casa de la Primera Imprenta en América. También se ha realizado en la Casa Rafael Galván y en Mineral del Chico, en Hidalgo. A lo largo de las cinco ediciones del TOMMAD, más de veinte profesores de distintas universidades del país han participado en él, impartiendo pláticas de investigación y divulgación, dirigiendo talleres de investigación y ofreciendo cursos en temas específicos.

La compilación de artículos que se presenta a continuación es el trabajo realizado durante el TOMMAD 2023, llevado a cabo en el Mineral del Chico, Hidalgo y son el fruto del trabajo colaborativo y del entusiasmo de nuestros estudiantes y profesores participantes en este taller. Además de ser una fuente de conocimiento para estudiantes y académicos, esperamos que también inspire nuevas investigaciones y la participación y desarrollo de más talleres de investigación.

Agradecemos a todos los estudiantes y profesores que han participado en el TOMMAD y han contribuido a su desarrollo y a la realización de esta compilación. Su dedicación y entusiasmo son la base y motivación de este proyecto y estamos orgullosos de presentar los resultados en esta colección:

- *Coloraciones distinguidas en gráficas*, de Diego González-Moreno, Emilio Licea, Lizeth Machorro, Amanda Montejano, Marcos Nolasco y Leticia Ramírez.
- *Coloraciones robustas de gráficas*, de Gabriela Judith Blanco Rodríguez, Karen Miranda, Mika Olsen, Axel Prestegui Ramos, Nadia Vásquez.
- *Dominación a distancia  $k$  en gráficas*, de Ilán A. Goldfeder, Nahid Yelene Javier Nol y Lizzeth Ariadna Sánchez Solís.
- *La gráfica de sucesiones de Prüfer*, de Julián Alberto Fresán Figueroa, Tania Jimenez Alvarado, Aldo Lozano Piña, Osvaldo Padilla Morales, Maximiliano Ramírez Mejía.
- *Policías y ladrones en gráficas*, de Sebastian Franco Martínez, Aarón Rodríguez González Pacheco, Raúl González Pérez, Sac-Nicté Damayanti Salas Reyes y Miguel Tecpa-Galván.

### Comité organizador:

Julián Alberto Fresán Figueroa  
e-mail: jfresan@cua.uam.mx

Ilán A. Goldfeder  
e-mail: igoldfeder@izt.uam.mx

Diego Antonio González Moreno  
e-mail: dgonzalez@cua.uam.mx

Nahid Yelene Javier Nol  
e-mail: nahid@xanum.uam.mx

Mika Olsen  
e-mail: olsen@cua.uam.mx



## COLORACIONES DISTINGUIDAS EN GRÁFICAS

DIEGO GONZÁLEZ-MORENO, EMILIO YEDIDIA LICEA MESINO, LUCERO LIZETH MACHORRO FIERRO, AMANDA MONTEJANO CANTORAL, MARCOS ESAÚ NOLASCO SALGADO Y LETICIA RAMÍREZ ESPINOZA

RESUMEN. Dada una gráfica  $G$ , una coloración distinguida de  $G$  es una coloración de los vértices de la gráfica que rompe todas las simetrías de ésta. El mínimo número de colores necesarios en una coloración distinguida de  $G$  se conoce como el número distinguido de  $G$ . En este trabajo estudiamos las coloraciones distinguidas de la unión disjunta de una gráfica  $G$ , y damos el número distinguido de ésta unión en términos del número distinguido de  $G$ . Como corolario obtenemos el número distinguido del octaedro.

### 1. INTRODUCCIÓN

La definición formal de las coloraciones distinguidas fue propuesta por Albertson y Collins [1]. Ellos se inspiraron en un acertijo matemático planteado por Rubin [5] en 1979, que dice lo siguiente:

*Tienes un llavero con seis llaves iguales. ¿Cuál es el mínimo número de colores que necesitas para colorear las llaves de tal manera que puedas identificar cada una de ellas?*

Este acertijo se puede plantear en términos de teoría de las gráficas de la siguiente forma: considera el ciclo  $C_6$ , donde cada vértice representa una llave y dos vértices son adyacentes si las llaves correspondientes están juntas en el llavero. Buscamos una coloración de los vértices del ciclo de longitud 6, es decir,  $C_6$  que nos permita identificar cada llave por su color y ubicación, en otras palabras, buscamos una coloración de los vértices que rompa todas las simetrías, haciendo que cada configuración de vértices (llaves) sea única. A una coloración que cumpla con estas características la llamaremos distinguida. En la figura 1 aparece una coloración distinguida de  $C_6$  que resuelve el acertijo propuesto por Rubin.

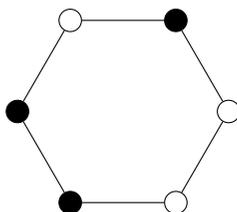


FIGURA 1. Una coloración distinguida de  $C_6$  con 2 colores

Albertson y Collins generalizaron el acertijo de Rubin considerando coloraciones de los vértices de gráficas en general que distinguan a cada vértice.

Una coloración distinguida de una gráfica  $G$  es una asignación de colores a los vértices de  $G$  que “rompe” todas las simetrías de  $G$ . Esto significa que cada vértice de  $G$  se vuelve distinguible de los demás de manera única. En términos de algebraicos de la teoría de las gráficas, esto quiere decir que el único automorfismo que mantiene la

coloración es el automorfismo trivial de la gráfica, donde cada vértice se mapea a sí mismo.

En este trabajo presentamos cotas para el número distinguido de la unión disjunta de una gráfica, mostrando que la cota se alcanza cuando  $G$  es la gráfica completa. También estudiamos el caso en el que  $G$  es el ciclo de longitud 4. Estos resultados fueron obtenidos durante el quinto Taller de Otoño Metropolitano, realizado en el Mineral del Chico, Hidalgo, en 2023.

## 2. DEFINICIONES BÁSICAS

En esta sección presentamos definiciones necesarias para estudiar las coloraciones distinguidas. En este trabajo solo consideramos gráficas simples, es decir, gráficas sin lazos ni aristas múltiples. Para las definiciones y conceptos que no aparecen aquí nos referimos al libro de Chartrand, Lesniak y Zhang [3].

Un **automorfismo de una gráfica**  $G$  es una permutación de los vértices de  $G$ , es decir, una función biyectiva  $\pi : V(G) \rightarrow V(G)$  tal que para cualquier par de vértices  $u, v \in V(G)$ , tenemos que  $uv \in E$  si y solo si  $\pi(u)\pi(v) \in E(G)$ .

Los automorfismos de una gráfica forman un grupo bajo la operación de composición de funciones, conocido como el **grupo de automorfismos** de la gráfica y denotado por  $Aut(G)$ . Este grupo captura la información de todas las permutaciones que dejan la estructura de la gráfica invariante, es decir, las simetrías de la gráfica.

Una  **$k$ -coloración** de una gráfica  $G$  es una función  $\Gamma : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ . Considera una gráfica con los vértices coloreados, es decir, una pareja  $(G, \Gamma)$ . Sea  $\pi$  una permutación de  $V(G)$ . Decimos que  $\pi$  es un **automorfismo coloreado** de la pareja  $(G, \Gamma)$  si  $\pi$  cumple las siguientes condiciones:

- 1)  $uv \in E(G)$  si y solo si  $\pi(u)\pi(v) \in E(G)$  ( $\pi$  es un automorfismo).
- 2) Para todo  $v \in V(G)$  se cumple  $\Gamma(v) = \Gamma(\pi(v))$ .

Observa que los automorfismos coloreados son aquellos que preservan la coloración.

Dada una gráfica  $G$ , utilizamos  $S_{V(G)}$  para denotar al conjunto de todas las permutaciones de  $V(G)$  y  $Aut(G, \Gamma)$  para el conjunto de los automorfismos coloreados de  $G$ . La siguiente observación es inmediata.

*Observación 1.* Si  $G$  es una gráfica y  $\Gamma$  una coloración, entonces

- $Aut(G, \Gamma) \leq Aut(G)$ ,
- $Aut(G, \Gamma) = Aut(\overline{G}, \Gamma)$ .

Con estos elementos podemos dar la definición formal de coloración distinguida de una gráfica.

**Definición 1.** Sea  $G$  una gráfica y  $\Gamma$  una  $k$ -coloración de  $G$ , decimos que  $\Gamma$  es una **coloración distinguida** si  $Aut(G, \Gamma) = \{(1)\}$ , donde  $(1)$  es el automorfismo trivial.

Observa que si  $\Gamma$  es la coloración que asigna a cada vértice un color diferente, entonces  $\Gamma$  es una coloración distinguida. Entonces, se define el **número distinguido** de  $G$  como:

$$D(G) = \min\{k \in \mathbb{Z} : \text{existe una } k\text{-coloración distinguida}\}.$$

Además, como  $Aut(G) = Aut(\overline{G})$ , se sigue que  $D(G) = D(\overline{G})$ , donde  $\overline{G}$  es el complemento de  $G$ .

## 3. RESULTADOS

En esta sección presentamos los resultados obtenidos durante la semana de trabajo en el TOMMAD 23. Para esto es necesario presentar una definición más.

**Definición 2.** Sea  $G$  una gráfica, definimos la gráfica  $kG$  como la gráfica que se obtiene de la unión disjunta de  $k$  copias de  $G$ .

En el siguiente teorema presentamos una cota superior para el número distinguido de esta familia de gráficas.

TEOREMA 3. *Sea  $k \in \mathbb{Z}^+$  y  $G$  un gráfica con  $D(G) = 2$ , entonces*

$$D(kG) \leq \left\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 8k}}{2} \right\rceil,$$

y la igualdad se alcanza si  $G = K_2$ .

*Demostración.* Dado  $k \in \mathbb{Z}^+$ , definimos  $d = \left\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 8k}}{2} \right\rceil$ . Observamos que  $\binom{d}{2} \geq k$ , pues

$$\begin{aligned} \binom{d}{2} = \frac{d(d-1)}{2} \geq k &\iff d^2 - d \geq 2k \\ &\iff d^2 - d - 2k \geq 0 \\ &\iff d \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 8k}}{2}. \end{aligned}$$

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_k$  subconjuntos de 2 colores de  $[d]$  tales que  $X_i \neq X_j$ , para todo  $i \neq j$ . Nota que esto se puede hacer pues  $\binom{d}{2} \geq k$ . Sea  $\Gamma$  la coloración  $\Gamma : V(kG) \rightarrow \{1, 2, \dots, d\}$  que colorea a la  $i$ -ésima copia  $G$  en  $kG$  de manera distinguida con los 2 colores de  $X_i$  (sabemos que lo podemos hacer porque  $D(G) = 2$ ).

Como todo autormorfismo de  $kG$  o bien manda los vértices de una copia a otra o es un autormorfismo de  $G$ . Entonces por construcción al estar cada copia coloreada distinguidamente y no haber dos copias coloreadas con la misma pareja de colores, el único autormorfismo coloreado de  $(kG, \Gamma)$  es la identidad. Por lo tanto,

$$D(kG) \leq \left\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 8k}}{2} \right\rceil.$$

Para ver que la desigualdad es justa cuando  $G = K_2$ , supongamos que  $D(kK_2) = d$  y sea  $\Gamma$  una  $d$ -coloración distinguida de  $kK_2$ . Observa que en toda coloración distinguida de  $kK_2$  todas las copias de  $K_2$  reciben una pareja de colores distintos, es decir,

$$\binom{d}{2} = \frac{d(d-1)}{2} \geq k.$$

Por lo tanto,

$$0 \leq d(d-1) - 2k \iff d \geq \left\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 8k}}{2} \right\rceil.$$

Por otro lado, como  $D(K_2) = 2$ , entonces por la primera parte de este teorema 3 tenemos

$$D(kK_2) = d \leq \left\lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 8k}}{2} \right\rceil.$$

Juntando ambas desigualdades el resultado se sigue. □

Se sabe que el número distinguido del tetraedro es 4 [4], y el del  $n$ -cubo  $Q_n$  es 3 cuando  $n = 3$  y 2 si  $n \geq 4$  [2]. La familia de los octaedros  $n$ -dimensionales, denotada por  $O_n$ , se define como el complemento de  $n$  copias de  $K_2$ , es decir,  $O_n = \overline{nK_2}$ . Utilizando el teorema 3 y la observación 1 se tiene el siguiente corolario.

COROLARIO 4. *Sea  $n \geq 2$  un entero. Entonces, el número distinguido del octaedro  $n$ -dimensional es*

$$D(O_n) = \frac{1 + \sqrt{1 + 8n}}{2}.$$

El siguiente teorema generaliza al teorema 3.

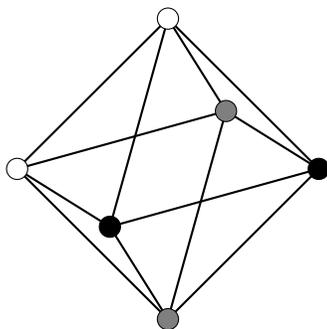


FIGURA 2. Una coloración distinguida del octaedro  $O_3$  con 6 colores

TEOREMA 5. Sea  $k \in \mathbb{Z}^+$  y  $G$  una gráfica con  $D(G) = r$ , entonces

$$D(kG) \leq \min\{d \in \mathbb{Z} : \binom{d}{r} \geq k\}.$$

*Demostración.* Sea  $d$  el mínimo entero tal que  $\binom{d}{r} \geq k$ , donde  $k$  es el número de copias de  $G$ . Sean  $X_1, X_2, \dots, X_k$  subconjuntos de  $r$  colores tales que  $X_i \neq X_j$ , para todo  $i \neq j$ . Sea  $\Gamma$  la coloración que asigna a la  $i$ -ésima copia de  $kG$  los  $r$  colores de  $X_i$  de forma distinguida (sabemos que lo podemos hacer porque  $D(G) = r$ ). Observa que  $\Gamma$  es una coloración distinguida de  $kG$  que utiliza  $d$  colores. Por lo tanto,

$$D(kG) \leq \min\{d \in \mathbb{Z} : \binom{d}{r} \geq k\}.$$

□

TEOREMA 6. Sean  $r, k \in \mathbb{Z}^+$ , entonces

$$D(kK_r) = \min\{d \in \mathbb{Z} : \binom{d}{r} \geq k\}.$$

*Demostración.* Sea  $D(kK_r) = d'$  y sea  $d$  el menor entero tal que  $\binom{d}{r} \geq k$ . Observa que en toda coloración distinguida de  $kK_r$ , cada copia de  $K_r$  recibe  $r$  colores distintos, ya que si dos copias reciben los mismos  $r$  colores, existe un automorfismo no trivial que manda una copia en la otra. Por lo tanto,

$$\binom{d'}{r} \geq k,$$

que implica  $d \leq d'$ .

Por otro lado, el teorema 5, implica que

$$d' = D(kK_r) \leq \min\{d \in \mathbb{Z} : \binom{d}{r} \geq k\} = d.$$

Por lo tanto,  $d = d'$ .

□

**AGRADECIMIENTOS.** Los autores expresan su gratitud a todas las instituciones que apoyaron la organización del TOMMAD 2023. Particularmente a la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de las unidades Cuajimalpa e Iztapalapa, al proyecto CONAHCyT CB-47510664 y al árbitro anónimo.

#### REFERENCIAS

- [1] Albertson, M. O., K.L. Collins, K. L. *Symmetry Breaking in Graphs*, Electronic Journal of Combinatorics, vol. 3, no. 1, R18, 1996. doi:10.37236/1242.
- [2] Chan, M. *The distinguishing number of the augmented cube and hypercube powers*, Discrete Mathematics, vol. 308, no. 11, pp. 2330-2336, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.09.056>
- [3] Chartrand, G., L. Lesniak, L., Zhang, P. *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall/CRC, 6th ed., Boca Raton, FL, 2016.

- [4] Piłśniak, M., Tucker, T., *Distinguishing index of maps*, European Journal of Combinatorics, vol. 84 2020. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2019.103034>
- [5] Rubin, F. Problem 729: The Blind Man's Keys, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 11, p. 128, 1979. Solution in vol. 12, 1980. As cited by Albertson & Collins (1996).

*Diego González-Moreno*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Cuajimalpa,  
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas Aplicadas.  
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México  
e-mail: [dgonzalez@cua.uam.mx](mailto:dgonzalez@cua.uam.mx)

*Emilio Yedidia Licea Mesino*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Iztapalapa,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas.  
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México  
e-mail: [emilioyedidia@gmail.com](mailto:emilioyedidia@gmail.com)

*Lucero Lizeth Machorro Fierro*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Iztapalapa,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas.  
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México  
e-mail: [lizethmachorro20@gmail.com](mailto:lizethmachorro20@gmail.com)

*Amanda Montejano Cantoral*

Universidad Nacional Autónoma de México,  
Facultad de Ciencias,  
Unidad Multidisciplinaria de Docencia e Investigación de Juriquilla.  
Campus UNAM 3001, C.P. 76230 Juriquilla, Querétaro, México  
e-mail: [amandamontejano@ciencias.unam.mx](mailto:amandamontejano@ciencias.unam.mx)

*Marcos Esaú Nolasco Salgado*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Cuajimalpa,  
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas Aplicadas.  
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México  
e-mail: [marcos.nolasco@cua.uam.mx](mailto:marcos.nolasco@cua.uam.mx)

*Leticia Ramírez Espinoza*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Cuajimalpa,  
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas Aplicadas.  
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México  
e-mail: [leticia.ramirez@cua.uam.mx](mailto:leticia.ramirez@cua.uam.mx)



## COLORACIONES ROBUSTAS DE GRÁFICAS

GABRIELA J. BLANCO RODRÍGUEZ, KAREN MIRANDA, MIKA OLSEN, AXEL  
PRESTEGUI RAMOS Y NADIA VÁSQUEZ

RESUMEN. Las coloraciones son fundamentales para resolver diversos problemas y una coloración robusta busca mantener su validez incluso con modificaciones. El Problema de la Coloración Robusta (RCP) introduce el concepto de rigidez en la coloración de gráficas, definida como la suma de penalizaciones de las aristas en la gráfica complemento que conectan vértices del mismo color. El RCP busca minimizar la rigidez en una  $k$ -coloración de la gráfica, y tiene aplicaciones en planificación, asignación de tareas y diseño de sistemas tolerantes a fallos. Este trabajo analiza el RCP en varias familias de gráficas y propone una heurística útil para abordarlo.

### 1. INTRODUCCIÓN

Las coloraciones es uno de los tópicos más estudiados en la teoría de gráficas. Hay problemas interesantes tanto desde un punto de vista teórico como para problemas de aplicaciones donde se colorean vértices, aristas o ambos y se les puede asignar un sólo color, un conjunto o una lista de colores a cada vértice y/o arista, así como definir la coloración en términos de propiedades del conjunto de colores o en términos de propiedades o estructuras de la gráfica. Los problemas relacionados con coloraciones en gráficas reciben (y a lo largo de los últimos 200 años han recibido) mucha atención gracias a lo seductores que son los problemas teóricos, así como sus diversas aplicaciones en problemas reales tales como la asignación de recursos, la programación de tareas y la optimización de redes.

Los problemas de coloraciones iniciaron con el famoso problema de los 4 colores (ahora teorema de los 4 colores), que data del siglo XIX, conjeturado por un estudiante, Francis Guthrie en 1852. Sin embargo, la conjetura no se volvió importante hasta que Arthur Cayley la consideró en 1878. El problema de los 4 colores establece que toda gráfica plana<sup>1</sup> se puede colorear con 4 colores de modo que vértices que están unidos por una aristas tienen colores distintos, justo el tipo de coloración que se conoce como una coloración propia. Dice la leyenda que este problema esta inspirado en los conocimientos de los cartógrafos (las personas que dibujaban los mapas), un oficio de mucha importancia en ese entonces.

Las coloraciones en gráficas han mostrado ser una herramienta importante en la solución de problemas. En este contexto, es deseable que una coloración que resuelve algún problema siga siendo una buena solución aun si se hacen algunas modificaciones al problema. Una **coloración robusta** de una gráfica busca la  $k$ -coloración propia de  $G$  con la propiedad de que al hacer modificaciones a la coloración, ésta continúe siendo propia con una alta probabilidad y con ello, también una solución al problema. Se distingue del problema de una coloración propia mínima, principalmente, porque permite obtener soluciones donde no sólo es importante encontrar soluciones válidas, sino también que sean estables. En éste trabajo exploramos las coloraciones del **Problema de la Coloración Robusta** (RCP, por sus siglas en inglés), que introduce

---

*Palabras clave.* Coloraciones propias, rigidez, algoritmos genéticos.

<sup>1</sup>Una gráfica es una gráfica dibujada en el plano de modo que las aristas no se intersectan.

la idea de rigidez en la coloración propia de gráficas. El objetivo de la RCP es encontrar una coloración propia con la mínima rigidez.

Dada una gráfica  $G$  y su gráfica complemento  $\overline{G}^2$ , consideramos una función de penalización definida sobre las aristas de la gráfica complemento  $\overline{G}$ . La **rigidez** de una  $k$ -coloración de los vértices  $G$  se define como la suma de las penalizaciones de las aristas de  $\overline{G}$  que conectan vértices del mismo color. Así en el RCP se busca la  $k$ -coloración propia con la mínima rigidez posible.

La importancia del estudio del RCP está relacionado con la gran cantidad de aplicaciones en diversas áreas y, además, por ser una herramienta importante para mejorar la capacidad de adaptación y el rendimiento de sistemas complejos en entornos dinámicos y cambiantes como, por ejemplo,

- **Optimización de Redes de comunicación:** En redes de comunicación, en redes inalámbricas y en redes de sensores, es importante minimizar la interferencia entre canales. La coloración robusta permite asignar frecuencias o canales de manera que se minimice la penalización asociada con la interferencia, asegurando así una comunicación más eficiente y fiable. Este enfoque es particularmente útil en entornos dinámicos donde las conexiones pueden cambiar con el tiempo.
- **Planificación, Programación y Asignación de Tareas:** En sistemas de asignación de tareas, programación de turnos, horarios escolares, distribución de trabajos en centros de datos y organización de eventos es importante minimizar los conflictos y maximizar la eficiencia. La coloración robusta ayuda a asignar tareas a recursos limitados de manera que se minimicen las penalizaciones por conflictos o sobrecargas, mejorando el rendimiento general del sistema.
- **Diseño de Redes y Sistemas Tolerantes a Fallos:** En el diseño de redes y sistemas tolerantes a fallos, la robustez es un factor importante. La coloración robusta asegura que el sistema pueda seguir funcionando eficientemente incluso cuando se producen fallos o cambios en la red. Esto es crucial en aplicaciones críticas como las redes eléctricas, sistemas de transporte y redes de emergencia.
- **Optimización de Infraestructuras:** En la gestión y optimización de infraestructuras, y en las redes de distribución de energía o agua, la coloración robusta permite minimizar los costes y penalizaciones asociados con el mantenimiento y la redistribución de recursos. Esto ayuda a asegurar que la infraestructura opere de manera más eficiente y sostenible.
- **Seguridad en Redes de Computadoras:** En ciberseguridad, la coloración robusta puede utilizarse para minimizar las vulnerabilidades y maximizar la resistencia de las redes frente a ataques. Al asignar recursos de seguridad de manera óptima, se puede reducir la penalización asociada con brechas de seguridad y mejorar la protección general del sistema.

El RCP es un problema NP-completo<sup>3</sup> por lo que se ha trabajado con diferentes heurísticas computacionales tales como: *Simulated Annealing*, *GRASP* (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure), *Scatter Search*, *Algoritmos Genéticos* y *Búsqueda Tabú*. Cada uno de estos algoritmos tiene sus fortalezas y se adapta a diferentes características del problema. La elección de la heurística adecuada depende de la naturaleza específica de la gráfica y de los requisitos del problema en cuestión y permite encontrar buenas soluciones de manera eficiente. Otro enfoque para abordar problemas

<sup>2</sup>La gráfica complemento de  $G$  tiene los mismos vértices que  $G$  y una arista es arista de  $\overline{G}$  si y solo si **no** es arista de  $G$ .

<sup>3</sup>Un problema de decisión (es decir solamente tiene como respuesta *Sí* o *No*) es del tipo NP-completo cuando la respuesta *Sí* puede ser demostrada mediante una respuesta en tiempo polinomial, la correctitud de cada solución puede ser igualmente verificada; y el problema se puede emplear para simular cualquier otro problema cuyas soluciones puedan ser rápidamente verificadas.

NP-completos, es estudiar las RCP en familias particulares, un enfoque que, hasta donde sabemos las y los autores, aún no se ha abordado.

En este trabajo vamos a trabajar tanto con heurísticas como con un enfoque teórico, determinando para una función de penalización dada, la mínima rigidez para diferentes familias de gráficas, tales como trayectorias, árboles, ciclos con una función de penalización constante y posteriormente ciclos con una función de penalización en términos de las distancias entre los vértices del ciclo. Finalmente, construimos un Algoritmo Genético Simple para aproximar la rigidez de una gráfica.

2. DEFINICIONES

Sea  $G = (V, A)$  una gráfica donde  $V$  (o  $V(G)$ ) es el conjunto de vértices y  $A$  (o  $A(G)$ ) es el conjunto de aristas. El complemento de la gráfica  $G = (V, A)$ , denotado  $\overline{G}$ , tiene los mismos vértices que  $G$  y una arista  $e$  es una arista del complemento de  $G$  si y solo si no es una arista de  $G$ , es decir,  $\overline{G} = (V, \overline{A})$ . Decimos que dos vértices  $u, v$  son adyacentes si hay una arista que los une, es decir,  $\{u, v\} \in A(G)$ . Una  **$k$ -coloración propia** de los vértices de una gráfica es una asignación de  $k$  colores a los vértices de la gráfica tal que dos vértices adyacentes tienen color distinto. La **penalización** de las aristas de una gráfica es una asignación de números a las aristas de la gráfica. En este trabajo vamos a considerar solamente penalización del complemento de una gráfica. Dada una gráfica  $G$  con una  $k$ -coloración propia  $\varphi$  y una penalización  $\omega$  sobre las aristas de  $\overline{G}$ , definimos la **rigidez** de la coloración  $\varphi$ , denotada  $R(\varphi^k)$ , como la suma de las penalizaciones de las aristas entre vértices del mismo color en  $\overline{G}$ . Si definimos el conjunto  $A$  de todas las aristas de  $\overline{G}$  que unen vértices del mismo color,  $A = \{\{i, j\} \in A(\overline{G}) \mid \varphi^k(i) = \varphi^k(j)\}$ , entonces

$$R(\varphi^k) = \sum_{\{i,j\} \in A} p_{ij}.$$

El problema de la coloración robusta, para un número  $k$  de colores dada, consiste en minimizar la rigidez considerando todas las  $k$ -coloraciones propias de la gráfica:

$$R(G^k) = \min_{\varphi^k} \{R(\varphi^k)\}.$$

Primero revisamos algunos ejemplos sencillos que luego generalizaremos en la sección 4. Vamos considerar una penalización constante igual a 3 en todos los ejemplos.

Si coloreamos propiamente una trayectoria de longitud 9 con dos colores, habrá 5 vértices de un color y 4 vértices del otro color y cualquier par de vértices del mismo color está conectado por una arista con penalización 3 en el complemento. Así la rigidez de una trayectoria de longitud 9 coloreada con dos colores y penalización constante 3 es (como se observa en la figura 1)

$$R(P_9^2) = 3 \binom{5}{2} + 3 \binom{4}{2} = 3(16) = 48.$$

Si coloreamos propiamente un ciclo de longitud 10 con dos colores, habrán 5 vértices de cada color y cualquier par de vértices del mismo color esta conectado por una arista de peso 3 en el complemento. Así la rigidez es de un ciclo de longitud 10 coloreado con dos colores y penalización constante 3 es (como se observa en la figura 2)

$$R(C_{10}^2) = 3 \binom{5}{2} + 3 \binom{5}{2} = 3(5)4 = 60.$$

A lo largo del trabajo vamos a considerar ciclos con diferentes funciones de penalización. Para simplificar las explicaciones vamos a definir la longitud de una arista. Si

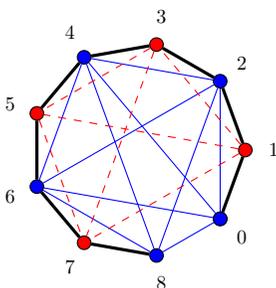


FIGURA 1.  $R(P_9^2) = 10(3 + 6(3)) = 48$

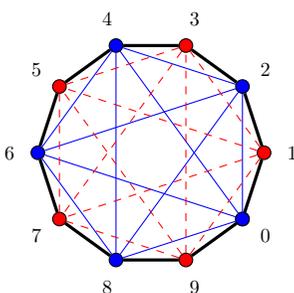


FIGURA 2.  $R(C_{10}^2) = 10(3) + 10(3) = 3(5)4 = 60$

tenemos un ciclo con  $n$  vértices y la arista  $\{v_i, v_j\}$  con  $j > i$ , decimos que la **longitud de la arista** es la distancia entre los vértices  $v_i$  y  $v_j$  sobre el ciclo, es decir,

$$\text{long}(\{v_i, v_j\}) = \min\{j - i, n - (j - i)\}.$$

Por ejemplo, en la figura 3, la longitud de la arista  $\{2, 6\}$  es 4, mientras que la longitud de la arista  $\{1, 7\}$  es 3.

### 3. CICLOS IMPARES CON PENALIZACIÓN CONSTANTE

Si tenemos un ciclo de longitud impar, necesitamos 3 colores para colorear los vértices. En la figura 3 podemos ver dos coloraciones distintas del ciclo  $C_9$ . En la figura 3 de

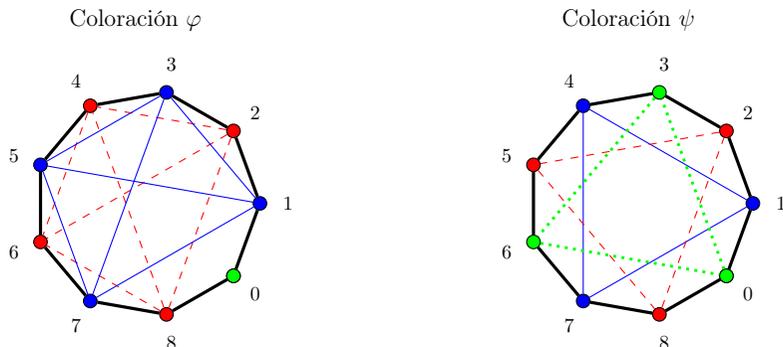


FIGURA 3. Dos coloraciones de  $C_9$  con rigidez distinta

la izquierda, la coloración  $\varphi$  tiene un color asignado a un solo vértice  $\{0\}$  y los otros

dos colores están asignados a cuatro vértices cada uno  $\{1, 3, 5, 7\}$  y  $\{2, 4, 6, 8\}$ . Esta coloración tiene rigidez  $R(\varphi^3) = 6 + 6 = 12$ . En la figura 3 de la derecha, en la coloración  $\psi$  cada color está asignado a tres vértices  $\{0, 3, 6\}$ ,  $\{1, 4, 7\}$  y  $\{2, 5, 8\}$  por lo que tiene rigidez  $R(\psi^3) = 3 + 3 + 3 = 9$ . Es decir, la segunda coloración es mejor que la primera ya que tiene rigidez menor. Con estos dos ejemplos podemos concluir que  $R(C_9) \leq 9$ . Para poder probar la igualdad necesitamos probar que no hay ninguna coloración de  $C_9$  con rigidez menor a 9.

Si la penalización es constante, necesitamos minimizar el número de aristas entre vértices del mismo color y este objetivo se alcanza cuando la cardinalidad de los conjuntos de vértices del mismo color son lo más balanceados posible. Decimos que un conjunto  $U_1, U_2, \dots, U_n$  de conjuntos es **balanceado** si para cualquier par de conjuntos  $U_i, U_j$  se tiene que

$$||U_i| - |U_j|| \leq 1.$$

El siguiente resultado determina la rigidez de ciclos de longitud impar con penalización constante.

TEOREMA 1. *Sea  $G$  un ciclo de longitud impar con penalización constante  $\ell$ . Entonces*

$$R(C_n^3) = \begin{cases} \ell^{\frac{k(3k-3)}{2}} & \text{si } n = 3k; \\ \ell^{\frac{k(3k-1)}{2}} & \text{si } n = 3k + 1; \\ \ell^{\frac{k(3k+1)}{2}} & \text{si } n = 3k + 2. \end{cases}$$

*Demostración.* Consideramos un ciclo de longitud impar  $n = 3k + r$ , donde  $0 \leq r \leq 2$ , coloreado con 3 colores. Vamos a considerar por separado los siguientes 3 casos:  $n = 3k$ ,  $n = 3k + 1$  y  $n = 3k + 2$ .

**Caso  $n = 3k$**

Cuando  $n = 3k$  podemos encontrar 3 conjuntos con el mismo número de vértices en cada uno. Los conjuntos de vértices con el mismo color son  $C_1 = \{1, 4, \dots, 3k - 2\}$ ,  $C_2 = \{2, 5, \dots, 3k - 1\}$  y  $C_3 = \{3, 6, \dots, 3k\}$ . Cada conjunto tiene  $k$  vértices y entre los  $k$  vértices hay  $\binom{k}{2}$  aristas con penalización  $\ell$ , por lo que cada conjunto aporta  $\ell \binom{k}{2}$ . Así encontramos una coloración que nos proporciona una cota superior para la rigidez de un ciclo de longitud  $3k$  y penalización constante  $\ell$  y

$$R(C_{3k}^3) \leq 3\ell \binom{k}{2} \leq \ell^{\frac{k(3k-3)}{2}}.$$

**Caso  $n = 3k + 1$**

Cuando  $n = 3k + 1$  podemos encontrar 3 conjuntos balanceados tales que hay un conjunto con  $k + 1$  vértices y dos conjuntos con  $k$  vértices. El conjunto con  $k + 1$  vértices del mismo color es  $C_1 = \{1, 4, \dots, 3k + 1\}$  y los conjuntos con  $k$  vértices del mismo color son  $C_2 = \{2, 5, \dots, 3k - 1\}$  y  $C_3 = \{3, 6, \dots, 3k\}$ . El conjunto con  $k + 1$  vértices tiene  $\binom{k+1}{2}$  aristas con penalización  $\ell$ , por lo que aporta  $\ell \binom{k+1}{2}$  y cada conjunto con  $k$  vértices tiene  $\binom{k}{2}$  aristas con penalización  $\ell$ , por lo que cada conjunto aporta  $\ell \binom{k}{2}$ . Así encontramos una coloración que nos proporciona una cota superior para la rigidez de un ciclo de longitud  $3k + 1$  y penalización constante  $\ell$  y

$$R(C_{3k+1}^3) \leq \ell \binom{k+1}{2} + 2\ell \binom{k}{2} = \ell^{\frac{k(3k-1)}{2}}.$$

**Caso  $n = 3k + 2$**

Cuando  $n = 3k + 2$  podemos encontrar 3 conjuntos de colores balanceados tales que hay dos conjuntos con  $k + 1$  vértices y un conjunto con  $k$  vértices. Los conjuntos con  $k + 1$  vértices del mismo color son  $C_1 = \{1, 4, \dots, 3k + 1\}$  y  $C_2 = \{2, 5, \dots, 3k + 2\}$  y el conjunto con  $k$  vértices del mismo color es  $C_3 = \{3, 6, \dots, 3k\}$ . Cada conjunto con  $k + 1$  vértices tiene  $\binom{k+1}{2}$  aristas con penalización  $\ell$ , por lo que cada conjunto aporta  $\ell \binom{k+1}{2}$ , el conjunto con  $k$  vértices tiene  $\binom{k}{2}$  aristas con penalización  $\ell$ , por lo que aporta

$\ell \binom{k}{2}$ . Así encontramos una coloración que nos proporciona una cota superior para la rigidez de un ciclo de longitud  $3k + 2$  y penalización constante  $\ell$  y

$$R(C_{3k+2}^3) \leq 2\ell \binom{k+1}{2} + \ell \binom{k}{2} = \ell \frac{k(3k+1)}{2}.$$

Como la rigidez se minimiza cuando los conjuntos de colores son balanceados obtenemos en cada caso la igualdad.  $\square$

#### 4. GRÁFICAS BIPARTITAS CON PENALIZACIÓN CONSTANTE

Las gráficas bipartitas es una familia de gráficas que contiene entre otras a las trayectorias, a los ciclos pares y a los árboles. Esta familia de gráficas tiene la característica que la coloración propia con dos colores es única (salvo la permutación de colores).

*Observación 1.* Si la coloración propia es única, la rigidez es única.

*Observación 2.* Sea  $G$  una gráfica bipartita con bipartición  $(U_1, U_2)$ ,  $|U_i| = n_i$  y una penalización constante  $\ell$ . Si coloreamos propiamente los vértices de  $G$  con dos colores, entonces hay  $\binom{n_1}{2}$  aristas de peso  $\ell$  entre los vértices de  $U_1$  y hay  $\binom{n_2}{2}$  aristas de peso  $\ell$  entre los vértices de  $U_2$ . Por lo tanto

$$R(G^2) = \ell \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \ell \frac{n_2(n_2-1)}{2}.$$

En particular, las trayectorias, los ciclos pares y los árboles son gráficas bipartitas con una 2-coloración propia única. Si la penalización es constante  $\ell$  y coloreamos propiamente una trayectoria de longitud  $n$  con dos colores, habrán  $\lceil n/2 \rceil$  vértices de un color y  $\lfloor n/2 \rfloor$  del otro color y cualquier par de vértices del mismo color esta conectado por una arista de peso  $\ell$  en el complemento. Así la rigidez es de una trayectoria de longitud  $n$  coloreado con dos colores y penalización constante  $\ell$  es

$$R(P_n^2) = \ell \binom{\lceil n/2 \rceil}{2} + \ell \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{2} = \begin{cases} \ell m(m-1) & \text{si } n = 2m; \\ \ell m^2 & \text{si } n = 2m + 1. \end{cases}$$

Si la penalización es constante  $\ell$  y coloreamos propiamente un ciclo de longitud  $2n$  con dos colores, habrán  $n$  vértices de cada color y cualquier par de vértices del mismo color esta conectado por una arista de peso  $\ell$  en el complemento. Así la rigidez es de un ciclo de longitud  $2n$  coloreado con dos colores y penalización constante  $\ell$  es

$$R(C_{2n}^2) = \ell \binom{n}{2} + \ell \binom{n}{2} = \ell n(n-1).$$

De la misma manera, si la penalización es constante  $\ell$  y coloreamos propiamente con dos colores un árbol con  $n$  vértices, tendremos  $n_1$  vértices de un color y  $n_2$  vértices del otro color, con  $n_1 + n_2 = n$ . Como cualquier par de vértices del mismo color esta conectado por una arista de peso  $\ell$  en el complemento, la rigidez de un árbol coloreado con dos colores, donde hay  $n_1$  vértices de un color,  $n_2$  vértices del otro color y penalización constante  $\ell$  es

$$R(T^2) = \ell \binom{n_1}{2} + \ell \binom{n_2}{2} = \ell \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \ell \frac{n_2(n_2-1)}{2}.$$

El siguiente resultado asegura que si  $n_1$  y  $n_2$  son enteros positivos, entonces existe un árbol con  $n = n_1 + n_2$  vértices que realiza la rigidez  $R(G^2) = \ell \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \ell \frac{n_2(n_2-1)}{2}$ .

PROPOSICIÓN 2. Sea  $n \geq 2$  un entero positivo. Para todo par de enteros positivos  $n_1$  y  $n_2$  tales que  $n = n_1 + n_2$  existe un árbol  $T$  de orden  $n$  tal que si la penalización es constante  $\ell$ , entonces

$$R(T^2) = \ell \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \ell \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}.$$

*Demostración.* Considera dos conjuntos independientes  $V_1$  y  $V_2$  de vértices con  $n_1$  y  $n_2$  vértices respectivamente, ver figura 4.

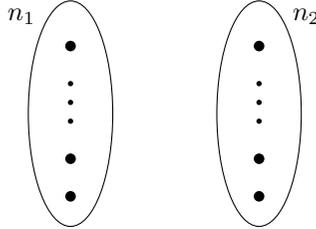


FIGURA 4. La partición de los vértices de un árbol  $T$

Construye un árbol con la bipartición  $(V_1, V_2)$ , es decir, todas las aristas del árbol deben estar entre los dos conjuntos  $V_1$  y  $V_2$  y no debe haber aristas entre vértices que pertenecen al mismo conjunto. Claramente, la 2-coloración propia es única y por las observaciones 1 y 2,

$$R(T^2) = \ell \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \ell \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}.$$

Como  $n = n_1 + n_2$  es una partición cualquiera, entonces para todo par de enteros positivos  $n_1$  y  $n_2$  tales que  $n = n_1 + n_2$  existe un árbol con una 2-coloración que realiza tal rigidez. □

El siguiente resultado establece el rango de rigidez de una gráfica bipartita para el cual no conocemos la bipartición y determina la rigidez exacta en caso de que conocemos la bipartición, generalizando los resultados obtenidos para la trayectoria, los ciclos pares y los árboles.

PROPOSICIÓN 3. Sea  $G$  una gráfica bipartita de orden  $n$  con función de penalización constante  $\ell$ . Entonces

$$\ell \frac{\lfloor n/2 \rfloor (\lfloor n/2 \rfloor - 1) + \lfloor n/2 \rfloor (\lceil n/2 \rceil - 1)}{2} \leq R(G) \leq \ell \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}.$$

Además, si la partición de vértices es  $(V_1, V_2)$  con  $|V_1| = n_1$  y  $|V_2| = n_2$ , entonces

$$R(G^2) = \ell \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \ell \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}.$$

*Demostración.* Considera el conjunto de todas las gráficas bipartitas de orden  $n$  con función de penalización constante  $k$ . Las gráficas bipartitas que realizan la mínima rigidez son las gráficas balanceadas y las gráficas bipartitas que realizan la mayor rigidez son las estrellas. □

### 5. CICLOS CON PENALIZACIÓN CONSTANTE SALVO UNA LONGITUD

Vamos a considerar una función de penalización que le asigna el valor 1 a todas las aristas del complemento salvo las aristas de longitud<sup>4</sup>  $i$ . Formalmente esto significa que tenemos el ciclo  $C_n$  con los vértices etiquetados con los números  $0, 1, 2, \dots, n - 1$  ( $\mathbb{Z}_n$ ) tal que  $\{i, i + 1\} \in A(C_n)$ , para  $0 \leq i \leq n - 2$ , y además,  $\{n - 1, 0\} \in A(C_n)$ .

<sup>4</sup>La distancia entre los vértices de la arista sobre el ciclo.

Definimos la penalización del complemento de  $C_n$  como sigue: sea  $i$  un entero fijo con  $2 \leq i \leq n/2$ ,

$$\omega'(\{u, v\}) = \begin{cases} i & \text{si } \text{long}(\{u, v\}) = i; \\ 1 & \text{si } \text{long}(\{u, v\}) \neq i. \end{cases}$$

Denotamos al ciclo  $C_n$  con penalización  $\omega'$  por  $C_{n,i}$ . En la figura 5 se puede ver el ciclo  $C_{n,2}$ , es decir, un ciclo de longitud 7 donde las aristas del complemento tienen peso 1 (aristas punteadas) y las aristas entre vértices a distancia 2 del ciclo tienen peso 2 (aristas “rayadas”).

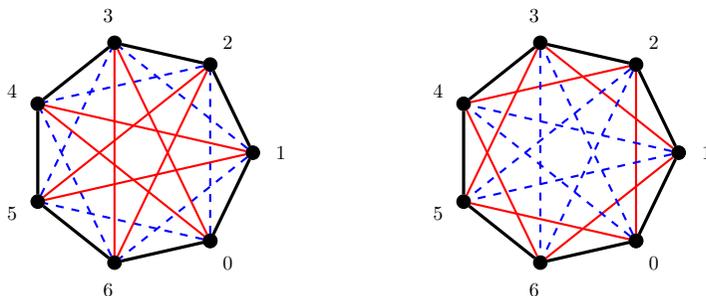


FIGURA 5. Las gráficas  $C_{7,2}^3$  y  $C_{7,3}^3$

Para entender la idea, vamos a revisar dos ejemplos donde coloreamos propiamente el ciclo de longitud 7 con 3 colores. Primero el ciclo de longitud 7 con las aristas de longitud 2 de peso 2  $C_{7,2}$  y luego el ciclo de longitud 7 con las aristas de longitud 3 de peso 3  $C_{7,3}$ .

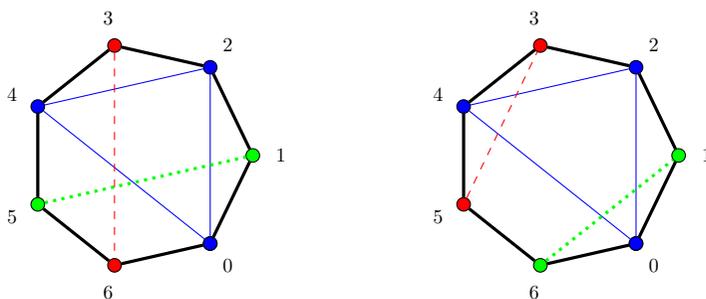


FIGURA 6.  $R(C_{7,2}^3) = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7$ ,  $R(C_{7,3}^3) = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 = 7$

En el caso del ciclo  $C_{7,2}$  vamos a procurar que no haya aristas a distancia 2 con el mismo color. En el ciclo, los vértices adyacentes tienen colores distintos, y como tenemos 7 vértices y tres colores hay al menos 3 vértices del mismo color. No importa cómo acomodamos estos tres vértices, siempre utilizan dos aristas de longitud 2. En la figura 6 hay un ejemplo de una coloración que utiliza solamente dos aristas de longitud 2, los demás aristas tienen peso 1, por lo que esta coloración es la que tiene la rigidez menor y podemos concluir que

$$R(C_{7,2}^3) = 7.$$

En el caso del ciclo  $C_{7,3}$  vamos a procurar que no haya aristas a distancia 3 con el mismo color. Igual que en el caso anterior, si tenemos 3 vértices del mismo color hay una arista de longitud 3. En la figura 6 hay un ejemplo de una coloración que utiliza solamente una arista de longitud 3, los demás aristas tienen peso 1, por lo que esta coloración es la que tiene la rigidez menor y podemos concluir que

$$R(C_{7,3}^3) = 7.$$

Claramente, el ciclo  $C_{n,i}$  tiene una  $k$ -coloración balanceada que no usa aristas de longitud  $i$ , entonces  $R(C_{n,i}^k) = R(C_n^k)$ . El siguiente teorema determina la rigidez para cualquier ciclo impar  $C_{n,2}$  según si  $n$  es múltiplo de 3 o no.

TEOREMA 4. *Sea  $n \geq 5$  un entero impar. Considera el ciclo  $C_{n,2}$  con penalización  $\omega'$ . Entonces*

$$R(C_{n,2}^3) = \begin{cases} R(C_n^3) & \text{si } n = 3k; \\ R(C_n^3) + 2 & \text{si } n \neq 3k. \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $C = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}v_0$  el ciclo  $C_{n,2}$ .

Si  $n = 3k$ , consideramos la siguiente 3-coloración propia que no utiliza las aristas de longitud 2:  $C_1 = \{v_1, v_4, \dots, v_{3k-2}\}$ ,  $C_2 = \{v_2, v_5, \dots, v_{3k-1}\}$  y  $C_3 = \{v_0, v_3, \dots, v_{3k-3}\}$ . En este caso la rigidez coincide con la rigidez de  $C_n^3$ .

Si  $n \neq 3k$ , vamos primero a probar que en cualquier 3-coloración  $\varphi$  hay al menos una arista de longitud 2 (dos vértices a distancia dos del mismo color). Para llegar a una contradicción, suponemos que no hay vértices a distancia dos del mismo color. Sin pérdida de generalidad,  $\varphi(v_0) = 0$ . Entonces  $\varphi(v_2) \neq 0$  y  $\varphi(v_{n-2}) \neq 0$ . Si  $\varphi(v_2) = \varphi(v_{n-2})$  (ver figura 7 de la izquierda), entonces  $\varphi(v_1) = \varphi(v_{n-1})$  lo cual contradice que no hay vértices a distancia dos del mismo color.

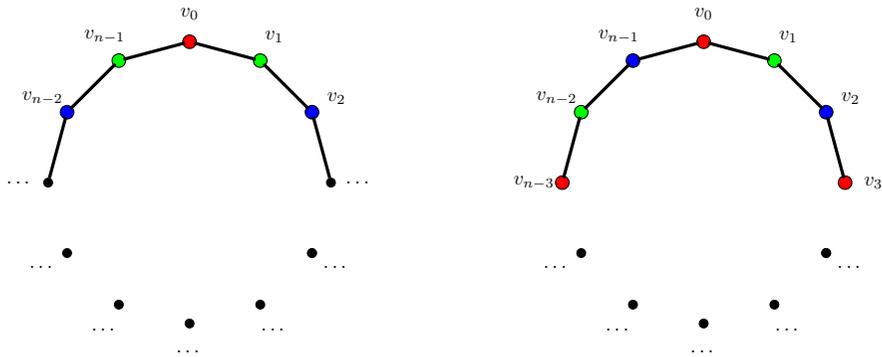


FIGURA 7. Hay al menos dos vértices del mismo color a distancia dos

Por lo tanto  $\varphi(v_2) \neq \varphi(v_{n-2})$ . Sin pérdida de generalidad,  $\varphi(v_2) = 2$  y  $\varphi(v_{n-2}) = 1$  (ver figura 7 de la derecha). Como la coloración es propia  $\varphi(v_1) = 1$  y  $\varphi(v_{n-1}) = 2$ . Además, como no hay aristas del mismo color a distancia 2,  $\varphi(v_{n-3}) = 0$ ,  $\varphi(v_3) = 0$ , siguiendo con esta idea, tendríamos que  $\varphi(v_i) = 0$  si  $i \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\varphi(v_i) = 1$  si  $i \equiv 1 \pmod{3}$  y  $\varphi(v_i) = 2$  si  $i \equiv 2 \pmod{3}$ , contradiciendo que  $\varphi(v_{n-3}) = 0$  ya que  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ .

Por lo tanto, cualquier 3-coloración usa al menos una arista de longitud 2 (dos vértices a distancia dos del mismo color).

Vamos, ahora, a probar que siempre hay al menos 2 aristas de longitud 2 (2 pares de vértices a distancia dos del mismo color). Supongamos, para llegar a una contradicción, que hay exactamente dos vértices a distancia dos del mismo color. Sin pérdida de generalidad,  $\varphi(v_0) = 0$  y  $\varphi(v_1) = \varphi(v_{n-1}) = 1$ . De manera análoga al caso anterior y por la suposición de que solo hay una pareja de vértices del mismo color a distancia 2,  $\varphi(v_2) = \varphi(v_{n-2}) = 2$ ,  $\varphi(v_3) = \varphi(v_{n-3}) = 0$  y así sucesivamente. Si  $n$  es par (ver figura 8 de la izquierda), entonces  $\varphi(v_{m-1}) = \varphi(v_{m+1})$  y los vértices  $v_{m-1}$  y  $v_{m+1}$  tienen el mismo color, lo cual contradice la suposición de que hay una sola pareja de vértices a distancia dos del mismo color.



**Caso  $n = 9k$**

Construimos la coloración  $\varphi_0$  repitiendo la sucesión  $S$  de colores  $k$  veces. La coloración del ciclo  $\mathcal{C}_{9k,3}$  es

$$S \circ S \circ \dots \circ S.$$

Como  $S$  se pega bien y es balanceado, entonces la coloración que obtenemos al repetir la sucesión  $S$  de colores  $k$  veces también lo es.

**Caso  $n = 9k + 2$**

Construimos la coloración  $\varphi_2$  repitiendo la sucesión  $S$  de colores  $k$  veces y al final pegamos con  $(1, 2)$ . La coloración del ciclo  $\mathcal{C}_{9k+2,3}$  es

$$S \circ S \circ \dots \circ S \circ (1, 2) \circ S.$$

El pegado final es  $S \circ (1, 2) \circ S = (1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2)$  no tiene aristas de longitud 3 y como  $S$  usa cada color exactamente 3 veces, esta nueva coloración usa los colores uno y dos  $3k + 1$  veces y usa el color tres  $3k$  veces, por lo que la coloración es balanceada.

**Caso  $n = 9k + 4$**

Construimos la coloración propia  $\varphi_4$  repitiendo la sucesión  $S$  de colores  $k$  veces y al final pegamos con  $(1, 2, 3, 2)$ . La coloración del ciclo  $\mathcal{C}_{9k+4,3}$  es

$$S \circ S \circ \dots \circ S \circ (1, 2, 3, 2) \circ S.$$

El pegado final es  $S \circ (1, 2, 3, 2) \circ S = (1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2)$  no tiene aristas de longitud 3 y como  $S$  usa cada color exactamente 3 veces, esta nueva coloración usa el color uno y el color tres exactamente  $3k + 1$  veces y usa el color dos exactamente  $3k + 2$  veces, por lo que la coloración es balanceada.  $\square$

6. CICLOS CON PENALIZACIÓN SEGÚN LA LONGITUD DE ARISTA

Sea  $C_n$  un ciclo donde los vértices están etiquetados con  $\mathbb{Z}_n$  tales que  $\{i, i+1\} \in A(C_n)$ . Definimos la penalización  $\omega$  del complemento de  $C_n$  como sigue: si  $u - v = nk + i$ , con  $0 \leq i < n$ , entonces  $\omega(\{u, v\}) = i$ . Denotamos el ciclo  $C_n$  con penalización  $\omega$  por  $\mathbb{C}_n$ . El caso más sencillo es el ciclo de longitud 5,  $\mathbb{C}_5$ , coloreado con 3 colores. No es difícil ver que habrá un color asignado a un solo vértice y los otros dos colores estarán asignados a dos vértices cada uno, y no importa cómo coloreamos los 5 vértices del ciclo, siempre habrá exactamente dos aristas en  $\overline{\mathbb{C}_5}$  entre vértices del mismo color, cada uno con peso 2, por lo que  $R(\mathbb{C}_5^2) = 4$ . Una análisis similar en la coloración de  $\mathbb{C}_7$  en la figura 9 lleva a que  $R(\mathbb{C}_7^3) = 11$  y una revisión exhaustiva arroja que  $R(\mathbb{C}_{11}^3) = 49$ .

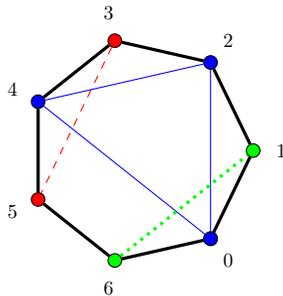


FIGURA 9.  $R(\mathbb{C}_7^3) = 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 11$ .

Antes de probar la cota superior para la rigidez de los ciclos impares con función de penalización  $\omega$ , vamos a revisar el ejemplo de  $\mathbb{C}_{13}$  coloreado con 3 colores y con 4 colores. La idea principal es partir los vértices en conjuntos (colores) tal que los vértices en cada conjunto utilicen el menor número de aristas de longitud grande.

Recordamos que dos vértices adyacentes tienen que tener color distinto, y por eso no podemos tener vértices adyacentes en un mismo conjunto. En la figura 10, podemos ver dos coloraciones del ciclo de longitud 13. En la figura izquierda usamos 3 colores y esta coloración es un ejemplo del teorema 6, mientras que la figura derecha es un ejemplo del teorema 8 donde usamos 4 colores.

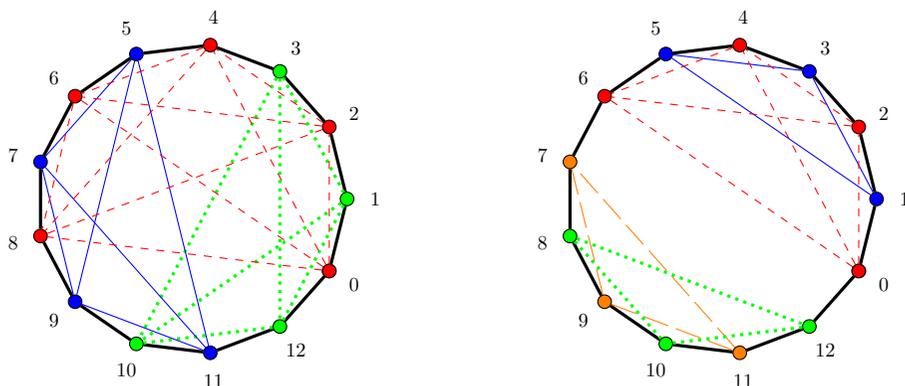


FIGURA 10.  $R(\mathbb{C}_{13}^3) = 37 + 20 + 20 = 77$  y  $R(\mathbb{C}_{13}^4) = 20 + 8 + 8 + 8 = 52$ .

El siguiente resultado establece una cota superior para la rigidez de un ciclo de longitud impar con función de penalización  $\omega$ .

**TEOREMA 6.** *Sea  $n \geq 9$  un entero impar. Si  $\omega$  es la función de penalización, entonces la rigidez  $R(\mathbb{C}_n^3)$  es menor que o igual a:*

$$\begin{aligned} & 3(3k + (k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)])] && \text{si } n = 3k; \\ & 3(3k + 1) + 2(k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]] + (k - 2)[2 + (k - 1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 3)]] && \text{si } n = 3k + 1; \\ & 3(3k + 2) + (k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]] + 2(k - 2)[2 + (k - 1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 3)]] && \text{si } n = 3k + 2. \end{aligned}$$

*Demostración.* Para establecer una cota superior de la rigidez del ciclo impar  $\mathbb{C}_n$  coloreado con 3 colores, vamos a definir una 3-coloración balanceada. Analizaremos por separado los 3 casos  $n = 3k$ ,  $n = 3k + 1$  y  $n = 3k + 2$  y para facilitar las explicaciones, vamos a usar lenguaje de geometría.

**Caso  $n = 3k$**

Consideramos la siguiente 3-coloración  $\varphi_0$  del ciclo impar  $\mathbb{C}_{3k}$ :  $C_1 = \{0, 2, \dots, 2k - 2\}$ ,  $C_2 = \{2k, 2k + 2, \dots, n - 1, 1, \dots, k - 4, k - 2\}$  y  $C_3 = \{k, k + 2, \dots, n - 2\}$ . Los polígonos formados al colorear el ciclo de esta manera, procurando usar el mayor número de aristas de longitud 2, serán todos iguales, en donde para cada uno de ellos:

- La penalización del perímetro estará dado por  $n = 3k$ .
- Debido a que las diagonales internas de un polígono están dadas por su número de vértices menos 3 y dado que las diagonales incrementarán su salto de 2 en 2 al “alejarse” del vértice inicial, se puede expresar el valor total de la longitud de sus aristas de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{k-3} (2 + 2i) + \sum_{i=1}^{k-3} \sum_{j=1}^i (2 + 2j).$$

Lo cual, al simplificar para quedar en función de  $k$ , nos lleva a:

$$\sum_{i=1}^{k-3} (2 + 2i) + \sum_{i=1}^{k-3} \sum_{j=1}^i (2 + 2j) = 2(k - 3) + 2 \sum_{i=1}^{k-3} i + \sum_{i=1}^{k-3} \left( 2i + 2 \sum_{j=1}^i j \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(k-3) + 2 \frac{(k-3)((k-3)+1)}{2} + \sum_{i=1}^{k-3} \left( 2i + 2 \frac{i(i+1)}{2} \right) \\
 &= 2(k-3) + (k-3)(k-2) + 3 \sum_{i=1}^{k-3} i + \sum_{i=1}^{k-3} i^2 \\
 &= 2(k-3) + (k-3)(k-2) + 3 \frac{(k-3)((k-3)+1)}{2} + \frac{(k-3)((k-3)+1)(2(k-3)+1)}{6} \\
 &= (k-3) \left[ 2 + (k-2) \left[ \frac{5}{2} + (2k-5)/6 \right] \right].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la penalización total de cada uno de los 3 polígonos formados es:

$$(1) \quad 3k + (k-3) \left[ 2 + (k-2) \left[ \frac{5}{2} + (2k-5)/6 \right] \right].$$

Dado que la penalización de los tres polígonos son iguales, basta multiplicar la ecuación (1) por 3, y la rigidez de la 3-coloración  $\varphi_0$  del ciclo impar  $\mathbb{C}_{3k}$  es

$$R(\varphi_0^3) = 3(3k + (k-3)[2 + (k-2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k-5)]).$$

**Caso  $n = 3k + 1$**

Consideramos la siguiente 3-coloración  $\varphi_1$  del ciclo impar  $\mathbb{C}_{3k+1}$ :  $C_1 = \{0, 2, \dots, 2k\}$ ,  $C_2 = \{2k+2, 2k+4, \dots, n-1, 1, 3, \dots, k-1\}$  y  $C_3 = \{k+1, k+3, \dots, n-2\}$ . Los polígonos formados al colorear el ciclo de esta manera, procurando usar el mayor número de saltos de dos, serán un polígono de  $k+1$  vértices y dos polígonos de  $k$  vértices, en donde:

- El perímetro de cada uno estará dado por  $n = 3k + 1$ , siempre que  $k \geq 2$ .
- Para la figura de  $k+1$  vértices, las diagonales internas sumarán un peso de

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{k-2} (2+2i) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=1}^i (2+2j) = (k-2)[2 + (k-1)[\frac{5}{2} + (2k-3)/6]].$$

- Mientras que para las figuras de  $k$  vértices, las diagonales internas sumarán un peso de:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{k-3} (2+2i) + \sum_{i=1}^{k-3} \sum_{j=1}^i (2+2j) = (k-3)[2 + (k-2)[\frac{5}{2} + (2k-5)/6]].$$

Dado que la penalización de los dos polígonos con  $k$  vértices son iguales, para obtener la rigidez de la 3-coloración  $\varphi_1$  del ciclo impar  $\mathbb{C}_{3k+1}$ , basta multiplicar la ecuación (3) por 2 y sumarle la ecuación (2).

$$R(\varphi_1^3) = 3(3k+1) + 2(k-3)[2 + (k-2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k-5)]] + (k-2)[2 + (k-1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k-3)]].$$

**Caso  $n = 3k + 2$**

Consideramos la siguiente 3-coloración  $\varphi_2$  del ciclo impar  $\mathbb{C}_{3k+2}$ :  $C_1 = \{0, 2, \dots, 2k\}$ ,  $C_2 = \{2k+2, 2k+4, \dots, n-1, 1, 3, \dots, k\}$  y  $C_3 = \{k+2, k+4, \dots, n-2\}$ . Los polígonos formados al colorear el ciclo de manera equilibrada, procurando usar el mayor número de los saltos de dos, serán dos polígonos de  $k+1$  vértices y un polígono de  $k$  vértices, en donde:

- El perímetro de cada uno estará dado por  $n = 3k + 2$ , siempre que  $k \geq 3$
- Para la figura de  $k$  vértices, las diagonales internas sumarán un peso de:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{k-3} (2+2i) + \sum_{i=1}^{k-3} \sum_{j=1}^i (2+2j) = (k-3)[2 + (k-2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k-5)]].$$

- Mientras que para las figuras de  $k + 1$  vértices, las diagonales internas sumarán un peso de

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{k-2} (2 + 2i) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=1}^i (2 + 2j) = (k - 2)[2 + (k - 1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 3)]]$$

Dado que la penalización de los dos polígonos con  $k + 1$  vértices son iguales, para obtener la rigidez de la 3-coloración  $\varphi_2$  del ciclo impar  $\mathbb{C}_{3k+2}$ , basta multiplicar la ecuación (5) por 2 y sumarle la ecuación (4).

$$R(\varphi_2^3) = 3(3k + 1) + (k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]] + 2(k - 2)[2 + (k - 1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 3)]]$$

En cada caso encontramos la rigidez de la 3-coloración  $\varphi_i$  del ciclo impar  $\mathbb{C}_{3k+1}$  para  $i = 0, 1, 2$  y la rigidez de estas coloraciones establecen una cota superior para la rigidez de las 3-coloraciones del ciclo impar  $\mathbb{C}_n$ . □

Para tener la igualdad en el teorema anterior falta probar que no hay una coloración propia con menor rigidez que la coloración que proporcionamos. Sin embargo, no logramos completar la prueba formal de esta afirmación.

**CONJETURA 7.** *Sea  $n \geq 9$  un entero impar. Si  $\omega$  es la función de penalización, entonces la rigidez  $R(\mathbb{C}_n^3)$  es igual a:*

$$\begin{aligned} &3(3k + (k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]]) && \text{si } n = 3k; \\ &3(3k + 1) + 2(k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]] + (k - 2)[2 + (k - 1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 3)]] && \text{si } n = 3k + 1; \\ &3(3k + 2) + (k - 3)[2 + (k - 2)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 5)]] + 2(k - 2)[2 + (k - 1)[\frac{5}{2} + \frac{1}{6}(2k - 3)]] && \text{si } n = 3k + 2. \end{aligned}$$

**TEOREMA 8.** *Sea  $\omega$  la función de penalización del ciclo  $\mathbb{C}_{2k+1}$ . La rigidez  $R(\mathbb{C}_{2k+1}^4)$  es menor o igual a*

$$\begin{aligned} &2(1)(2k - 3) + \dots + 2(s)(2k - (4s - 1)) + \dots + 2(k/2)(1) && \text{si } k = 2l; \\ &2(1)(2k - 3) + \dots + 2(s)(2k - (4s - 1)) + \dots + 2((k - 1)/2)(3) && \text{si } k = 2l + 1. \end{aligned}$$

*Demostración.* Como la rigidez es la penalización mínima, para la cota superior basta encontrar la penalización de una 4-coloración propia de  $\mathbb{C}_{2k+1}$ . Vamos a analizar por separado dos casos, según la paridad de  $k$ .

**Caso  $k = 2l$ .**

Definimos los conjuntos de colores  $C_i$  de la 4-coloración  $\varphi_0$  de  $\mathbb{C}_{2k+1}$  como sigue:

$$\begin{aligned} C_0 &= \{0, 2, \dots, k - 2\}, & C_1 &= \{1, 3, \dots, k - 1\}, \\ C_2 &= \{k, k + 2, \dots, 2k\}, & C_3 &= \{k + 1, k + 3, \dots, 2k - 1\}. \end{aligned}$$

Observamos que los conjuntos  $C_0, C_1$  y  $C_3$  tienen  $l$  vértices, mientras que el conjunto  $C_2$  tiene  $l + 1$  vértices, además, son conjuntos disjuntos y  $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 = V(\mathbb{C}_n^4)$ .

Los conjuntos  $C_0, C_1, C_3$  tienen:

$$\begin{aligned} &l - 1 \text{ aristas con penalización } 2, \\ &l - 2 \text{ aristas con penalización } 4, \\ &\vdots \\ &l - s \text{ aristas con penalización } 2s, \\ &\vdots \\ &1 \text{ arista con penalización } 2(l - 1), \end{aligned}$$

El conjunto  $C_2$  tiene:

$$\begin{aligned} &l \text{ aristas con penalización } 2, \\ &l - 1 \text{ aristas con penalización } 4, \\ &\vdots \\ &l - s \text{ aristas con penalización } 2(s + 1), \\ &\vdots \\ &1 \text{ arista con penalización } 2l. \end{aligned}$$

La suma de las penalizaciones de cada uno de los conjuntos  $C_0, C_1$  y  $C_3$  es

$$2(l - 1) + 4(l - 2) + \dots + (l - s)2s + \dots + 2(l - 1).$$

La suma de las penalizaciones del conjunto  $C_2$  es

$$2(l) + 4(l - 1) + \dots + (l - s)(2(s + 1)) + \dots + 2l.$$

La rigidez de la coloración  $\varphi_0$  es

$$\begin{aligned} R(\varphi_0^4) &= 3(2(l-1) + 4(l-2) + \dots + (l-s)2s + \dots + 2(l-1)) + \\ &\quad 2(l) + 4(l-1) + \dots + (l-s)2(s+1) + \dots + 2l \\ &= 2(1)(2k-3) + \dots + 2(s)(2k - (4s-1)) + \dots + 2(k/2)(1). \end{aligned}$$

**Caso  $k = 2l + 1$ .**

Definimos los conjuntos de colores  $C_i$  de la 4-coloración  $\varphi_1$  de  $\mathbb{C}_{2k+1}$  como sigue:

$$\begin{aligned} C_0 &= \{0, 2, \dots, 2l\}, & C_1 &= \{1, 3, \dots, 2l+1\}, \\ C_2 &= \{2l+2, 2l+4, \dots, 4l+2\}, & C_3 &= \{2l+3, 2l+5, \dots, 4l+1\}. \end{aligned}$$

Observamos que los conjuntos  $C_0, C_1$  y  $C_2$  tienen  $l+1$  vértices mientras que el conjunto  $C_3$  tiene  $l$  vértices, además, son conjuntos disjuntos y  $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 = V(\mathbb{C}_n^4)$ .

Los conjuntos  $C_0, C_1$  y  $C_2$  tienen:

$l$	aristas con penalización 2,
$l-1$	aristas con penalización 4,
$\vdots$	
$l-s$	aristas con penalización $2s-1$ ,
$\vdots$	
1	arista con penalización $2l$ ,

El conjunto  $C_3$  tiene:

$l-1$	aristas con penalización 2,
$l-2$	aristas con penalización 4,
$\vdots$	
$l-s-1$	aristas con penalización $2(s+1)$ ,
$\vdots$	
1	arista con penalización $2(l-1)$ .

La suma de las penalizaciones de cada uno de los conjuntos  $C_0, C_1$  y  $C_2$  es

$$2(l) + 4(l-1) + \dots + 2s(l-s+1) + \dots + 2(l).$$

La suma de las penalizaciones del conjunto  $C_3$  es

$$2(l-2) + 4(l-2) + \dots + 2(s+1)(l-s-1) + \dots + 2(l-1).$$

La rigidez de la coloración  $\varphi_1$  es

$$\begin{aligned} R(\varphi_0^4) &= 3(2(l) + 4(l-1) + \dots + 2s(l-s+1) + \dots + 2(l)) + \\ &\quad 2(l-2) + 4(l-2) + \dots + 2(s+1)(l-s-1) + \dots + 2(l-1) \\ &= 2(1)(2k-3) + \dots + 2(s)(2k - (4s-1)) + \dots + 2(k/2)(1). \end{aligned}$$

En cada caso encontramos la rigidez de la 4-coloración  $\varphi_i$  del ciclo impar  $\mathbb{C}_{2(2l+i)+1}$  para  $i = 0, 1$  y la rigidez de estas coloraciones establecen una cota superior para la rigidez de las 4-coloraciones del ciclo impar  $\mathbb{C}_n$ . □

**CONJETURA 9.** *Sea  $\omega$  la función de penalización del ciclo  $\mathbb{C}_{2k+1}$ . La rigidez  $R(\mathbb{C}_{2k+1}^4)$  es igual a*

$$\begin{aligned} &2(1)(2k-3) + \dots + 2(s)(2k - (4s-1)) + \dots + 2(k/2)(1) && \text{si } k = 2l; \\ &2(1)(2k-3) + \dots + 2(s)(2k - (4s-1)) + \dots + 2((k-1)/2)(3) && \text{si } k = 2l+1. \end{aligned}$$

## 7. CONOS

Una gráfica es un cono si tiene un vértice que es adyacente a todos los demás vértices. Para poder describir las gráficas en esta sección, definimos la suma de dos gráficas  $G$  y  $H$ , denotado  $G + H$ , como la gráfica resultante de tomar las dos gráficas  $G$  y  $H$  y añadir todas las aristas  $\{u, v\}$  donde  $u$  es un vértice de  $G$  y  $v$  es un vértice de  $H$ . Así, si  $H$  es una gráfica y  $u$  es un vértice que no pertenece a la gráfica  $H$ , entonces la gráfica  $G = \{u\} + H$  (que también se denota como  $G = u + H$ ) es un cono ya que el vértice  $u$  es adyacente a todos los demás vértices de  $G$ . Hay muchas familias de gráficas que son conos, las gráficas completas, estrellas y ruedas para mencionar algunas.

**PROPOSICIÓN 10.** *Sea  $G = u + H$  tal que  $H$  es conexa. Entonces  $R(G^k) = R(H^k)$*

*Demostración.* Sea  $\varphi$  una coloración propia de  $G$ . Como el vértice  $u$  es adyacente a todos los vértices en la gráfica  $H$ , entonces  $u$  es el único vértice de su color, es decir,  $\varphi(u) \neq \varphi(v)$  para todos los vértices  $v \in V(H)$ . Esto significa que el vértice  $u$  no aporta nada a la rigidez de la gráfica  $G$  ya que no hay aristas entre vértices del mismo color que el vértice  $u$  y todas las aristas que aportan valor a la rigidez son aristas de la gráfica  $H$ .  $\square$

La rueda  $W_n$  es una gráfica como  $u + C_{n+1}$ , es decir es un ciclo de longitud  $n - 1$  con un vértice en el centro que es adyacente a todos los vértices del ciclo.

COROLARIO 11.  $R(W_n^k) = R(C_{n-1}^k)$ .

## 8. PRIMERAS APROXIMACIONES CON ALGORITMOS EVOLUTIVOS

El algoritmo genético es un tipo de algoritmo evolutivo que se inspira en la reproducción natural y que sigue los principios darwinianos de la supervivencia del más apto. Se comienza con un conjunto (población) de objetos individuales que se reproducirán y heredarán a la siguiente generación ciertas características. Aquellos individuos que tengan mejores características sobrevivirán y se reproducirán para crear una nueva generación de la población. Se le llaman algoritmos genéticos porque la información de los individuos asemejan el sistema del ADN, donde se tiene un conjunto de genes que representan ciertas características específicas de cada individuo y que se agrupan en cromosomas.

Este tipo de algoritmos son usados con frecuencia en la resolución de problemas de NP-duros y NP-completos. Dado que la coloración robusta pertenece a los problemas NP-completos, es interesante utilizar algún algoritmo genético para encontrar soluciones (ver [2, 3]). El algoritmo genético enfatiza la importancia de la cruce sexual (operador principal) sobre el de la mutación (operador secundario) y de la selección probabilística.

En esta primera aproximación, se utilizó el Algoritmo Genético Simple o Canónico como muestra el Algoritmo 1.

---

### Algoritmo 1 Algoritmo Genético Simple o Canónico

---

**Entrada:** Población  $P$  que va a evolucionar

**Salida:** Población  $P^*$  resultado del proceso de evolución

$P_0 \leftarrow P$

Evaluar  $P_0$  y asignar aptitud

$i \leftarrow 0$

**Repite**

    Seleccionar padres de  $P_i$  y recombinar para obtener la nueva población  $Q_i$

    Mutar  $Q_i$ , evaluar y asignar aptitud

    Seleccionar  $P_{i+1}$  de  $P_i$  y  $Q_i$

$i \leftarrow i + 1$

**Hasta** Parar cuando se alcancen los criterios

**Regresa**  $P^* \leftarrow P_i$

---

**8.1. Formulación del problema.** Dado que el PCR consiste en:

$$R(G^k) = \min_{\varphi^k} \{R(\varphi^k)\},$$

el problema de coloración robusta se puede formular como un problema de programación lineal binaria:

- $x_{ui} = 1$  si el color es asignado al vértice  $u$ , 0 en otro caso;
- $y_{uv} = 1$  si los vértices  $u$  y  $v$  pertenecen a la misma clase cromática, 0 en otro caso.

**Sujeto a:**

$$\sum_{i=1}^k x_{ui} = 1 \text{ para todo } u \in V,$$

$$x_{ui} + x_{vi} \leq 1 \text{ para todo } uv \in E \text{ y para todo } i \in \{1, \dots, k\},$$

$$x_{ui} + x_{vi} - 1 \leq y_{uv} \text{ para todo } uv \in \bar{E} \text{ y para todo } i \in \{1, \dots, k\},$$

$$x_{ui} \in \{0, 1\} \text{ para todo } u \in V, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, k\},$$

$$y_{uv} \in \{0, 1\} \text{ para todo } uv \in \bar{E}.$$

**Función objetivo**

Dada una coloración  $\varphi$  de la gráfica, la **función objetivo** evalúa dos parámetros: (i) la cantidad de vértices adyacentes de mismo color y (ii) la rigidez de  $\varphi$ . El parámetro (i) nos permite evaluar negativamente aquellas coloraciones que no son propias y, entre mayor sea la cantidad de pares de vértices adyacentes de mismo color, peor es la evaluación de la coloración. Puesto que nuestro objetivo es encontrar una coloración con la menor rigidez posible, el parámetro (ii) es esencial para la evaluación de una coloración.

**Población inicial**

La **población inicial** del algoritmo consiste en coloraciones propias de la gráfica. Para implementar una coloración, se usa un vector donde la entrada  $i$ -ésima consiste en el color asignado al vértice  $i$ . Obtener la población inicial es relativamente sencillo puesto que el método `all_graph_colorings(k)` de SageMath nos proporciona todas las coloraciones propias de una gráfica dada si se desea colorearla con  $k$  colores. Nuestra población se comprende de “individuos” representados como vectores de longitud  $n$  conteniendo un rango de  $1, \dots, k$  valores representando los colores.

**Operador de cruza**

La **cruza** de la población se realiza como sigue: dadas dos coloraciones padre de nuestra población, se escoge un valor  $i$  entre 1 y  $n$  (el número de vértices de la gráfica y el tamaño del vector que representa nuestra coloración). Los colores a partir de ese valor son intercambiados entre las coloraciones padre para obtener dos nuevas coloraciones. De esta forma, basta emparejar la población actual para obtener la nueva población.

**Mutación**

La **mutación** es un mecanismo que se usa para alcanzar soluciones en el espacio de búsqueda que la cruza no exploraría, es decir, que el algoritmo encuentre soluciones parcialmente óptimas. Esto se realiza al cambiar el color de un vértice de manera aleatoria con una probabilidad de entre el 5% y 10%.

En esta primera etapa del trabajo, se delimitó y planteó el problema de manera de que posteriormente se pudiera implementar en algún lenguaje de programación para su ejecución y prueba. En particular, se considera como trabajo futuro la implementación de la formulación y el algoritmo genético simple en el lenguaje *Python*.

**AGRADECIMIENTOS.** Los autores expresan su gratitud a la Universidad Autónoma Metropolitana, al proyecto CONAHCyT CB-47510664 y al árbitro anónimo.

## REFERENCIAS

- [1] Gutiérrez–Andrade M. A., Lara–Velázquez P., López–Bracho R., Ramírez–Rodríguez J., *Heuristics for the robust coloring problem*, Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones **18**(1) 2011, 137–147.
- [2] Lim, A., Wang, F. *Meta-heuristics for robust graph coloring problem*, 16th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence, 2004, 514–518.
- [3] Malhotra K., Vasa K. D., Chaudhary N., Vishnoi A., Sapra V., *A Solution to Graph Coloring Problem Using Genetic Algorithm*, EAI Endorsed Transactions on Scalable Information Systems, Vol. 11 No. 6, 2024,

*Gabriela Judith Blanco Rodríguez*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Azcapotzalco,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Ciencias Básicas.  
Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas  
Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200 Ciudad de México, México  
e-mail: gabyj.blanco@gmail.com

*Karen Miranda*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Lerma,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Sistemas de Información y Comunicaciones.  
Av. de las Garzas 10, Col. El Panteón  
Municipio Lerma de Villada, C.P. 52005 Estado de México, México  
e-mail: kmiranda@cua.uam.mx

*Mika Olsen*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Cuajimalpa,  
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.  
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México  
e-mail: olsen@cua.uam.mx

*Axel Prestegui Ramos*

Universidad Nacional Autónoma de México,  
Facultad de Ciencias.  
Investigación científica, C.U.  
Alcaldía Coyoacán, C.P. 04510 Ciudad de México, México  
e-mail: axelprestegui@ciencias.unam.mx

*Nadia Vásquez Martínez*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Cuajimalpa,  
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.  
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México  
e-mail: nadia.vasquez@cua.uam.mx

## LA GRÁFICA DE SUCESIONES DE PRÜFER

JULIÁN ALBERTO FRESÁN FIGUEROA, TANIA JIMÉNEZ ALVARADO, ALDO LOZANO PIÑA, OSVALDO PADILLA MORALES Y MAXIMILIANO RAMÍREZ MEJÍA

RESUMEN. Sea  $\sigma$  una asignación de grados de los vértices de la gráfica completa de  $n$  vértices. La gráfica  $P_\sigma(n)$  es la gráfica cuyos vértices son todas las sucesiones de Prüfer de árboles generadores de  $K_n$  con la asignación de grados  $\sigma$ , es decir, aquellos árboles  $T$  tales que  $d_T(u) = \sigma(u)$  para todo vértice  $u$  de  $K_n$ . En  $P_\sigma(n)$  dos sucesiones son adyacentes si difieren en exactamente dos entradas, y la diferencia entre los números en estas entradas es uno. En este artículo mostramos que la gráfica es conexa y algunas propiedades sobre  $P_\sigma(n)$ .

### 1. INTRODUCCIÓN

En una era de interconectividad global, es fundamental diseñar redes óptimas que aseguren la conexión entre personas. Desde este punto de vista, un desafío que ha intrigado a matemáticos y científicos informáticos desde hace casi 100 años, es cómo obtener un árbol generador de peso mínimo, que representa una manera eficiente y rentable para conectar distintos puntos. Desde entonces algoritmos como los de Prim, Kruskal o Borůvka se han presentado como unos métodos eficientes para encontrar árboles de peso mínimo. Sin embargo algunos problemas no solo necesitan que el peso del árbol sea el mínimo, sino que además tenga algunas restricciones. Por ejemplo, en un sistema de distribución eléctrica, se busca transmitir energía de manera eficiente y confiable entre las estaciones de distribución y los hogares. Podemos modelar este problema usando una gráfica en la que los vértices representan las estaciones y los hogares, y el peso en las aristas refleja el costo de instalar las líneas eléctricas.

En este contexto, la manera más económica de asegurar que todas las estaciones y hogares estén conectados sin necesidad de mantener demasiadas líneas eléctricas, es encontrar un árbol de peso mínimo. Sin embargo, es esencial considerar las limitaciones de capacidad, energía y recursos de procesamiento en cada estación de distribución.

Cada estación puede tener una capacidad limitada para manejar conexiones simultáneas debido a restricciones de infraestructura. Esto se traduce en que se debe elegir una cantidad de aristas que salen de un vértice en función de su capacidad. Encontrar un árbol generador de peso mínimo que respete las restricciones en los grados de los vértices, es decir, el número de aristas que inciden en un vértice  $v$ , denotado por  $d(v)$ , permite que la solución sea factible en términos prácticos, optimizando el costo y la eficiencia y asegurando el uso óptimo de los recursos disponibles, evitando la sobrecarga en los vértices. Esto implica que existan restricciones de forma que  $d(x) \leq b(x)$ , donde  $b(x)$  es el máximo de aristas que en el árbol puede tener el vértice  $x$ .

Por otro lado, para las redes eléctricas de alta demanda, es importante distribuir equitativamente la carga de tráfico entre las diferentes aristas y vértices para evitar congestiones o sobrecalentamientos y maximizar la eficiencia del sistema. Al tener múltiples aristas conectadas a cada vértice, se facilita la distribución de la carga de energía y se evita la congestión en estaciones individuales, mejorando el rendimiento general de la red. Esto se refleja en que necesitaremos una restricción  $a(x) \leq d(x)$ , donde  $a(x)$  es el mínimo de conexiones que debe tener un vértice para que la carga se distribuya de manera efectiva.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C05, 05C07.

*Palabras clave.* Gráficas de árboles, sucesiones de Prüfer, Conexidad, Grados fijos.

Es importante observar que en las soluciones para el árbol de peso mínimo dadas por los algoritmos clásicos como Kruskal, Prim o Borůvka no hay control sobre el grado que tiene cada vértice  $x$  en un árbol de peso mínimo. Sin embargo, hay problemas en los que, de manera natural, el grado de algún vértice  $x$  en el árbol de peso mínimo necesita cumplir ciertas restricciones ( $a(x) \leq d(x) \leq b(x)$ ).

Cuando en un problema de este estilo no se conocen algoritmos eficientes para resolver el problema, se desarrollan algoritmos heurísticos. Estos algoritmos, que no realizan una búsqueda exhaustiva, son cruciales para abordar de manera eficiente problemas complejos en la optimización combinatoria. A diferencia de los algoritmos exactos, que aseguran una solución óptima, los algoritmos heurísticos adoptan un enfoque práctico, explorando el espacio de búsqueda<sup>1</sup> para encontrar una solución que, aunque no sea la mejor, se obtiene rápidamente y es suficientemente buena en la práctica (en nuestro ejemplo, el espacio de búsqueda incluiría todos los posibles árboles generadores que cumplen con las restricciones de grado, independientemente de su peso).

Frecuentemente estos algoritmos necesitan una representación adecuada del espacio de búsqueda y maneras de moverse dentro de él. En este contexto destacan las gráficas de objetos combinatorios. Sea  $C$  un conjunto de objetos combinatorios y sea  $f$  una transformación de un objeto en  $C$  en algún otro objeto en  $C$ . La gráfica de objetos de  $C$  con la transformación  $f$  es la gráfica cuyos vértices son los elementos de  $C$  y dos objetos en  $C$  son adyacentes si puedo ir de uno a otro mediante la transformación  $f$ . Estas gráficas nos ayudan para modelar los espacios de búsqueda de los algoritmos heurísticos.

En este trabajo presentamos los resultados obtenidos durante el Quinto Taller Metropolitano de Matemáticas Discretas, llevado a cabo en el Mineral del Chico, Hidalgo en el 2023. En este trabajo nos centramos en el caso particular de la gráfica de árboles en el que  $a(x) = b(x)$ , es decir el grado que debe tener cada vértice en el árbol esta fijo. Para ello usaremos una representación de estos árboles mediante sucesiones de Prüfer.

## 2. SUCESIONES DE PRÜFER

En 1918, Prüfer [1] mostró una manera de codificar árboles al dar una demostración del Teorema de Cayley. Consideraremos árboles etiquetados de manera decreciente en función del grado de cada vértice, es decir, el vértice con la etiqueta 1 tiene grado mayor que o igual al grado del vértice de etiqueta 2, el cual a su vez tiene grado mayor que o igual al vértice que tiene etiqueta 3, y así sucesivamente. Sea  $T$  un árbol con  $n$  vértices y etiquetemos los vértices de  $T$  con los números del 1 al  $n$ .

Removamos de  $T$  el vértice terminal que tenga la menor etiqueta, digamos  $u_1$ . Sea  $v_1$  el vértice adyacente a  $u_1$  en  $T$ . De los  $n - 1$  vértices restantes, sea  $u_2$  el vértice terminal con la menor etiqueta y sea  $v_2$  el único vértice adyacente a él en  $T - u_1$ . Removamos ahora el vértice  $u_2$  de  $T - u_1$  y repitamos esta operación hasta que sólo queden 2 vértices. Esto nos define una única sucesión  $(v_1, v_2, \dots, v_{n-2})$  de  $n-2$  enteros, todos entre 1 y  $n$ . A esta sucesión se le conoce como *ucesión de Prüfer*. En la figura 1 se muestra un ejemplo de construcción de una sucesión de Prüfer.

De igual manera, dada una sucesión  $S = (v_1, v_2, \dots, v_{n-2})$  de  $n - 2$  enteros entre 1 y  $n$ , no necesariamente distintos, podemos contruir un único árbol de  $n$  vértices de la siguiente manera: determinemos cuál número de la sucesión  $Q = (1, 2, \dots, n)$  es el primero que no aparece en la sucesión  $S$ . Llamemos  $u_1$  a ese número. Entonces diremos que el árbol tiene la arista  $u_1 v_1$ . Removamos a  $v_1$  de la sucesión  $S$  y a  $u_1$  de la sucesión  $Q$ . En lo que queda de la sucesión  $Q$  determinemos cuál es el primer número que no aparece en lo restante de la sucesión  $S$ . Sea  $u_2$  este número e inclumos a nuestro árbol la arista  $u_2 v_2$ . Repetimos estos pasos hasta que la sucesión  $S$  no tenga

<sup>1</sup>El espacio de búsqueda se refiere a todas las posibles soluciones, aunque no sean óptimas.

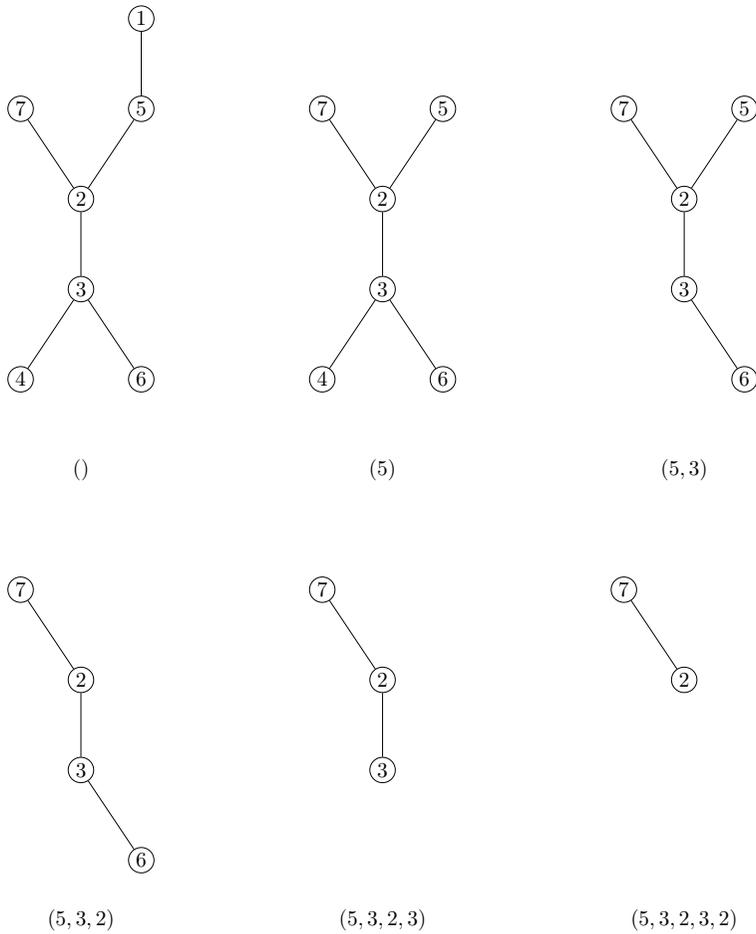


FIGURA 1. Construcción de una sucesión de Prüfer

ningún elemento más. Finalmente hagamos adyacentes los últimos dos vértices que aparecen en  $Q$ . En la figura 2 podemos ver la reconstrucción del árbol de la figura 1.

Esto nos define una biyección entre los árboles de  $n$  vértices, es decir, árboles generadores de una gráfica completa, y las sucesiones de  $n - 2$  enteros entre 1 y  $n$ .

Las sucesiones de Prüfer tienen algunas propiedades muy bien conocidas, de entre ellas es muy fácil probar la siguiente:

PROPOSICIÓN 1. *El número  $v$  aparece  $d(v) - 1$  veces en una sucesión de Prüfer.*

### 3. LA GRÁFICA DE SUCESIONES DE PRÜFER

Siguiendo la notación en [3], una sucesión de  $n$  enteros decreciente  $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  es una *sucesión arbórea* si y sólo si

1.  $1 \leq d_i \leq n - 1$  para  $i = 1, 2, \dots, n$
2.  $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2(n - 1)$

Claramente una sucesión  $\sigma$  es arbórea si y solo si existe un árbol generador  $T$  de  $K_n$  tal que  $d_T(u) = \sigma(u)$  para todo vértice  $u$  de  $K_n$ .

Sea  $n \geq 2$  y sea  $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  una sucesión arbórea. La gráfica de sucesiones de Prüfer de  $\sigma$ , denotada por  $P_\sigma(n)$  es la gráfica cuyos vértices son todas las sucesiones de Prüfer de árboles generadores de  $K_n$  con la asignación de grados  $\sigma$ , es decir, aquellos árboles  $T$  tales que  $d_T(u) = \sigma(u)$  para todo vértice  $u$  de  $K_n$ . En  $P_\sigma(n)$  dos sucesiones son adyacentes si difieren en exactamente dos entradas (una transposición),

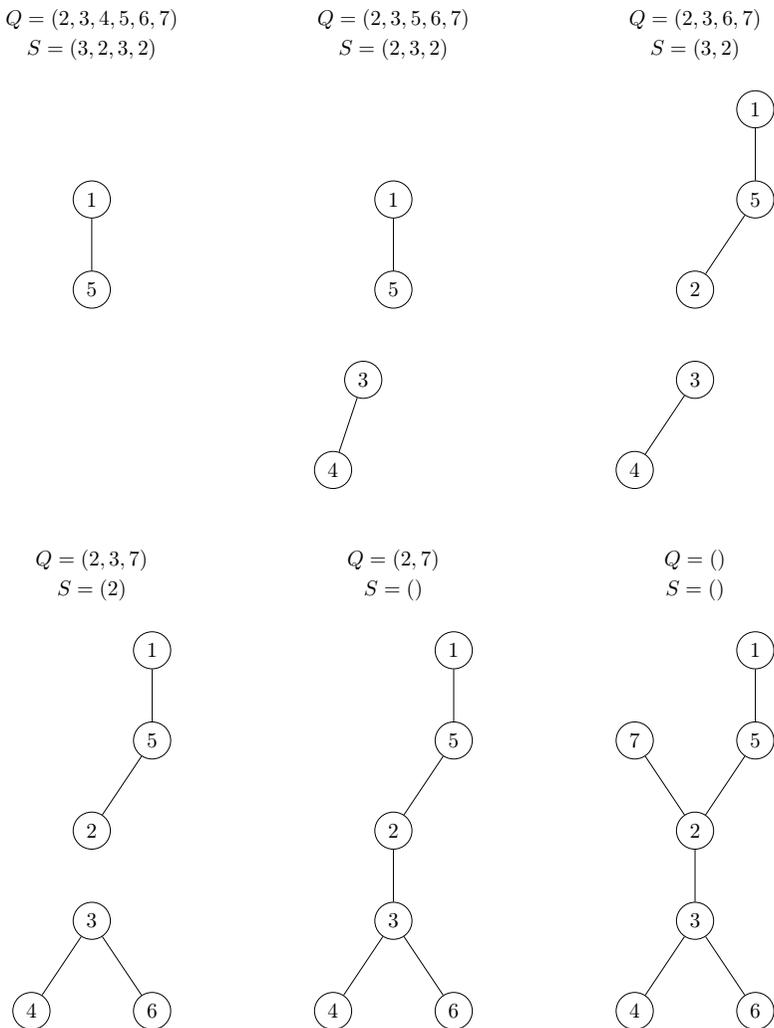


FIGURA 2. Construcción de un árbol a partir de una sucesión de Prüfer

y la diferencia entre los números en estas entradas es uno. En la figura 3 se presenta la gráfica correspondiente a la sucesión arbórea  $(2, 2, 2, 1, 1)$ , es decir, a las trayectorias cuyas hojas son los vértices 4 y 5. Observa que las sucesiones de Prüfer de estos árboles, por la proposición 1 serán permutaciones de la sucesión  $(3, 2, 1)$ .

El siguiente teorema es una consecuencia directa de la proposición 1:

**TEOREMA 2.** *Sea  $n$  un entero y sea  $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  una sucesión arbórea. Entonces las sucesiones de Prüfer correspondientes a árboles con la asignación de grados  $\sigma$  son reordenamientos de la sucesión:*

$$S = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{d_1-1}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{d_2-1}, \dots, \underbrace{n, n, \dots, n}_{d_n-1})$$

Como se observa en el teorema anterior, la sucesión arbórea determina por completo las sucesiones de Prüfer. Sea  $n_k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$  el número de veces que aparece  $k$  en las sucesiones de Prüfer asociadas a una sucesión arbórea  $\sigma$ . Con esta notación, podemos reescribir el siguiente teorema debido a Moon.

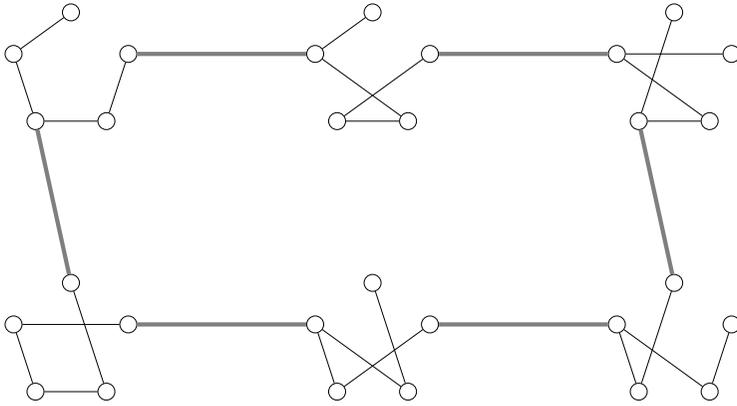


FIGURA 3. La gráfica  $P_\sigma(5)$  para  $\sigma = (2, 2, 2, 1, 1)$ . Las sucesiones de Prüfer están apareadas como el árbol al que codifican

TEOREMA 3. [2] Sean  $n$  un entero,  $\sigma$  una sucesión arbórea de orden  $n$  y  $n_k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$  el número de veces que aparece  $k$  en las sucesiones de Prüfer asociadas a  $\sigma$ . Entonces la gráfica  $P_\sigma(n)$  es una gráfica de orden  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_n!}$ .

El grado de un vértice en  $P_\sigma(n)$  está dado por el número de transposiciones válidas entre sus entradas. Entonces por un argumento sencillo de conteo tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 4. Sean  $n$  un entero,  $\sigma$  una sucesión arbórea de orden  $n$  y  $n_k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$  el número de veces que aparece  $k$  en las sucesiones de Prüfer asociadas a  $\sigma$ . La gráfica  $P_\sigma(n)$  es una gráfica  $(n_1n_2 + n_2n_3 + \dots + n_{n-1}n_n)$ -regular.

*Demostración.* Sea  $\sigma$  una sucesión arbórea y sea  $n_k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$  el número de veces que aparece  $k$  en las sucesiones de Prüfer asociadas a  $\sigma$  y sea  $S$  un vértice de  $P_\sigma(n)$ . Como dos sucesiones son adyacentes si difieren en exactamente dos entradas (una transposición), y la diferencia entre los números en estas entradas es uno, entonces  $S$  será adyacente a  $n_i n_{i+1}$  vértices en  $P_\sigma(n)$  pues son todos los posibles intercambios en entradas con los elementos  $i$  e  $i + 1$ . Al sumar sobre todas las posibles parejas de elementos consecutivos el resultado se sigue.  $\square$

Una consecuencia directa de los teoremas 3 y 4 y del lema del apretón de manos es el siguiente corolario.

COROLARIO 5. El tamaño de la gráfica  $P_\sigma(n)$  es  $\frac{n!(n_1n_2 + n_2n_3 + \dots + n_{n-1}n_n)}{2n_1!n_2!\dots n_n!}$ .

Sea  $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  una sucesión arbórea y sea  $n_k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$  el número de veces que aparece  $k$  en las sucesiones de Prüfer asociadas a  $\sigma$ . Como  $\sigma$  es decreciente entonces se cumple que  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_n$ . Sea  $H_j$  la subgráfica de  $P_\sigma(n)$  de todas las sucesiones en cuya última entrada aparece el número  $j$ .

LEMA 6. Sean  $\sigma$  una sucesión arbórea y  $r$  el entero más grande que aparece en las sucesiones de Prüfer asociadas a  $\sigma$ . Todo vértice en  $H_a$  es adyacente a un vértice en  $H_{a+1}$  para  $a = 1, 2, \dots, r - 1$ .

*Demostración.* Sea  $v \in V(H_a)$ . Notemos que  $v$  es de la forma  $u = (x_1, x_2, \dots, x_{n-3}, a)$  con  $1 \leq x_i \leq x_r$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 3$ . Como  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$  entonces en particular  $n_a \geq n_{a+1} \geq n_r \geq 1$  por lo que existe un entero  $j$  tal que  $x_j = a + 1$ . Sea  $u = (y_1, y_2, \dots, y_{n-2})$  tal que  $y_j = a, y_{n-2} = a + 1$  y  $y_i = x_i$  en cualquier otro caso. Claramente,  $u \in H_{a+1}$  y  $u$  es adyacente a  $v$  en  $P_\sigma(n)$ .  $\square$

LEMA 7. Sea  $\sigma = (d_1, d_2, \dots, d_r, \dots, d_n)$  una sucesión arbórea con  $r$  el entero más grande que aparece en las sucesiones de Prüfer asociadas a la sucesión  $\sigma$ . Sea

$\tau = (d_1, d_2, \dots, d_{r-1} \dots d_{n-1})$  una sucesión arbórea. Entonces la subgráfica  $H_r$  de  $P_\sigma(n)$  es isomorfa a  $P_\tau(n-1)$ .

*Demostración.* Sea  $\Theta : V(H_r) \rightarrow V(P_\tau(n-1))$  dada por la regla de correspondencia  $\Theta((x_1, x_2, \dots, x_{n-3}, r)) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-3})$ . Por el teorema 2, las imágenes de la función  $\Theta$  serán una sucesión de Prüfer, por lo que  $\Theta$  está bien definida y claramente es una función biyectiva. Si dos sucesiones de Prüfer  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $H_r$  entonces existen dos entradas  $i$  y  $j$ , con  $i \neq j \neq r$  en las que difieren y la diferencia entre los valores de esas entradas es 1, por lo que  $\Theta(u)$  y  $\Theta(v)$  serán adyacentes en  $P_\tau(n-1)$  pues tienen los mismos valores en cada entrada  $k = 1, 2, \dots, n-3$ . Análogamente y por el mismo argumento si  $\Theta(u)$  y  $\Theta(v)$  son adyacentes en  $P_\tau$ , entonces  $u$  y  $v$  serán adyacentes en la subgráfica  $H_r$  de  $P_\sigma(n)$ . Por lo tanto,  $\Theta$  es un isomorfismo.  $\square$

**TEOREMA 8.** *Sea  $n \geq 4$  un entero y  $\sigma$  una sucesión arbórea. La gráfica  $P_\sigma(n)$  es una gráfica conexa.*

*Demostración.* Para  $n = 4$  las únicas sucesiones arbóreas posibles son  $(3, 1, 1, 1)$  y  $(2, 2, 1, 1)$  y las gráficas de sucesiones de Prüfer se pueden ver en la figura 4.

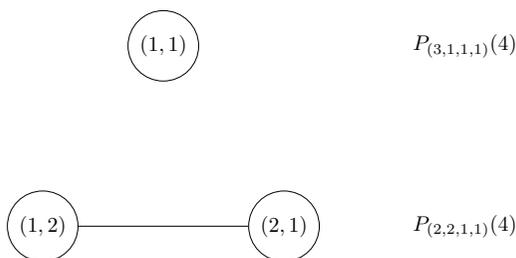


FIGURA 4. Las gráficas  $P_{(3,1,1,1)}(4)$  y  $P_{(2,1,1,1)}(4)$

Procederemos por inducción suponiendo que para un entero  $m \geq 4$  y para cualquier sucesión arbórea  $\lambda$ , la gráfica  $P_\lambda(m)$  es conexa. Probaremos que  $P_\sigma(m+1)$  es conexa para cualquier sucesión arbórea  $\sigma$ .

Sea  $r$  el entero más grande que aparece en las sucesiones de Prüfer asociadas a  $\sigma$  y sean  $u$  y  $v$  dos sucesiones de Prüfer en  $P_\sigma(m+1)$ . Si en ambas sucesiones la última entrada es  $r$  entonces  $u$  y  $v$  pertenecen a la subgráfica  $H_r$  de  $P_\sigma(m+1)$ . Por el lema 7 la subgráfica  $H_r$  es isomorfa a  $P_\tau(m)$  y por hipótesis de inducción es conexa, por lo que existe una  $uv$ -trayectoria en  $H_r$  y por lo consiguiente en  $P_\sigma(m+1)$ .

Por otro lado si en  $u$  la última entrada tiene un valor  $k \neq r$  entonces por el lema 6 existe una sucesión  $u_1$  adyacente a  $u$  en  $P_\sigma(m+1)$  tal que la última entrada de  $u_1$  es  $k+1$ . Este proceso se puede repetir obteniendo una trayectoria  $u, u_1, u_2, \dots, u_{r-k}$  donde la última entrada de  $u_{r-k}$  tiene el valor de  $r$ . Si la última entrada de la sucesión  $v$  es  $r$  entonces por el caso anterior existe una  $u_{r-k}v$ -trayectoria y por lo consiguiente existe una  $uv$  trayectoria en  $P_\sigma(m+1)$ . Si el valor de la última entrada de  $v$  es  $\ell \neq r$  entonces podemos encontrar una trayectoria  $v, v_1, v_2, \dots, v_{r-\ell}$  tal que el valor de la última entrada de  $v_{r-\ell}$  es  $r$  y por el caso anterior existe una  $u_{r-k}v_{r-\ell}$ -trayectoria y por lo tanto una  $uv$ -trayectoria en  $P_\sigma(m+1)$ . Por lo tanto  $P_\sigma(m+1)$  es conexa.  $\square$

La conexidad de  $P_\sigma(n)$  nos garantiza que los algoritmos heurísticos puedan transitar por todo el espacio de búsqueda usando el movimiento que define a las aristas de la gráfica. Finalmente mientras construíamos diversos ejemplos, en todas las instancias de la gráfica, ésta fue hamiltoniana. Por ello planteamos la siguiente conjetura:

**CONJETURA 9.** *Sean  $n$  un entero y  $\sigma$  una sucesión arbórea. La gráfica  $P_\sigma(n)$  es hamiltoniana.*

**AGRADECIMIENTOS.** Los autores expresan su gratitud a la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de las unidades Cuajimalpa e Iztapalapa, por los recursos aportados para la realización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas 2023, al CONAHCyT, proyecto CB-47510664, y al árbitro anónimo.

## REFERENCIAS

- [1] Prüfer, H. (1918). Neuer beweis eines satzes uber per mutationen. Archiv derMathematik und Physik, 27, 742-744.
- [2] Moon, J.W. (1970) Counting labelled trees. From lectures delivered to the Twelfth Biennial Seminar of the Canadian Mathematical Congress (Vancouver, 1969) Canadian Mathematical Monographs, No. 1 Canadian Mathematical Congress, Montreal, Que.
- [3] Fresán-Figueroa, J., y Rivera-Campo, E. (2017). On the fixed degree tree graph. Journal of Information Processing, 25, 616-620.

*Julián A. Fresán Figueroa*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Cuajimalpa,  
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.  
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 CDMX, México  
e-mail: jfresan@cua.uam.mx

*Tania Jiménez Alvarado*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Iztapalapa,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas.  
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México  
e-mail: cbi2183011209@titlani.uam.mx

*Aldo Lozano Piña*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Cuajimalpa,  
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.  
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 CDMX, México  
e-mail: aldo.lozano@cua.uam.mx

*Oswaldo Padilla Morales*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Iztapalapa,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas.  
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México  
e-mail: cbi2203008915@titlani.uam.mx

*Maximiliano Ramírez Mejía*

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección

Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México

e-mail: [cbi2184053289@titlani.uam.mx](mailto:cbi2184053289@titlani.uam.mx)

## DOMINACIÓN A DISTANCIA $k$ EN GRÁFICAS

ILÁN A. GOLDFEDER, NAHID YELENE JAVIER NOL Y LIZZETH ARIADNA SÁNCHEZ SOLÍS

RESUMEN. El problema de determinar el número de dominación de una gráfica  $G$  ha sido ampliamente estudiado y se han derivado muchas variantes. Entre éstas, está el número de dominación a distancia  $k$  de una gráfica  $G$ . Este trabajo está dedicado a presentar este concepto y mostrar algunos resultados al respecto en las trayectorias y mallas.

### 1. INTRODUCCIÓN

En la figura 1 (a) aparece la distribución de un museo, donde las líneas representan pasillos de exhibición y los puntos representan sitios en los que se confluyen dichos pasillos. La administración desea colocar puestos de asistencia para quienes visitan el museo en los puntos de confluencia de los pasillos. Colocar uno puesto en cada punto es excesivo y consideran que recorrer a lo más dos pasillos sería una distancia adecuada para llegar a uno. ¿Cuál es el menor número de puestos que se requieren colocar? La

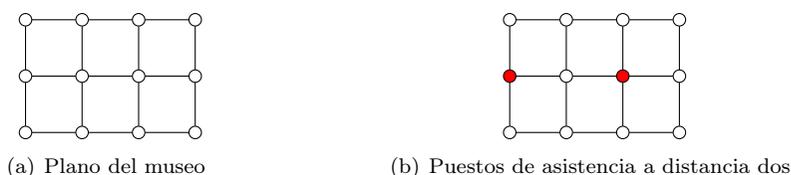


FIGURA 1. Puntos de asistencia en un museo

respuesta es dos. Con uno solo no basta para que cualquier visitante recorra a lo más dos pasillos para encontrar un puesto de asistencia, pero con dos sí es posible, como se muestra en la figura 1 (b).

El problema anterior es un ejemplo de lo que se conoce como *dominación a distancia  $k$* . Pese a que puede parecer un problema «sencillo», en términos matemáticos y computacionales es un problema muy difícil, lo que vuelve su estudio relevante.

### 2. DEFINICIONES BÁSICAS

Una *gráfica*  $G$  es una pareja ordenada  $(V(G), A(G))$ , donde  $V(G)$  es un conjunto finito y no vacío, los *vértices* de la gráfica, y  $A(G)$  es un conjunto de parejas no ordenadas de vértices, las *aristas* de la gráfica.

Dados dos vértices  $u$  y  $v$  en una gráfica  $G$ ,  $u$  y  $v$  son *adyacentes* o  $u$  es *vecino* de  $v$  si  $\{u, v\} \in A(G)$ . La *vecindad* de  $u$  es el conjunto de todos los vecinos de  $u$  y se denota como  $N(u)$ .

Dados dos vértices  $u$  y  $v$  en una gráfica  $G$ , una *trayectoria* o una  $(u, v)$ -trayectoria es una sucesión de vértices  $P = (x_0, x_1, \dots, x_k)$  que empieza en  $u$  y termina en  $v$  (es decir,  $x_0 = u$  y  $x_k = v$ ) tal que cualesquiera dos vértices consecutivos son adyacentes y su *longitud* se define y denota como  $l(P) = k$ .

2010 *Mathematics Subject Classification*. 05C69, 05C12.

*Palabras clave*. Gráficas, dominación, número de dominación.

La *distancia* entre dos vértices  $u$  y  $v$  en una gráfica conexa<sup>1</sup>  $G$ , se denota por  $d_G(u, v)$  o simplemente  $d(u, v)$ , es la menor de las longitudes de entre todas las posibles  $(u, v)$ -trayectorias en  $G$ . Si  $S \subseteq V(G)$ , la *distancia* de  $u$  a  $S$  es la mínima  $d(u, w)$ , para todo  $w \in S$ , y se denota como  $d(u, S)$ .

### 3. PROBLEMA

Un *conjunto dominante* de una gráfica  $G$  es un conjunto  $S$  de vértices de  $G$  tal que todo vértice que no está en  $S$  tiene un vecino en  $S$ . En particular, el conjunto de los vértices  $V(G)$  es un conjunto dominante de  $G$ . Lo interesante es preguntarse *cuáles* son los conjuntos dominantes con el menor número de elementos y cuál es este valor. Así, se define el *número de dominación* de  $G$  como la cardinalidad de un conjunto dominante con el menor número de elementos y se denota por  $\gamma(G)$ . Este concepto está motivado por problemas de varios tipos, entre ellos problemas con piezas de ajedrez y ya aparece aparece definido en los libros de Claude Berge [1] y Øystein Ore [7].

En 1975, Amram Meir y John W. Moon [6] combinaron los conceptos de distancia y dominación en gráficas e introdujeron el concepto de dominación a distancia  $k$  en una gráfica (ellos le llamaron  $k$ -cubiertas). Dado  $k \geq 1$ , un conjunto  $S$  es un *conjunto dominante a distancia  $k$*  en  $G$  si para todo vértice que no está en  $S$ , éste se encuentra a distancia  $k$  de algún vértice de  $S$ , es decir, que para todo vértice  $v \in V(G) \setminus S$ , se tiene que  $d(v, S) \leq k$ . El *número de dominación a distancia  $k$* , denotado por  $\gamma_k(G)$ , es la mínima de las cardinalidades de entre todos los conjuntos dominantes a distancia  $k$ . Note que si  $k = 1$ , entonces  $\gamma_1(G) = \gamma(G)$ .

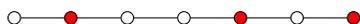


FIGURA 2. Los vértices de color rojo forman un conjunto dominante a distancia 1 mínimo en  $P_7$

Por ejemplo, si  $G = P_7$  (véase la figura 2), la trayectoria de orden 7 y longitud 6, para  $k = 1$  un conjunto dominante puede ser  $S = V(P_7)$ , el cual es de orden 7, pero no es un conjunto mínimo, ya que si retiramos cualquier vértices de  $S$ , el conjunto restante sigue siendo dominante. Los tres vértices de color rojo que se muestran en la figura 2 forman un conjunto dominante de  $P_7$ , la pregunta que falta por hacernos es si es un conjunto dominante mínimo. Dicho de otra forma, ¿podemos dominar  $P_7$  con sólo dos vértices? Si ponemos en el conjunto dominante a alguno de los extremos, véase figura 3 (a), éste dominará a su vecino, pero nos faltarán cinco vértices por considerar y con un sólo vértice no es posible dominarlos. Concluimos que en el conjunto dominante no nos conviene considerar a los extremos. Pero dado que alguien debe dominar a los extremos, necesariamente los vecinos de ambos extremos deben estar en  $S$ , véase la figura 3 (b). Así, faltaría que alguien domine al vértice de en medio. Por lo tanto, dos vértices no son suficientes para dominar a distancia uno a los vértices  $P_7$  y el conjunto dominante mínimo es de cardinalidad tres.

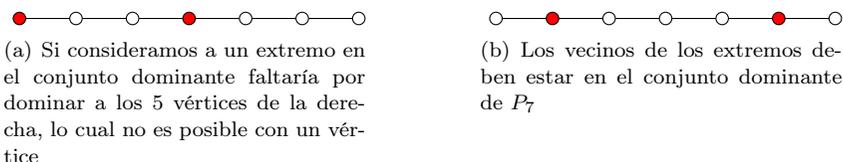


FIGURA 3. Dos vértices (de color rojo) no forman un conjunto dominante a distancia 1 mínimo en  $P_7$

<sup>1</sup>Esto significa, intuitivamente, que la gráfica está formada por una sola pieza.

El razonamiento previo muestra la forma en cómo usualmente se aborda este problema, por un lado se muestra un conjunto dominante de cierta cardinalidad y, por el otro, se argumenta porqué con menos vértices no es posible dominar a todos. Sin embargo, esto último puede llegar a ser muy complicado.

En el siguiente ejemplo consideramos  $G = C_7$  y  $k = 2$  los dos vértices de color rojo que se muestran en la figura 4 forman un conjunto dominante a distancia dos de  $C_7$ , dicho conjunto es de cardinalidad mínima, porque no es posible dominar a distancia dos a todos los vértices del ciclo con un solo vértice ya que quedarían dos vértices sin ser dominados a distancia dos. Por lo tanto, el conjunto dominante mínimo es de cardinalidad dos.

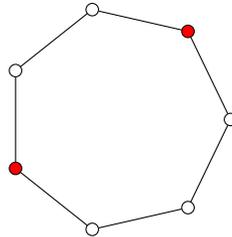


FIGURA 4. Un conjunto dominante a distancia dos de cardinalidad mínima del ciclo  $C_7$

Se conocen los números de dominación a distancia  $k$  de muy pocas familias de gráficas y determinar dicho valor para gráficas en general no es sencillo. Uno de los primeros resultados es el siguiente.

PROPOSICIÓN 1 (A. Klobučar [5]). Para  $k \geq 1$ ,  $\gamma_k(C_n) = \gamma_k(P_n) = \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$ .

*Demostración.* Primero, dada una trayectoria  $P_n$  para algún  $n$ , mostraremos un conjunto dominante a distancia  $k$  en dicha gráfica. Para ello, obsérvese la figura 3. Cada uno de los vértices en rojo y uno más escogido apropiadamente de la parte que dice resto forman un conjunto dominante a distancia  $k$  en  $P_n$  formado por  $\lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$  vértices. Por lo tanto,  $\gamma_k(P_n) \leq \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$ .

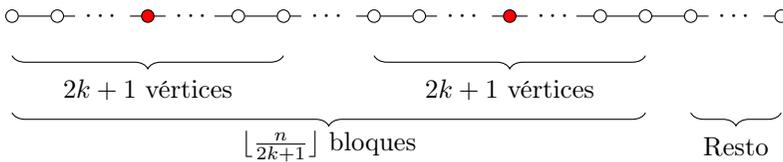


FIGURA 5. La dominación a distancia  $k$  en  $P_n$

Por otro lado, que cada vértice domina a distancia  $k$ , cada vértice en  $P$  domina a lo más a  $2k + 1$  vértices ( $k$  vértices a cada uno de los dos lados del vértices además de él mismo). Por lo tanto,  $\gamma_k(P_n) \geq \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$ .

De las dos desigualdades previas, se sigue que  $\gamma_k(P_n) = \lceil \frac{n}{2k+1} \rceil$ .

Finalmente, para el caso del ciclo  $C_n$  se usa el mismo argumento. □

Otra familia de gráficas para las cuales parecería asequible determinar su número de dominación usual y de dominación a distancia  $k$  son las mallas, que son el producto cartesiano de dos trayectorias. El *producto cartesiano*  $G \square H$  de dos gráficas  $G$  y  $H$  es la gráfica con conjunto de vértices  $V(G) \times V(H)$  y en la que dos vértices  $(g_1, h_1)$  y  $(g_2, h_2)$  son adyacentes si  $g_1 = g_2$  y  $h_1 h_2$  es una arista en  $H$  o si  $h_1 = h_2$  y  $g_1 g_2$  es una arista en  $G$ . A la gráfica  $P_n \square P_m$  se la conoce como *malla de n por m*.

Para ilustrar la definición de producto cartesiano de gráficas, mostramos los dos siguientes ejemplos. Considere  $G_1 = P_1$  y  $H_1 = P_4$ , véase la figura 6 (a), y  $G_2 = P_2$

y  $H_2 = P_6$ , véase la figura 6 (b). Observe que  $P_1 \square P_4$  coincide con  $P_4$  y, en general,  $P_1 \square P_m$  coincide con  $P_m$ .

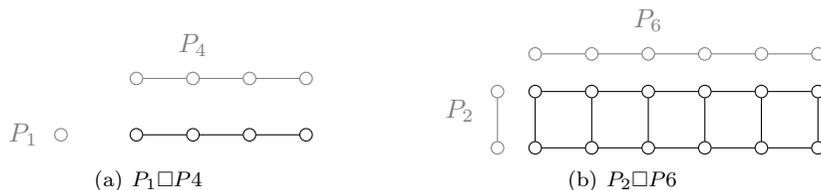


FIGURA 6. Producto cartesiano de  $P_1 \square P_4$  y  $P_2 \square P_6$

Sin embargo, pese a que las mallas pueden parecer una familia de gráficas relativamente sencillas, se conocen pocos resultados al respecto. Durante el taller, los participantes trabajaron en encontrar conjuntos dominantes a distancia  $k$  en mallas  $P_n \square P_m$ , para distintos valores de  $k$ ,  $n$  y  $m$ , y a argumentar por qué serían conjuntos mínimos. En particular, dichos ejemplos aportan cotas superiores para dichos valores.

4. TABLAS

En la tabla 1 aparecen los valores encontrados en el taller de la dominación usual (o a distancia uno), mientras en la tabla 2 aparecen dichos valores con respecto a las fórmulas conocidas (véase [3]).

TABLA 1. Valores de la dominación a distancia uno de  $P_m \square P_n$  con  $1 \leq m, n \leq 9$  hallados en el taller

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	1	2	2	3	3	4	4	5	6
3	1	2	3	4	4	6	6	7	8
4	2	3	4	4	6	7	7	9	10
5	2	3	4	6	7	9	10	12	13
6	2	4	6	7	9	10	11	13	15
7	3	4	6	7	10	11	12	15	17
8	3	5	7	9	12	13	15	17	20
9	3	6	8	10	13	15	17	20	22

TABLA 2. Valores de la dominación a distancia uno de  $P_m \square P_n$  con  $1 \leq m, n \leq 9$  conocidos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	1	2	2	3	3	4	4	5	6
3	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4	2	3	4	4	6	7	7	8	10
5	2	3	4	6	7	8	9	11	12
6	2	4	5	7	8	10	11	12	14
7	3	4	6	7	9	11	12	14	16
8	3	5	7	8	11	12	14	16	18
9	3	6	8	10	12	14	16	18	20

TABLA 3. Valores de la dominación a distancia dos de  $P_m \square P_n$  con  $1 \leq m \leq 7$  y  $1 \leq n \leq 9$  halladas en el taller

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
2	1	1	1	2	2	2	2	3	3
3	1	1	1	2	2	2	3	3	4
4	2	2	2	3	3	4	4	4	5
5	2	3	3	3	4	4	4	5	6
6	2	3	3	4	4	4	6	6	7
7	2	3	4	4	5	6	7	7	8

TABLA 4. Valores de la dominación a distancia tres de  $P_m \square P_n$  con  $1 \leq m \leq 6$  y  $1 \leq n \leq 12$  halladas en el taller

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3
3	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
4	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4
5	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
6	1	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	6

TABLA 5. Valores de la dominación a distancia cuatro de  $P_m \square P_n$  con  $1 \leq m \leq 6$  y  $1 \leq n \leq 12$  halladas en el taller

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
4	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
5	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
6	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4

5. RESULTADOS CONOCIDOS

Los resultados previos coinciden en algunos casos con lo poco que se sabe al respecto (resultados que los participantes no conocían). Entre ellos, presentamos los números de dominación usual para  $P_n \square P_m$ , con  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , y los números de dominación a distancia  $k$  para  $P_n \square P_m$  con  $m \in \{1, 2, 3\}$ . Nótese que en las tablas 3, 4, 5 y 6, para los valores que corresponden a  $m \in \{4, 5, 6\}$  no se conocen fórmulas publicadas.

TEOREMA 2 (M. S. Jacobson y L. F. Kinch [4]). *Se tiene que:*

- a)  $\gamma(P_1 \square P_n) = \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor, n \geq 1$
- b)  $\gamma(P_2 \square P_n) = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor, n \geq 1$
- c)  $\gamma(P_3 \square P_n) = \lfloor \frac{3n+4}{4} \rfloor, n \geq 1$
- d)  $\gamma(P_4 \square P_n) = \begin{cases} n + 1, & \text{si } n \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9\} \\ n, & \text{en otro caso con } n \geq 4. \end{cases}$

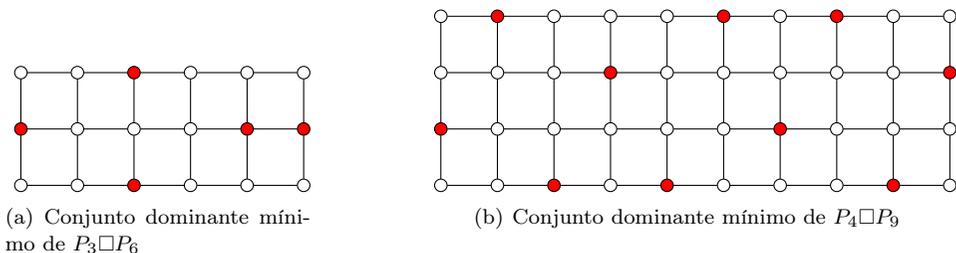


FIGURA 7. Conjuntos dominantes mínimos a distancia uno de  $P_3 \square P_6$  y  $P_4 \square P_9$

Para ilustrar el teorema 2 (c) y (d), veamos los siguientes ejemplos. La figura 7 (a) muestra una solución óptima de  $P_3 \square P_6$ . En este caso,  $\gamma(P_3 \square P_6) = 5$ . El inciso (b) de la figura 7 muestra una solución óptima de  $P_4 \square P_9$ , por lo que  $\gamma(P_4 \square P_9) = 10$ .

TEOREMA 3 (T. Y. Chang y Clark [2]). *Se tiene que:*

$$(a) \gamma(P_5 \square P_m) = \begin{cases} \lfloor \frac{6k+6}{5} \rfloor, & \text{si } m \in \{2, 3, 5, 6, 9\} \\ \lfloor \frac{6m+8}{5} \rfloor, & \text{en otro caso con } m \geq 1 \end{cases}$$

$$(b) \gamma(P_6 \square P_m) = \begin{cases} \lfloor \frac{10m+10}{7} \rfloor, & \text{si } m \in \{2, 3\} \text{ o } m \equiv 1 \pmod{7} \text{ con } m \geq 1 \\ \lfloor \frac{10m+12}{7} \rfloor, & \text{en otro caso con } m \geq 2. \end{cases}$$

Del teorema 1, se sigue que para  $k \geq 1$  y  $n \geq 2$ ,

$$\gamma_k(P_1 \square P_n) = \gamma_k(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2k+1} \right\rceil.$$

TEOREMA 4 (Klobučar [5]). *Se tiene que:*

$$(a) \text{ Para } k \geq 1 \text{ y } n \geq 2, \gamma_k(P_2 \square P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2k} + 1, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2k} \\ \lceil \frac{n}{2k} \rceil, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$(b) \text{ Para } k \geq 2 \text{ y } n \geq 2, \gamma_k(P_3 \square P_n) = \lceil \frac{n}{2k-1} \rceil.$$

TABLA 6. Valores de dominación a distancia cinco de  $P_m \square P_n$  con  $1 \leq m \leq 6, 1 \leq n \leq 12$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
4	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
5	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
6	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3

Para ilustrar la tabla 6 presentamos el siguiente ejemplo el cual muestra una solución óptima del conjunto dominante a distancia cinco del producto cartesiano de  $P_3 \square P_6$  y  $P_6 \square P_{11}$ , véase la figura 8.

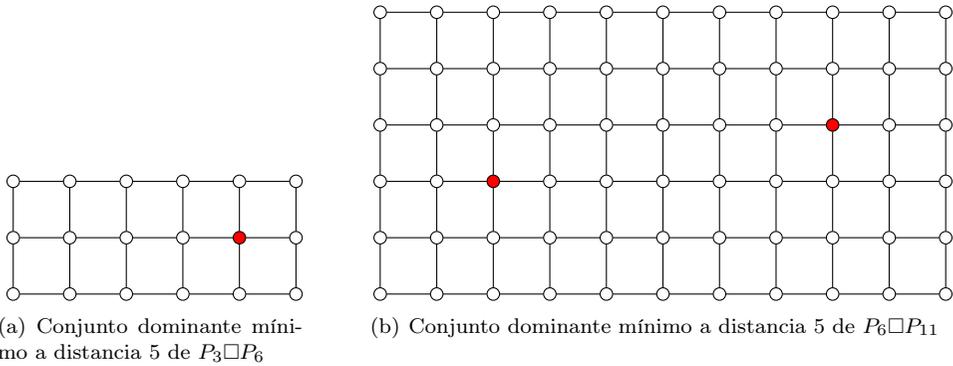


FIGURA 8. Conjuntos dominantes mínimos a distancia cinco de  $P_3 \square P_6$  y  $P_6 \square P_{11}$

**AGRADECIMIENTOS.** Los autores expresan su gratitud a los estudiantes que participaron en el equipo que desarrollo el trabajo presente: Luis Macip Hernández y Patricia Leilani Najera Bahena de la Unidad Cuajimalpa y Eduardo Olivares Sotelo y Luis Antonio Ríos Urzúa de la Unidad Iztapalapa, ambas unidades de la Universidad Autónoma Metropolitana. El primer autor fue apoyado por el proyecto CONAHCYT FORDECYT PRONACES/39570/2020 y el apoyo CONAHCYT 852562. La organización del Quinto Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas fue apoyada con recursos aportados por las unidades Cuajimalpa e Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, así como por el CONAHCYT por medio del proyecto CB-47510664.

#### REFERENCIAS

- [1] Berge, C., The theory of graphs and its applications, Methuen & Co. y John Wiley & Sons, 1962.
- [2] Chang, T. Y., Clark, W. E., *The domination numbers of the  $5 \times n$  and  $6 \times n$  grids graphs*, J. Graph Theory. 17 (1993) 81–107.
- [3] Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., Henning, M. A., *Domination in graphs—core concepts*, Springer, 2023.
- [4] Jacobson, M. S. y Kinch, L. F., *On the domination number of products of graphs: I*, Ars. Combin. 18 (1984) 33–34.
- [5] Klobučar, A., *On the  $k$ -dominating number of Cartesian products of two paths*. Math. Slovaca 55 (2005), No. 2, 141–154.
- [6] Meir A., Moon J.W., *Relations between packing and covering numbers of a tree*, Pacific J. Math. 61 (1975) 225–233.
- [7] Ore, Ø., *Theory of graphs*, American Mathematical Society, 1963.

*Ilán A. Goldfeder:*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Iztapalapa,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México

e-mail: igoldfeder@izt.uam.mx

*Nahid Yelene Javier Nol:*

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección

Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México

e-mail: [nahid@xanum.uam.mx](mailto:nahid@xanum.uam.mx)

*Lizzeth Ariadna Sánchez Solís:*

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Cuajimalpa,

División de Ciencias Naturales e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.

Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa

Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México

e-mail: [lizzeth.sanchez@cua.uam.mx](mailto:lizzeth.sanchez@cua.uam.mx)

## POLICÍAS Y LADRONES EN GRÁFICAS

SEBASTIÁN FRANCO MARTÍNEZ, AARÓN RODRÍGUEZ GONZÁLEZ PACHECO, RAÚL GONZÁLEZ PÉREZ, SAC-NICTÉ DAMAYANTI SALAS REYES Y MIGUEL TECPA-GALVÁN

RESUMEN. En este trabajo se estudió el juego de Policías y Ladrones en gráficas, el cual es un juego bipersonal por turnos en los que ambos jugadores mueven sus fichas a lo largo de los vértices de una gráfica y cuyo objetivo para el jugador policía es capturar las fichas del jugador ladrón, mientras que el objetivo de este último es evitar ser capturado. Se elaboró un análisis de este juego, proponiendo estrategias ganadoras para ambos jugadores, así como su relación con estructuras conocidas en gráficas, como los conjuntos dominantes. Finalmente, se estudia el juego en algunas operaciones de gráficas.

### 1. INTRODUCCIÓN

Un juego de *Policías y ladrón* en una gráfica  $G$  consiste en un juego bipersonal por turnos. Uno de los dos jugadores, al que llamaremos *Policía*, tiene a su disposición un conjunto de fichas colocadas en los vértices de  $G$ , los cuales representan policías; el segundo jugador llamado en lo consecutivo *Ladrón*, tiene una única ficha que representa un ladrón. El objetivo del juego es mover a los policías y al ladrón a lo largo de la gráfica por turnos. El jugador Policía gana el juego si es posible capturar a la ficha del ladrón, mientras que el jugador Ladrón gana si siempre es posible escapar de los policías.

Esta clase de juegos fueron introducidos en los años 80's por Nowakoski y Winkler [6] al considerar únicamente una ficha por cada jugador. Sin embargo, debido a sus aplicaciones en diversas áreas de ciencias de la computación, matemáticas discretas e inteligencia artificial, estos juegos se han refinado y adaptado a diversos escenarios, dando lugar a muchos resultados y definiciones relacionados con ellos, así como su estudio en diversas familias particulares de gráficas y gráficas dirigidas (véanse los libros [2] y [3] referentes a estos juegos).

Es importante mencionar que las reglas iniciales del juego determinan la complejidad del mismo y que una misma gráfica puede tener una estrategia ganadora para uno u otro jugador al hacer variar ligeramente las reglas del juego. Aunque nos basamos originalmente en los juegos propuestos en [1] y [6], para fines de este trabajo hicimos modificaciones y adecuaciones a la reglas originales con el objetivo de volver más general el juego. Dichas reglas son las siguientes.

1. Ambos jugadores conocen en todo momento la posición de todas las fichas y tienen conocimiento de la gráfica  $G$ .
2. Las fichas, tanto de policías como de ladrón, sólo se pueden mover hacia algún vértice adyacente al vértice en el que se encuentran.
3. El jugador Policía es el primero en colocar sus fichas en los vértices de la gráfica.
4. El jugador Ladrón moverá al empezar el juego.
5. En el turno del jugador Policía, este está obligado a mover al menos una de sus fichas, pero no es necesario que mueva todas ellas.
6. El jugador Ladrón siempre debe mover su ficha en su turno.
7. Si en algún turno al menos una de las fichas de policía está en el mismo vértice que la ficha del ladrón, entonces Policía gana. Si en ningún turno esto es posible, entonces Ladrón gana.

Debido a que el jugador Policía siempre puede ganar el juego si tiene suficientes fichas, definimos el *número de policía* de una gráfica  $G$ , denotado por  $p(G)$ , como el mínimo número de policías que se necesitan para que el jugador  $P$  tenga una estrategia ganadora. Si  $p(G) = 1$ , diremos que la gráfica es *de policía*. Si  $p(G) \geq 2$ , diremos que la gráfica es *de ladrón*.

En este trabajo exploraremos este juego de *Policías y ladrones* en algunas operaciones en gráficas, así como algunas cotas del número de policía de una gráfica con otros parámetros conocidos de la misma. Los resultados aquí expuestos fueron obtenidos por alumnos de diversas instituciones durante la semana del V Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas (TOMMAD), llevado a cabo en Mineral del Chico, Hidalgo, en junio de 2023.

## 2. CONCEPTOS BÁSICOS

Todas las gráficas consideradas en este trabajo son simples. Para definiciones y notación no especificadas aquí usaremos [4]. Dada una gráfica  $G$ , usaremos la notación  $V(G)$  y  $E(G)$  para el conjunto de vértices y aristas de  $G$ , respectivamente. Una gráfica es *vacía* si no tiene aristas. Si  $x \in V(G)$ , el conjunto de vecinos de  $x$  será denotada por  $N(x)$ , mientras que su *vecindad cerrada*  $N(x) \cup \{x\}$  será denotada por  $N[x]$ . Si  $S$  es un conjunto de vértices, la *vecindad de  $S$* , denotada por  $N(S)$  se define como  $(\cup_{x \in S} N(x)) \setminus S$ , mientras que la *vecindad cerrada de  $S$* , denotada por  $N[S]$ , se define como  $\cup_{x \in S} N[x]$ .

Dada una gráfica  $G$ , diremos que un conjunto de vértices es *independiente en  $G$*  si no hay dos vértices distintos en el conjunto que sean adyacentes. Al máximo número de vértices en un conjunto independiente le llamaremos el *número de independencia de  $G$*  y lo denotaremos por  $\alpha(G)$ . A un conjunto independiente con  $\alpha(G)$  elementos le llamaremos *máximo*. Un conjunto independiente, digamos  $S$ , es *maximal* si no está contenido propiamente en algún otro conjunto independiente. Si  $G$  es una gráfica, definimos el *número inferior de independencia de  $G$* , denotado como  $\alpha_i(G)$ , como  $\min\{|S| : S \text{ es un conjunto independiente maximal en } G\}$

Una *cubierta* en una gráfica  $G$  es un conjunto de vértices, digamos  $S$ , tales que toda arista de la gráfica tiene como extremo a uno de los vértices en  $S$ . Al mínimo número de vértices en una cubierta se le llama el número de cubiertas de  $G$  y se denota por  $\beta(G)$ .

Dada una gráfica  $G$  y  $D \subseteq V(G)$ , diremos que  $D$  es *dominante en  $G$*  si para todo  $x \in V(G) \setminus D$  existe  $w \in D$  tal que  $xw \in E(G)$ . Al cardinal del conjunto dominante más pequeño en  $G$  se le conoce como el *número de dominación de  $G$*  y se denota por  $\gamma(G)$ . Se sabe que en toda gráfica  $G$  se satisface que  $\gamma(G) \leq \alpha(G)$  y que si  $G$  no tiene vértices aislados, entonces  $\gamma(G) \leq \beta(G)$  (véase [5]).

Un *camino* en una gráfica es una sucesión de vértices  $C = (x_0, \dots, x_n)$  tales que vértices consecutivos son adyacentes. La *longitud* del camino, denotada por  $l(C)$ , se define como  $n$ . Si el camino no repite vértices, diremos que es una *trayectoria*. Si el primer y último vértice del camino son iguales y, salvo dichos vértices, no repite otros vértices, diremos que  $C$  es un *ciclo*. A un ciclo de longitud  $k$  le diremos  *$k$ -ciclo*.

Dado un natural no nulo  $n$ , la *gráfica trayectoria de longitud  $n$* , denotada por  $P_n$ , se define como la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $\{x_0, \dots, x_n\}$  y conjunto de aristas es  $\{x_i x_{i+1} : i \in \{0, \dots, n-1\}\}$ . Si  $n \geq 3$ , la *gráfica ciclo de longitud  $n$* , denotada por  $C_n$ , se define como la gráfica cuyo conjunto de vértices es  $\{x_0, \dots, x_n\}$  y conjunto de aristas es  $\{x_i x_{i+1} : i \in \{0, \dots, n\}\}$ , donde los índices son tomados módulo  $n$ .

Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas. La *unión de  $G$  y  $H$* , denotada por  $G \cup H$ , se define como la gráfica tal que  $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$  y  $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$ . Si además,  $G$  y  $H$  tienen al menos un vértice en común, entonces la *intersección de  $G$  y  $H$* , denotada por  $G \cap H$ , es la gráfica tal que  $V(G \cap H) = V(G) \cap V(H)$  y  $E(G \cap H) = E(G) \cap E(H)$ .

Dadas dos gráficas ajenas en vértices, digamos  $G$  y  $H$ , la *suma de  $G$  y  $H$* , denotada por  $G + H$ , es la gráfica definida por:  $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$  y  $E(G + H) = \{gh : g \in V(G), h \in V(H)\} \cup E(G) \cup E(H)$ .

Sean dos gráficas  $G$  y  $H$  ajenas en vértices. El *producto cartesiano de  $G$  y  $H$* , denotado por  $G \times H$ , es la gráfica tal que  $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$  y dos vértices, digamos  $(x, u)$  y  $(z, v)$  son adyacentes en  $G \times H$  si y sólo si:

- i)  $x = z$  y  $uv \in E(H)$  o
- ii)  $u = v$  y  $xz \in E(G)$

Dado un vértice  $x \in V(G)$ , el *nivel de  $x$  en  $G \times H$* , denotado por  $H_x$  es la subgráfica inducida en  $G \times H$  por el conjunto de vértices  $\{(u, v) \in V(G \times H) : u = x\}$ . Análogamente, si  $z \in V(H)$ , el *nivel de  $z$  en  $G \times H$* , denotado por  $G_z$  es la subgráfica inducida en  $G \times H$  por el conjunto de vértices  $\{(u, v) \in V(G \times H) : v = z\}$ . Un resultado conocido de la teoría establece que si  $x \in V(G)$ , entonces  $H_x$  es isomorfa a  $H$  y análogamente, si  $z \in V(H)$ , entonces  $G_z$  es isomorfa a  $G$ .

La *composición* de una gráfica  $G$  respecto de una familia de gráficas ajenas dos a dos, digamos  $\{H_v : v \in V(G)\}$ , y la cual será denotada por  $G[H_v]$ , es la gráfica tal que  $V(G[H_v]) = \cup_{v \in V(G)} V(H_v)$  y cuyo conjunto de aristas es

$$E(G[H_v]) = (\cup_{v \in V(G)} E(H_v)) \cup \{xz : x \in V(H_u), z \in V(H_v) \text{ y } uv \in E(G)\}$$

A la gráfica  $G$  le llamaremos *base de la composición*, mientras que si  $v \in V(G)$ , a la gráfica  $H_v$  le llamaremos *sumando de  $v$* .

Consideremos una gráfica  $G$  en la que está realizándose un juego de *Policías y ladrón*. Denotaremos por  $A_n$  al conjunto de vértices que tienen una ficha de Policía al final del  $n$ -ésimo turno y por  $r_n$  al vértice en el que está la ficha de Ladrón al final del  $n$ -ésimo turno. Para fines prácticos,  $A_0$  y  $r_0$  denotarán las posiciones iniciales de Policía y Ladrón, respectivamente. Cuando no es necesario especificar el turno, usaremos simplemente la notación  $C$  y  $r$ , respectivamente.

Nótese que Policía gana si y sólo si  $r_n \in A_n$  para algún natural  $n$ . También nótese que  $A_n = A_{n+1}$  cuando  $n$  es par (pues Policía no mueve sus fichas durante el turno  $n + 1$ ) y  $r_n = r_{n+1}$  cuando  $n$  es impar (pues Ladrón no mueve sus fichas durante el turno  $n + 1$ ).

### 3. PARÁMETROS CONOCIDOS EN GRÁFICAS

Los siguientes resultados fueron propuestos por algunos de los alumnos participantes en el TOMMAD 2023 mediante el uso de estructuras conocidas en gráficas.

LEMA 1. Si  $G$  es una gráfica, entonces  $p(G) \leq \alpha i(G)$ .

*Demostración.* Consideramos un conjunto independiente maximal de cardinalidad mínima, digamos  $S$ . El jugador Policía colocará una ficha en cada vértice de  $S$ , es decir,  $A_0 = S$ . En el turno de Ladrón, si  $r_1 \notin A_0$ , entonces  $r_1$  debe ser adyacente al menos a un vértice en  $A_1$ , pues dicho conjunto es independiente maximal. En tal caso, si  $x \in A_1$  es vecino de  $r_1$ , entonces Policía puede mover su ficha de  $x$  hacia  $r_1$  y capturar la ficha de Ladrón. Así, el jugador Policía tiene estrategia ganadora usando  $\alpha i(G)$  fichas, por lo que  $p(G) \leq \alpha i(G)$ .  $\square$

LEMA 2. Si  $G$  es una gráfica arbitraria, entonces  $p(G) \leq \gamma(G)$ .

*Demostración.* Sea  $D$  un conjunto dominante de cardinalidad mínima en  $G$  y supongamos que el jugador Policía coloca sus fichas en  $D$ , es decir,  $A_0 = D$ . En el turno de Ladrón, el vértice  $r_1$  es adyacente al menos a un vértice en  $A_1$ , digamos  $x$ . En tal caso, en el segundo turno el jugador Policía puede mover la ficha en  $x$  sobre  $r_1$  y capturar la ficha de Ladrón. Así, el jugador Policía tiene una estrategia ganadora usando  $\gamma(G)$  fichas, por lo que  $p(G) \leq \gamma(G)$ .  $\square$

COROLARIO 3. Si  $G$  es una gráfica sin vértices aislados, entonces

- a)  $p(G) \leq \beta(G)$  y

b)  $p(G) \leq \alpha(G)$ .

*Demostración.* Se sigue del lema 2 y del hecho de que  $\gamma(G) \leq \alpha(G)$  y que  $\gamma(G) \leq \beta(G)$  cuando  $G$  no tiene vértices aislados.  $\square$

Los siguientes resultados son familias de gráficas en las que Policía gana usando una única ficha.

LEMA 4. *Para todo  $l \geq 2$  se satisface que  $p(P_l) = 1$ .*

*Demostración.* Sea  $P_l = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ . Coloquemos un policía en  $v_0$  y en el  $i$ -ésimo turno de Policía, movemos su ficha del vértice  $v_{i-1}$  hacia  $v_i$ , de esta forma, con cada turno vamos restringiendo la subgráfica accesible para el Ladrón a una subgráfica  $P_{l-i}$ . De este modo, en a lo más  $l - 2$  turnos se logra atrapar al ladrón. Por tanto  $p(P_l) = 1$ .  $\square$

LEMA 5. *Si  $G$  es un árbol, entonces  $p(G) = 1$ .*

*Demostración.* Para esta demostración, basta ver que en cada turno de Policía, si  $(x_0, \dots, x_n)$  denota la única  $Cr$ -trayectoria en  $G$ , entonces Policía puede mover su ficha de  $x_0$  hacia  $x_1$ . Dado que  $G$  es un árbol, eventualmente Policía logra capturar a Ladrón con esta estrategia.  $\square$

En algunos casos, será necesario el uso de más de una ficha para que Policía tenga una estrategia ganadora.

LEMA 6. *Sea  $l \in \mathbb{N}$ . Si  $l = 3$ , entonces  $p(C_l) = 1$  y para todo  $l \geq 4$  se satisface que  $p(C_l) = 2$ .*

*Demostración.* Claramente, si  $l = 3$  se tiene que  $C_l$  es una gráfica completa con tres vértices, en la cual  $\gamma(C_l) = 1$ . Por el lema 2, se concluye que  $p(C_l) = 1$ . Ahora supongamos que  $l \geq 4$  y que  $C = (v_0, \dots, v_l)$ .

Coloquemos dos policías en vértices adyacentes, digamos  $A_0 = \{v_0, v_1\}$ . En el  $i$ -ésimo turno de Policía, este jugador moverá la ficha en el vértice  $v_i$  hacia  $v_{i+1}$ , mientras que la ficha colocada en  $v_0$  permanecerá fija. De esta forma el jugador Policía captura la ficha de Ladrón en a lo mucho  $l - 1$  de sus turnos, por lo que  $p(C_l) \leq 2$ .

Por otro lado, si Policía tiene una única ficha colocada en  $C_l$ , digamos en el vértice en  $v_k$ , el Ladrón puede colocar su ficha en  $v_{k+1}$ , donde los índices son tomados módulo  $l$ . En el primer turno Ladrón se mueve a  $v_{k+2}$ . Policía sólo se puede mover a  $v_{k+1}$  o a  $v_{k-1}$ . En el primer caso, Ladrón se puede mover a  $v_{k+3}$  o en el segundo caso hacia  $v_{k+1}$ . Nótese que como  $l \geq 4$ , entonces en cada turno de Ladrón se tiene que  $d(r, C) = 2$ , por lo que Ladrón tiene estrategia ganadora. Con ello,  $p(C_l) = 2$ .  $\square$

#### 4. ESTRATEGIAS GANADORAS

En esta sección veremos algunas estrategias ganadoras tanto para Ladrón como para Policía. Más aún, caracterizaremos las estrategias ganadoras de Ladrón y, con ello, podremos caracterizar las estrategias ganadoras de Policía.

**4.1. Sobre la estrategia ganadora de Ladrón.** Dada una gráfica  $G$  en la que se realiza un juego de *Policías y ladrones*, diremos que Ladrón *está seguro al inicio del  $n$ -ésimo turno* si (i)  $n$  es par y  $r_{n-1} \notin N[A_{n-1}]$  o (ii)  $n$  es impar y existe  $x \in N(r_{n-1})$  tal que  $x \notin N[A_{n-1}]$ . Notemos que la idea anterior refleja la noción de seguridad para Ladrón en el turno  $n$ .

LEMA 7. *Sea  $G$  una gráfica en el que se realiza un juego de Policía y ladrón. Si Ladrón está seguro al inicio del  $n$ -ésimo turno, entonces existe una manera de jugar de tal forma que en el siguiente movimiento de Policía, este no puede capturar la ficha de Ladrón.*

*Demostración.* Es importante recordar que  $r_{n-1}$  indica el vértice en el que se encuentra la ficha de Ladrón al inicio del turno  $n$  y  $A_{n-1}$  es el conjunto de vértices en los que están las fichas de Policía al inicio del turno  $n$ . Análogamente  $r_n$  indica el vértice en el que se encuentra la ficha de Ladrón al final del turno  $n$  y  $A_n$  es el conjunto de vértices en los que están las fichas de Policía al final del turno  $n$ . La demostración la realizaremos por casos respecto a  $n$ .

■ **Caso 1.**  $n$  es par.

En este caso, el jugador que debe mover en el turno  $n$  es Policía. Ya que Ladrón está seguro al inicio de este turno, entonces  $r_{n-1} \notin N[A_{n-1}]$ , por lo que sin importar el movimiento de Policía, no es posible que  $r_n \in A_n$ , concluyendo que Policía no puede capturar la ficha de Ladrón en el turno  $n$ .

■ **Caso 2.**  $n$  es impar.

En este caso, el jugador que debe mover en el turno  $n$  es Ladrón. Como Ladrón está seguro al inicio de este turno, entonces existe  $x \in N(r_{n-1})$  tal que  $x \notin N[A_{n-1}]$ . Si movemos en este turno la ficha de Ladrón hacia el vértice  $x$  entonces  $r_n = x$  y, en particular, por elección de  $x$ ,  $r_n \notin N[A_n]$ . Debido a que  $n + 1$  es par, Policía debe mover en este turno, pero por lo mostrado en el caso anterior, Policía no puede capturar durante su turno a la ficha de Ladrón.

Por los casos antes mencionados, existe una manera de jugar de Ladrón de tal forma que en el siguiente movimiento de Policía, este no puede capturar la ficha de Ladrón.  $\square$

Con lo anterior podemos caracterizar la estrategia ganadora de Ladrón mediante la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 8.** *Sea  $G$  una gráfica en el que se realiza un juego de Policías y ladrón. Ladrón tiene una estrategia ganadora si y sólo si Ladrón puede estar seguro al inicio de cualquier turno.*

*Demostración.* Si Ladrón está seguro al inicio de cualquier turno, es claro que, por el lema 7, se sigue que Ladrón tiene una estrategia ganadora, por lo que mostraremos que si Ladrón tiene una estrategia ganadora, es porque está seguro al inicio de cualquier turno.

Consideremos un turno arbitrario  $n$  y dos posibles casos para  $n$ .

■ **Caso 1.**  $n$  es par.

En este caso, el jugador que debe mover es Policía. Suponiendo que Ladrón ha jugado usando su estrategia ganadora, no es posible que al final de este turno Policía capture la ficha de Ladrón, ello implica que al inicio de este turno  $r_{n-1}$  no puede estar ocupada por una ficha de Policía, es decir,  $r_{n-1} \notin A_{n-1}$  y, además, no puede ser vecina de ninguna ficha de Policía pues de lo contrario, Policía puede capturarlo en ese turno, por lo que  $r_{n-1} \notin N(A_{n-1})$ , concluyendo que  $r_{n-1} \notin N[A_{n-1}]$ .

■ **Caso 2.**  $n$  es impar.

En este caso, el jugador que debe mover es Ladrón. Debido a que Ladrón tiene una estrategia ganadora, existe un vecino de  $r_{n-1}$ , digamos  $w$ , hacia la cual puede mover su ficha de tal manera que: (i) Policía no captura a la ficha de Ladrón al final del turno  $n$  y (ii) Policía no puede atrapar la ficha de Ladrón al final del turno  $n + 1$ . Así, por (i) podemos garantizar que  $w \notin A_{n-1}$  y por (ii) se sigue que  $w \notin N(A_{n-1})$ . Con ello,  $w$  es un vecino de  $r_{n-1}$  tal que  $w \notin N[A_{n-1}]$ .

De los casos anteriores, y por definición, se concluye que Ladrón está a salvo al inicio del  $n$ -ésimo turno. Como  $n$  fue arbitrario, concluimos nuestra demostración.  $\square$

Como una aplicación de la proposición anterior se tiene el siguiente resultado.

**COROLARIO 9.** *Si  $G$  es una gráfica sin 3-ciclos y sin 4-ciclos, entonces se satisface que  $p(G) \geq \delta(G)$ .*

*Demostración.* Primero mostraremos la siguiente afirmación

- **Afirmación 1.** Si  $S$  es un conjunto de vértices con menos de  $\delta(G)$  elementos, entonces para todo  $x \in V(G)$ ,  $N(x) \not\subseteq N[S]$ .

Procederemos por contradicción y supondremos que  $N(x) \subseteq N[S]$ . Sean  $w_1, \dots, w_n$  los vecinos de  $x$  que se encuentran en  $N(S)$  y  $w'_1, \dots, w'_m$  los vecinos de  $x$  en  $S$ . Nótese que  $\delta(G) \leq n + m$ . Ahora, por definición de  $N[S]$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  existe  $t_i \in S$  tal que  $w_i t_i \in E(G)$ . Notemos que, como  $G$  no tiene 3-ciclos, entonces para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $j \in \{1, \dots, m\}$  se cumple que  $t_i \neq w'_j$ . Más aún, como  $G$  no tiene 4-ciclos, entonces para toda  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  se tiene que  $t_i \neq t_j$  si  $i \neq j$ . Con lo anterior, podemos concluir que  $t_1, \dots, t_n, w_1, \dots, w_m$  son vértices distintos en  $S$ , por lo que  $n + m \leq |S|$ , sin embargo, por suposición sabemos que  $|S| < \delta(G)$ , lo cual no es posible pues  $\delta(G) \leq n + m$  como habíamos hecho notar. Así podemos concluir que para todo  $x \in V(G)$ ,  $N(x) \not\subseteq N[S]$ .

Retomando la demostración del corolario, supongamos que Policía tiene menos de  $\delta(G)$  fichas en juego y mostraremos que Ladrón tiene una estrategia ganadora mediante el uso de la proposición 8. Al inicio del juego, como  $A_0$  tiene menos de  $\delta(G)$  elementos, entonces la afirmación 1 implica, en particular, que  $V(G) \neq N[A_0]$ , por lo que existe un vértice  $x$  para el cual  $x \notin N[A_0]$ . Ladrón colocará su ficha en  $x$  para iniciar el juego. Note que, por la afirmación 1, podemos considerar un vecino de  $x$ , digamos  $x'$ , tal que  $x' \notin N[A_0]$ . Así Ladrón está a salvo al inicio del turno 1 y puede mover su ficha de  $x$  hacia  $x'$ . Con ello,  $r_1 = x'$  y como Policía no mueve sus fichas en este turno, entonces  $A_1 = A_0$ , así, en el turno 2 se tiene que  $r_1 \notin N[A_1]$ , por lo que Ladrón está seguro al inicio del turno 2.

Nuevamente, por la afirmación 1, se tiene que  $x'$  tiene un vecino, digamos  $x''$  tal que  $x'' \notin N[A_1]$ , por lo que Ladrón está seguro al inicio del turno 3 y desplazando su ficha de  $x'$  hacia  $x''$ , estará seguro al inicio del turno 4. Continuando de esta manera podemos concluir, gracias a la proposición 8, que Ladrón tiene una estrategia ganadora si Policía tiene menos de  $\delta(G)$  fichas, por lo que  $\delta(G) \leq p(G)$ .  $\square$

**4.2. Sobre la estrategia ganadora de Policía.** A pesar de que la proposición 8 caracteriza la estrategia ganadora de Ladrón y, por consiguiente, a la estrategia ganadora de Policía, nosotros propondremos la caracterización de la estrategia de Policía de una manera más intuitiva pensando que, si a partir de cierto turno, Policía puede aproximar cada vez más sus fichas hacia Ladrón, entonces éste último terminará siendo capturado. Con esto en mente, tenemos la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 10.** *Sea  $G$  una gráfica en el que se realiza un juego de Policía y ladrón. Policía tiene una estrategia ganadora si y solo si existe un turno  $n$  a partir del cual existe una manera de jugar de Policía de tal forma que para toda  $m \geq n$ ,  $d(r_{m+1}, A_{m+1}) < d(r_m, A_m)$ .*

*Demostración.* Primero mostraremos que si Policía tiene una estrategia ganadora, entonces a partir de cierto turno  $n$  existe una manera de jugar de Policía de tal forma que si  $m \geq n$ ,  $d(r_{m+1}, A_{m+1}) < d(r_m, A_m)$ . Debido a que Policía tiene una estrategia ganadora, éste logra capturar a la ficha de Ladrón en algún turno  $k$ . Notemos que en dicho caso,  $r_k \in A_k$  y por consiguiente,  $d(r_k, A_k) = 0$ . Sin embargo, en el turno anterior Policía aún no había capturado la ficha de Ladrón, por lo que  $r_{k-1} \notin A_{k-1}$ , es decir,  $d(r_{k-1}, A_{k-1}) \neq 0$ . En particular,  $d(r_k, A_k) < d(r_{k-1}, A_{k-1})$ , mostrando lo deseado.

Ahora mostraremos la otra condicional. Para ello, como existe un turno  $n$  a partir del cual hay una manera de jugar de Policía tal que  $d(r_{m+1}, A_{m+1}) < d(r_m, A_m)$  si  $m \geq n$ , se tiene que a lo mucho en una cantidad finita de pasos obtenemos que  $d(r_t, A_t) = 0$  para alguna  $t \geq n$ , por lo que si Policía juega de dicha manera, gana el juego.  $\square$

## 5. OPERACIONES EN GRÁFICAS

En esta última sección abordaremos el juego de Policías y Ladrón en algunas operaciones de gráficas.

## 5.1. Unión de gráficas.

PROPOSICIÓN 11. Si  $G$  y  $H$  son dos gráficas ajenas en vértices, entonces se satisface que  $p(G \cup H) = p(G) + p(H)$ .

*Demostración.* Primero mostraremos que  $p(G \cup H) \leq p(G) + p(H)$ . Para ello el jugador Policía colocará  $p(G) + p(H)$  fichas en  $G \cup H$  poniendo  $p(G)$  fichas en  $G$  y  $p(H)$  fichas en  $H$ . Debido a que Ladrón sólo puede colocar su ficha en  $G$  o en  $H$ , entonces Policía tiene una estrategia ganadora en la gráfica que Ladrón ponga su ficha, por lo que bastan  $p(G) + p(H)$  fichas de Policía para que este tenga una estrategia ganadora y así  $p(G \cup H) \leq p(G) + p(H)$ .

Ahora mostraremos que no es posible que  $p(G \cup H) < p(G) + p(H)$ . Supongamos que Policía tiene menos de  $p(G) + p(H)$  fichas en  $G \cup H$ . Dado que Policía coloca primero sus fichas, entonces en  $G$  o en  $H$  debe haber menos de  $p(G)$  fichas o menos de  $p(H)$  fichas, respectivamente. Supongamos sin pérdida de generalidad que Policía tiene menos de  $p(G)$  fichas en  $G$ . En tal caso, Ladrón puede colocar su ficha en  $G$  y realizar todo el juego solamente en dicha gráfica.

Debido a que en  $G$  hay menos de  $p(G)$  policías, Ladrón tiene una estrategia ganadora en  $G$ , la cual también es una estrategia ganadora en  $G \cup H$ . Así, Policía no tiene una estrategia ganadora en  $G \cup H$  usando menos de  $p(G) + p(H)$  fichas, por lo que  $p(G \cup H) = p(G) + p(H)$ .  $\square$

Como una consecuencia directa de lo anterior, tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 12. Sean  $G$  una gráfica y  $\{H_i\}_{i=1}^k$  la familia de sus componentes conexas. El número de policía de  $G$  está determinado por:

$$p(G) = \sum_{i=1}^k p(H_i).$$

*Demostración.* Para esta demostración procederemos por inducción sobre el número de componentes conexas de la gráfica. Si  $G$  tiene una única componente conexa, entonces  $G = H_1$  y con ello  $p(G) = \sum_{i=1}^1 p(H_i)$ .

Ahora supondremos que si  $G'$  es una gráfica con  $n$  componentes conexas  $H'_1, \dots, H'_n$ , entonces  $p(G') = \sum_{i=1}^n p(H'_i)$ . Para el paso inductivo consideremos una gráfica con  $n+1$  componentes conexas  $H_1, \dots, H_{n+1}$ . Si consideramos la gráfica  $G'$  que consta de las componentes conexas  $H_1, \dots, H_n$ , entonces por hipótesis de inducción sobre  $G'$  se tiene que  $p(G') = \sum_{i=1}^n p(H_i)$ . Luego, por la proposición 11 se sigue que

$$\begin{aligned} p(G' \cup H_{n+1}) &= \sum_{i=1}^n p(H_i) + p(H_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} p(H_i) \end{aligned}$$

Pero  $G = G' \cup H_{n+1}$ , concluyendo que  $p(G) = \sum_{i=1}^{n+1} p(H_i)$ .  $\square$

Ahora analizaremos el juego en la unión de gráficas que no son ajeas en vértices.

PROPOSICIÓN 13. Si  $G$  y  $H$  son dos gráficas conexas con al menos un vértice en común, entonces:

$$p(G \cup H) \leq \max\{p(G), p(H)\} + |V(G) \cap V(H)|$$

*Demostración.* Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas conexas con al menos un vértice en común. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $p(G) \geq p(H)$ , y sea  $k = |V(G) \cap V(H)|$ . Para la estrategia de Policía colocamos  $p(G)$  policías en  $G$  y luego ponemos  $k$  policías en los vértices de la intersección de  $G$  y  $H$ . Estas últimas fichas no se moverán a lo largo del juego, de este modo podemos asegurar que Ladrón no se podrá colocar en

algún vértice de la intersección y que se quedará restringido a moverse en la subgráfica  $G$  o en  $H$ .

Si Ladrón se posiciona en  $G$ , podemos usar los  $p(G)$  policías para capturarlo. Si Ladrón coloca su ficha en  $H$ , podemos mover sólo  $p(H)$  de las  $p(G)$  fichas de Policía colocadas en  $G$  hacia  $H$  y usar la estrategia ganadora de Policía en  $H$  para capturar al ladrón. Así Policía tiene una estrategia ganadora en  $G \cup H$  usando  $p(G) + k$  fichas, concluyendo que  $p(G \cup H) \leq \max\{p(G), p(H)\} + |V(G) \cap V(H)|$ .  $\square$

Es importante señalar que la desigualdad anterior no necesariamente es justa. Por ejemplo, si  $G$  y  $H$  son árboles con un único vértice en común, entonces la proposición 13 indicaría que  $p(G \cup H) \leq 2$ . Sin embargo, como  $G \cup H$  es un árbol, entonces  $p(G \cup H) = 1$ , mostrando la desigualdad estricta de la proposición anterior.

Más aún, bajo ciertas condiciones, podemos mejorar la cota anterior.

**PROPOSICIÓN 14.** *Si  $G$  y  $H$  son dos gráficas conexas con al menos un vértice en común tales que  $G \cap H$  tiene un vértice dominante, entonces:*

$$p(G \cup H) \leq \max\{p(G), p(H)\} + 1$$

*Demostración.* Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas conexas y no ajenas tal que  $p(G) \geq p(H)$  y  $v$  un vértice dominante en  $G \cap H$ . Para la estrategia ganadora de Policía colocamos un policía en  $v$ , el cual no se moverá en todo el juego. De este modo restringimos al ladrón a moverse sólo en  $G$  o en  $H$  pues al intentar moverse de  $G$  hacia  $H$  o al revés, sería atrapado por el policía que se encuentra en  $v$ .

Al igual que en la proposición anterior, si el ladrón se posiciona en  $G$ , podemos usar los  $p(G)$  policías para capturarlo. Si Ladrón coloca su ficha en  $H$ , podemos mover sólo  $p(H)$  de las  $p(G)$  fichas de Policía colocadas en  $G$  hacia  $H$  y usar la estrategia ganadora de Policía en  $H$  para capturar al ladrón. Así Policía tiene una estrategia ganadora en  $G \cup H$  usando  $p(G) + 1$  fichas, concluyendo que  $p(G \cup H) \leq \max\{p(G), p(H)\} + 1$ .  $\square$

## 5.2. Suma de gráficas.

**PROPOSICIÓN 15.** *Si  $G$  y  $H$  son dos gráficas, entonces  $p(G + H) \leq 2$ .*

*Demostración.* Por definición de suma de gráficas, cualquier vértice en  $H$  domina a  $G$  y cualquier vértice en  $G$  domina a  $H$ , por lo que  $\gamma(G + H) \leq 2$ . Por el lema 2, se tiene que  $p(G + H) \leq \gamma(G + H)$ , concluyendo que  $p(G + H) \leq 2$ .  $\square$

Es importante mencionar que la cota anterior puede ser justa en algunos casos, como en el siguiente lema.

**LEMA 16.** *Si  $G$  y  $H$  son ciclos de longitud al menos 4, entonces  $p(G + H) = 2$ .*

*Demostración.* Procederemos por contradicción y supondremos que  $p(G + H) = 1$  y, sin pérdida de generalidad, Policía coloca su única ficha en  $G$ . Ladrón puede colocar también su única ficha en  $G$  de tal modo que tenga una estrategia ganadora en  $G$ . Si Policía mueve su ficha dentro de  $G$ , entonces Ladrón puede mover su ficha en  $G$  siguiendo su estrategia ganadora. Si Policía mueve su ficha de  $G$  hacia  $H$ , Ladrón puede mover su ficha también hacia  $H$  de tal forma que se mantenga a distancia 2 de la ficha de Policía. La situación en el caso de que Policía mueva su ficha en  $H$  o que la mueva de  $H$  hacia  $G$  puede ser resuelta por Ladrón de manera análoga y garantizar que su ficha no sea capturada. Con ello, Policía no puede capturar a Ladrón.  $\square$

De igual forma, la cota del lema 15 puede ser estricta bajo ciertas circunstancias.

**LEMA 17.** *Sean  $G$  y  $H$  gráficas. Si  $G$  o  $H$  tiene un vértice dominante, entonces  $p(G + H) = 1$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $v \in V(G)$  es dominante en  $G$ . Notemos que  $\{v\}$  es un conjunto dominante de  $G + H$ , por lo que de acuerdo al lema 2,  $p(G + H) \leq \gamma(G + H) = 1$ . Por tanto  $p(G + H) = 1$ .  $\square$

### 5.3. Composición.

PROPOSICIÓN 18. Sean  $G$  una gráfica conexa no trivial y  $\{H_v : v \in V(G)\}$  una familia de gráficas ajenas dos a dos. Si  $G$  es una gráfica de policías, entonces  $p(G[H_v]) \leq 2$ .

*Demostración.* Para esta probar este resultado mostraremos una estrategia ganadora para Policía usando sólo dos fichas de Policía a las que llamaremos  $x_G$  y  $z_G$ . Dado que Policía tiene en  $G$  una estrategia ganadora con una sola ficha, dicha estrategia en  $G$  inicia colocando una ficha de Policía, digamos  $x$ , en un vértice  $w$ . Así, considerando ahora la gráfica  $G[H_v]$ , colocaremos a  $x_G$  en cualquier vértice de  $H_w$ .

La idea del vértice  $x_G$  en  $G[H_v]$  será replicar los movimientos de la estrategia ganadora de  $x$  en  $G$ , es decir, si parte de la estrategia en  $G$  es mover la ficha  $x$  de un vértice  $r$  hacia un vértice  $s$ , entonces Policía replicará esta estrategia moviendo a  $x_G$  de algún vértice de  $H_r$  hacia cualquier vértice de  $H_s$ .

La segunda ficha  $z_G$  la colocaremos en cualquier vértice de la gráfica  $H_{w'}$ , donde  $w'$  es cualquier vecino de  $w$  en  $G$ . Esta ficha, en el turno  $n + 2$ , siempre se moverá a la posición que tenía la ficha  $x_G$  en el turno  $n$ . Notemos que esto siempre será posible por la definición de  $G[H_v]$  y la posición inicial de  $z_G$ .

Nótese que, con esta estrategia las fichas de Policía, en cada turno, estarán colocadas en dos subgráficas distintas  $H_s$  y  $H_t$ , pero con la peculiaridad de que  $s$  y  $t$  son vecinos en  $G$ . Así, la ficha de Ladrón no puede estar en una subgráfica  $H_s$  si  $x_G$  está en dicha subgráfica, pues en el siguiente turno sería capturada por la ficha  $z_G$ . Análogamente Ladrón no puede colocar su ficha en  $H_s$  si  $z_G$  está en dicha subgráfica.

Si en un turno  $n$  Ladrón mueve su ficha de una subgráfica  $H_s$  hacia otra subgráfica  $H_t$  ( $s \neq t$ ) en  $G[H_v]$ , puede pensarse como una jugada que Ladrón realiza al mover una ficha de  $s$  hacia  $t$  en la gráfica  $G$ . En tal caso, en el turno  $n + 1$  Policía puede mover su ficha  $x_G$  replicando su estrategia ganadora en  $G$  y asegurar que la distancia de sus fichas hacia la ficha de ladrón en  $G[H_v]$  se reduce (proposición 10).

Por otro lado, si en el turno  $n$  Ladrón mueve su ficha colocada en algún vértice de  $H_r$  hacia otro vértice de  $H_r$ , entonces en el turno  $n + 1$  Policía moverá su ficha  $x_G$  de tal forma que reduzca su distancia respecto a la ficha de Ladrón en  $G[H_v]$ . En cualquier caso, gracias a la proposición 10, se tiene que Policía tiene una estrategia ganadora en  $G[H_v]$ .  $\square$

Es importante recalcar que la cota superior de la proposición anterior puede ser justa. En el caso de que  $G$  sea la gráfica completa de orden 2 y  $\{H_v : v \in V(G)\}$  es una familia de ciclos de longitud 4, entonces el lema 16 nos garantiza que  $G[H_v]$  no es una gráfica de policía y, en particular,  $p(G[H_v]) = 2$ .

Con la idea de la proposición 18 en mente, se realizó un estudio del comportamiento de la estrategia ganadora de Policía en la composición de gráficas cuando la base  $G$  no necesariamente es de policía. A partir de dicho estudio se conjeturó de manera inicial que se requerían a lo mucho  $p(G) + 1$  policías para obtener una estrategia ganadora en la composición. Sin embargo, no se logró obtener una demostración formal de dicha idea, por lo que tenemos el siguiente problema abierto.

PROBLEMA ABIERTO 1. Si  $G$  es una gráfica y  $\{H_v : v \in V(G)\}$  es una familia de gráficas ajenas en vértices dos a dos, entonces  $p(G[H_v]) \leq p(G) + 1$ .

**5.4. Producto cartesiano.** En el caso del producto cartesiano de dos gráficas, digamos  $G$  y  $H$ , se usó fuertemente que los niveles son isomorfos a  $G$  o  $H$ . Así, un juego de Policía y Ladrón se está realizando en  $G \times H$  puede verse como un juego simultáneo en las dos gráficas  $G$  y  $H$ .

Por ejemplo, si la ficha de Ladrón está en un vértice  $(x, u)$ , entonces dicha ficha sólo se podrá mover a algún vecino de dicho vértice, digamos  $(z, v)$ . Según la definición de producto cartesiano hay dos posibilidades. Si  $x$  y  $z$  son vecinos en  $G$ , entonces la jugada de Ladrón en  $G \times H$  puede interpretarse como si Ladrón hubiera movido su

ficha en  $G$  de  $x$  hacia  $z$ . Análogamente, si  $u$  y  $v$  son vecinos en  $H$ , entonces la jugada de Ladrón en  $G \times H$  puede interpretarse como si hubiese movido su ficha de  $u$  hacia  $v$  en  $H$ . La situación con las jugadas de Policía son análogas.

PROPOSICIÓN 19. Si  $n, m \in \mathbb{N}$ , entonces  $p(P_n \times P_m) \leq 2$

*Demostración.* Supongamos que  $P_n = (x_0, \dots, x_n)$  y que  $P_m = (z_0, \dots, z_m)$ . Para fines de simplificar notación, denotamos a  $P_n$  como  $G$  y a  $P_m$  como  $H$ . Mostraremos que con dos fichas el jugador Policía tiene una estrategia ganadora.

Iniciamos colocando una ficha de Policía, digamos  $C_1$ , en  $(x_0, z_0)$  y la otra ficha  $C_2$  en  $(x_n, z_m)$ . Dado que Policía tendrá estrategia ganadora, será indistinto dónde coloque Ladrón su ficha. Primero, Policía moverá  $C_1$  recorriendo el nivel  $H_{x_0}$  (el cual es isomorfo a  $P_m$ ) hasta que  $C_1$  esté en el mismo nivel  $G_{z_i}$  que la ficha de Ladrón, a la que llamaremos  $r$ . A partir de este punto, si Ladrón mueve su ficha de un nivel  $G_{z_k}$  hacia  $G_{z_{k'}}$ , entonces Policía moverá igualmente su ficha  $C_1$  en la misma dirección para garantizar que  $C_1$  y  $r$  estén siempre en el mismo nivel isomorfo a  $G$ . En otro caso, no moverá a la ficha  $C_1$ , pero sí deberá mover la ficha  $C_2$  (es importante tener en consideración la regla 5 del juego) como lo indicaremos a continuación. Una vez que  $C_1$  y  $r$  están en el mismo nivel  $G_{z_i}$ , Policía empezará a mover su ficha  $C_2$  recorriendo el nivel  $G_{z_m}$  (el cual es isomorfo a  $P_n$ ) hasta que  $C_2$  y  $r$  estén en el mismo nivel isomorfo a  $H$ .

En resumen, es posible que en algún turno del juego la ficha  $C_1$  y  $r$  estén en el mismo nivel  $G_{z_i}$  y simultáneamente  $C_2$  y  $r$  estén en el mismo nivel  $H_{x_j}$ . A esta propiedad la llamaremos *propiedad de permanencia*.

Esto último, intuitivamente hablando, podemos verlo como que Ladrón tiene su ficha  $r$  en el vértice  $x_j$  de la gráfica  $G$  y Policía tiene su ficha  $C_1$  en  $x_0$  de dicha gráfica. Y simultáneamente Ladrón tiene su ficha  $r$  en  $z_i$  de la gráfica  $H$  y Policía tiene su ficha  $C_2$  en  $z_m$  de dicha gráfica.

En este punto, Policía moverá sus fichas de acuerdo a lo siguiente:

Si  $r$  está en un vértice  $(x_j, z_i)$  y se mueve hacia  $(x_{j'}, z_i)$ , es decir, se mueve dentro del nivel  $G_{z_i}$ , entonces Policía moverá su ficha  $C_1$  dentro del nivel  $G_{z_i}$  aproximándose a  $r$  y reduciendo o manteniendo la distancia entre  $C_1$  y  $r$  en  $G_{z_i}$  (esto es lo mismo que una jugada de Policía y Ladrón en la gráfica  $G$ , donde Policía tiene estrategia ganadora). Además, Policía moverá su ficha  $C_2$  hacia el mismo nivel  $H_{x_{j'}}$ , al que Ladrón movió su ficha. Esto garantiza que la distancia entre  $C_2$  y  $r$  se mantiene y, además, estas nuevas posiciones de las fichas tienen la propiedad de permanencia.

De manera análoga, si  $r$  se mueve hacia  $(x_j, z_{i'})$ , es decir, se mueve dentro del nivel  $H_{x_j}$ , entonces Policía moverá su ficha  $C_2$  dentro del nivel  $H_{x_j}$  aproximándose a  $r$  y reduciendo o manteniendo la distancia entre  $C_2$  y  $r$  en  $H_{x_j}$  (esto es lo mismo que una jugada de Policía y Ladrón en la gráfica  $H$ , donde Policía tiene estrategia ganadora). Además, Policía moverá su ficha  $C_1$  hacia el mismo nivel  $H_{z_{i'}}$ , al que Ladrón movió su ficha. Esto garantiza que  $C_1$  y  $r$  mantienen su distancia y, además, que las posiciones de las fichas tienen la propiedad de permanencia.

Notemos que las jugadas anteriores de policía nos garantizan que se preserva la propiedad de permanencia, pero en cada turno de Policía, sus fichas reducen o conservan su distancia respecto de  $r$ . Sin embargo, con esta estrategia, a partir de cierto punto la ficha  $r$  sólo podrá moverse en el nivel  $G_{z_0}$  o en el nivel  $H_{x_n}$  y eventualmente ser capturado a lo más en el vértice  $(x_n, z_0)$ .  $\square$

Con la idea de la proposición 19 conjeturamos que se requerían a lo mucho  $p(G) + p(H)$  policías para obtener una estrategia ganadora en el producto cartesiano de  $G$  y  $H$ , pero por cuestiones de tiempo no se logró obtener una demostración formal de dicha idea, por lo que tenemos el siguiente problema abierto.

PROBLEMA ABIERTO 2. Si  $G$  y  $H$  son gráficas conexas y ajenas en vértices, entonces  $p(G \times H) \leq p(G) + p(H)$ .

**AGRADECIMIENTOS.** Los autores desean agradecer a los coordinadores del V Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas por el espacio y los recursos puestos a disposición para la elaboración del trabajo presentado, así como la oportunidad para el acercamiento a alumnos de licenciatura a temas de investigación en Matemáticas Discretas. Además, se agradece el apoyo de CONAHCYT mediante el proyecto CB-47510664. Miguel Tecpa-Galván está realizando una estancia posdoctoral en la Universidad Autónoma Metropolitana en el proyecto CONAHCYT FORDECYT-PRONACES/39570/2020.

#### REFERENCIAS

- [1] M. Aigner & M. Fromme. *A game of cops and robbers*, Discrete. App. Math., 8, no. 1, 1–11, 1984.
- [2] A. Bonato. *An invitation to Pursuit-Evasion Games and Graph Theory*. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 2022.
- [3] A. Bonato & R.J. Nowakowski. *The game of Cops and Robbers in Graphs*. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 2022.
- [4] G. Chartrand & P. Zhang. *Chromatic Graph Theory*. Discrete Math. Appl., CRC Press. Boca Raton, Florida, 2009.
- [5] W. Haynes, S. Hedetniemi & P. Slater. *Fundamentals of domination in graphs*. CRC Press. Boca Raton, Florida, 1998.
- [6] R. Nowakowski & P. Winkler, *Vertex-to-vertex pursuit in a graph*, Discrete Math., 43, 2-3, 235–239, 1983.

*Sebastián Franco Martínez:*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
 Unidad Cuajimalpa,  
 División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
 Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.  
 Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
 Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México  
 e-mail: [sebastian.franco@cua.uam.mx](mailto:sebastian.franco@cua.uam.mx)

*Aarón Rodríguez González Pacheco*

Universidad Nacional Autónoma de México,  
 Facultad de Ciencias.  
 Circuito de la Investigación Científica, Ciudad Universitaria  
 Alcaldía Coyoacán, C.P. 04510 Ciudad de México, México  
 e-mail: [aaronrgrp@ciencias.unam.mx](mailto:aaronrgrp@ciencias.unam.mx)

*Raúl González Pérez*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
 Unidad Cuajimalpa,  
 División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
 Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.  
 Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
 Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México  
 e-mail: [raul.gonzalez@cua.uam.mx](mailto:raul.gonzalez@cua.uam.mx)

*Sac-Nicté Damayanti Salas Reyes*

Universidad Nacional Autónoma de México,  
 Facultad de Ciencias.  
 Investigación Científica, Ciudad Universitaria  
 Alcaldía Coyoacán, C.P. 04510 Ciudad de México, México  
 e-mail: [nictesalas@ciencias.unam.mx](mailto:nictesalas@ciencias.unam.mx)

*Miguel Tecpa-Galván*

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección

Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México

e-mail: miguel.tecpa@ciencias.unam.mx