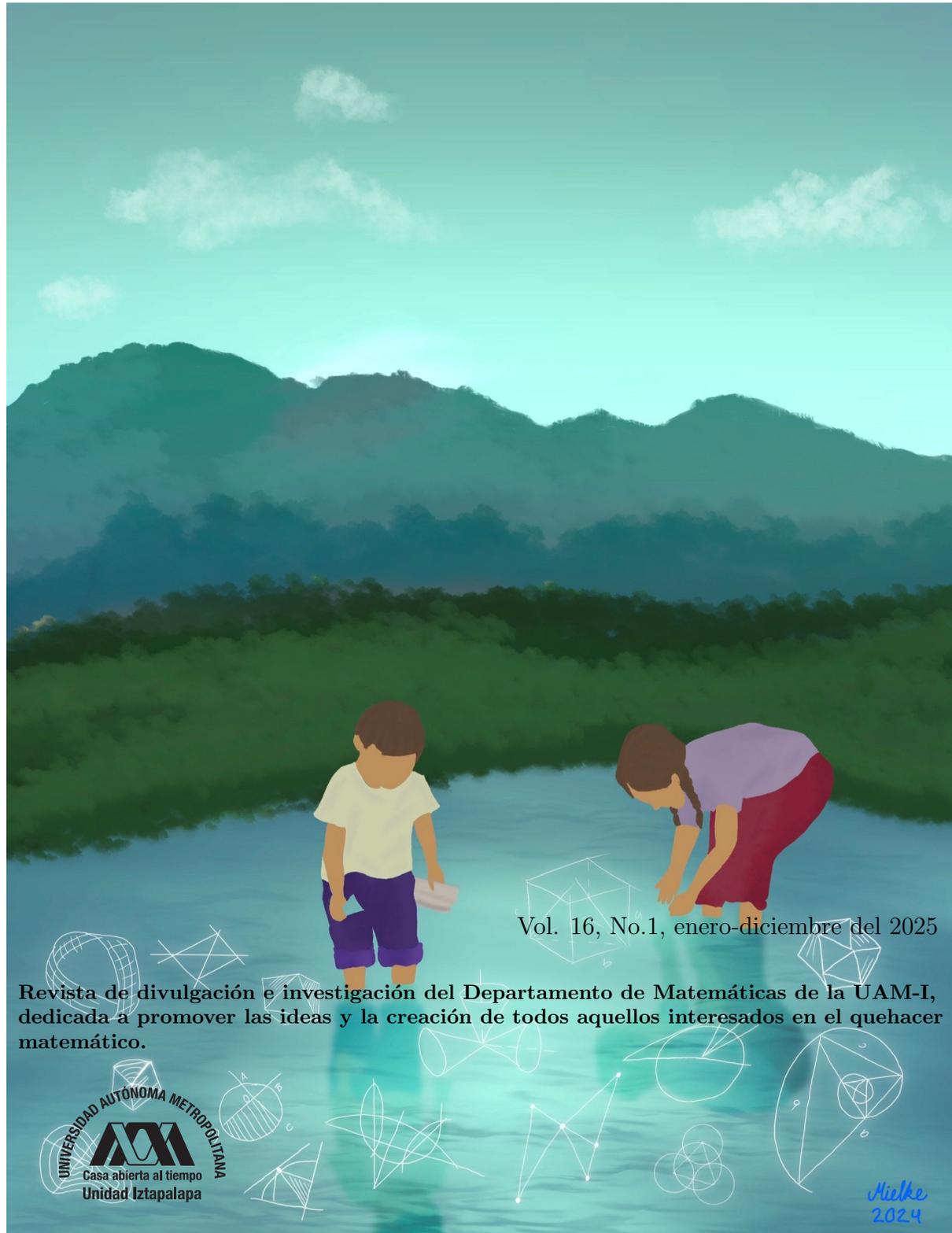


mixba'al

Revista Metropolitana de Matemáticas

www.doi.org/1024275/uami/dcbi/mix/V16n1/2025 ISSN: 2007-7874



Vol. 16, No.1, enero-diciembre del 2025

Revista de divulgación e investigación del Departamento de Matemáticas de la UAM-I, dedicada a promover las ideas y la creación de todos aquellos interesados en el quehacer matemático.



Mielke
2024



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Directorio

Gustavo Pacheco López
Rector General.

Verónica Medina Bañuelos
Rectora Unidad Iztapalapa.

Román Linares Romero
Director de CBI, UAM-Iztapalapa.

Raúl Montes de Oca Machorro
Jefe del Departamento de Matemáticas,
UAM-Iztapalapa.

Coordinador Editorial
Mario Pineda Ruelas
mpr@xanum.uam.mx

Comité Editorial

Elsa Baez Juárez
ebaez@cua.uam.mx

Jorge Bolaños Servín
jrbs@xanum.uam.mx

Shirley Bromberg Silverstein
sbsster@gmail.com

Judith Campos Cordero
judith@ciencias.unam.mx

Martín Celli Siboni,
celli@xanum.uam.mx

Pedro L. del Ángel Rodríguez
luis@cimat.mx

Begoña Fernández
bff@ciencias.unam.mx

Silvia Gavito Ticozzi
sgt@correo.azc.uam.mx

L. Héctor Juárez Valencia
hect@xanum.uam.mx

Jorge A. León Vázquez
jleon@ctrl.cinvestav.mx

Roberto Quezada Batalla
roqb@xanum.uam.mx

Edith Corina Sáenz Valadez
ecsv@ciencias.unam.mx

Martha L. Shaid Sandoval Miranda
marlisha@gmail.com

Ekaterina Todorova
todorova@cimat.mx

Luis Miguel Villegas Silva
villegas63@gmail.com

Editor web Pedro Iván Blanco Boa
ivanblc@gmail.com

Diseño logo Michael Rivera Arce
Portada dibujo de Miryam Mielke

MIXBA'AL. Vol. 16, No. 1, enero-diciembre de 2025, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Alcaldía Tlalpan, C.P. 14387, CDMX, México y Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, No. 186, Col. Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Tel. 5804 4658. Página electrónica de la revista: <http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revistamixba-al/>

Correos electrónicos: mixbaal2009@gmail.com, mixb@xanum.uam.mx. Coordinador Editorial Mario Pineda Ruelas. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No. 04-2023-07031 1572300-102, ISSN: 2007-7874, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número Mario Pineda Ruelas, Departamento de Matemáticas, edificio AT, oficina 318. División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco No. 186, Colonia Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Fecha de última modificación 30 de agosto de 2025. Tamaño del archivo 21.3 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

Presentación

Queridos lectores, en este número de MIXBA'AL les presentamos varios artículos de divulgación ó investigación, entre ellos, los trabajos del TOMMAD 2025 y los 7 librillos que escribieron investigadores del Departamento de Matemáticas de la UAM-I para el 7mo Coloquio del Departamento de Matemáticas. Notarán la diferencia entre algunos trabajos; unos son propiamente divulgación seria y otros son bastante especializados, pero atractivos para aquellos que dominan el tema en cuestión. Esperamos que en nuestra propuesta del 2025 puedan encontrar algo de su interés.

A LOS AUTORES

MIXBA'AL, Revista Metropolitana de Matemáticas, es una revista de publicación anual de divulgación e investigación en matemáticas en el sentido más amplio, concebida con el propósito de apoyar la comunicación entre la comunidad matemática de habla hispana. Los artículos sometidos, pueden ser trabajos de investigación o trabajos que presenten de manera original algún tema de las matemáticas, por ejemplo, demostraciones nuevas de resultados conocidos; artículos panorámicos sobre un área de investigación; la presentación distinta de algún tema vinculado a la docencia; aplicaciones o aspectos lúdicos de las mismas, entre otros.

Los trabajos sometidos deben estar escritos en español impecable; eventualmente podrán aceptarse trabajos en inglés. Éstos deben ser enviados a cualquiera de los **editores** en formato pdf y en un plazo no mayor a un mes, el comité editorial decidirá si el trabajo es acorde a la línea editorial de la revista; en caso que así sea, se enviará a arbitraje.

Cuando un trabajo reciba arbitraje favorable, se le comunicará al autor y en un plazo no mayor a tres semanas, deberá reenviarlo al editor responsable, atendiendo las sugerencias del árbitro y en el **formato** oficial de la revista. El trabajo debe estar organizado de la siguiente forma: título, resumen no mayor a 100 palabras, clasificación de la AMS 2020, palabras clave, introducción y en seguida el desarrollo del mismo. Para someter un artículo a la revista, es recomendable enviarlo en el **formato** oficial de **MIXBA'AL**.

CONTENIDO

- 3 Presentación
- 9 *Problema de clasificación de foliaciones en \mathbb{P}^2 con Teoría de Invariantes Geométricos (GIT)*
P. Rubí Pantaleón-Mondragón & Juan Vásquez Aquino
- 25 *Una nota sobre árboles biplanares*
Elsa Patricia Omaña Pulido y Eduardo Rivera Campo
- 33 *Perturbación unidimensional de relaciones autoadjuntas*
Josué I. Rios-Cangas
- 45 *La curva de Fargues–Fontaine: Una motivación al estudio de la teoría de representaciones de Galois p -ádicas*
Jorge A. Robles Hdez. y J. Rogelio Pérez-Buendía
- 61 *Un panorama de los automovilistas y sus hábitos al volante en Saltillo, Coahuila*
Pedro Reyes-Pérez, Jaime Burgos-García y Carolina Ramos-Durán
- 77 *Polinomios y el cálculo de proposiciones*
Alejandro Aguilar Zavoznik
- 89 *Uso de la herramienta de simulación MATLAB para solución de problemas matemáticos y sus aplicaciones*
Luis A. Vásquez Toledo
- 233 *Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas 2025*
- 235 *Coloraciones localizadoras*
Narda Cordero-Michel, Diego González-Moreno
- 243 *Conjuntos de visibilidad mutua*
Ilán A. Goldfeder, Nahid Y. Javier Nol, Luis J. López Barrios, Aldo Lozano Piña, Miryam S.N. Mielke Méndez, Raúl Vélez Limón
- 255 *Destruyendo gráficas*
Juan Carlos García Altamirano
- 269 *Un modelo de propagación de VIH en una población*
Claudia M. de la Cruz, Julián Fresán-Figueroa, Bruno Graf-Romero, María F. Pérez-Sánchez, Nancy V. Prado Martínez, Pablo C. Sánchez-Silva
- 277 *Gráficas de re-coloración: ¿puedes transformar una coloración en otra sin romper las reglas?*
Romina Barcena Morales, Emilio Y. Licea Mesino, David D. López Contreras, Mika Olsen, Lizzeth A. Sánchez Solís

289 Presentación de las notas del 7mo Coloquio del Departamento de Matemáticas. Foto del evento

[1] *Análisis de datos con un enfoque bayesiano*
Asael Fabian Martínez Martínez

[2] *Un breve recorrido por la teoría de prerradicales y sus retículas*
Rogelio Fernández-Alonso González, Silvia Claudia Gavito Ticozzo, Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda

[3] *Resultados relevantes del álgebra lineal en modelos y aplicaciones*
Lorenzo Héctor Juárez Valencia

[4] *Análisis geométrico de superficies: una introducción elemental*
Josué Mléndez Sánchez, Eduardo Rodríguez Romero

[5] *Una breve introducción a los torneos y sus generalizaciones*
Ilán A. Goldfeder, Nahid Y. Javier Nol

[6] *Del cero al quantum: un viaje al mundo de los códigos*
Jorge R. Bolaños Servín, Yuriko Pitones Amaro, Josué I. Ríos Cangas

[7] *Introducción a la teoría de juegos epistémica*
Rubén Becerril Borja



PROBLEMA DE CLASIFICACIÓN DE FOLIACIONES EN \mathbb{CP}^2 CON TEORÍA DE INVARIANTES GEOMÉTRICOS (GIT)

P. RUBÍ PANTALEÓN-MONDRAGÓN & JUAN VÁSQUEZ AQUINO

RESUMEN. En este artículo panorámico explicamos algunos resultados sobre el problema de clasificación de foliaciones holomorfas de grado 1, 2 y 3 sobre el plano proyectivo complejo usando la Teoría de Invariantes Geométricos (GIT). Proporcionamos ejemplos explícitos de foliaciones con un único punto singular y diferentes multiplicidades, además, su clasificación por estabilidad GIT.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría geométrica de foliaciones se conoce desde principios del siglo XX con los trabajos de C. Ehresmann y G. Reeb. Fue motivada por entender mejor los problemas de estudio de soluciones de ecuaciones diferenciales. Se cree que tomó impulso al querer resolver el problema 16 de una lista de 23 problemas presentada en 1900 en un congreso de matemáticas en París por el matemático alemán David Hilbert y estudiado principalmente por H. Poincaré. Este problema busca determinar una cota en el número de ciclos límites (conjunto límite de las soluciones periódicas) de ecuaciones diferenciales

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

con $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$. Sin embargo, este problema sigue sin ser resuelto. En [1], el autor explica los intentos fallidos por tratar de resolverlo. Aunque también muestra los significativos avances en otras áreas, entre ellas la teoría geométrica de ecuaciones diferenciales y, por supuesto, la teoría de foliaciones. Uno de los enfoques dados en dicho problema fue la complexificación, es decir, en lugar de trabajar sobre los reales se emplean los complejos. En foliaciones, la complexificación abrió muchos problemas, por ejemplo, la existencia de foliaciones con conjuntos minimales no triviales [2], o existencia y clasificación de foliaciones con propiedades específicas en ellas. En general, estos problemas no son fáciles de calcular, por lo que se usan diferentes técnicas, herramientas y teorías para poder decir u obtener información de estos objetos. En este artículo buscamos explicar a través de ejemplos explícitos, una de las herramientas más importantes usadas en geometría algebraica para construir espacios moduli; la Teoría de Invariantes Geométricos (conocida como GIT por sus siglas en inglés) aplicada a la teoría de foliaciones, la cual nos permite exponer explícitamente clases o familias de foliaciones sobre el plano proyectivo \mathbb{CP}^2 con propiedades específicas, así como su complejidad. Nos enfocaremos en una clase interesante de foliaciones, proporcionando ejemplos con propiedades específicas y los avances en este problema.

Recordemos que un sistema de ecuaciones como (1) puede interpretarse como un campo vectorial X cuyas soluciones son curvas que son tangentes a este campo en cada punto de sus trayectorias (como muestra la Figura 1) y esto es análogo al considerar el campo \mathbb{C} .

Al igual que en el plano real, el Teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias holomorfas nos garantiza que por cada punto pasa una y solo

2010 *Mathematics Subject Classification.* 32S65, 14B05, 37F75, 32M25, 14L30.

Palabras clave. Foliaciones holomorfas, Teoría de Invariantes Geométricos, Acciones de grupos algebraicos, GIT-estabilidad.

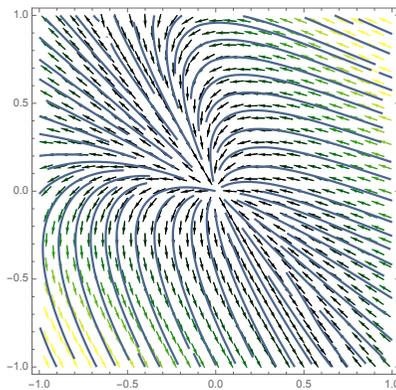


FIGURA 1. Flujo de un campo vectorial.

una solución σ satisfaciendo la condición inicial $\sigma(t_0) = p$, salvo en los puntos donde el campo se “anula”. Es decir, salvo en estos puntos, las soluciones descomponen al espacio (\mathbb{C}^2) en curvas. Esta descomposición es conocida como "foliaciones por curvas asociadas al campo vectorial X ". Además, salvo en los puntos donde el campo se anula (llamados puntos singulares), podemos “enderezar” a las curvas (como se muestra en la Figura (2)) obteniendo un comportamiento lineal. Entonces, ¿dónde radica el problema?, pareciera que todo el comportamiento es rectificable. El problema surge cuando uno desea ver el comportamiento alrededor de puntos donde el campo vectorial se anula, por lo que surgen las siguientes preguntas: ¿el conjunto singular del campo vectorial nos da información para definir a la foliación asociada?, ¿una foliación puede ser determinada por un campo vectorial?, etc.

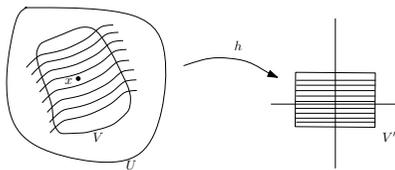


FIGURA 2. Rectificación en una vecindad sin “puntos anuladores”

En [3] Gómez-Mont y Ortiz exponen ampliamente cómo una foliación por curvas sobre un espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ puede ser descrita por campos vectoriales polinomiales homogéneos en \mathbb{C}^{n+1} . En particular, en este artículo nos centraremos en foliaciones holomorfas sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Un sistema de ecuaciones diferenciales polinomiales como en (1), con $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, representará una foliación de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (de manera local). Con esta representación se puede hablar del conjunto singular del campo vectorial asociado y más aún, el conjunto singular jugará un papel muy importante para su comportamiento. De hecho, sobre el plano proyectivo, el conjunto de puntos donde el campo se anula puede ser finito o infinito. En el caso finito, en 1998, Gómez-Mont y Kempf en [4] probaron que si el número de puntos singulares del campo vectorial son diferentes, entonces la foliación asociada está completamente determinada por ellos. Más adelante, en 2001, Campillo y Olivares [5] dan una generalización considerando puntos con multiplicidad (es decir, se valen puntos repetidos) siempre y cuando la foliación sea de grado diferente de 1. Las preguntas naturales en este caso son ¿qué tantos puntos singulares puede tener una foliación?, ¿cualquier configuración de puntos sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ determina una foliación con este conjunto singular?

Una de las herramientas importantes cuando se trata de clasificar objetos es la GIT. En la sección 4, daremos un repaso introductorio de esta teoría usando ejemplos simples de su aplicación. Ejemplo de aplicaciones de la GIT sobre foliaciones en el plano proyectivo se puede ver en [6, 7, 8] y [9].

Las secciones están formadas de las siguientes maneras. En la sección (2), hacemos un recordatorio sobre curvas planas y algunas propiedades en ellas. En la sección (3) presentamos los conceptos de foliaciones que usamos a lo largo del texto. A continuación, en la sección (4), introduciremos a grandes rasgos la teoría de invariantes geométricos aplicada sobre el espacio de foliaciones. En la sección (5) tenemos el objetivo principal del escrito, es decir, presentaremos los resultados conocidos de la estabilidad de foliaciones de grado 1, 2 y 3 con un único punto singular, nuestras aportaciones en ejemplos explícitos y bibliografía donde el interesado en el tema puede explorar para más detalles. Para finalizar, en la sección (6) presentaremos nuestras conclusiones y problemas abiertos en esta línea de investigación.

2. PRELIMINARES BÁSICOS

El espacio proyectivo complejo de dimensión n , denotado por $\mathbb{C}P^n$, se define como el conjunto de clases de equivalencia $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}) / \sim$, donde \sim se define de la siguiente manera: dos puntos no cero p y q de \mathbb{C}^{n+1} son equivalentes ($p \sim q$) si y sólo si existe un escalar no cero, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, tal que $p = \lambda q$. De esta manera, $\mathbb{C}P^n$ parametriza líneas de \mathbb{C}^{n+1} que pasan por el origen, sin contener el origen.

Denotaremos a las clases de equivalencia de un punto como $[x_0 : \dots : x_n]$, también conocidas como coordenadas homogéneas de $\mathbb{C}P^n$. En el caso particular $n = 2$, llamamos al espacio $\mathbb{C}P^2$ como *plano proyectivo*, y denotamos sus coordenadas homogéneas por $[x : y : z]$.

Sean $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en $n + 1$ variables y $S = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ un conjunto finito de polinomios. Denotaremos por

$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_m) = \{p \in \mathbb{C}^{n+1} \mid f_1(p) = \dots = f_m(p) = 0\}$$

al conjunto de ceros comunes de los polinomios en S . Con esta definición es fácil ver que $\mathbb{V}(S) = \bigcap_{f \in S} \mathbb{V}(f)$.

Un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ de grado d se puede expresar como

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_{d-1} + f_d,$$

donde cada f_k es un polinomio homogéneo de grado k , es decir, todos los monomios de f_k tienen grado k , con $k \in \{0, \dots, d\}$. En particular, en este escrito, nos interesan los polinomios en no más de 3 variables.

Cuando $f \in \mathbb{C}[x, y]$ es un polinomio no constante de grado d , $\mathbb{V}(f)$ define una curva de grado d en \mathbb{C}^2 . Análogamente, un polinomio homogéneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grado d satisface que, para todo $p \in \mathbb{C}^3$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $F(\lambda p) = \lambda^d F(p)$. Así, dado que F se escribe de la forma

$$F = \sum_{i+j+k=d} a_{ij} x^i y^j z^k \text{ con } a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ no todos cero,}$$

si $F(p) = 0$ entonces $F(\lambda p) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$, es decir, F se anula en toda la clase de p en $\mathbb{C}P^2$. Denotamos por $\mathbb{C}[x, y, z]_d$ el espacio de polinomios homogéneos de grado d . Al conjunto $C = \mathbb{V}(F) \subset \mathbb{C}P^2$, donde $F \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$ es un polinomio no cero, se le llama *curva plana de grado d* . Para cada $p \in \mathbb{C}P^2$, la multiplicidad de p respecto a la curva plana $C = \mathbb{V}(F)$ se define de la siguiente manera, supongamos que $p = [1 : 0 : 0]$ (salvo cambio de coordenadas) y $f(y, z) = F(1, y, z)$, entonces, $m_p(f) = 0$ si $p \notin C$ o $m_p(f) = m$ si $f(y, z) = f_m + f_{m+1} + \dots + f_d$ con $f_m \neq 0$ y $p \in C$.

Un resultado importante sobre intersección de curvas planas es el teorema de Bézout.

TEOREMA 1 (Bézout, [10]). *Sean F y G polinomios homogéneos de grado d_1 y d_2 respectivamente. Entonces $\mathbb{V}(F, G)$ consiste en $d_1 d_2$ puntos contando multiplicidades.*

Sean $\mathbb{V}(f)$ y $\mathbb{V}(g)$ dos curvas en \mathbb{C}^2 y $p \in \mathbb{C}^2$ un punto. Definimos el número de intersección de $\mathbb{V}(f)$ y $\mathbb{V}(g)$ en p , denotado por $I_p(f, g)$, como un número real que cumple las siguientes propiedades:

1. $I_p(f, g)$ es un entero no negativo para cada $p \in \mathbb{C}^2$ tal que f y g no tienen componentes comunes que contienen a p , e ∞ en caso contrario.
2. $I_p(f, g) = 0$ si y sólo si $p \notin \mathbb{V}(f) \cap \mathbb{V}(g)$. $I_p(f, g)$ depende sólo de las componentes de f y g .
3. Sea T un cambio de coordenadas en \mathbb{C}^2 con $T(p) = q$. Denotamos por f^T y g^T a los polinomios que definen a las curvas transformadas. Entonces $I_p(f, g) = I_q(f^T, g^T)$.
4. $I_p(f, g) = I_p(g, f)$.
5. $I_p(f, g) \geq m_p(f)m_p(g)$. La igualdad se da si y sólo si f y g no tienen rectas tangentes en común en p . De esta forma, el número de intersección es 1 cuando las curvas se intersectan transversalmente.
6. Si $f = \Pi f_i^{r_i}$ y $g = \Pi g_j^{s_j}$, entonces $I_p(f, g) = \sum_{i,j} r_i s_j I_p(f_i, g_j)$.
7. $I_p(f, g) = I_p(f, g + Af)$ para todo $A \in \mathbb{C}[x, y]$.

Este número existe y es único [10].

Con las nociones de ceros de polinomios, sean $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ no tiene elementos nilpotentes, definimos

$$\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq s\}$$

como la *variedad afín* definida por f_1, \dots, f_s . Un morfismo de variedades afines $V \subset \mathbb{C}^n$ y $W \subset \mathbb{C}^m$ es una función $\varphi : V \rightarrow W$ tal que existen funciones $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tales que $\varphi(p) = (g_1(p), \dots, g_m(p)) \in W$ para cada punto $p \in V$.

Similarmente, sean $F_1, \dots, F_s \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ polinomios homogéneos. Definimos

$$\mathbb{V}(F_1, \dots, F_s) = \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid F_i(a_0, \dots, a_n) = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq s\}$$

como la *variedad proyectiva* definida por F_1, \dots, F_s . Sean $V \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ y $W \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ dos variedades proyectivas, y suponga que $\varphi : V \rightarrow W$ es una función de V a W . Decimos que φ es un *morfismo de variedades proyectivas* si lo siguiente se cumple: Para cada $p \in V$, existen polinomios homogéneos $F_0, \dots, F_m \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ tales que para algún conjunto abierto $U \subset V$ que contiene a p , la función restringida $\varphi|_U : U \rightarrow W$ se ve como $q \mapsto [F_0(q) : F_1(q) : \dots : F_m(q)]$.

3. FOLIACIONES SOBRE EL PLANO PROYECTIVO COMPLEJO

Definición 2. Una *foliación* X de grado d sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ puede ser descrita, salvo factor escalar, de dos maneras principales:

1. Por un campo vectorial

$$X = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

donde $P, Q, R \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$. Si consideramos el campo radial $E = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$. Los campos vectoriales X y $X + hE$, donde $h \in \mathbb{C}[x, y, z]_{d-1}$, representan la misma foliación.

2. Por una 1-forma $A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$, donde $A, B, C \in \mathbb{C}[x, y, z]_{d+1}$ con la propiedad $xA + yB + zC = 0$ llamada condición de Euler.

Estas dos expresiones están relacionadas de la siguiente manera: $A = zQ - yR$, $B = xR - zP$ y $C = yP - xQ$.

Denotaremos por $\mathcal{F}(d, 2)$ al espacio de foliaciones de grado d sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. En [3] se prueba con gran detalle que $\mathcal{F}(d, 2)$ es un espacio proyectivo de dimensión $d^2 + 4d + 2$.

Un punto $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ se dice *punto singular* de una foliación X si se satisface lo siguiente:

1. Visto como un campo vectorial, $X(p) = \alpha p$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$ o,
2. Como una 1-forma, $A(p) = B(p) = C(p) = 0$, es decir, $p \in \mathbb{V}(A, B, C)$.

Se puede verificar que ambas condiciones son equivalentes. Denotaremos al conjunto de puntos singulares de una foliación X como $Sing(X)$.

Observemos que el conjunto singular puede ser infinito o finito como conjunto. De hecho, si las componentes (del campo vectorial o de la 1-forma) no tienen factores en común, el conjunto singular $Sing(X)$ es finito, en este caso decimos que la foliación tiene *singularidades aisladas*. Las foliaciones de mayor interés son justamente las que tienen singularidades aisladas y nos restringiremos a ellas en este artículo. De hecho, Jouanolou demostró que podemos contar dichas singularidades y que este número depende solo del grado de la foliación, como veremos en la Proposición [4](#).

Sin pérdida de generalidad, si $p = [1 : 0 : 0]$ es una singularidad aislada de la foliación X , se puede dar una representación local de X sobre un abierto $U \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ que contenga a p (podemos pensar a $U \cong \mathbb{C}^2$) tomando el campo vectorial o la 1-forma asociada a X de la forma

$$(2) \quad f(y, z) \frac{\partial}{\partial y} + g(y, z) \frac{\partial}{\partial z} \quad \circ \quad -g(y, z)dy + f(y, z)dz.$$

donde $f(y, z) = -C(1, y, z)$ y $g(y, z) = B(1, y, z)$.

Considerando la proyección natural $\pi : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, sea $q = \pi(p)$ en el abierto U .

LEMA 3. *Existe una correspondencia entre puntos singulares de la foliación X y los puntos en $\mathbb{V}(f, g)$.*

Demostración. Sea $p = [1 : \beta : \gamma] \in Sing(X)$ con $\pi(p) = (\beta, \gamma)$. Como $0 = B(p) = g(\pi(p))$ y $0 = -C(p) = f(\pi(p))$ entonces $(\beta, \gamma) \in \mathbb{V}(f, g)$. De manera inversa, sea $(b, c) \in \mathbb{V}(f, g)$. Sea $p = [1 : b : c]$, como $f(b, c) = g(b, c) = 0$ y $xA(x, y, z) = -yB(x, y, z) - zC(x, y, z)$, entonces $A(p) = -bB(p) - cC(p) = 0$. Por lo tanto, $p \in Sing(X)$. \square

Con la representación local anterior, se definen algunos invariantes sobre cada singularidad, entre ellos se encuentran los siguientes. Supongamos que $p \in Sing(X)$ con $q = (0, 0)$ (a través de un cambio de coordenadas).

- La *multiplicidad algebraica* de p se define como el orden mínimo de f y g en q , es decir, si descomponemos a f y g en su partes homogéneas: $f = f_m + f_{m+1} + \dots$ y $g = g_s + g_{s+1} + \dots$, donde $f_i, g_i \in \mathbb{C}[x, y]_i$, entonces

$$m_p(X) := \min\{m, s\}.$$

- El *número de Milnor* de p sobre X se define como

$$\mu_p(X) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)}{\langle f, g \rangle \cdot \mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)},$$

donde $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)$ es el anillo de funciones regulares sobre q y $\langle f, g \rangle$ es el ideal generado por las componentes del campo vectorial local. Un hecho conocido es que este número coincide con el índice de intersección de las curvas definida por f y g en el punto q , $I_q(f, g)$ (ver [\[10\]](#)).

Una propiedad importante del número de Milnor es la siguiente.

PROPOSICIÓN 4 (Jouanolou, [\[11\]](#)).

$$\sum_{p \in Sing(X)} \mu_p(X) = d^2 + d + 1.$$

Esta fórmula es de naturaleza topológica y nos da una manera de determinar cuántos puntos singulares podemos tener, por ejemplo: $d^2 + d + 1$ puntos singulares con número de Milnor 1, o el caso donde hay un único punto singular p con número de Milnor máximo $\mu_p(X) = d^2 + d + 1$.

Ejemplo 1. Consideremos el campo vectorial:

$$X = y^2 \frac{\partial}{\partial x} + z^2 \frac{\partial}{\partial y},$$

o equivalentemente, la 1-forma:

$$-z^3 dx + zy^2 dy + (xz^2 - y^3) dz,$$

que definen a una foliación de grado 2. Observemos que $p = [1 : 0 : 0] \in \text{Sing}(X)$, así, en una vecindad de p , X puede representarse por la expresión local $f = -zy^2$ y $g = -z^2 + y^3$, es decir,

$$-zy^2 dy + (-z^2 + y^3) dz,$$

con punto singular $q = (0, 0)$, como se puede observar en la Figura 3. De la expresión local de la 1-forma se puede ver que la multiplicidad del punto es $m_p(X) = 2$. Para calcular el número de Milnor de X sobre p , se pueden usar las propiedades de índice de intersección entre las curvas definidas por f y g de la sección 2. Así,

$$\begin{aligned} \mu_{(p)}(X) &= I_q(f, g) \\ &= I_q(z, z^2 - y^3) + 2I_q(y, z^2 - y^3) \text{ (propiedad 6)} \\ &= 3 + 4 = 7 \text{ (propiedad 7)}. \end{aligned}$$

Por Jouanolou, como el número de Milnor es el máximo posible, entonces $\text{Sing}(X) = \{p\}$. De hecho, este es un ejemplo de las cuatro foliaciones (salvo cambio de coordenadas) de grado 2 que tienen un único punto singular clasificadas en [12].

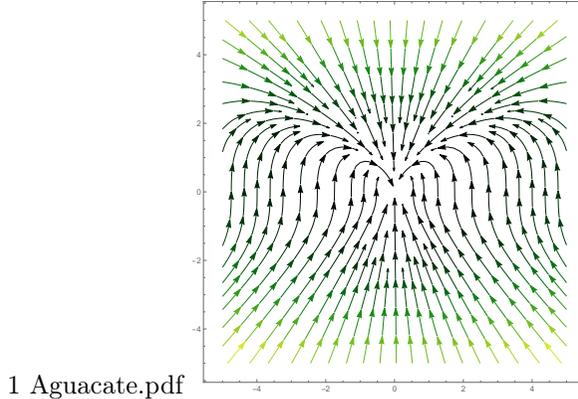


FIGURA 3. Representación local de la foliación $X = z^2 \frac{\partial}{\partial y} + y^2 \frac{\partial}{\partial x}$.

En general, no es trivial determinar las foliaciones de grado d con un único punto singular, es decir, no existe una clasificación en general. Sin embargo, bajo condiciones a añadidas, existen varios resultados, ver por ejemplo: [12, 7, 13, 14, 15, 9, 16, 17].

4. PROBLEMA DE CLASIFICACIÓN DE FOLIACIONES EN \mathbb{CP}^2 CON GIT

La Teoría de Invariantes Geométricos (GIT) es una herramienta importante y poderosa para construir espacios moduli, como cocientes de acciones de grupos algebraicos sobre variedades algebraicas [18]. Esta teoría busca construir una variedad algebraica donde cada punto de esta variedad represente una clase de isomorfismo, es decir, una clase de equivalencia de los objetos que deseamos clasificar, como en nuestro caso, clasificar foliaciones en \mathbb{CP}^2 salvo isomorfismos del plano proyectivo.

Los conceptos básicos de esta sección pueden ser explorados con más detalle en [18, 19, 20] y [21].

Definición 5. Un *grupo algebraico* G es un grupo que además tiene estructura de variedad algebraica y cuyas operaciones de grupo, producto e inverso, son morfismos de variedades algebraicas.

Algunos ejemplos clásicos de grupos algebraicos son:

- El grupo general lineal $GL_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2+1}$ es la variedad afín definida por $\mathbb{V}(\text{ydet} - 1)$, donde $\text{ydet} - 1 \in \mathbb{C}[x_{ij}, y]$ y det denota al polinomio determinante de matrices de tamaño $n \times n$.
- El grupo especial lineal $SL_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ es la variedad afín definida por $\mathbb{V}(\text{det} - 1)$, donde $\text{det} - 1 \in \mathbb{C}[x_{ij}]$.
- Los subgrupos cerrados de $GL_n(\mathbb{C})$ son grupos algebraicos, conocidos como *Grupos algebraicos lineales*.

Un morfismo de grupos algebraicos es un morfismo de grupos que también es morfismo de variedades algebraicas.

Definición 6. Una *acción* de un grupo algebraico G sobre una variedad algebraica V afín o proyectiva, es un morfismo

$$\begin{aligned} \cdot : G \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto g \cdot v \end{aligned}$$

que satisface lo siguiente para todo $g, g' \in G$ y $v \in V$;

- $g \cdot (g' \cdot v) = (gg') \cdot v$
- $e \cdot v = v$, donde e es la identidad del grupo G .

La acción $G \times V \rightarrow V$ se dice *lineal* si viene dada por una representación, es decir, un espacio vectorial W y un morfismo de grupos algebraicos $\rho : G \rightarrow GL(W)$ tal que la acción de G en V se ve como $g \cdot v = \rho(g)v$.

La teoría de representaciones de grupos es muy extensa y muy rica. Un libro clásico sobre este tema es [19]. En los capítulos 12 y 13 de dicho libro se explica que para grupos específicos podemos dibujar un diagrama de pesos de la representación, por ejemplo, para las representaciones de $SL_n(\mathbb{C})$ y cuando $n = 3$, este diagrama se puede ver en \mathbb{R}^2 .

4.1. Acción por cambio de coordenadas. Uno de los objetivos de la teoría de foliaciones sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ es clasificar estos objetos salvo isomorfismos del plano proyectivo. Así, dos foliaciones X_1 y X_2 son equivalentes si existe un isomorfismo de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ que nos lleva uno al otro. Esto se ve formalmente por la siguiente acción.

Sea $V = \mathcal{F}(d, 2)$ el espacio de foliaciones holomorfas de grado d sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ y $G = SL_3(\mathbb{C})$. La función definida por

$$\begin{aligned} SL_3(\mathbb{C}) \times \mathcal{F}(d, 2) &\rightarrow \mathcal{F}(d, 2) \\ (g, X) &\mapsto g \cdot X = DgX(g^{-1}), \end{aligned}$$

es una acción lineal, y es llamada *acción por cambio de coordenadas en $\mathcal{F}(d, 2)$* . En efecto; sean $g, h \in SL_3(\mathbb{C})$ y $X \in \mathcal{F}(d, 2)$, entonces

1. $g \cdot (h \cdot X) = g \cdot (DhX(h^{-1})) = D(gh)X((gh)^{-1}) = (gh) \cdot X$.
2. $Id \cdot X = DIdX(Id^{-1}) = DIdX = X$.

La GIT (clásica) estudia acciones de un tipo particular de grupos algebraicos, los *grupos reductivos*, que evitaremos su explicación en este texto, ya que para nuestros fines, el grupo de nuestro interés, $SL_3(\mathbb{C})$, sí lo es. El lector interesado puede consultar [21] para descubrir la historia de esta definición y su relación con el problema 14 de Hilbert.

Dos conceptos importantes derivados de la acción de un grupo algebraico sobre una variedad algebraica son los siguientes.

Definición 7. Sean G un grupo reductivo actuado sobre una variedad algebraica V y $v \in V$.

- El *estabilizador* de v , o también llamado el *subgrupo de isotropía* de v , es el subgrupo cerrado $G_v := \{g \in G \mid gv = v\}$ de G .
- La *órbita* de v es la subvariedad $O(v) := \{g \cdot v \mid g \in G\}$ de V .

Una consecuencia importante de estos conjuntos y los cuales los relaciona, está dada en el siguiente lema muy conocido.

LEMA 8. Si G actúa linealmente en V . Para cada $v \in V$,

$$\dim O(v) = \dim G - \dim G_v.$$

Ejemplo 2. Sea $X = (-xz - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y} + xy \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{F}(2, 2)$. Podemos ver que $\text{Sing}(X) = \{[0 : 0 : 1]\}$. Consideremos las matrices

$$g_1 = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} j^2 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donde } j = e^{2i\pi/3} \text{ y } g_3 = Id.$$

Bajo la acción por cambio de coordenadas, el estabilizador de X es $SL_3(\mathbb{C})_X = \{g_1, g_2, g_3\}$. En efecto, supongamos que $g = (a_{ij}) \in SL_3(\mathbb{C})$ y $g^{-1} = (b_{ij}) \in SL_3(\mathbb{C})$ con $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$. De las igualdades $g \cdot X = X$ y $g \cdot g^{-1} = Id$ tenemos: $b_{32} = 0, b_{31} = 0, b_{23} = 0, b_{21} = 0, b_{13} = 0, b_{12} = 0, a_{32} = 0, a_{31} = 0, a_{23} = 0, a_{21} = 0, a_{13} = 0, a_{12} = 0, b_{33} = 1, a_{33} = 1, a_{22} = b_{11}, a_{11} = b_{22}, b_{22}^2 = b_{11}, b_{11}b_{22} = 1, b_{11}^2 = b_{22}$. De esto concluimos que b_{22} y b_{11} son una raíz cúbica de la unidad. Más aún, se satisface una de las siguientes condiciones

$$(a_{11} = b_{22}, a_{22} = b_{22}^2) \text{ o } (a_{11} = b_{11}^2, a_{22} = b_{11}).$$

Por lo tanto, $g = \text{diag}(b_{22}, b_{22}^2, 1)$ o $g = \text{diag}(b_{11}^2, b_{11}, 1)$ o $g = Id$. Es decir, los únicos elementos que dejan fijos a X bajo la acción son g_1, g_2 y Id , por lo tanto, $\dim O(X) = 8$.

En el ejemplo anterior, uno de los problemas importantes a entender es el comportamiento de la órbita de X bajo la acción. En [12] los autores estudian los comportamientos de las órbitas para foliaciones de grado 2 con único punto singular, aunque en general no es trivial describir dicho conjunto.

Uno de los resultados más importantes de la GIT nos dice que, dada una acción lineal de un grupo reductivo sobre una variedad proyectiva, no siempre existe el cociente V/G , al menos no como variedad algebraica, pero que al considerar un cierto subconjunto abierto de la subvariedad V , que llamaremos V^{ss} , existe un cociente, denotado por V^{ss}/G , que sí es una variedad proyectiva. Por otro lado, construir dicho cociente es uno de los problemas más difíciles de esta área, comenzando por describir los objetos en V^{ss} y su complemento.

Definición 9. Sea x un punto en la variedad proyectiva V . Consideremos un representante $\bar{x} \in \mathbb{C}^{n+1}$, es decir, $\bar{x} \in x$. Denotemos por $O(\bar{x})$ la órbita de \bar{x} en el cono afín de V , entonces

- x es *inestable* si $0 \in \overline{O(\bar{x})}$ (donde la barra significa cerradura). El conjunto de puntos inestables es denotado por V^{un} .
- x es *semiestable* si $0 \notin \overline{O(\bar{x})}$. El conjunto de puntos semiestables es denotado por V^{ss} .
- x es *estable* si es semiestable, la órbita de x es cerrada en V^{ss} y $\dim O(x) = \dim G$. El conjunto de puntos estables es denotado por V^s .

Un método para determinar la estabilidad de los puntos de una variedad con la acción de un grupo algebraico es el conocido Criterio de Hilbert-Mumford [21]. Aquí vamos a presentar brevemente un criterio equivalente al Hilbert-Mumford, como se muestra en [22].

Dado que la acción de $SL_3(\mathbb{C})$ en el espacio de foliaciones $\mathcal{F}(d, 2)$ es una acción lineal, tenemos una representación de $SL_3(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^{(d^2+4d+2)+1}$. Para dibujar el diagrama de pesos de esta representación consideremos el toro maximal T de $SL_3(\mathbb{C})$ dada por el conjunto de matrices diagonales con determinante igual a 1. De la representación de $SL_3(\mathbb{C})$ tenemos una representación inducida de T , es decir, un morfismo no trivial $T \rightarrow GL(\mathbb{C}^{(d^2+4d+2)+1})$. De esta manera, tenemos una descomposición en subrepresentaciones escalares $\mathbb{C}^{d^2+4d+3} = \bigoplus_r \alpha_r V_{\alpha_r}$, donde $\alpha_r : T \rightarrow \mathbb{C}$ con $r = 1, \dots, d^2 + 4d + 3$ y es llamada peso de la representación. Para el caso específico de nuestra acción, estos

pesos están definidos como sigue: consideremos el conjunto generador del espacio de foliaciones $\mathcal{F}(d, 2)$ dada por

$$\left\{ x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial x}, x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial y} \text{ donde } i + j + k = d \text{ y } x^k y^i \frac{\partial}{\partial z} \text{ con } i + k = d \right\}.$$

Tomamos una matriz diagonal $diag(a, b, c) \in T$ y aplicamos la acción por cambio de coordenadas definida anteriormente. Así

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{d^2+4d+3} = & \bigoplus_{i+j+k=d} a^{-k+1} b^{-i} c^{-j} \langle x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial x} \rangle \\ & \bigoplus_{i+j+k=d} a^{-k} b^{-i+1} c^{-j} \langle x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial y} \rangle \bigoplus_{k+i=d} a^{-k} b^{-i} c \langle x^k y^i \frac{\partial}{\partial z} \rangle, \end{aligned}$$

A esta representación le vamos a asociar un conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 ,

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - k + j)L_1 + (-i + j)L_2 : i + j + k = d, \\ (-i + k)L_1 + (1 - j + k)L_2 : i + j + k = d, \\ (-1 - k)L_1 + (-1 - i)L_2 : i + k = d \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

donde $L_1 = (1, 0)$, $L_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $L_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

A este conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 le llamaremos *diagrama de pesos de la representación*. Los ejemplos explícitos de estos diagramas para la acción de $SL_3(\mathbb{C})$ en espacios de foliaciones se pueden ver en las figuras [4](#), [5](#) y [6](#).

Para una foliación $X \in \mathcal{F}(d, 2)$, podemos considerar el conjunto convexo definido por sus pesos en el diagrama correspondiente en \mathbb{R}^2 . Si para cualquier cambio de coordenadas se tiene que:

- si el origen está contenido en el interior del convexo, entonces la foliación es estable,
- si el origen está en el convexo, la foliación es semiestable, y
- si el origen está fuera del convexo, la foliación es inestable.

Ejemplos explícitos de este criterio se muestran en las figuras [7a](#), [8a](#) y [9a](#). Otros problemas de GIT donde se usa este criterio se puede ver en [23](#), [22](#) y [25](#).

En [26](#), la autora estudia foliaciones de grado 2. Describe a las foliaciones inestables de este grado y da otra prueba de las 4 foliaciones de grado 2 con un único punto singular que fueron descritas en [12](#), también salvo cambio de coordenadas. En [24](#) de la misma autora, se describe más en general a las foliaciones inestables clasificandolas por medio de sus grupos de automorfismos.

En [7](#) y [9](#) los autores damos ejemplos explícitos de foliaciones de grado 3 con un único punto singular. Además, damos una prueba sencilla de que las foliaciones con puntos singulares de multiplicidad 1 son estables. También damos ejemplos de foliaciones con singularidades de multiplicidad 2 que son inestables y semiestables no estables. Casos explícitos serán considerados en la siguiente sección.

5. FOLIACIONES CON UN ÚNICO PUNTO SINGULAR

Dos clases importantes de foliaciones son aquellas extremas, es decir, aquellas que tienen todas sus singularidades diferentes (también llamadas foliaciones no degeneradas), o aquellas con un único punto singular. Las foliaciones no degeneradas forman un espacio denso en el espacio de foliaciones y son estables (ver [4](#)). Por otro lado, no hay una clasificación general de foliaciones con un único punto singular, aunque sí hay algunos resultados importantes al respecto. En esta sección hablaremos de los avances para foliaciones de grado 1, 2 y 3 (incluyendo nuestras contribuciones [9](#)) con un único punto singular.

Definamos los siguientes conjuntos

$$\mathcal{A}_d := \{X \in \mathcal{F}(d, 2) \mid \text{Sing}(X) = \{p\}, \mu_p(X) = d^2 + d + 1\},$$

$$\mathcal{A}_{d,m} := \{X \in \mathcal{A}_d \mid m_p(X) = m\}.$$

5.1. Grado 1, $\mu_p(X) = 3$. Consideremos el diagrama de pesos de las foliaciones de grado 1 sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ dado por la Figura 4.

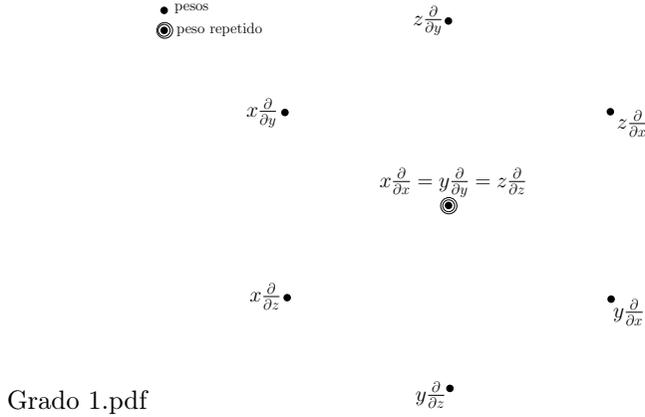


FIGURA 4. Diagrama de pesos de $\mathcal{F}(1, 2)$.

TEOREMA 10. [6] Una foliación de grado 1 es de la forma

$$X = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donde $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$. Además, X es inestable si A es nilpotente.

5.2. Grado 2, $\mu_p(X) = 7$. La Figura 5 representa el diagrama de pesos del espacio $\mathcal{F}(2, 2)$. Por [12], existen cuatro foliaciones (hasta cambio de coordenadas) en \mathcal{A}_2 :

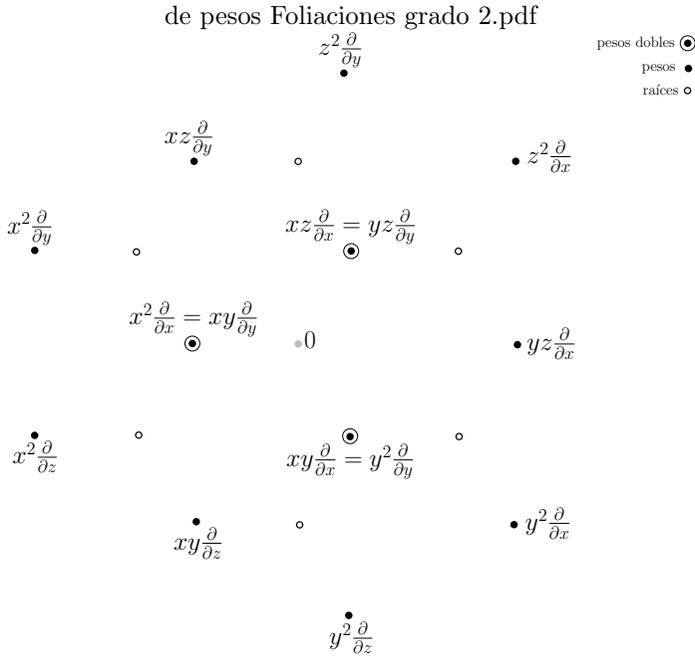


FIGURA 5. Diagrama de pesos de $\mathcal{F}(2, 2)$.

1. $X_1 = y^2 \frac{\partial}{\partial x} + z^2 \frac{\partial}{\partial y}$,
2. $X_2 = -y^2 \frac{\partial}{\partial x} + (yz - z^2) \frac{\partial}{\partial y} + z^2 \frac{\partial}{\partial z}$,

3. $X_3 = (y^2 + z^2)\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y}$,
4. $X_4 = -yz\frac{\partial}{\partial x} + (xy + z^2)\frac{\partial}{\partial y} + y^2\frac{\partial}{\partial z}$.

Sin perder generalidad, podemos ver que $Sing(X_i) = \{[1 : 0 : 0]\}$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Usando la representación local alrededor de la singularidad y usando el diagrama de pesos, tenemos la siguiente tabla:

i	f	g	$m_p(X)$	Estabilidad
1	$z^2 - y^3$	$-zy^2$	2	Inestable
2	$yz - z^2 + y^3$	$z^2 + y^2z$	2	Inestable
3	$yz - y^3 - yz^2$	$-y^2z - z^3$	2	Inestable
4	$y + z^2 + y^2z$	$y^2 + yz^2$	1	Estable

5.3. Grado 3, $\mu_p(X) = 13$. El diagrama de pesos de foliaciones de grado 3 está dado en la Figura 6. Los resultados particulares presentados en esta sección pueden ser consultados en [9] principalmente.

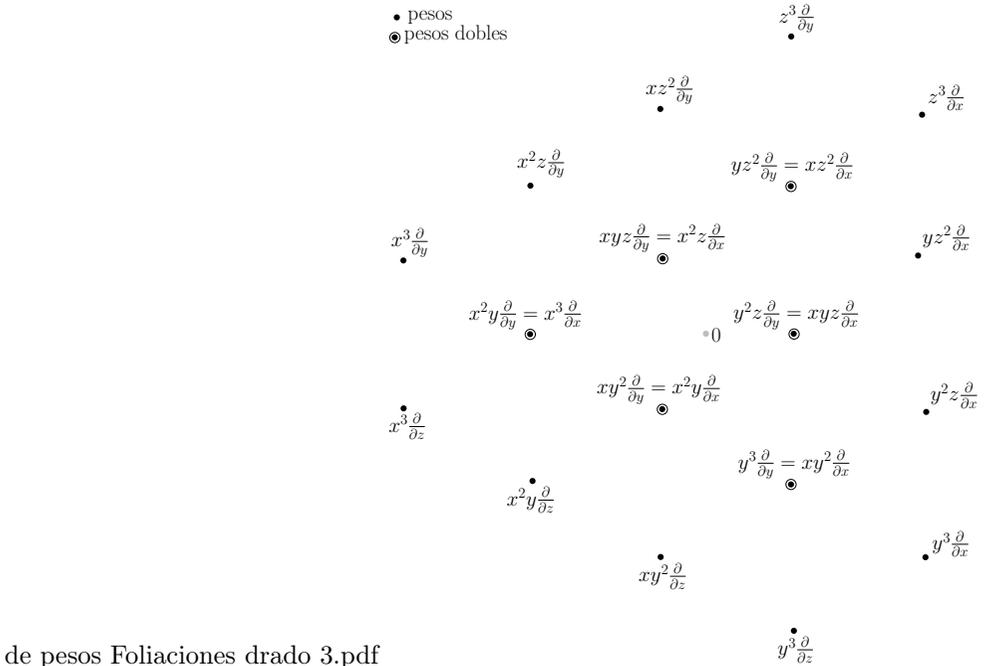


FIGURA 6. Diagrama de pesos de $\mathcal{F}(3, 2)$.

Para foliaciones de grado 3, con multiplicidad 1 se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 11. $\mathcal{A}_{3,1} \subset \mathcal{F}(3, 2)^s$.

Para foliaciones de grado 3 y multiplicidad 2, simplificaremos los resultados con ejemplos explícitos.

Ejemplo 3. [9, Theorem 4.1] La foliación dada por el campo vectorial

$$X = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^2 - 6y^3 - xyz - 7y^2z - 2xz^2 - 3z^3 \\ y^3 + xyz + xz^2 - yz^2 + 2z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene como punto singular al punto $p = [1 : 0 : 0]$. Alrededor de p , una representación local de X , que se puede ver en la figura 7b, es dada por el campo vectorial

$$\begin{pmatrix} f(y, z) = yz + z^2 + yz^2 + y^2z + 2z^3 + 6y^4 + 7y^3z + 3yz^3 \\ g(y, z) = -y^2z + 6y^3z + yz^2 + 7y^2z^2 + 2z^3 + 3z^4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $m_p(X) = 2$. Además,

$$\begin{aligned}
 \mu_{(p)}(X) &= I_{(0,0)}(f, g) \\
 &= I_{(0,0)}(f, z) - I_0(P(1, y, z), Q(1, y, z)) \\
 &= I_0(y^4, z) - I_0(P(1, y, z), Q(1, y, z)) \\
 &= 4 + I_0(zP(1, y, z) - (y - 2z)Q(1, y, z), Q(1, y, z)) - I_0(z, Q(1, y, z)) \\
 &= 4 + I_0((y + z)^4, Q(1, y, z)) - 3 \\
 &= 4 + 12 - 3 = 13.
 \end{aligned}$$

Los términos de las componentes de X (hasta cambio de coordenadas) pueden verse en el convexo sombreada de la Figura [7a](#). Observemos que la condición de estabilidad está determinada por $xy^2 \frac{\partial}{\partial x}$, $xyz \frac{\partial}{\partial y}$ y $y^3 \frac{\partial}{\partial z}$ los cuales son no cero en X , así, $X \in \mathcal{A}_{3,2}^{ss}$.

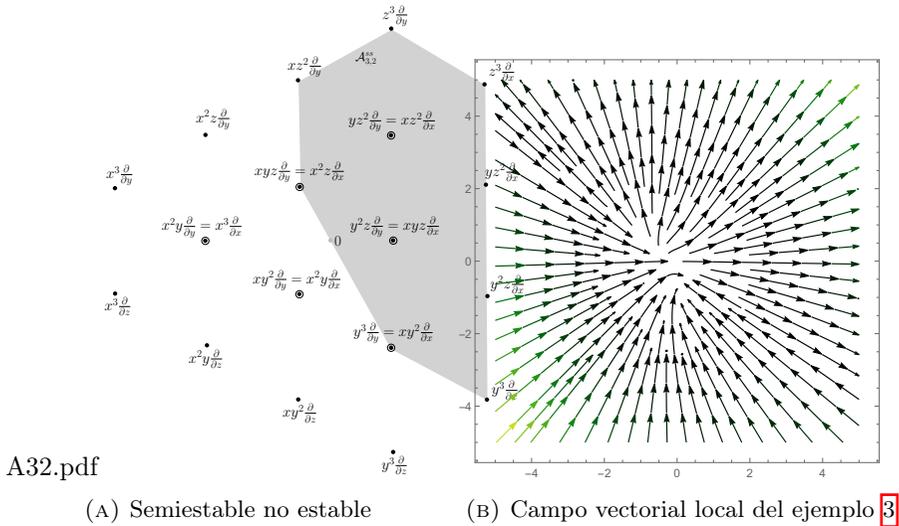


FIGURA 7. Estabilidad de $\mathcal{F}(3, 2)$ con multiplicidad 2.

Ejemplo 4. [9](#) Proposition 4] Consideremos la foliación de grado 3 representada por el campo vectorial

$$X = \begin{pmatrix} x^2y + x^2z - 3xy^2 - 3xyz - xz^2 + y^3 \\ -4y^3 - 6y^2z - 4yz^2 - z^3 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $p = [1 : 0 : 0]$ es un punto singular de X . Por lo tanto, una representación local alrededor de p (la cual podemos ver en la figura [8b](#)) está dada por el campo vectorial

$$\begin{pmatrix} f(y, z) \\ g(y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^4 - y^3 - 3y^2z - 3yz^2 - z^3 - y^2 - yz \\ -y^3z + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 - yz - z^2 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $m_p(X) = 2$. Además, observemos que $f(y, z) = (y + z)[(y + z)^2 - y] + y^4$. Así, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \mu_{(p)}(X) &= I_{(0,0)}(f, g) \\
 &= I_{(0,0)}(zf - yg, f) - I_0(y, f) \\
 &= I_0((y + z)^4, f) - I_0(y, z^3) \\
 &= 4I_0(y + z, y^4) - 3 \\
 &= 16 - 3 = 13.
 \end{aligned}$$

Uno puede verificar que los términos de las componentes de X pertenecen al convexo $\mathcal{A}_{3,2}^s$ de la figura 8a. Además, las condiciones de estabilidad están fuertemente dadas en los coeficientes de $y^3 \frac{\partial}{\partial z}$, $z^3 \frac{\partial}{\partial y}$ y $x^2 y \frac{\partial}{\partial x}$ los cuales son no cero. Por lo tanto, $X \in \mathcal{A}_{3,2}^s$.

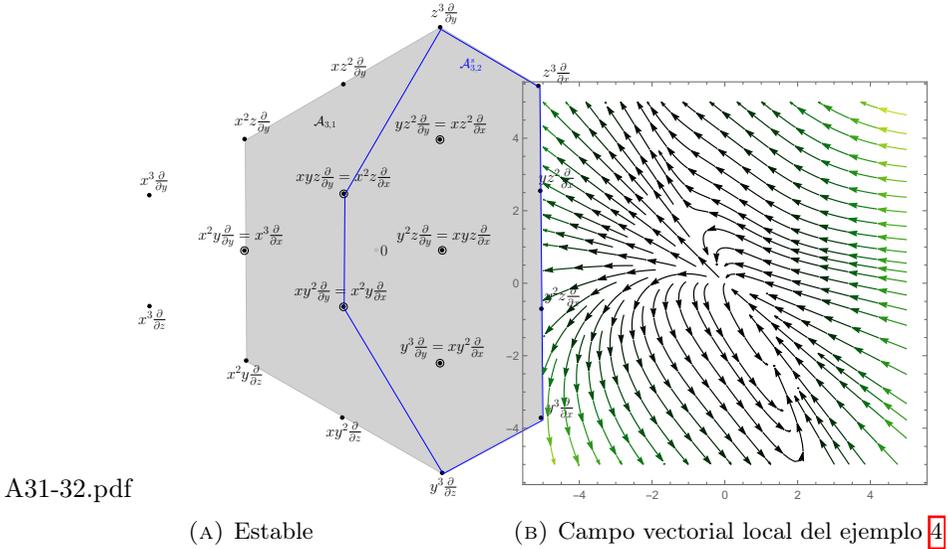


FIGURA 8. Estabilidad de $\mathcal{F}(3,2)$ con multiplicidad 1 y 2.

Para terminar la multiplicidad 2, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5. [9 Lemma 1] Consideremos la foliación dada por el campo vectorial

$$X = \begin{pmatrix} y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \\ xyz - 2y^2z + xz^2 + \frac{1}{2}yz^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que el punto $p = [1 : 0 : 0]$ es punto singular de X , una representación local (ver figura 9b) está dada por el campo vectorial

$$\begin{pmatrix} f(y, z) \\ g(y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^4 - 3y^3z - 3y^2z^2 - yz^3 - 2y^2z + \frac{1}{2}yz^2 + yz + z^2 \\ -y^3z - 3y^2z^2 - 3yz^3 - z^4 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que $m_p(X) = 2$. Además, observemos que $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = (y+z)^3$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_p(X) &= I_{(0,0)}(f, g) \\ &= I_{(0,0)}(f, z) + 3(I_{(0,0)}(y+z, z) + I_{(0,0)}(y+z, y(4y-z))) \\ &= 4 + 3(1+2) = 13. \end{aligned}$$

Los monomios en las componentes de X pertenecen al convexo sombreado dado en la figura 9a, por lo que X es inestable, es decir, $X \in \mathcal{A}_{3,2}^{un}$.

Además, para grado 3 y multiplicidad 3 (salvo cambio de coordenadas) se tiene lo siguiente.

TEOREMA 12. $\mathcal{A}_{3,3} \subset \mathcal{F}(3,2)^{un}$.

En resumen, la siguiente tabla muestra la estabilidad de foliaciones de grado 3 con un único punto singular y multiplicidad 1, 2 y 3.

$m_p(X)$	$\mu_p(X)$	Estabilidad
1	13	estable
2	13	estable, semiestable no-estable, inestable
3	13	inestable

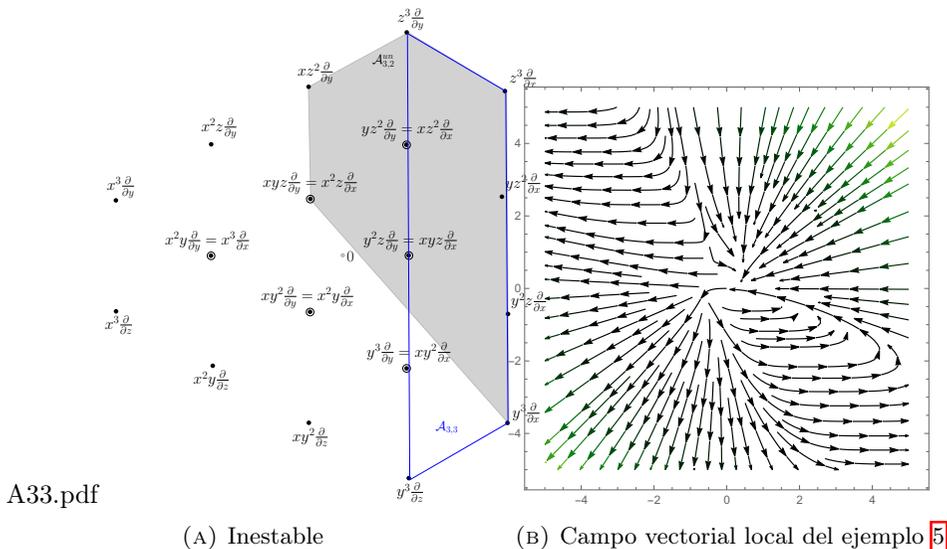


FIGURA 9. Estabilidad de $\mathcal{F}(3,2)$ de multiplicidad 2 y 3.

6. CONCLUSIÓN

Los resultados presentados en este artículo son casos particulares de resultados dados en [9] principalmente con el objetivo de hacer más explícita la descripción de los campos vectoriales que definen a las foliaciones con cada tipo de estabilidad. Además, uno podría fácilmente demostrar el siguiente corolario.

COROLARIO 13. *Para cada $d \geq 2$, $\mathcal{A}_{d,d} \subset \mathcal{F}(d,2)^{un}$.*

Algunas preguntas por responder en este camino: ¿Cómo se distribuyen la estabilidad de las foliaciones en $\mathcal{A}_{d,i}$ con $2 \leq i \leq d-1$? ¿qué se puede decir de la estabilidad de las foliaciones en $\mathcal{F}(d,2)$ con al menos dos puntos singulares? Más aún, ¿podemos entender el comportamiento de las órbitas?

Un problema importante en la GIT, es la existencia del cociente bueno. En caso de foliaciones sobre \mathbb{CP}^2 , en [6], la autora demostró que el cociente $\mathcal{F}(1,2)//SL_3(\mathbb{C}) = \mathbb{CP}^1$, y recientemente en [8] se dieron avances para el caso $\mathcal{F}(2,2)//SL_3(\mathbb{C})$. ¿Qué se puede decir de $\mathcal{F}(d,2)//SL_3(\mathbb{C})$ para $d \geq 2$?

Todas estas preguntas no son fáciles de contestar y siguen siendo temas de investigación activas.

REFERENCIAS

- [1] Ilyashenko, Y., *Centennial history of Hilbert's 16th problem*, Bulletin of the American Mathematical Society, 39, no. 3, 301–354, 2002.
- [2] Camacho, C., De Figueiredo, L. H., *The dynamics of the Jouanolou foliation on the complex projective 2-space*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Cambridge University Press. 21, no. 3, 757–766, 2001.
- [3] Gómez-Mont, X., Ortiz-Bobadilla, L., *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*, Aportaciones Matemáticas: Notas de Investigación, 3, 2004.
- [4] Gómez-Mont, X., Kempf, G., *Stability of meromorphic vector fields in projective spaces*, Commentarii Mathematici Helvetici, Springer, 64, no. 1, 462–473. 1989.
- [5] Campillo, A., Olivares, J., *Polarity with respect to a foliation and Cayley-Bacharach Theorems*, Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik, Walter de Gruyter, 534, 95–118, 2001.
- [6] R. Alcántara, C., *The Good Quotient of the Semi-Stable Foliations of \mathbb{CP}^2 of Degree 1*, Results in Mathematics, 53, no. 1, 1–7, 2009.
- [7] R. Alcántara, C., Ronzon-Lavie, R., *Classification of foliations on \mathbb{CP}^2 of degree 3 with degenerate singularities*, 14, 52–73, 2016.
- [8] R. Alcántara, C., Vásquez Aquino, J., *GIT quotient of holomorphic foliations on \mathbb{CP}^2 of degree 2 and quartic plane curves*. Forum Mathematicum. doi:10.1515/forum-2024-0043, 2024.

- [9] Castorena, Abel, Pantaleón-Mondragón, P. R., Vásquez Aquino, J., *On the GIT-Stability of Foliations of Degree 3 with a Unique Singular Point*. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series. Springer. 55, no. 6, 2024.
- [10] Fulton, W., *Algebraic curves*, An Introduction to Algebraic Geom. 54, 2008.
- [11] Jouanolou, J.P., *Equations de Pfaff algébriques*, Springer, 708, 2006.
- [12] Cerveau, D., Déserti, J., Belko, D. G., Meziani, R., *Géométrie classique de certains feuilletages de degré deux*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, Springer, 41, no. 2, 161–198, 2010.
- [13] R. Alcántara, C., *Foliations on $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ of degree d with a singular point with Milnor number $d^2 + d + 1$* , Revista Matemática Complutense, Springer, 31, no. 1, 187–199, 2018.
- [14] R. Alcántara, C., y Pantaleón-Mondragón, P. R., *Foliations on $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ with a unique singular point without invariant algebraic curves*, Geometriae Dedicata, Springer, 207, no. 1, 193–200, 2020.
- [15] R. Alcántara, C., *Special foliations on $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ with a unique singular point*, Research in the Mathematical Sciences, Springer, 9, no. 1, 2022.
- [16] Martín Del Campo, A., Pantaleón-Mondragón, P. R., *The Euler-Betti Algorithm to identify foliations in the Hilbert Scheme*, <https://arxiv.org/abs/2303.17698>, 2023.
- [17] Medina, N.S., *Estratificación del espacio de foliaciones holomorfas de grado 4 en el plano proyectivo complejo*, Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú), 2021.
- [18] Mumford, D., Kirwan, F., Fogarty, J., *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, Berlin. 1994.
- [19] Fulton, W., Harris, J., *Representation theory: a first course*, Springer Science & Business Media. 129, 2013.
- [20] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Springer Science & Business Media, 52, 2013.
- [21] Newstead, P. E., *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.
- [22] Mumford, D., *Stability of projective varieties* L'Enseignement mathématique, 1977.
- [23] Kirwan, F. C., *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton University Press, 31, 1984.
- [24] R. Alcántara, C., *Singular points and automorphisms of unstable foliations of $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$* , Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), 16, 39–51, 2010.
- [25] Vásquez Aquino, J., *Intersection Betti Numbers of the GIT Quotient of Quartic Plane Curves*, Transformation Groups, Springer, 1–25, 2024.
- [26] R. Alcántara, C., *Foliations on $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ of degree 2 with degenerate singularities*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, Springer, 44, no. 3, 421–454, 2013.

Petra Rubí Pantaleón Mondragón

SECIHTI-Universidad Nacional Autónoma de México ,
 Centro de Ciencias Matemáticas,
 Antigua Carretera a Pátzcuaro # 8701,
 Col. Ex. Hacienda San José de la Huerta
 Morelia, C.P. 58089, Michoacán, México.
 e-mail: pantaleon.rubi@gmail.com

Juan Vásquez Aquino

SECIHTI-Universidad Autónoma de Zacatecas,
 Unidad Académica de Matemáticas.
 Paseo la Bufa, C.P. 98060
 Zacatecas, Zacatecas, México.
 e-mail: juan.vasquez@cimat.mx



UNA NOTA SOBRE ÁRBOLES BIPLANARES

ELSA PATRICIA OMAÑA PULIDO Y EDUARDO RIVERA CAMPO

RESUMEN. Estudiamos una variante de la gráfica de árboles biplanares definida por Figueroa y Fresán-Figueroa [Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 26 (2020)] y damos demostraciones elementales de que la gráfica de árboles biplanares es conexa y de que el diámetro y el radio de ésta es $2n - 5$ y $n - 2$, respectivamente, en donde $n \geq 3$ es el número de vértices.

1. INTRODUCCIÓN

Dado un conjunto de puntos P en el plano, una *gráfica topológica* G con conjunto de vértices P es una gráfica simple dibujada en el plano en la que las aristas son curvas simples con extremos en P . En una gráfica topológica cualquier par de aristas se intersectan en a lo más un punto que es un vértice en común, o un punto en el que las dos aristas se cruzan. Dos gráficas topológicas G y H son *debilmente isomorfas* si G y H son isomorfas como gráficas abstractas, y son tales que dos aristas uv y xy se cruzan en G si y sólo si las aristas correspondientes se cruzan en H .

Una gráfica topológica H es subgráfica topológica (o simplemente subgráfica) de una gráfica topológica G si H se obtiene del dibujo de G borrando las aristas y los vértices de G que no pertenecen a H . Un *árbol generador* de una gráfica G es una subgráfica H de G conexa, sin ciclos y que contiene a todos los vértices de G .

Una *gráfica geométrica* es una gráfica topológica G en la que sus aristas son segmentos de recta. Una gráfica geométrica es *gráfica convexa* si su conjunto de vértices P es el conjunto de vértices de un polígono convexo.

Claramente todas las gráficas convexas completas con el mismo número de vértices son debilmente isomorfas entre si. Esto nos permite pensar en cualquier gráfica convexa completa con n vértices como la gráfica G_n cuyos n vértices v_1, v_2, \dots, v_n son los vértices de un polígono regular y que están ordenados cíclicamente como en la figura 1.

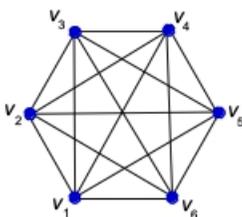


FIGURA 1. G_6

La gráfica G_n tiene el máximo número posible de cruces $\binom{n}{2}$, entre todas las gráficas topológicas con n vértices. Otra familia de gráficas topológicas con esa propiedad (ahora llamadas *gráficas torcidas*) fue descubierta por Harborth y Mengersen [2]. Una gráfica topológica completa G con $n \geq 3$ vértices v_1, v_2, \dots, v_n es *gráfica torcida* si

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C05.

Palabras clave. Árbol Biplanar, Gráfica Topológica, Gráfica Convexa, Gráfica Torcida.

dos aristas $v_i v_j$ y $v_s v_t$ (con $i < j$ y $s < t$) se cruzan si y sólo si $i < s < t < j$ o $s < i < j < t$.

Denotamos por T_n a la gráfica torcida con vértices v_1, v_2, \dots, v_n sobre una recta horizontal en la que las aristas están dibujadas como en la figura 2.

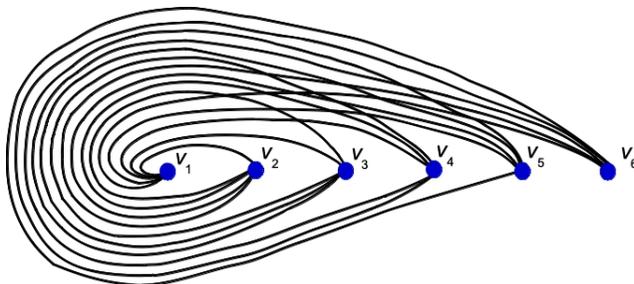


FIGURA 2. La gráfica torcida T_6 .

También es claro que toda gráfica torcida con $n \geq 3$ vértices es debilmente isomorfa a la gráfica T_n .

El estudio de las gráficas torcidas y su relación con las gráficas convexas surgió con el siguiente resultado de Pach *et al.* [3].

TEOREMA 1. *Existe una constante c tal que toda gráfica topológica completa con n vértices contiene una subgráfica con $m = \log^{1/8} n$ vértices que es debilmente isomorfa a C_m o a T_m .*

Sea $n \geq 3$ un entero. De acuerdo a Figueroa y Fresán-Figueroa [1], un árbol abstracto R con n vértices v_1, v_2, \dots, v_n es *árbol biplanar* si los correspondientes árboles generadores R' y R'' de G_n y T_n , respectivamente, son árboles planos. Ver figura 3.

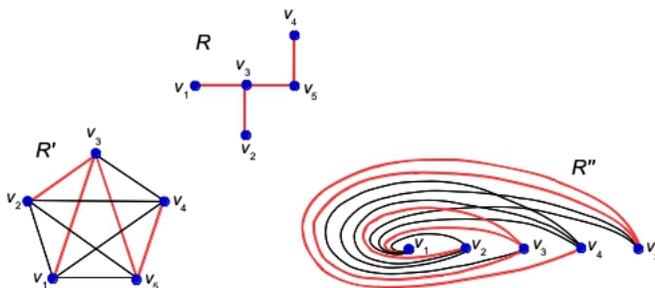


FIGURA 3. Árbol biplanar R .

Para cada entero $n \geq 3$ sea F_n la gráfica topológica con vértices v_1, v_2, \dots, v_n sobre una línea horizontal en la que las aristas están dibujadas como en la figura 4.

Decimos que dos aristas $e = v_i v_j$ y $f = v_s v_t$ de F_n están anidadas si $i < s < t < j$ o $s < i < j < t$, ver figura 5 (derecha). Notemos que dos aristas $e = v_i v_j$ y $f = v_s v_t$ de F_n se cruzan si $i < s < j < t$ o $s < i < t < j$.

Sea G una subgráfica de G_n . La subgráfica correspondiente G' de F_n es tal que dos aristas $v_i v_j$ y $v_s v_t$ se cruzan en G si y sólo si las correspondientes aristas se cruzan en G' . Asimismo si H es subgráfica de T_n , entonces la subgráfica correspondiente H' de

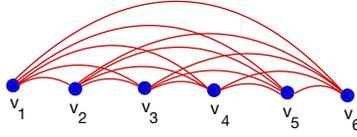


FIGURA 4. F_6 .

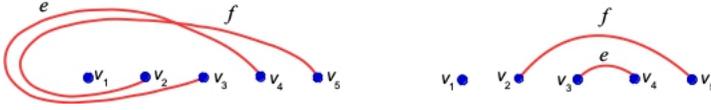


FIGURA 5. e y f se cruzan en H (izquierda) y están anidadas en H' (derecha).

F_n es tal que dos aristas $v_i v_j$ y $v_s v_t$ se cruzan en H si y sólo si las correspondientes aristas están anidadas en H' . Ver figura 5.

De esta forma los árboles biplanares corresponden a los árboles generadores de F_n que no tienen pares de aristas que se cruzan y no tienen pares de aristas anidadas. Figueroa y Fresán-Figueroa [1] dieron una caracterización geométrica de los árboles biplanares con $n \geq 3$ vértices. Ver sección 2.

En el mismo trabajo Figueroa y Fresán-Figueroa definieron *la gráfica de árboles biplanares* \mathcal{B}_n como la gráfica abstracta en la que los vértices son los árboles biplanares con n vértices y en la que dos árboles R y S son adyacentes si existen aristas r de R y s de S tales que $S = (R - r) + s$, ver figura 6.

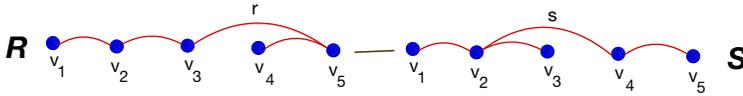


FIGURA 6. R y S son adyacentes en \mathcal{B}_5 .

Figueroa y Fresán-Figueroa demostraron que \mathcal{B}_n siempre es conexa, que tiene radio igual a $n - 2$ y diámetro igual a $2n - 5$.

En su definición de adyacencia en \mathcal{B}_n , Figueroa y Fresán-Figueroa permiten que las dos aristas r y s que se intercambian para obtener S de R se crucen o estén anidadas en F_n . Por ejemplo: las aristas r y s de la figura 6 se cruzan en F_5 . En este trabajo consideramos la subgráfica $\overline{\mathcal{B}}_n$ de \mathcal{B}_n en la que dos árboles R y S son adyacentes si S se obtiene de R sustituyendo una arista r de R por una arista s de S , en donde las aristas r y s no se cruzan ni están anidadas en F_n . El propósito de este trabajo es dar demostraciones elementales de que $\overline{\mathcal{B}}_n$ es conexa y de que el radio y el diámetro de $\overline{\mathcal{B}}_n$ también son iguales $n - 2$ y a $2n - 5$, respectivamente.

2. CONEXIDAD DE $\overline{\mathcal{B}}_n$ Y COTAS SUPERIORES PARA RADIO Y DIÁMETRO DE $\overline{\mathcal{B}}_n$

La siguiente caracterización de los árboles biplanares fue dada por Figueroa y Fresán-Figueroa [1]. Nosotros basamos nuestras demostraciones en esa caracterización.

Sea R un árbol biplanar con $n \geq 3$ vértices v_1, v_2, \dots, v_n . Como R es un árbol, existe una única trayectoria $v_1 = w_0, w_1, \dots, w_l = v_n$ (llamada *cuerpo de R*) que une v_1 con v_n en R .

Ya que el árbol R no tiene pares de aristas anidadas en F_n , entonces para $t = 0, 1, \dots, l - 1$, R no tiene aristas $v_i v_j$ con v_i y v_j entre w_t y w_{t+1} .

Por otro lado R no tiene pares de aristas que se cruzan en G_n por lo que para $t = 0, 1, \dots, l - 1$, todo vértice v_i , entre w_t y w_{t+1} unicamente es adyacente en R a w_t o a w_{t+1} .

Por lo anterior para $t = 1, 2, \dots, l$, existen enteros no negativos a_t y b_t tales que los vértices $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+a_t}$ son adyacentes a w_t en R y los vértices $v_{s-b_t}, v_{s-(b_t-1)}, \dots, v_{s-1}$ son adyacentes a w_{t+1} en R , en donde $w_t = v_r$ y $w_{t+1} = v_s$. Ver figura 7

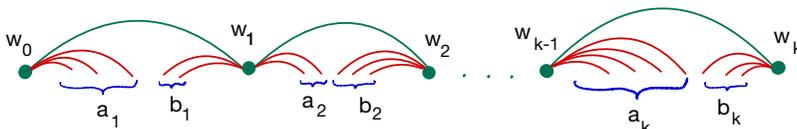


FIGURA 7. Árbol biplanar

Para $n \geq 3$ sea P_n el árbol biplanar con aristas $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$. Ver figura 8.

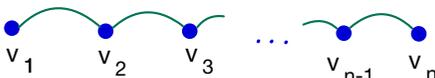


FIGURA 8. P_n .

Para cualquier par de árboles biplanares R y S denotamos por $d(R, S)$ la distancia de R a S en $\overline{\mathcal{B}}_n$.

Sea R un árbol biplanar con $n \geq 3$ vértices. Denotamos por $k(R)$ al número de vértices en el cuerpo de R y por $m(R)$ al entero no negativo $n - k(R)$.

LEMA 2. Para todo árbol biplanar R con $n \geq 3$ vértices, $d(R, P_n) \leq m(R)$.

Demostración. Si $m(R) = 0$, entonces $k(r) = n$ lo cual implica $R = P_n$. Continuamos la demostración por inducción matemática en $m(R)$ suponiendo que para cierto entero $l \geq 0$ se cumple $d(Q, P_n) \leq m(Q)$ si Q es árbol biplanar con n vértices tal que $m(Q) = l$.

Sea R un árbol biplanar con n vértices tal que $m(R) = l + 1$. Sea $v_1 = w_0, w_1, \dots, w_{k(R)-1} = v_n$ el cuerpo de R . Como $k(R) = n - m(R) < n$ podemos escoger t tal que el número de vértices $a_t + b_t$, entre w_t y w_{t+1} , es mayor que cero. Sin perder generalidad suponemos $a_t > 0$.

Sea $Q = (R - w_t w_{t+1}) + v_{r+a_t} w_{t+1}$, en donde $w_t = v_r$. Ver figura 9 para el caso $b_t = 0$ y figura 10 para el caso $b_t > 0$.

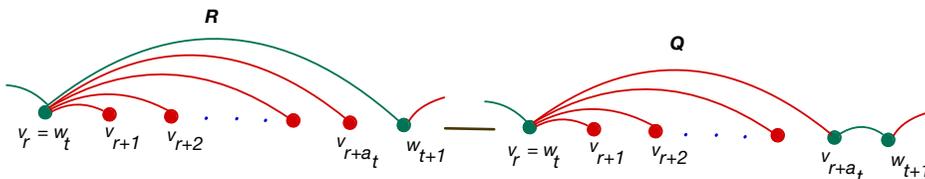


FIGURA 9. Caso $b_t = 0$

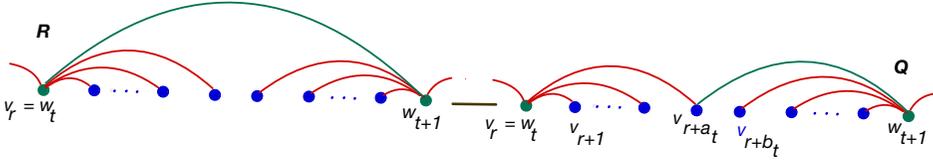


FIGURA 10. Caso $b_t > 0$.

En ambos casos Q es un árbol biplanar pues satisface las condiciones en la caracterización de éstos. Notemos que Q tiene n vértices y es tal que $m(Q) = m(R) - 1 = l$ pues las aristas $w_t v_{r+a_t}$ y $v_{r+a_t} w_{t+1}$ están en el cuerpo de Q . Por la hipótesis de inducción $d(Q, P_n) \leq m(Q)$.

Las aristas intercambiadas $w_t w_{t+1}$ y $v_{r+a_t} w_{t+1}$ tienen un vértice en común por lo que ni se cruzan ni están anidadas en F_n . Por lo tanto R y Q son adyacentes en $\overline{\mathcal{B}}_n$. Entonces:

$$\begin{aligned} d(R, P_n) &\leq d(R, Q) + d(Q, P_n) \\ &\leq 1 + m(Q) \\ &= m(R) \end{aligned}$$

□

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 3. *Para todo entero $n \geq 3$, la gráfica $\overline{\mathcal{B}}_n$ es conexa y tiene radio $Rad(\overline{\mathcal{B}}_n)$ a lo más $n - 2$.*

Demostración. Por el lema 2, para todo árbol biplanar R con n vértices, existe una trayectoria en $\overline{\mathcal{B}}_n$ que une R con P_n . Esto implica que $\overline{\mathcal{B}}_n$ es conexa. Sea R un árbol biplanar con $n \geq 3$ vértices. Como $k(R) \geq 2$, necesariamente $m(R) \leq n - 2$. Por el lema 2, $d(R, P_n) \leq n - 2$ por lo que $Rad(\overline{\mathcal{B}}_n) \leq n - 2$. □

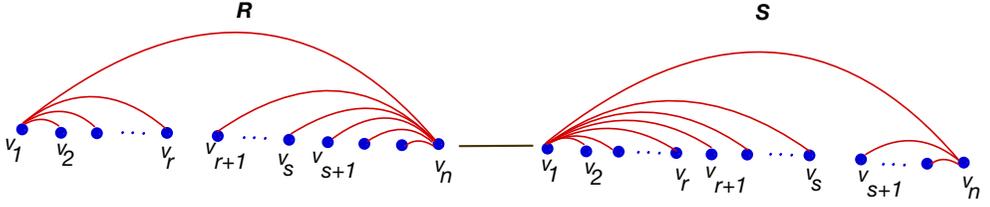
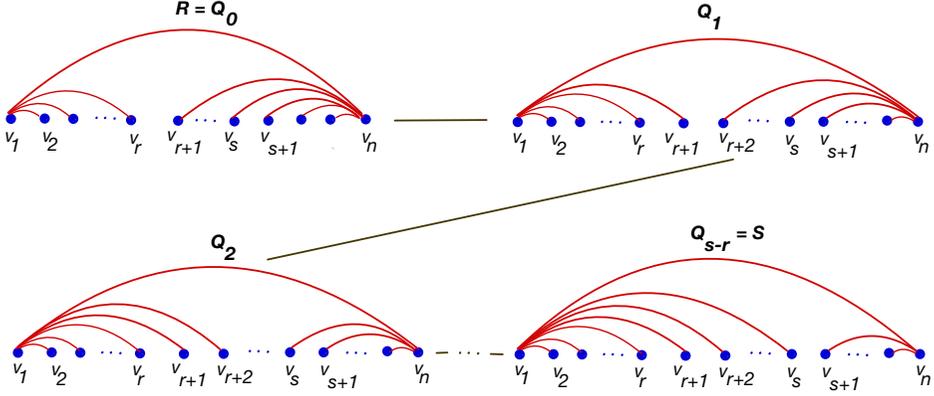
Sean R y S árboles bipolares con vértices v_1, v_2, \dots, v_n , $n \geq 3$. Entonces

$$\begin{aligned} d(R, S) &\leq d(R, P_n) + d(P_n, S) \\ &\leq m(R) + m(S) \\ &\leq (n - 2) + (n - 2) \\ &= 2n - 4 \end{aligned}$$

Supongamos $d(R, S) = 2n - 4$. Por lo anterior $m(R) = n - 2$ y $m(S) = n - 2$, de donde $k(R) = 2$ y $k(S) = 2$; esto implica que el cuerpo de R y de S consta de la arista $v_1 v_n$. Entonces existen enteros $1 \leq r \leq n$ y $1 \leq s \leq n$ tales que R contiene a las aristas $v_1 v_i$ con $i = 2, 3, \dots, r$ y a las aristas $v_j v_n$ con $j = r + 1, r + 2, \dots, n - 1$ y S contiene a las aristas $v_1 v_i$ con $i = 2, 3, \dots, s$ y a las aristas $v_j v_n$ con $j = s + 1, s + 2, \dots, n - 1$. Sin perder generalidad suponemos $r < s$. Ver figura 11.

Una pareja a la vez, intercambiamos primero la arista $v_{r+1} v_n$ y la arista $v_1 v_{r+1}$; posteriormente, si $s > r + 1$, intercambiamos la arista $v_{r+2} v_n$ y la arista $v_1 v_{r+2}$ y así sucesivamente hasta intercambiar la arista $v_s v_n$ y la arista $v_1 v_s$. Aquí también cada par de aristas intercambiadas tienen un vértice en común lo cual implica que no se cruzan ni están anidadas.

De esta manera obtenemos una sucesión de árboles bipolares $R = Q_0, Q_1, \dots, Q_{s-r} = S$ tal que Q_{i+1} es adyacente a Q_i en $\overline{\mathcal{B}}_n$ para $i = 0, 1, \dots, s - r - 1$. Ver figura 12.

FIGURA 11. Árboles R y S con $k(R) = k(S) = 2$.FIGURA 12. $R = Q_0, Q_1, \dots, Q_{s-r} = S$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d(R, S) &= d(Q_0, Q_{s-r}) \\ &\leq s - r \\ &\leq n - 2 \end{aligned}$$

lo cual contradice $d(R, S) = 2n - 4$ pues $n \geq 3$. Por lo tanto $d(R, S) \leq 2n - 5$.

Con el argumento anterior hemos probado el siguiente teorema:

TEOREMA 4. *Para todo entero $n \geq 3$, el diámetro $\text{Diam}(\overline{\mathcal{B}_n})$ de $\overline{\mathcal{B}_n}$ es a lo más $2n - 5$.*

3. COTAS INFERIORES PARA $\text{Rad}(\overline{\mathcal{B}_n})$ Y $\text{Diam}(\overline{\mathcal{B}_n})$

Sean S_n^1 y S_n^2 las estrellas con n vértices con centro en v_1 y v_2 , respectivamente.

Como P_n y S_n^1 solamente tienen en común a la arista v_1v_2 , necesariamente $d(S_n^1, P_n) \geq n - 2$. Por lo tanto $\text{Rad}(\overline{\mathcal{B}_n}) \geq n - 2$.

Sea $S_n^1 = R_0, R_1, R_2, \dots, R_d = S_n^2$ una trayectoria de longitud $d = d(S_n^1, S_n^2)$ que une S_n^1 con S_n^2 en $\overline{\mathcal{B}_n}$ y sea t el menor subíndice tal que R_t contiene una arista de la forma v_2v_j con $j \geq 3$.

Notemos que:

1. La arista v_2v_j de R_t forma un ciclo en F_n con las aristas v_1v_2 y v_1v_j de S_n^1 . Ver figura 13.

Como R_t no tiene ciclos, al menos una de las aristas v_1v_2 o v_1v_j de S_n^1 no es arista de R_t .

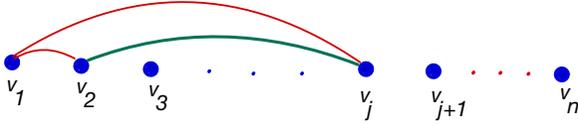


FIGURA 13. Las aristas v_2v_j, v_1v_2 y v_1v_j forman un ciclo.

2. Si $j > 3$, entonces la arista v_2v_j de R_t cruza en F_n a las aristas $v_1v_3, v_1v_4, \dots, v_1v_{j-1}$ de S_n^1 . Ver figura 14.

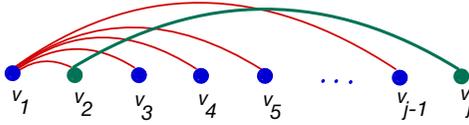


FIGURA 14. La arista v_2v_j cruza a las aristas $v_1v_3, v_1v_4, \dots, v_1v_{j-1}$.

Como R_t no tiene aristas que se cruzan en F_n , necesariamente las $j - 3$ aristas $v_1v_3, v_1v_4, \dots, v_1v_{j-1}$ de S_n^1 no son aristas de R_t .

3. Si $j < n$, entonces la arista v_2v_j de R_t está anidada con las aristas $v_1v_{j+1}, v_1v_{j+2}, \dots, v_1v_n$ de S_n^1 . Ver figura 15.

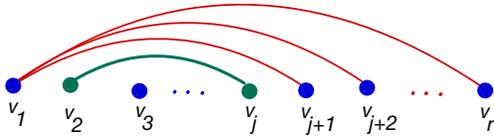


FIGURA 15. La arista v_2v_j está anidada con cada una de las aristas $v_1v_{j+1}, v_1v_{j+2}, \dots, v_1v_n$.

Como R_t no tiene aristas anidadas, necesariamente las $n - j$ aristas $v_1v_{j+1}, v_1v_{j+2}, \dots, v_1v_n$ de S_n^1 no son aristas de R_t .

Por 1, 2 y 3, el árbol R_t no tiene al menos $1 + (j - 3) + (n - j) = n - 2$ aristas de S_n^1 ; esto implica $t \geq n - 2$.

Finalmente, por la elección de t , el árbol R_t tiene a lo más dos aristas (v_2v_1 y $e = v_2v_j$) de S_n^2 por lo que se requieren al menos $n - 3$ intercambios de aristas para obtener el árbol S_n^2 a partir del árbol R_t . Entonces $d - t \geq n - 3$, lo cual implica $d(S_n^1, S_n^2) = d \geq t + (n - 3) \geq 2n - 5$. Por lo tanto $Diam(\overline{\mathcal{B}}_n) \geq 2n - 5$.

Como las cotas superiores e inferiores de $Rad(\overline{\mathcal{B}}_n)$ y $Diam(\overline{\mathcal{B}}_n)$ coinciden, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 5. *Para todo entero $n \geq 3$, $Rad(\overline{\mathcal{B}}_n) = n - 2$ y $Diam(\overline{\mathcal{B}}_n) = 2n - 5$.*

REFERENCIAS

[1] A. P. Figueroa y J. Fresán- Figueroa, The biplanar tree graph, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 26 (2020), 795–806.
 [2] H. Harborth, I Mengersen, Drawings of the complete graph with maximum number of crossings, in *Proceedings of the Twenty-Third Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, (Boca Raton, Fl 1992), Congressus Numerantium 88, Utilitas Math., Winnipeg, 1992, 225–228.

- [3] J. Pach, J. Solymosi, G. Tóth, Unavoidable configurations in complete topological graphs, *Discrete Comput Geom* 30 (2003), 311–320.

Elsa P. Omaña Pulido

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.

e-mail: eop@xanum.uam.mx

Eduardo Rivera Campo

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.

e-mail: erc@xanum.uam.mx



PERTURBACIÓN UNIDIMENSIONAL DE RELACIONES AUTOADJUNTAS

JOSUÉ I. RIOS-CANGAS

RESUMEN. En la teoría de transformaciones lineales que se aborda en los cursos clásicos del álgebra lineal, siempre consideran equivalente las nociones de ser simétrica y autoadjunta. Sin embargo, esta equivalencia no sucede si el dominio de la transformación no es todo el espacio vectorial. Este tipo de transformaciones siempre tienen extensiones autoadjuntas que son transformaciones lineales multivaluadas o también conocidas como relaciones. Mediante la teoría de perturbación de transformaciones lineales multivaluadas autoadjuntas, en este trabajo analizamos las extensiones autoadjuntas de transformaciones lineales multivaluadas simétricas, y en particular, de transformaciones lineales cuyo dominio no necesariamente es todo el espacio vectorial.

1. INTRODUCCIÓN

Con frecuencia encontramos que los problemas del análisis, la geometría diferencial, el análisis funcional, los sistemas dinámicos, la física teórica, entre otras importantes teorías, se pueden reducir a un problema de matrices. Este comportamiento es de interés en las ramas de la matemática aplicada, debido a que resulta más factible resolver un problema de matrices que el problema de origen. Horn - Johnson [9, 10] y Bhatia [3, 2] desarrollaron una teoría exhaustiva del análisis matricial, en donde incluye resultados modernos con numerosas pruebas simplificadas de resultados clásicos, basados en publicaciones o al aporte de alumnos, ayudantes y profesores de todos los cursos del álgebra lineal y temas afines.

Una parte que resalta en la teoría de matrices es la teoría de transformaciones lineales (u operadores lineales) en espacios vectoriales de dimensión finita. Recordemos que una transformación lineal $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, donde \mathcal{H} es un espacio vectorial sobre el campo de los complejos \mathbb{C} , es una aplicación que satisface

$$(1) \quad T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g, \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } f, g \in \mathcal{H}.$$

Las matrices y las transformaciones lineales están estrechamente relacionadas. De hecho, si $\dim \mathcal{H} = n$ entonces la transformación (1) se puede representar como una matriz en $M_n(\mathbb{C})$ (espacio de matrices complejas de tamaño $n \times n$). Inversamente, toda matriz A en $M_n(\mathbb{C})$ se puede ver como una transformación lineal $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

En los cursos clásicos del álgebra lineal usualmente se considera el dominio de las transformaciones lineales como todo el espacio vectorial y se deja este análisis de dominio en cursos más avanzados de licenciatura o de posgrado como los cursos del análisis funcional, teoría de operadores lineales o teoría espectral de operadores (por mencionar algunos), en donde el dominio del operador lineal actúa en espacios vectoriales de dimensión infinita. Sin embargo, existen ejemplos de transformaciones lineales que no pueden ser analizados con la teoría clásica del álgebra lineal. Por ejemplo, si consideramos a $\mathbb{C}_n[x]$ como el espacio de los polinomios de grado menor o igual a $n \in \mathbb{N}$ en variable la x y el operador de multiplicación por la variable independiente $J: \mathcal{D}(J) \subset \mathbb{C}_n[x] \rightarrow \mathbb{C}_n[x]$ dado por

$$(2) \quad Jp(x) = xp(x),$$

2010 *Mathematics Subject Classification*. Principal 15A04, 47A06; Secundaria 47B25, 47A55.
Palabras clave. Transformaciones lineales, relaciones autoadjuntas, teoría de perturbación.

uno puede calcular de manera simple que J es una transformación lineal. Note que hemos hecho énfasis en el dominio de J debido a lo siguiente: como $\{1, \dots, x^n\}$ es una base para $\mathbb{C}_n[x]$, se tiene de (2) que

$$J1 = x, \quad Jx = x^2, \dots, \quad Jx^{n-1} = x^n, \quad \text{pero } Jx^n \text{ no está definido}$$

ya que $x^{n+1} \notin \mathbb{C}_n[x]$ y $\mathcal{D}(J) = \text{span}\{1, \dots, x^{n-1}\} \neq \mathbb{C}_n[x]$. Además, si equipamos a $\mathbb{C}_n[x]$ con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es decir, si lo convertimos en un espacio de Hilbert, podemos construir una base ortonormal $\{e_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$ para $\mathbb{C}_n[x]$ mediante el proceso de Gram-Schmidt aplicado a $\{x^j\}_{j=0}^{n-1}$. De esto se sigue que el dominio de (2) satisface $\mathcal{D}(J) = \text{span}\{e_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$ y de manera sencilla se verifica que $\langle p(x), Jp(x) \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $p(x) \in \mathcal{D}(J)$, es decir J es una transformación lineal simétrica. Por otra parte, existen $a_j \in \mathbb{R}$ y $b_j > 0$ tales que (ver proposición 15 de la sección 5)

$$Je_j(x) = b_j e_{j+1}(x) + a_j e_j(x) + b_{j-1} e_{j-1}(x), \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (b_{-1} = 0)$$

De esta manera, uno puede calcular la representación matricial de J , dada por

$$(3) \quad \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & * \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & * \end{pmatrix}.$$

En los cursos de álgebra lineal nos enseñan que una transformación lineal simétrica es autoadjunta, pero esto no sucede con la transformación (2), ya que su representación (3) no es autoadjunta. De hecho, ni siquiera tiene sentido la adjunta de J en teoría clásica del álgebra lineal (incluso ni en teoría de operadores lineales).

Lo anterior es un ejemplo de transformación lineal con dominio no densamente definido en el espacio vectorial y este tipo de transformaciones motivaron a von Neumann a introducir la teoría de transformaciones multivaluadas (o también conocidas como relaciones lineales). Esto por la necesidad de trabajar con la adjunta de una transformación lineal no densamente definida. Es increíble que Neumann no solamente fue el pionero de la teoría de extensiones de operadores simétricos, más también de la teoría de transformaciones multivaluadas iniciada en su trabajo [13], y posteriormente desarrollada en [1, 6, 7].

Hoy en día encontramos numerosos trabajos sobre transformaciones multivaluadas, la cual busca dar solución a problemas lineales y de extensión que son difíciles o imposibles de resolver con la teoría clásica de operadores lineales. En este trabajo abordamos la teoría de extensión de transformaciones lineales simétricas multivaluadas a través de la teoría de perturbación unidimensional (ver sección 4), ya que estas transformaciones siempre tiene extensiones autoadjuntas [12, prop. 4.10]. Para lograr esto, en la sección 2 damos una serie de conceptos y resultados básicos sobre transformaciones multivaluadas, mientras que la sección 3 un poco de teoría de transformaciones simétricas multivaluadas. La última sección la dedicamos en mostrar las extensiones autoadjuntas del operador (2) o equivalente a encontrar las matrices autoadjuntas que contengan a la matriz (3).

2. TRANSFORMACIONES LINEALES MULTIVALUADAS

Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial finito-dimensional sobre el campo de los números complejos \mathbb{C} , siendo el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ anti-lineal en su primera entrada.

Para trabajar con transformaciones lineales multivaluadas es necesario trabajar en el espacio vectorial que es copia de \mathcal{H} consigo mismo (c.f. [4, sec. 2.3]),

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : f, g \in \mathcal{H} \right\}, \quad \text{con} \quad \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle := \langle f, u \rangle + \langle g, v \rangle.$$

Es fácil verificar que el producto anterior de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ es un producto interno y por consiguiente induce una norma que es equivalente a la norma $\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\| = \|f\| + \|g\|$. Así, la convergencia en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ implica la convergencia en cada una de sus entradas.

Definición 1. Una *transformación lineal multivaluada* (o también llamada relación) T en \mathcal{H} es un conjunto lineal de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, donde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T) &:= \left\{ f \in \mathcal{H} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}, & \mathcal{R}(T) &:= \left\{ g \in \mathcal{H} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}, \\ \mathcal{N}(T) &:= \left\{ f \in \mathcal{H} : \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in T \right\}, & \mathcal{M}(T) &:= \left\{ g \in \mathcal{H} : \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}, \end{aligned}$$

representan el *dominio*, *rango*, *núcleo* y *multivaluado* de T , respectivamente, los cuales son conjuntos lineales de \mathcal{H} .

De esta manera, al hablar de una relación en \mathcal{H} nos estamos refiriendo a un conjunto lineal de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Ejemplo 1. Abusando un poco de la notación, si identificamos a la transformación lineal [\[2\]](#) con su gráfica en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ (cf. [\[4\]](#), cap. 3)], tenemos que

$$(4) \quad J = \left\{ \begin{pmatrix} p(x) \\ xp(x) \end{pmatrix} : p(x) \in \text{span} \{x^j\}_{j=0}^{n-1} \right\} \subset \mathbb{C}_n[x] \oplus \mathbb{C}_n[x].$$

Entonces, para $\begin{pmatrix} p(x) \\ xp(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q(x) \\ xq(x) \end{pmatrix} \in J$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se sigue que

$$\alpha \begin{pmatrix} p(x) \\ xp(x) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} q(x) \\ xq(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p(x) + \beta q(x) \\ x(\alpha p(x) + \beta q(x)) \end{pmatrix} \in J.$$

Por lo tanto, J es una relación en $\mathbb{C}_n[x] \oplus \mathbb{C}_n[x]$.

Observación 1. El ejemplo [\[1\]](#) se cumple de manera general, i.e., toda transformación lineal $T: \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ identificada con su gráfica es una relación en \mathcal{H} .

El inverso de la observación anterior no se cumple, pues es simple ver que para $f \in \mathcal{H}$ distinto de cero, $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \right\}$ es una relación en \mathcal{H} que no representa la gráfica de una transformación lineal. De hecho se cumple la siguiente caracterización.

Observación 2. Una relación T en \mathcal{H} es gráfica de una transformación lineal si y solo si $\mathcal{M}(T) = \{0\}$ [\[5\]](#) prop. 3.2.1].

A partir de aquí, las transformaciones lineales serán identificadas con su gráfica para tratarlas como relaciones. Diremos que una relación no es transformación lineal si no es la gráfica de una transformación lineal.

Ejemplo 2. El conjunto T de $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ dado por

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} (x, y) \\ (x + y, a) \end{pmatrix} : x, y, a \in \mathbb{C} \right\}.$$

es una relación que no es transformación lineal. En efecto, si $\begin{pmatrix} (x, y) \\ (x + y, a) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (r, s) \\ (r + s, b) \end{pmatrix} \in T$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces

$$\alpha \begin{pmatrix} (x, y) \\ (x + y, a) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} (r, s) \\ (r + s, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha x + \beta r, \alpha y + \beta s) \\ (\alpha x + \beta r + \alpha y + \beta s, \alpha a + \beta b) \end{pmatrix} \in T.$$

Sin embargo, para $\alpha \neq 0$ se sigue que $\begin{pmatrix} (0, 0) \\ (0, \alpha) \end{pmatrix} \in T$, o bien, $\mathcal{M}(T) \neq \{(0, 0)\}$.

Para dos relaciones T, S y $\zeta \in \mathbb{C}$, consideremos las operaciones *suma*, *multiplicación por escalar*, *composición* e *inversa* de relaciones dadas por

$$\begin{aligned} T + S &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g + h \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T, \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in S \right\}, & \zeta T &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \zeta g \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}, \\ ST &:= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T, \begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix} \in S \right\}, & T^{-1} &:= \left\{ \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}, \end{aligned}$$

respectivamente, las cuales son relaciones en \mathcal{H} . Es directo ver que

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}(T^{-1}) &= \mathcal{R}(T), & \mathcal{N}(T^{-1}) &= \mathcal{M}(T), \\ \mathcal{R}(T^{-1}) &= \mathcal{D}(T), & \mathcal{M}(T^{-1}) &= \mathcal{N}(T). \end{aligned}$$

La relación $T|_{\mathcal{C}}$ es la relación T con dominio restringido a un conjunto lineal $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(T)$.

Definición 2. Para dos relaciones T, S , decimos que S es extensión de T , escribimos $T \subset S$, si $S|_{\mathcal{D}(T)} = T$.

Ejemplo 3 (continuación del ejemplo [1](#)). Teniendo en cuenta la representación matricial [3](#), considere $J_0: \mathbb{C}_n[x] \rightarrow \mathbb{C}_n[x]$ con representación matricial

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

el cual siendo identificado con su gráfica en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ se sigue que J_0 es extensión de J dado en [4](#), debido a que $J_0|_{\mathcal{D}(J)} = J$.

Dos relaciones T y S son linealmente independientes si $T \cap S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. De esto, podemos asumir que los símbolos \perp , $\dot{+}$, \oplus , y \ominus representan la notación estándar en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, es decir,

$$\begin{aligned} T^\perp &= \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : \left\langle \begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}, \\ T \dot{+} S &= \left\{ \begin{pmatrix} f+h \\ g+k \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in S \text{ y } T \cap S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}, \\ T \oplus S &= T \dot{+} S, \text{ con } T \subset S^\perp, \\ T \ominus S &= T \cap S^\perp, \end{aligned}$$

los cuales se vuelven conjuntos lineales en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, o bien, relaciones en \mathcal{H} . Hablando de manera estricta, el símbolo \oplus en este contexto difiere de la expresión $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Esto no debería causar confusión al usar el mismo símbolo.

En el contexto de relaciones, se denota la *adjunta* de una relación T como la relación en \mathcal{H} dada por

$$(6) \quad T^* := \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : \langle h, g \rangle = \langle k, f \rangle, \quad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}.$$

Este concepto extiende al usual en transformaciones lineales, e incluso al de operadores lineales en donde es necesario la densidad del dominio [5](#), sec. 3.4].

Observación 3. La adjunta de T satisface $T^* = (-T^{-1})^\perp$. Además, para dos relaciones T, S y $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, se tiene lo siguiente [11](#), teo. 3 y cor. 4]:

$$\begin{aligned} T^{**} &= T, & (T + S)^* &= T^* + S^*, \\ (T^*)^{-1} &= (T^{-1})^*, & S \subset T &\Rightarrow T^* \subset S^*, \\ (\alpha T)^* &= \bar{\alpha} T^*, & \mathcal{N}(T^*) &= \mathcal{R}(T)^\perp. \end{aligned}$$

Las propiedades de la inversa [5](#) y la última igualdad de la observación [3](#) implican

$$(7) \quad \mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(A^{-1}) \subset \mathcal{N}(A^{*-1})^\perp = \mathcal{M}(A^*)^\perp.$$

En la observación [2](#) mencionamos que el multivaluado de una relación determina si la relación es o no una transformación lineal. Uno se pregunta si una relación contiene una parte que sea transformación lineal, la respuesta incide en la siguiente descomposición.

Definición 3. Para una relación T , considere

$$(8) \quad T_m := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} \quad \text{y} \quad T_o := T \ominus T_m,$$

de donde se consigue la descomposición $T = T_o \oplus T_m$.

Es claro que T_o es una transformación lineal y es llamada la *parte operador* de T , mientras que T_m es una relación puramente multivaluada y es llamada la *parte multivaluada* de T . Además,

$$\mathcal{R}(T_o) \perp \mathcal{R}(T_m) = \mathcal{M}(T) \quad \text{y} \quad \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T_o).$$

La descomposición de una relación es sus partes operador y multivaluada (8) simplifica el análisis de su espectro debido a la siguiente observación.

Observación 4. Si T es una relación tal que $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{M}(T)^\perp$, entonces tanto el dominio como el rango de T_o están contenidos en $\mathcal{M}(T)^\perp$. Así, para el espacio vectorial copia de $\mathcal{M}(T)^\perp$ consigo mismo,

$$(9) \quad \mathcal{M}(T)^\perp \oplus \mathcal{M}(T)^\perp,$$

se sigue que la relación T_T en el espacio (9) dada por

$$T_T := T \cap (\mathcal{M}(T)^\perp \oplus \mathcal{M}(T)^\perp) = T_o,$$

es decir, T_T es equivalente a T_o en el espacio (9) y por consiguiente es una transformación lineal. Con esta construcción se puede afirmar que los espectros de T y de T_T son los mismos [11, teo. 9].

3. TRANSFORMACIONES MULTIVALUADAS SIMÉTRICAS

Abordamos en esta sección un poco de la teoría de transformaciones lineales multivaluadas que son simétricas, i.e., relaciones simétricas. Esto para extender la noción de transformaciones lineales simétricas que no necesariamente son autoadjuntas (ver por ejemplo el operador (2) que se vio en la sección 1).

Definición 4. Se dice que una relación A en \mathcal{H} es simétrica si

$$(10) \quad \langle f, g \rangle \in \mathbb{R}, \quad \text{para todo} \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A.$$

La noción de ser simétrica se caracteriza de la siguiente manera (cf. [11, prop. 10]):

$$(11) \quad A \text{ es simétrica} \iff \langle f, k \rangle = \langle g, h \rangle, \quad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A \iff A \subset A^*.$$

PROPOSICIÓN 5. Una relación simétrica A satisface $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{M}(A)^\perp$ y, por lo tanto, cumple las condiciones de la observación 4.

Demostración. Se sigue de la última implicación de (11) que $\mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}(A^*)$. Por lo tanto, de (7) y tomando complemento ortogonal, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{M}(A^*)^\perp \subset \mathcal{M}(A)^\perp$. \square

Lo siguiente muestra una propiedad del adjunto de una relación simétrica.

PROPOSICIÓN 6. Si A es una relación simétrica en \mathcal{H} , entonces

$$(12) \quad \mathcal{R}(A^* - \zeta I) = \mathcal{H}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Demostración. Como A es simétrica, si $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in (A - \bar{\zeta}I)$ entonces $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in A$ y $\bar{\zeta} \|f\|^2 = \langle f, \bar{\zeta}f \rangle \in \mathbb{R}$, lo que implica $f = 0$, es decir, $\mathcal{N}(A - \bar{\zeta}I) = \{0\}$. Por lo tanto, de la última implicación de la observación 3 se sigue (12). \square

Diremos que una relación A es *autoadjunta* si $A = A^*$. Es claro que toda relación autoadjunta es simétrica, pero el sentido inverso no necesariamente se cumple. Por ejemplo, la transformación (2) que se mostró en la sección 1 es simétrica no autoadjunta, debido a que su representación matricial (3) no es autoadjunta.

COROLARIO 7. *Una relación simétrica con dominio todo el espacio vectorial es una transformación lineal autoadjunta.*

Demostración. Como $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$, se sigue de (7) que $\mathcal{M}(A^*) = \{0\}$ y por consiguiente A^* es una transformación lineal. Ahora bien, (11) implica que si $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$ entonces existe $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in A \subset A^*$, de donde se sigue que $\begin{pmatrix} 0 \\ k-g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in A^*$, o bien, $k = g$ y $A^* \subset A$. Por lo tanto, $A = A^*$. \square

Para trabajar con la teoría de extensión de relaciones simétricas consideramos el *espacio defecto* de una relación T dado por

$$N_\zeta(T) := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in T \right\}, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

el cual es una transformación lineal contenida en T con $\mathcal{D}(N_\zeta(T)) = \mathcal{N}(T - \zeta I)$.

El espacio defecto es útil en la caracterización de la adjunta de una relación simétrica A , viz. (cf. [12, teo. 4.6])

$$(13) \quad A^* = A \dot{+} N_\zeta(A^*) \dot{+} N_{\bar{\zeta}}(A^*), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

donde la suma en (13) se vuelve ortogonal si $\zeta \in \{i, -i\}$. Cabe mencionar que la ecuación (13) se le conoce como la *primera fórmula* de von Neumann para relaciones lineales.

Debido a que el espacio defecto está involucrado en la caracterización de la adjunta de una relación, es conveniente considerar el *índice de defecto* de una relación simétrica A , el cual viene dado por

$$(14) \quad \eta_\zeta(A) := \dim N_\zeta(A^*), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

este índice permanece constante sobre $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ [12, sec. 3].

PROPOSICIÓN 8. *Una relación simétrica A es autoadjunta si y solo si $\eta_\zeta(A) = 0$.*

Demostración. El índice $\eta_\zeta(A)$ es cero si y solo si $N_\zeta(A^*) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, para todo $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, esto si y solo si $A = A^*$, debido a (13). \square

Observación 5. La proposición 8 proporciona una manera de determinar si una relación simétrica es autoadjunta o no. Además, en [12, prop. 4.10] nos aseguran que una relación simétrica no autoadjunta siempre tiene extensiones autoadjuntas.

Surge el interés de describir las extensiones autoadjuntas de una relación simétrica y una manera de hacerlo es mediante la llamada *segunda fórmula* de von Neumann para relaciones [12, teo. 4.7]. Otra manera de describir estas extensiones es a través de la teoría de perturbación la cual se aborda en la siguiente sección.

4. PERTURBACIÓN UNIDIMENSIONAL DE RELACIONES AUTOADJUNTAS

Iniciamos esta sección con la siguiente igualdad entre relaciones que será de gran utilidad en la secuela. Recalamos que dos relaciones son linealmente independientes si solo coinciden en el elemento cero.

LEMA 9. *Si T y S son relaciones linealmente independientes, entonces*

$$(15) \quad T \dot{+} S = (T^* \cap S^*)^*.$$

Demostración. Mostremos primero por contención que

$$(16) \quad T \dot{+} S = (T^\perp \cap S^\perp)^\perp.$$

Si $\mathbf{a} \in T^\perp \cap S^\perp$, entonces es simple ver que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$, para todo $\mathbf{b} \in T \dot{+} S$, es decir, $\mathbf{a} \in (T \dot{+} S)^\perp$ y se cumple $T^\perp \cap S^\perp \subset (T \dot{+} S)^\perp$. Ahora, es claro que $T, S \subset T \dot{+} S$, o bien, $(T \dot{+} S)^\perp \subset T^\perp, S^\perp$, es decir, $(T \dot{+} S)^\perp \subset T^\perp \cap S^\perp$ y por consiguiente iguales,

que tomando complemento ortogonal se llega a (16). Por lo tanto, las propiedades de la observación 3 y (16) implican

$$(17) \quad \begin{aligned} T \dot{+} S &= (-T^{*-1})^\perp \dot{+} (-S^{*-1})^\perp = -(T^{*\perp} \dot{+} S^{*\perp})^{-1} \\ &= -\left((T^* \cap S^*)^\perp\right)^{-1} = -(T^* \cap S^*)^{-1}^\perp = (T^* \cap S^*)^*, \end{aligned}$$

como se queria. \square

Hemos usado libremente en (17) la conmutación de las operaciones multiplicación por menos, inversa y complemento ortogonal de una relación (cf. [11, prop. 2]).

Para una relación A y $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ de norma uno, consideremos las relaciones

$$S_A := A \upharpoonright_{\mathcal{D}(A) \ominus \varphi}, \quad A_\varphi := \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \right\}.$$

LEMA 10. *Las relaciones A^*, A_φ son linealmente independientes. Además,*

- (a) $S_A = A \cap A_\varphi^*$.
- (b) $S_A^* = A^* \dot{+} A_\varphi$.
- (c) $\mathcal{M}(S_A^*) = \mathcal{M}(A^*) \oplus \text{span} \{ \varphi \}$.

Demostración. Teniendo en cuenta (7), se sigue que $\varphi \perp \mathcal{M}(A^*)$, lo que implica $A_\varphi \cap A^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y se cumple la primera parte de la afirmación.

(a): Es sencillo calcular que $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S_A \subset A$ si y solo si $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, 0 \rangle$, esto si y solo si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A_\varphi^* \cap A$.

(b): Se sigue del punto anterior y de la ecuación (15).

(c): Se mostró en la primera parte de la afirmación que $\text{span} \{ \varphi \} \perp \mathcal{M}(A^*)$ y del punto (b) se tiene que $\mathcal{M}(A^*) \oplus \text{span} \{ \varphi \} \subset \mathcal{M}(S_A^*)$. Para la otra contención, si $g \in \mathcal{M}(S_A^*)$ se sigue de (b) que existe $h \in \mathcal{M}(A^*)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que

$$g = h + \alpha \varphi \in \mathcal{M}(A^*) \oplus \text{span} \{ \varphi \},$$

o bien, $\mathcal{M}(S_A^*) \subset \mathcal{M}(A^*) \oplus \text{span} \{ \varphi \}$. \square

Lo siguiente describe las partes (8) de S_A^* .

COROLARIO 11. *Las partes operador y multivaluada de la adjunta de S_A cumplen*

$$(18) \quad (S_A^*)_{\text{m}} = (A^*)_{\text{m}} \oplus A_\varphi; \quad (S_A^*)_{\text{o}} = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g - \langle \varphi, g \rangle \varphi \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (A^*)_{\text{o}} \right\}.$$

Demostración. La primera igualdad de (18) es directo de 10.(c). Ahora, definamos el lado derecho de la segunda igualdad de (18) como T para mostrar que $(S_A^*)_{\text{o}} = T$. De 10.(b) se sigue que $T \subset S_A^*$ y es sencillo ver que T es transformación lineal, pues $(A^*)_{\text{o}}$ lo es, lo que implica $T \subset (S_A^*)_{\text{o}}$. Para la otra contención, si $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in (S_A^*)_{\text{o}} \subset S_A^*$ entonces se tiene nuevamente de 10.(b) que $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g + \alpha \varphi \end{pmatrix}$, con $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (A^*)_{\text{o}}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Note que $f = 0$ implica $0 = h = g + \alpha \varphi$, o bien, $g = \alpha \varphi = 0$, pues A^* y A_φ son linealmente independientes. Así, $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in (A^*)_{\text{o}}$ y de 10.(c) se cumple que $h \perp \varphi$,

$$0 = \langle \varphi, h \rangle = \langle \varphi, g + \alpha \varphi \rangle = \langle \varphi, g \rangle + \alpha,$$

es decir, $h = g - \langle \varphi, g \rangle \varphi$. Por lo tanto, $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in T$ y $(S_A^*)_{\text{o}} \subset T$. \square

Note que la relación $S_A \subset A$ es simétrica si A lo es, ya que $S_A \subset A \subset A^* \subset S_A^*$.

TEOREMA 12. *Si A es una relación simétrica, entonces:*

- (a) $\dim N_\zeta(S_A^*) = \dim N_\zeta(A^*) + 1$, con $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
- (b) $\dim[S_A^*/S_A] = [A^*/A] + 2$.

Demostración. Para $\alpha \in \mathbb{C}$, de (12) existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ tal que $-\alpha\varphi = g - \zeta f$, o bien, $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f - \alpha\varphi \end{pmatrix} \in A^*$. Además, si $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in N_\zeta(S_A^*) \subset S_A^*$ entonces de 10.(b) existen $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g + \alpha\varphi \end{pmatrix}$, viz. $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f - \alpha\varphi \end{pmatrix} \in A^*$. De esto podemos considerar $D = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \zeta f - \alpha\varphi \end{pmatrix} \in A^* : \alpha \in \mathbb{C} \right\} \subset A^*$, el cual es un conjunto lineal con $\dim D = \dim N_\zeta(A^*) + 1$, debido a que A^* y A_φ son linealmente independientes. Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} \gamma: N_\zeta(S_A^*) &\rightarrow D \\ \begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} f \\ \zeta f - \alpha\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que $\gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha\varphi \end{pmatrix}$ implica $\alpha = 0$, debido a independencia lineal de A^* y A_φ . Además, es sencillo ver que $\ker \gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y para $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f - \alpha\varphi \end{pmatrix} \in D$ se tiene que $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \zeta f - \alpha\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha\varphi \end{pmatrix} \in S_A^*$, i.e., $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in N_\zeta(S_A^*)$. Por lo tanto, γ es un isomorfismo y se cumple (a). Además, uno calcula de (13) que

$$\dim[S_A^*/S_A] = 2 \dim N_\zeta(S_A^*) = 2 \dim N_\zeta(A^*) + 2 = [A^*/A] + 2,$$

de donde se sigue (b). □

El punto 12.(b) es equivalente a decir que el índice (ver (14)) de S_A es

$$(19) \quad \eta_\zeta(S_A) = \eta_\zeta(A) + 1, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

En lo siguiente caracterizamos todas las extensiones autoadjuntas de S_A cuando A es relación autoadjunta.

TEOREMA 13. *Si A es una relación autoadjunta, entonces $\eta_\zeta(S_A) = 1$. Además, todas las extensiones autoadjuntas de S_A están en correspondencia uno-a-uno con $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, las cuales vienen dadas por*

$$(20) \quad A_\tau = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g + \tau \langle \varphi, f \rangle \varphi \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A \right\}, \quad \tau \neq \infty,$$

mientras que

$$(21) \quad A_\infty = S_A \dot{+} A_\varphi.$$

Demostración. De la proposición (8) y (19) se sigue la primera parte de la afirmación. Ahora, es sencillo verificar de la definición (10) que las extensiones (20) y (21) son simétricas. Además, para $\tau \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mathcal{D}(A_\tau) = \mathcal{D}(A)$ y

$$S_{A_\tau} = A_\tau \upharpoonright_{\mathcal{D}(A_\tau) \ominus \varphi} = A \upharpoonright_{\mathcal{D}(A) \ominus \varphi} = S_A.$$

De esto y de (19) se cumple que $\eta_\zeta(A_\tau) = \eta_\zeta(S_A) - 1 = 0$, es decir, A_τ es autoadjunta. Por otra parte, como $S_A \subset A$, se cumple de los lemas 9 y 10 que S_A y A_φ son linealmente independientes y $A_\infty^* = S_A^* \cap A_\varphi^*$. Así, si $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} \in A_\infty^* \subset A_\varphi^*, S_A^*$, con $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces $\langle f, \varphi \rangle = \langle \zeta f, 0 \rangle = 0$ y de 10.(b), $\begin{pmatrix} f \\ \zeta f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g + \alpha\varphi \end{pmatrix}$, con $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\zeta \langle f, f \rangle = \langle f, g + \alpha\varphi \rangle = \langle f, g \rangle \in \mathbb{R},$$

lo que implica $f = 0$ y $\eta_\zeta(A_\infty) = 0$, i.e., A_∞ es autoadjunta. Falta mostrar que cualquier extensión autoadjunta tiene la estructura (20) o (21). Si \hat{A} es extensión autoadjunta de S_A entonces $\hat{A} \subset S_A^*$. Así, para $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in \hat{A}$ se cumple de 10.(b) que

$$(22) \quad \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g + \alpha\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Si $f \perp \varphi$ entonces $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S_A$ y $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in A_\infty$. Por lo tanto, $\hat{A} \subset A_\infty$ e iguales, debido a que son autoadjuntas. Para el caso $\langle \varphi, f \rangle \neq 0$, hacemos $\tau = \alpha / \langle \varphi, f \rangle$ en (22), por lo que $h = g + \tau \langle \varphi, f \rangle \varphi$ y como \hat{A}, A son autoadjuntas, $\langle f, h \rangle, \langle f, g \rangle \in \mathbb{R}$ y

$$\langle f, h \rangle = \langle f, g \rangle + \tau \langle \varphi, f \rangle \langle f, \varphi \rangle = \langle f, g \rangle + \tau |\langle \varphi, f \rangle|^2,$$

de donde se sigue $\tau \in \mathbb{R}$ y $\hat{A} \subset A_\tau$. Por lo tanto, $\hat{A} = A_\tau$ ya que son autoadjuntas. \square

Observación 6. En [8, props. 1.3 y 1.4] se menciona que una transformación lineal simétrica S con $\mathcal{D}(S) \neq \mathcal{H}$ e índice $\eta_\zeta(S) = 1$, tiene una extensión autoadjunta A con $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$, que del corolario [7] se cumple que A es una transformación lineal.

COROLARIO 14. *Si S es una transformación lineal con $\mathcal{D}(S) \neq \mathcal{H}$ y $\eta_\zeta(S) = 1$, entonces existe una transformación lineal autoadjunta A tal que*

$$(23) \quad S^* = A \dot{+} (S^*)_{\mathfrak{m}}.$$

Además, $\dim \mathcal{D}(S)^\perp = \dim \mathcal{M}(S^*) = 1$, que haciendo $\mathcal{D}(S)^\perp = \text{span} \{\varphi\}$ se llega a

$$(24) \quad S = A \upharpoonright_{\mathcal{H} \ominus \varphi}.$$

Por lo tanto, $S_A = S$ y todas sus extensiones autoadjuntas vienen dadas por (20)-(21) del teorema [13], las cuales son todas transformaciones lineales a excepción de A_∞ .

Demostración. De la observación [6] se tiene la existencia de una transformación lineal autoadjunta A tal que $S \subset A$ y $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. Además, es directo ver que A y $(S^*)_{\mathfrak{m}}$ son linealmente independientes y como $A \subset S^*$, entonces $A \dot{+} (S^*)_{\mathfrak{m}} \subset S^*$. Por otra parte, como $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$, si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S^*$ entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in A \subset S^*$, lo que implica $\begin{pmatrix} 0 \\ g-h \end{pmatrix} \in (S^*)_{\mathfrak{m}}$ y $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g-h \end{pmatrix} \in A \dot{+} (S^*)_{\mathfrak{m}}$, es decir, $S^* \subset A \dot{+} (S^*)_{\mathfrak{m}}$, de donde se sigue (23). Ahora bien, debido al índice de S se tiene que $\dim N_\zeta(S^*) = 1$ y de [13], $2 = \dim[S^*/S] > \dim[A/S] > 0$ de donde se tiene $\dim[A/S] = 1$ y de [23],

$$1 = \dim[S^*/A] = \dim(S^*)_{\mathfrak{m}} = \dim \mathcal{M}(S^*).$$

Note de [7] que $\dim \mathcal{D}(S)^\perp = 1$. Por lo tanto, [15], [10] (a) y [23] implican [24]. \square

La condición de que S sea una transformación lineal en el corolario [14] no se puede relajar para que tenga codimensión del dominio igual a uno. En efecto, pues para la relación autoadjunta [21], el mismo teorema [13] nos marca que S_{A_∞} tiene índice $\eta_\zeta(S_{A_\infty}) = 1$, pero la codimensión de su dominio es mayor o igual que dos.

5. EJEMPLO

En esta sección abordamos el problema de encontrar las extensiones autoadjuntas de la transformación lineal [2] que se inició en la sección [1]. Recordamos que $(\mathbb{C}_n[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es el espacio de Hilbert de los polinomios de grado menor o igual a $n \in \mathbb{N}$ en la variable x y que el operador de multiplicación por la variable independiente es la transformación lineal simétrica

$$(25) \quad \begin{aligned} J: \text{span} \{e_j(x)\}_{j=0}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{C}_n[x] \\ p(x) &\mapsto xp(x), \end{aligned}$$

donde $\{e_j(x)\}_{j=0}^n$ es la base ortonormal para $\mathbb{C}_n[x]$ construida mediante el proceso de Gram-Schmidt aplicado a $\{x^j\}_{j=0}^n$, cuyos elementos satisfacen

$$(26) \quad e_j(x) = \alpha_{jj}x^j + \text{orden menor}, \quad \alpha_{jj} > 0, \text{ para } j = 0, \dots, n.$$

PROPOSICIÓN 15 (Relación de recurrencia). *Existen $a_j \in \mathbb{R}$ y $b_j > 0$ tales que*

$$(27) \quad Je_j(x) = b_je_{j+1}(x) + a_je_j(x) + b_{j-1}e_{j-1}(x), \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (b_{-1} = 0)$$

Demostración. Como $Je_j(x) \in \mathbb{C}_n[x]$ es un polinomio de grado $j + 1$, entonces se cumple que $Je_j(x) = \sum_{r=0}^{j+1} c_{jr}e_r(x)$, con $c_{jr} \in \mathbb{C}$. Así, para $s = 0, \dots, j - 2$,

$$c_{js} = \langle e_s(x), Je_j(x) \rangle = \langle Je_s(x), e_j(x) \rangle = \sum_{k=0}^{s+1} \bar{c}_{sk} \langle e_k(x), e_j(x) \rangle = 0,$$

lo que implica $Je_j(x) = b_j e_{j+1}(x) + a_j e_j(x) + d_j e_{j-1}(x)$, donde $b_j = c_{j(j+1)}$, $a_j = c_{jj}$ y $d_j = c_{j(j-1)}$. Además, $a_j = \langle e_j(x), Je_j(x) \rangle \in \mathbb{R}$ mientras que de (26),

$$\alpha_{jj} x^{j+1} + \text{orden menor} = x e_j(x) = Je_j(x) = b_j \alpha_{(j+1)(j+1)} x^{j+1} + \text{orden menor},$$

lo cual implica $b_j > 0$. Más aún,

$$d_j = \langle e_{j-1}(x), Je_j(x) \rangle = \langle Je_{j-1}(x), e_j(x) \rangle = b_{j-1},$$

como se quería. \square

Teniendo en cuenta la relación de recurrencia (27), definamos la transformación lineal $J_0: \mathbb{C}_n[x] \rightarrow \mathbb{C}_n[x]$ que actúa como

$$(28) \quad \begin{aligned} J_0 e_0(x) &= b_0 e_1(x) + a_0 e_0(x), \\ J_0 e_j(x) &= b_j e_{j+1}(x) + a_j e_j(x) + b_{j-1} e_{j-1}(x), \quad j = 1, \dots, n-1, \\ J_0 e_n(x) &= b_{n-1} e_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Es directo calcular que J_0 es simétrica y por ende autoadjunta, debido al corolario 7.

Observe que $J_0|_{\mathbb{C}_n[x] \ominus e_n(x)} = J$ y si identificamos a los operadores J y J_0 con su gráfica (ver ejemplo 1), entonces el lema 10, teorema 12 y corolario 11 implican que el operador de multiplicación (25) tiene índice $\eta_\zeta(J) = 1$ y adjunta

$$J^* = J_0 \dot{+} \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e_n(x) \end{pmatrix} \right\},$$

cuyas partes operador y multivaluada son $(J^*)_m = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e_n(x) \end{pmatrix} \right\}$ y

$$(29) \quad (J^*)_o = \left\{ \left(J_0 p(x) - b_{n-1} p_{n-1} e_n(x) \right) : p(x) = \sum_{j=0}^n p_n e_n(x) \in \mathbb{C}_n[x] \right\}.$$

Ciertamente, pues se tiene de (28) que $\langle e_n(x), J_0 p(x) \rangle = \langle J_0 e_n(x), p(x) \rangle = b_{n-1} p_{n-1}$, por lo que el lado derecho de (18) implica (29).

Además, se sigue del teorema 13 que todas las extensiones autoadjuntas de J están en correspondencia unívoca con $\tau \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y éstas vienen dadas por

$$(30) \quad J_\tau = \left\{ \left(J_0 p(x) \begin{matrix} p(x) \\ + \tau p_n e_n(x) \end{matrix} \right) : p(x) = \sum_{j=0}^n p_n e_n(x) \in \mathbb{C}_n[x] \right\}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

las cuales son transformaciones lineales, mientras que

$$J_\infty = J \dot{+} \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e_n(x) \end{pmatrix} \right\},$$

es una relación que no es transformación lineal.

Observación 7. El dominio de las transformaciones lineales (29) y (30) es $\mathbb{C}_n[x]$ y éstas actúan de la siguiente manera:

$$(31) \quad \begin{aligned} (J^*)_o p(x) &= J_0 p(x) - b_{n-1} p_{n-1} e_n(x); \\ J_\tau p(x) &= J_0 p(x) + \tau p_n e_n(x), \quad (\tau \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

lo que implica que son perturbaciones unidimensionales de J_0 . Además, las representaciones matriciales de (31) son

$$(32) \quad \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & \tau \end{pmatrix},$$

respectivamente. Es claro que la matriz derecha de (32) (que representa a J_τ) extiende la representación matricial de J mostrada en (3).

AGRADECIMIENTOS. Trabajo parcialmente apoyado por los proyectos CONACYT-México CBF2023-2024-1842 y UAM-DAI 2024: “Enfoque Analítico-Combinatorio y su Equivalencia de Estados Gaussianos”. El autor expresa su gratitud al árbitro anónimo por su atenta lectura, comentarios y recomendaciones sobre el manuscrito.

REFERENCIAS

- [1] Richard Arens, *Operational calculus of linear relations*, Pacific J. Math. **11** (1961), 9–23. MR 0123188 (23 #A517)
- [2] Rajendra Bhatia, *Matrix analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 169, Springer-Verlag, New York, 1997. MR 1477662
- [3] ———, *Positive definite matrices*, paperback ed., Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007. MR 3443454
- [4] M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchév and V. Peller. MR 1192782 (93g:47001)
- [5] Jorge R. Bolaños Servín, Roberto Quezada, and Josué I. Ríos-Cangas, *Elementos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*, Revista Metropolitana de Matemáticas Mixba'al, **14** (2023), no. 1, 143–222.
- [6] Earl A. Coddington, *Extension theory of formally normal and symmetric subspaces*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 134. MR 0477855
- [7] A. Dijksma and H. S. V. de Snoo, *Self-adjoint extensions of symmetric subspaces*, Pacific J. Math. **54** (1974), 71–100. MR 0361889 (50 #14331)
- [8] Seppo Hassi and Henk de Snoo, *One-dimensional graph perturbations of selfadjoint relations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **22** (1997), no. 1, 123–164. MR 1430397 (97m:47025)
- [9] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Corrected reprint of the 1991 original. MR 1288752
- [10] ———, *Matrix analysis*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2013. MR 2978290
- [11] Josué I. Ríos-Cangas, *Operadores Simétricos Multivaluados y el Problema de Momentos de Hamburger Truncado*, Revista Metropolitana de Matemáticas Mixba'al, **12** (2021), no. 1, 33–45.
- [12] Josué I. Ríos-Cangas and Luis O. Silva, *Dissipative extension theory for linear relations*, Expo. Math. **38** (2020), no. 1, 60–90. MR 4082306
- [13] John von Neumann, *Functional Operators. II. The Geometry of Orthogonal Spaces*, Annals of Mathematics Studies, no. 22, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1950. MR 0034514

Josué I. Ríos Cangas

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,

Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7758-7362>

e-mail: jotismok@xanum.uam.mx



LA CURVA DE FARGUES–FONTAINE: UNA MOTIVACIÓN AL ESTUDIO DE LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES DE GALOIS p -ÁDICAS

JORGE ALBERTO ROBLES HERNANDEZ
J.R. PÉREZ-BUENDÍA

RESUMEN. Este artículo proporciona una revisión comprensiva sobre la curva de Fargues-Fontaine, una pieza central en la teoría de Hodge p -ádica, y su papel crucial en la clasificación de las representaciones de Galois p -ádicas. Nos enfocamos en sintetizar los desarrollos fundamentales en torno a esta curva, subrayando cómo conecta conceptos avanzados de geometría aritmética con la teoría práctica de representaciones. Analizamos en detalle los anillos de periodos de Fontaine (B_{cris} , B_{st} , B_{dR}), abordando sus propiedades algebraicas y aritméticas esenciales, y cómo estos anillos contribuyen a la construcción y definición de la curva. Además, exploramos la teoría de las representaciones de Galois p -ádicas admisibles y discutimos cómo, una vez definida la curva, esta se relaciona con la teoría de Harder-Narasimhan. Este trabajo no solo destaca la importancia de la curva de Fargues-Fontaine en el contexto contemporáneo, sino que también pone de relieve su papel en la formación académica y en investigaciones futuras en el ámbito de la geometría aritmética en México y Latinoamérica.

1. INTRODUCCIÓN

La geometría aritmética ha experimentado un notable auge en los últimos años, en gran parte gracias al empleo de métodos p -ádicos. En este contexto, la curva de Fargues-Fontaine se destaca como una entidad de profundo interés. En este artículo, abordamos una introducción a esta fascinante curva, que se puede entender como un análogo en geometría aritmética p -ádica de la esfera de Riemann, lo que abre un abanico de nuevas perspectivas y temas de investigación.

La curva de Fargues-Fontaine, descubierta en 2009 por los matemáticos franceses Laurent Fargues y Jean-Marc Fontaine, surgió de un intercambio de correos electrónicos y una serie de conferencias en Trieste, Italia. Pierre Colmez documenta este emocionante proceso en [14]. El descubrimiento se inició con una discusión sobre un artículo de Berger [13], que afirmaba que el anillo de períodos B_e (definido más adelante) era un anillo de Bézout. Fontaine, escéptico ante esta afirmación, profundizó en la investigación y llegó a la sorprendente conclusión de que era un anillo de ideales principales. Esta revelación marcó el inicio de una serie de preguntas formuladas por Fontaine a Colmez y Fargues, cuyas respuestas dieron lugar a una inesperada conexión con la teoría de filtraciones de Harder-Narasimhan en el contexto p -ádico. Esta relación fundamental condujo al descubrimiento de la curva de Fargues-Fontaine, revelando una conexión crucial con la teoría de Harder-Narasimhan y las representaciones de Galois p -ádicas.

El propósito de este artículo es proporcionar una base para futuros estudios en este emocionante campo matemático. Entre las investigaciones relevantes se incluyen aquellas sobre superficies K3 p -ádicas, realizadas por diversos grupos de investigación en México [9] y [10], así como la tesis doctoral del segundo autor [8]. Como parte de nuestro compromiso con la educación en esta área y nuestro interés en fortalecer el

2010 *Mathematics Subject Classification*. 11F85, 11S15, 11S20, 11F80.

Palabras clave. Curva de Fargues-Fontaine, Geometría Aritmética, Representaciones de Galois p -ádicas, Anillos de Periodos, Teoría de Hodge p -ádica.

grupo de trabajo en Geometría Aritmética en México y Latinoamérica, hemos impartido cursos de posgrado y escuelas CIMPA [1], así como supervisado investigaciones de tesis, incluyendo la actual del primer autor de este artículo. Más información sobre estos cursos se encuentra en la página web del segundo autor [11].

La intención de este artículo es la de servir como una revisión introductoria y sentar las bases para futuros estudios. Nos centramos en una revisión de la construcción de la curva de Fargues–Fontaine y su conexión con las representaciones de Galois y la teoría de Harder–Narasimhan, un paso fundamental en la comprensión de este fascinante objeto matemático.

La estructura del artículo es la siguiente: En la sección 2, presentamos la notación y la información preliminar que se utilizará a lo largo del texto. En la sección 3, ofrecemos una introducción a la idea de Fontaine sobre la clasificación de representaciones de Galois p -ádicas. La sección 4 se dedica a la definición de los anillos de períodos y destaca sus propiedades algebraicas y aritméticas clave. En la sección 5, profundizamos en el papel de los anillos de períodos en la clasificación de las representaciones de Galois p -ádicas. La sección 6 aborda la construcción de la curva de Fargues–Fontaine, utilizando analogías con las ideas de construcción de la esfera de Riemann. En la sección 7, describimos la conexión entre las fibras vectoriales de la curva de Fargues–Fontaine y las representaciones de Galois p -ádicas a través del teorema de Harder–Narasimhan. Finalmente, el Epílogo propone una reflexión sintética sobre la arquitectura de los anillos de períodos y su función como puentes entre la aritmética, la geometría y el análisis p -ádico. Asimismo, se esbozan posibles direcciones de investigación futura, como el estudio de sistemas dinámicos racionales sobre la curva de Fargues–Fontaine.

2. NOTACIÓN Y PRELIMINARES

Sea p un primo fijo. El campo de los números p -ádicos (denotado como \mathbb{Q}_p) se puede definir como sigue: Para $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, sea $v_p(a)$ la máxima potencia de p que divide al entero a . Extendiendo esto a $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definimos $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$. Así podemos definir una norma en \mathbb{Q} como

$$|\frac{a}{b}|_p = \frac{1}{p^{v_p(\frac{a}{b})}}, \quad |0|_p = 0.$$

Dicha norma induce una distancia en \mathbb{Q} la cual no es completa (no toda sucesión de Cauchy converge). Al completar \mathbb{Q} con respecto a esta distancia se obtiene el campo \mathbb{Q}_p , también llamado el campo de los números racionales p -ádicos.

Denotamos por K a una extensión finita de \mathbb{Q}_p , \mathcal{O}_K su anillo de enteros, m_K su único ideal maximal y $k := \mathcal{O}_K/m_K$ su campo residual. Denotamos por $K_0 = K \cap \mathbb{Q}_p^{nr}$ a la máxima extensión no ramificada [7] de \mathbb{Q}_p dentro de K . Fijamos una cerradura algebraica \overline{K} de K y sea $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ su grupo de Galois absoluto. Notar que \overline{K} es también una cerradura algebraica de \mathbb{Q}_p . Sea K_0^{nr} la extensión maximal no ramificada de K_0 en \overline{K} . Análogamente definimos a $K^{nr} \subseteq \overline{K}$. Como K_0 es no ramificado sobre \mathbb{Q}_p , K_0^{nr} es la extensión máxima no ramificada de \mathbb{Q}_p en \overline{K} y por lo tanto también es independiente de K .

Denotemos por \mathbb{C}_p a la completación p -ádica de \overline{K} y por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ a su anillo de enteros. Fijamos $\pi \in m_K$ al parámetro uniformizador de K , es decir, un generador del ideal principal m_K .

Se dirá que un campo K de característica p es perfecto si el morfismo de Frobenius es un isomorfismo.

3. LA IDEA DE FONTAINE.

Desde finales de la década de 1970, J.M. Fontaine desarrolló un programa destinado a clasificar y describir las \mathbb{Q}_p -representaciones del grupo de Galois absoluto, G_K , de una extensión finita de los racionales p -ádicos \mathbb{Q}_p , i.e., los \mathbb{Q}_p -espacios vectoriales de dimensión finita dotados de una acción \mathbb{Q}_p -lineal continua de G_K [19].

La estrategia de Fontaine parte de la siguiente observación: si tenemos un anillo topológico B , dotado de una acción continua de G_K y estructuras adicionales estables bajo la acción de G_K , podemos asociar a cualquier representación V de G_K un invariante $D_B(V) := (B \otimes V)^{G_K}$ de $B \otimes V$.

Entonces $D_B(V)$ es un B^{G_K} -módulo equipado con estructuras adicionales heredadas de B , y que es a menudo más fácil de describir que la representación V de la que partimos. El anillo B permite descomponer la subcategoría de B -representaciones admisibles (aquellas para las cuales $B \otimes V$ es trivial, i.e., isomorfa a $B^{\dim V}$, como G_K -representación). Tales anillos topológicos B son los llamados anillos de periodos de Fontaine. A continuación presentamos la construcción de dichos anillos así como de algunas de sus propiedades.

4. TEORÍA DE HODGE p -ÁDICA

La teoría de Hodge p -ádica, como lo describe [22], puede verse desde dos puntos de vista: el aritmético y el geométrico.

Desde el punto de vista aritmético, es el estudio de las representaciones de Galois p -ádicas, es decir, representaciones continuas $G_K \rightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{Q}_p)$ donde K es extensión finita de \mathbb{Q}_p . Específicamente, esta teoría busca construir un diccionario que relacione buenas categorías de representaciones de G_K con categorías de objetos algebraicos semilineales. Un ejemplo de esto es el estudio de los módulos de Tate de una curva elíptica sobre K (que son representaciones de G_K) con buena reducción junto con los llamados isocristales (es decir, \mathbb{Q}_p -espacios vectoriales de dimensión finita equipados con un automorfismo de Frobenius semilineal).

Desde el punto de vista geométrico, la teoría de Hodge p -ádica es el estudio de la geometría de una variedad (suave) X sobre un campo p -ádico K . En particular estamos interesados en varias teorías de cohomología relacionadas a X como la cohomología étale ($H_{et}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$), la cohomología de De Rham ($H_{dR}^n(X, K)$) y la cohomología cristalina ($H_{cris}^n(X, K)$). Uno de los resultados más relevantes de esta teoría es derivado del caso clásico en \mathbb{C} sobre la descomposición de Hodge de una variedad suave Y :

$$H^n(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(Y, \Omega_Y^j).$$

Tate observó que existía una descomposición análoga para la cohomología étale de una variedad abeliana sobre K con buena reducción, lo que lo llevo a conjeturar (y tiempo después Faltings lo demostraría) la descomposición de Hodge-Tate [2]:

$$H_{et}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K \cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \Omega_{X/K}^j) \otimes_K \mathbb{C}_K(-j),$$

donde X es una variedad suave sobre K y es un isomorfismo de representaciones de Galois p -ádicas $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$.

En este sentido, Fontaine realiza una serie de conjeturas, ahora teoremas, conocidos como teoremas de comparación en donde relaciona a las distintas cohomologías de la variedad, siendo necesario extender los coeficientes a los llamados anillos de periodos de Fontaine.

TEOREMA 1. [2] *Sea K una extensión finita de \mathbb{Q}_p y X una variedad proyectiva lisa definida sobre K . Existen isomorfismos naturales:*

- $H_{et}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \cong H_{cris}^n(X) \otimes_{K_0} B_{cris}$.
- $H_{et}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{st} \cong H_{HK}^n(X) \otimes_{K_0} B_{st}$.
- $H_{et}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR} \cong H_{dR}^n(X) \otimes_K B_{dR}$.

que conmutan con las acciones de G_K , Frobenius, N (monodromía) y respectivas filtraciones. Aquí H_{HK}^i denota la cohomología de Hyodo-Kato.

En esta sección nos centraremos en estudiar los anillos de periodos, en particular, mostraremos sus construcciones y las propiedades aritméticas y algebraicas que nos

servirán para la construcción de la curva de Fargues-Fontaine. En el presente texto no se estudiará la relación con las cohomologías como en el teorema 1. Para el lector interesado en este aspecto puede consultar [19].

4.1. Anillos de Periodos. En geometría algebraica, la palabra periodo se suele referir a un número complejo que puede ser expresado como integral de una función algebraica sobre un dominio algebraico [18]. Uno de ellos es $2i\pi = \int_{\gamma} \frac{dt}{t}$, donde γ es el círculo unitario en el plano complejo. La teoría de Hodge p -ádica nos permite diseñar un análogo p -ádico de los periodos, trabajo que realizó Fontaine creando anillos específicos [5, 3, 6, 4], los cuales además están estrechamente relacionados con distintos tipos de cohomologías. Estos anillos forman parte fundamental en la construcción de la curva de Fargues-Fontaine y las representaciones de Galois p -ádicas.

En esta sección se dará una introducción a los anillos de periodos como en [23], en particular estudiaremos a los anillos B_{cris} , B_{st} y B_{dR} , sus respectivas construcciones y algunas de sus propiedades algebraicas y analíticas.

4.1.1. El anillo B_{inf}^+ . Denotemos como ϕ el morfismo de Frobenius $x \mapsto x^p$ actuando en el cociente $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ y notemos que ϕ es un homomorfismo de anillos. Sea R el límite del sistema proyectivo de anillos:

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \xleftarrow{\phi} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \xleftarrow{\phi} \dots \xleftarrow{\phi} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \dots,$$

Específicamente, un elemento de R es una sucesión $(\zeta_n)_{n \geq 0}$ de elementos en $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$, que satisfacen la propiedad de compatibilidad $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$, $\forall n \geq 0$. R es un anillo perfecto de característica p .

El anillo R está equipado con una valuación v_b que se definirá a continuación: notemos que si $x \in \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \setminus \{0\}$, la valuación p -ádica de $\hat{x} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ no depende del levantamiento \hat{x} de x . La valuación $v_p : \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \rightarrow \mathbb{Q}$ induce una función bien definida en el cociente $v_p : \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$, donde $v_p(0) = +\infty$. Así, para $\zeta = (\zeta_n)_{n \geq 0}$ en R definimos

$$v_b(\zeta) := \lim_{n \rightarrow \infty} p^n v_p(\zeta_n).$$

La condición de compatibilidad $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$ Implica que la sucesión $(p^n v_p(\zeta_n))_{n \geq 0}$ es eventualmente constante y el límite está bien definido.

A continuación se hará uso de una estructura algebraica conocida como el anillo de vectores de Witt y cuya idea es la de construir extensiones no ramificadas.

Definición 2. Definimos como $A_{inf} = W(R)$ donde $W(-)$ es el funtor de vectores de Witt y $B_{inf}^+ = A_{inf} \left[\frac{1}{p} \right] = W(R) \left[\frac{1}{p} \right]$, la localización de A_{inf} en p .¹

Para $x \in R$, definimos el representante de Teichmüller en A_{inf} como $[x] = (x, 0, \dots, 0, \dots)$. Dado que R es de valuación discreta, todo elemento de A_{inf} puede ser escrito de manera única como

$$\sum_{i \geq 0} [\zeta_i] p^i, \quad \zeta_i \in R.$$

De manera similar, todo elemento de B_{inf}^+ se puede escribir de manera única de la forma

$$\sum_{i \geq i_0} [\zeta_i] p^i, \quad \zeta_i \in R,$$

donde i_0 puede ser negativo y depende de x .

Además, B_{inf}^+ cuenta con estructuras adicionales:

¹Para una breve motivación sobre el rol de A_{inf} y B_{inf}^+ , véase la Sección 8.

- B_{inf}^+ tiene una acción de Frobenius φ dado por:

$$\varphi\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} [\zeta_i] p^i\right) = \sum_{i=i_0}^{\infty} [\zeta_i^p] p^i, \quad \zeta_i \in R, \quad i_0 \in \mathbb{Z}.$$

- B_{inf}^+ está equipado con una acción de G_K dado por:

$$g\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} [\zeta_i] p^i\right) = \sum_{i=i_0}^{\infty} [g\zeta_i] p^i, \quad \zeta_i \in R, \quad i_0 \in \mathbb{Z}, \quad \forall g \in G_K.$$

Fijamos ϵ_1 una raíz primitiva p -ésima de la unidad en $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Escojamos a ϵ_2 como raíz primitiva p -ésima de ϵ_1 . Entonces ϵ_2 es raíz primitiva p^2 -ésima de la unidad. Repitiendo este proceso, construimos elementos $\epsilon_3, \epsilon_4, \dots \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ tales que $\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n$, $\forall n \geq 0$. Sea $\bar{\epsilon}_n \in \frac{\mathcal{O}_{\overline{K}}}{p\mathcal{O}_{\overline{K}}}$ la clase de ϵ_n . Por la propiedad de compatibilidad, $\underline{\epsilon} = (1, \bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \dots) \in R$. De manera similar, escogemos una sucesión (p_n) en $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ de p^n -raíces de p , esto es, $p_1^p = p$ y $p_{n+1}^p = p_n$ para todo $n \geq 1$. Así, definimos en R al elemento $p^b = (0, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots)$, donde $\bar{p}_i \in \frac{\mathcal{O}_{\overline{K}}}{p\mathcal{O}_{\overline{K}}}$.

A continuación definiremos una topología p -ádica en B_{inf}^+ : Primero en A_{inf} definimos una topología débil, donde si

$$x_n = \sum_{i=0}^{\infty} [\zeta_{i,n}] p^i \in A_{inf} \quad \text{y} \quad x = \sum_{i=0}^{\infty} [\zeta_i] p^i \in A_{inf},$$

se tiene que $x_n \rightarrow x$ si $\zeta_{i,n} \rightarrow \zeta_i$ para todo índice $i \in \mathbb{N}$. Esta topología en A_{inf} induce en el subconjunto $p^{-\nu} A_{inf}$ de B_{inf}^+ una topología para todo ν y así, en B_{inf}^+ definimos la topología dada por $B_{inf}^+ = \bigcup_{\nu \geq 0} p^{-\nu} A_{inf}$.

Definición 3. Para $\zeta = (c_0, c_1, \dots) \in R$, definimos $\zeta^\sharp = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{c}_n^{p^n}$, donde \hat{c}_n es un levantamiento de c_n en \mathcal{O}_{C_p} .

La función $\sharp : R \rightarrow \mathcal{O}_{C_p}$, $\zeta \mapsto \zeta^\sharp$ es inyectiva y multiplicativa. Por las propiedades de los vectores de Witt, esta función se extiende a un homomorfismo inyectivo de \widehat{K}_0^{ur} -álgebras $\theta : B_{inf}^+ \rightarrow C_p$ que conmuta con la acción de G_K . Está dado por

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} [\zeta_i] p^i \mapsto \sum_{i=i_0}^{\infty} \zeta_i^\sharp p^i, \quad i_0 \in \mathbb{Z}, \quad \zeta_i \in R.$$

La siguiente proposición nos dice que el kernel de θ es principal y nos muestra explícitamente a un generador del mismo.

PROPOSICIÓN 4 ([23], Lema:3.1.5). *Sea $z \in A_{inf}$ elemento tal que $\theta(z) = 0$ y $v_b(z \pmod{p}) = 1$. Entonces z genera $A_{inf} \cap \ker \theta$ como ideal de A_{inf} . En particular, el elemento*

$$\omega = \frac{[\underline{\epsilon}] - 1}{[\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}] - 1} = [\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}] + [\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}]^2 + \dots + [\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}]^{p-1},$$

satisface las condiciones.

4.1.2. El anillo B_{cris} . Para definir el anillo B_{cris} necesitamos tener la noción de elementos de la forma $\frac{x^n}{n!}$ y para ello daremos un breve preámbulo a las llamadas potencias divididas. Se considerará $0! = 1$.

Definición 5. Sea A un anillo (conmutativo con unidad), I un ideal A . Una colección de aplicaciones $\gamma_n : I \rightarrow I$, $n \geq 0$ y $\gamma_0 : I \rightarrow A$ definido como $\gamma_0(x) = 1$, es llamado una estructura de potencias divididas en I si para todos $n \geq 0, m > 0, x, y \in I$ y $a \in A$ se tiene:

- 1) $\gamma_1(x) = x$
- 2) $\gamma_n(x)\gamma_m(x) = \frac{(n+m)!}{n!m!} \gamma_{n+m}(x).$

- 3) $\gamma_n(ax) = a^n \gamma_n(x)$.
- 4) $\gamma_n(x+y) = \sum_{i=0}^n \gamma_i(x) \gamma_{n-i}(y)$.
- 5) $\gamma_n(\gamma_m(x)) = \frac{(nm)!}{n!(m!)^n} \gamma_{nm}(x)$.

Notemos que $\frac{(n+m)!}{n!m!} = \binom{n+m}{n} \in \mathbb{Z}$ y además, $\frac{(nm)!}{n!(m!)^n} \in \mathbb{Z}$ ya que cuenta el número de maneras de dividir un grupo de nm objetos en n grupos de m elementos.

LEMA 6. *Sea A un anillo, I un ideal de A . Si γ es una estructura de potencias divididas en I , entonces $n! \gamma_n(x) = x^n$ para todo $n \geq 1$ y $x \in I$.*

Este lema se puede demostrar por inducción. Así, en el anillo A tendríamos la noción de dividir entre $n!$, cuestión que no siempre es posible si $\text{char}(A) > 0$.

Volviendo a los anillos de periodos, dado $x \in A_{inf} = W(R)$ denotamos como $A_{inf}\langle x \rangle$ la sub A_{inf} -álgebra de B_{inf}^+ generada por los elementos $\frac{x^n}{n!}$ [23]

Definición 7. Definimos A_{cris} como la completación p -ádica de $A_{inf}\langle z \rangle$, donde z es un generador de $A_{inf} \cap \ker \theta$. Denotamos por $B_{cris}^+ = A_{cris} \left[\frac{1}{p} \right]$ a la localización en p de A_{cris} .²

Observación 1. La construcción de A_{cris} a partir de $A_{inf}\langle z \rangle$ mediante potencias divididas (Definición 5) y completación p -ádica merece un comentario. Una pregunta natural es por qué se recurre a las potencias divididas y por qué no se trabaja directamente con A_{inf} o se invierte p desde un inicio.

Si bien A_{inf} es de característica cero, p no es una unidad en este anillo (la invertibilidad de p se introduce al pasar a $B_{inf}^+ = A_{inf} \left[\frac{1}{p} \right]$, ver Definición 2). La estructura de potencias divididas $\gamma_n(x)$ proporciona un análogo formal de $x^n/n!$ sin asumir que $n!$ sea invertible (Lema 6). Esto es crucial porque permite la existencia de elementos como $t = \log([\underline{c}])$ presentada en ecuación (1) (cuya serie involucra divisiones por enteros), dentro de un anillo p -ádicamente completo y asegura que el endomorfismo de Frobenius φ se extienda de manera controlada desde A_{inf} . Esta extensión es vital para las propiedades de A_{cris} y su rol en la teoría.

Preservar A_{cris} como un anillo donde p no es invertible es esencial para mantener una fina estructura p -ádica y la conexión con la cohomología cristalina, fundamental en los teoremas de comparación (Teorema 1). Invertir p prematuramente, para trabajar en B_{inf}^+ , trivializaría aspectos de esta estructura p -ádica antes de que A_{cris} pueda cumplir su función como un *punte* en la Teoría de Hodge p -ádica. Para una discusión más profunda sobre estos anillos, se puede consultar [19] o [23].

Como ω es un generador de $A_{inf} \cap \ker \theta$, se tiene que $A_{cris} = \widehat{A_{inf}\langle \omega \rangle}$, donde $\widehat{}$ denota la completación p -ádica. Otro generador de $A_{inf} \cap \ker \theta$ también es el elemento $[p^b] - p$.

El siguiente lema nos da una condición sobre cuándo cualesquiera dos elementos en A_{inf} producen la misma sub A_{inf} -álgebra generada por las potencias divididas.

LEMA 8. *Si $x, y \in A_{inf}$, $x \equiv y \pmod{pA_{inf}}$ entonces $A_{inf}\langle x \rangle = A_{inf}\langle y \rangle$.*

Usando el lema, se tendría que $A_{cris} = \widehat{A_{inf}\langle [p^b] \rangle}$.

Como A_{cris} está definida como completación p -ádica es natural equipar A_{cris} y B_{cris}^+ con la topología p -ádica. Con esta topología, la inclusión $A_{inf} \hookrightarrow A_{cris}$ es continua al igual que la inclusión $B_{inf}^+ \hookrightarrow B_{cris}^+$.

Frobenius se extiende canónicamente a un endomorfismo $A_{cris} \rightarrow A_{cris}$, ya que $A_{inf}\langle [p^b] \rangle$ es estable bajo Frobenius. En efecto,

$$\varphi \left(\frac{[p^b]^n}{n!} \right) = [p^b]^{np-n} \varphi \left(\frac{[p^b]^n}{n!} \right).$$

²Para una breve motivación sobre el rol de A_{cris} y B_{cris}^+ , véase la Sección 8.

Invirtiendo p se obtiene Frobenius para B_{cris}^+ . Análogamente, G_K extiende la acción a B_{cris}^+ .

A_{cris} contiene un periodo para el caracter ciclotómico, i.e., un elemento en el cual Galois actúa por multiplicación por χ , el caracter ciclotómico. Este elemento es

$$(1) \quad t = \log([\epsilon]) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{([\epsilon] - 1)^i}{i}.$$

Frobenius actúa como $[\epsilon] \mapsto [\epsilon]^p$ y G_K actúa como $g[\epsilon] = [\epsilon]^{\chi(g)}$, $g \in G_K$. Tomando logaritmos, $\varphi(t) = pt$ y $gt = \chi(g)t$, $\forall g \in G_K$. Así, t es un periodo del caracter ciclotómico.

4.1.3. El anillo B_{dR} .

Definición 9. Definimos B_{dR}^+ como la completación de B_{inf}^+ respecto a la topología $(\ker \theta)$ -ádica, es decir

$$B_{dR}^+ = \varprojlim_m \frac{B_{inf}^+}{(\ker \theta)^m}.$$

Como B_{dR}^+ está definido como una completación, la topología natural en este anillo es la topología $(\ker \theta)$ -ádica. También podemos extender la función θ a B_{dR}^+ con la composición $B_{dR}^+ \rightarrow B_{inf}^+ / \ker \theta \rightarrow \mathbb{C}_p$ y a esta extensión la denotaremos como θ_{dR} . Así, B_{dR}^+ tiene una filtración dada por $Fil^m B_{dR}^+ = (\ker \theta_{dR})^m$.

Una sucesión $(x_n)_{n \geq 0}$ de elementos en B_{dR}^+ converge a $x \in B_{dR}^+$ si y sólo si para todo m , la sucesión $\{x_n \pmod{Fil^m B_{dR}^+}\}$ es eventualmente constante.

Definición 10. Definimos el anillo $B_{dR} = B_{dR}^+[\frac{1}{t}]$.³

Como B_{dR}^+ es un anillo de valuación discreta con uniformizador t , se tiene que B_{dR} es el campo de fracciones de B_{dR}^+ , es decir, este anillo es de hecho un campo.

La filtración de De Rham se extiende a $B_{dR} : Fil^m B_{dR} = t^m B_{dR}^+$, $m \in \mathbb{Z}$. Para más información se recomienda consultar al lector [3], [6], [23].

5. REPRESENTACIONES DE GALOIS p -ÁDICAS

Una vez que hemos construido los anillos de periodos, regresamos a la idea de Fontaine para clasificar las representaciones de Galois p -ádicas. En esta sección se hablará primero de la B -admisibilidad de una representación para luego dar paso a un ejemplo concreto: cómo el anillo de periodos B_{dR} nos dará más información sobre la representación. La bibliografía que se seguirá en esta sección es [19].

5.1. Representaciones admisibles. Sea F un campo y G un grupo. Sea B una F -álgebra, dominio equipado con una G -acción (como F -álgebra) y asuma que la sub F -álgebra $E = B^G$ es un campo.

No se imponen estructuras topológicas en B, F o G . El objetivo es usar a B para construir un functor de representaciones F -lineales de G de dimensión finita a E -espacios vectoriales de dimensión finita equipados con estructuras adicionales que dependen de B .

Sea $C = \text{Frac}(B)$ y G actúa en C de manera natural, i.e., $g(\frac{a}{b}) = g(a)g(b^{-1})$.

Definición 11. Decimos que B es (F, G) -regular si $C^G = B^G (= E)$ y si para todo $b \in B \setminus \{0\}$ cuyo espacio generado F -lineal Fb es G -estable se tiene que b es unidad en B .

Notemos que si B es un campo, entonces es (F, G) -regular.

³Para una breve motivación sobre el rol de B_{dR}^+ y B_{dR} , véase la Sección 8.

Definición 12. Si B es un dominio (F, G) -regular y E denota el campo $C^G = B^G$, entonces para cualquier objeto $V \in \text{Rep}_F(G)$ de G representaciones F -lineales de dimensión finita definimos

$$D_B(V) := (B \otimes_F V)^G,$$

es decir, $D_B(V)$ es un E -espacio vectorial equipado con un mapeo canónico.

$$\alpha_V : B \otimes_E D_B(V) \rightarrow B \otimes_E (B \otimes_F V) = (B \otimes_E B) \otimes_F V \rightarrow B \otimes_F V.$$

Definición 13. Si se tiene la igualdad $\dim_E D_B(V) = \dim_F(V)$ se dirá que V es una representación B -admisibles.

El siguiente teorema nos indica que el E -espacio vectorial $D_B(V)$ es de hecho de dimensión finita y que al restringirnos a las representaciones B -admisibles, se tiene un funtor exacto y fiel.

TEOREMA 14. *Fijamos V como antes.*

- i) *El mapeo α_V es siempre inyectivo y $\dim_E D_B(V) \leq \dim_F V$. La igualdad se da y si sólo si α_V es un isomorfismo.*
- ii) *Sea $\text{Rep}_F^B(G) \subseteq \text{Rep}_F(G)$ la subcategoría de representaciones B -admisibles. El funtor contravariante $D_B : \text{Rep}_F^B(G) \rightarrow \text{Vec}_E$ es exacto y fiel.*

En particular, considerando a K un campo p -ádico, i.e., extensión finita de \mathbb{Q}_p , $F = \mathbb{Q}_p$, $G = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ y V representación B -admisibles, tenemos que:

- Si $B = B_{dR}$, se dice que la representación es de De Rham.
- Si $B = B_{cris}$, se dice que la representación es cristalina.
- Si $B = B_{st}$, se dice que la representación es semiestable.

5.2. Representaciones de De Rham. Analizaremos un poco más a detalle las representaciones de De Rham. Como B_{dR} es (\mathbb{Q}_p, G_K) -regular con $B_{dR}^{G_K} = K$, la formalización general de representaciones admisibles provee de una buena clase de representaciones p -ádicas, los que son B_{dR} -admisibles.

Definición 15. Definimos el funtor covariante $D_{dR} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \rightarrow \text{Vec}_K$ a la categoría de K -espacios vectoriales de dimensión finita como $D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. En el caso que $\dim_{B_{dR}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ diremos que V es una representación de De Rham.

El espacio $D_{dR}(V)$ tiene estructuras K -lineales adicionales (que vienen de la estructura adicional de la K -álgebra B_{dR}), específicamente una filtración K -lineal que surge de la filtración K -lineal en el campo de fracciones B_{dR} del anillo de valuación discreto completo B_{dR}^+ sobre K .

Concretamente, para $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$, el K -espacio vectorial $D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \in \text{Vec}_K$ tiene estructura natural de objeto en Fil_K : Como B_{dR} tiene una filtración K -lineal, G_K estable dado por $\text{Fil}^i(B_{dR}) = t^i B_{dR}^+$, obtenemos una filtración K -lineal, G_K -estable $\{\text{Fil}^i(B_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\}$ en $B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ y este induce una filtración en $D_{dR}(V)$ de elementos G_K -invariantes, explícitamente

$$\text{Fil}^i(D_{dR}(V)) = (t^i B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

6. CONSTRUCCIÓN DE LA CURVA DE FARGUES-FONTAINE.

La curva de Fargues-Fontaine es un objeto de la teoría de números descubierta en 2009 por Laurent Fargues y Jean Marc-Fontaine, donde en su geometría codifica mucha información sobre la aritmética de los números p -ádicos. Se ha convertido rápidamente en un tema de investigación en la teoría de Hodge p -ádica y el programa de Langlands.

En esta sección motivamos la definición de la curva usando una analogía con la esfera de Riemann. Luego, construimos la curva desde dos puntos de vista distintos,

uno desde el punto de vista del álgebra conmutativa y otro desde los espacios de Tilts y Untilts [17, 21].

6.1. La esfera de Riemann. Para motivar la definición de la curva, analizaremos una curva más familiar, la esfera de Riemann $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, a la cual le podemos asociar anillos $\mathbb{C}[z] \subseteq \mathbb{C}((\frac{1}{z}))$.

- Primero, el anillo de funciones meromorfas sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ sin polos fuera del punto al infinito es el álgebra de polinomios $\mathbb{C}[z]$, donde z denota el parámetro local habitual en el origen.
- Mirando los desarrollos de Laurent en el punto al infinito de todas las funciones meromorfas en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ encontramos el anillo $\mathbb{C}((\frac{1}{z}))$, donde $\frac{1}{z}$ es un parámetro local para el punto al infinito.

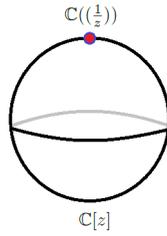


FIGURA 1. Esfera de Riemann.

Recíprocamente, podemos reconstruir la esfera de Riemann a partir de los anillos $\mathbb{C}[z] \subseteq \mathbb{C}((\frac{1}{z}))$ [17]. Más precisamente, cada punto x de la esfera de Riemann $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ puede asociarse unívocamente con un subespacio de dimensión uno l_x (una línea) dentro del espacio de funciones de grado ≤ 1 , que es $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}z$. Si consideramos la línea afín \mathbb{C} (identificada con $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ menos un punto), un punto $x = z_0 \in \mathbb{C}$ se asocia con la línea l_{z_0} de funciones $f(z) = a(z - z_0)$ que se anulan en z_0 . Para el punto al infinito, $x = \infty$, la línea l_{∞} correspondería al espacio de funciones constantes $f(z) = a$. Toda esta correspondencia puede expresarse de manera más unificada utilizando coordenadas homogéneas. Si un punto $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ se representa por $[X_0 : X_1]$, y el espacio de funciones de grado ≤ 1 se ve como el espacio de formas lineales $\mathbb{C}[Z_0, Z_1]_1 = \{aZ_0 + bZ_1 \mid a, b \in \mathbb{C}\}$, entonces l_x es el subespacio de dichas formas que se anulan en $[X_0 : X_1]$ (es decir, $aX_0 + bX_1 = 0$). Esta condición define una línea de soluciones para (a, b) . Así, tenemos la correspondencia general:

$$x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \quad \leftrightarrow \quad l_x \subseteq \mathbb{C}[Z_0, Z_1]_1.$$

Esta identificación entre puntos y líneas de funciones es la que se busca replicar para la curva de Fargues-Fontaine.

Más aún, si

$$S = \bigoplus_{k \geq 0} \{f \in \mathbb{C}[z] \mid \deg f \leq k\},$$

entonces $Proj(S) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.⁴

Partiendo de esta analogía, la curva de Fargues-Fontaine se construye utilizando los anillos $B_e \subseteq B_{dR}$ (donde $B_e := B_{cris}^{\varphi=1}$ denota los puntos fijos bajo la acción de Frobenius en B_{cris}) en el contexto p -ádico.

A esta curva la denotaremos como X^{FF} . Concretamente, Fargues y Fontaine demostraron que [14]:

⁴Estrictamente, la construcción $Proj$ se aplica a anillos graduados donde S_0 es un campo y S es generado por S_1 como S_0 -álgebra, y S_k son las componentes homogéneas de grado k . La forma estándar es $S = \mathbb{C}[Z_0, Z_1]$, donde $S_k = \mathbb{C}[Z_0, Z_1]_k$. El anillo S definido en el texto está relacionado con el anillo de secciones globales $S' = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{O}(k))$, donde $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{O}(k))$ es isomorfo a S_k . Se tiene $Proj(S') \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Para una referencia general sobre $Proj$ y estos resultados, ver por ejemplo [24, Capítulo II, Secciones 2 y 7].

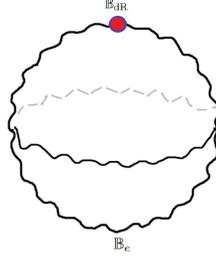


FIGURA 2. Representación artística de la curva de Fargues-Fontaine [17].

TEOREMA 16 (FF). *Existe un esquema regular, noetheriano, conexo, separado de dimensión uno, X^{FF} , sobre \mathbb{Q}_p ; tal que tiene un punto al infinito y , el anillo de funciones meromorfas sin polos fuera del infinito es el anillo B_e .*

En este caso, si $S = \bigoplus_{k \geq 0} \{f \in B_e \mid \deg f \leq k\}$, entonces la curva de Fargues-Fontaine se define como $X^{FF} = \text{Proj}(S)$.

En esta construcción algebraica vía $\text{Proj}(S)$ [14, Sección 10.1], cada punto x de la curva X^{FF} corresponde, por definición, a un cierto ideal primo homogéneo relevante del anillo graduado S . Este ideal, a su vez, permite identificar un subespacio de dimensión uno, l_x , dentro del espacio de funciones de grado 1 en B_e (es decir, la componente S_1 del anillo graduado). Así, de manera análoga al caso de la esfera de Riemann, se establece una biyección fundamental entre los puntos de la curva y estas líneas de funciones, como se afirma en el Teorema 16:

$$x \in X^{FF} \quad \longleftrightarrow \quad l_x = \{f \in B_e \mid \deg f \leq 1\}.$$

Esta correspondencia nos permite interpretar B_e como un anillo de funciones sobre el objeto geométrico X^{FF} .

6.2. Otro punto de vista: Tilts y Untilts. A continuación presentamos otra forma de construir la curva de Fargues-Fontaine mediante lo llamados tilts y untilts. Esta sección está basada en la sección 2.1 de [16].

Sea C un campo algebraicamente cerrado que contiene a \mathbb{Q}_p y es completo respecto a un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_C : C \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que extiende el valor absoluto p -ádico en \mathbb{Q}_p . (Un ejemplo es \mathbb{C}_p , los complejos p -ádicos).

Definición 17. El tilt $F = C^b$ de C es un campo algebraicamente cerrado que contiene a \mathbb{F}_p y es completo respecto a un valor absoluto no arquimediano no trivial $|\cdot|_F : F \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Como conjunto,

$$C^b = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_i \in C \text{ y } a_i^p = a_{i-1}\}$$

La multiplicación se define término a término y la suma como $(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (c_0, c_1, \dots)$, donde

$$c_i := \lim_{i \leq n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^{p^{n-i}}.$$

Recíprocamente, sea F con las hipótesis de la definición de tilt.

Definición 18. Un untilt de F es un par (C, i) , donde C es un campo algebraicamente cerrado que contiene a \mathbb{Q}_p y es completo respecto a un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_C : C \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que extiende el valor absoluto p -ádico en \mathbb{Q}_p e $i : F \rightarrow C^b$ es un isomorfismo de campos valuados.

Decimos que dos untilts $(C, i), (C', i')$ son equivalentes si existe un isomorfismo $C \cong C'$ tal que el isomorfismo inducido entre sus tilts es compatible con i y i' , es decir, si existe $\psi : C \rightarrow C'$ isomorfismo tal que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C^b & \xrightarrow{\psi^b} & C'^b \\ \uparrow i & \nearrow i' & \\ F & & \end{array},$$

donde $\psi^b(a_0, a_1, \dots) = (\psi(a_0), \psi(a_1), \dots)$.

Definición 19. Sea $|Y_F|$ el conjunto de clases de equivalencia de untilts de F .

Dado un untilt (C, i) de F podemos construir nuevos untilts $(C, i \circ \varphi^m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, donde φ es el automorfismo de Frobenius.

Definición 20. Decimos que dos untilts $(C, i), (C', i')$ son Frobenius equivalentes si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que (C, i) y $(C', i' \circ \varphi^m)$ son equivalentes.

El conjunto de clases de equivalencia de untilts Frobenius equivalentes está dado por el cociente

$$|Y_F|/\varphi^{\mathbb{Z}},$$

donde el grupo cíclico infinito $\varphi^{\mathbb{Z}}$ actúa en $|Y_F|$ via

$$\varphi^m \cdot (C, i) = (C, i \circ \varphi^m).$$

El siguiente resultado cuya demostración puede ser consultado en [16] nos da la relación entre este conjunto de clase de equivalencia y las curva de Fargues-Fontaine.

TEOREMA 21. *Existe una curva X_F^{FF} cuyos puntos están en biyección con $|Y_F|/\varphi^{\mathbb{Z}}$.*

7. LA CURVA Y LAS REPRESENTACIONES DE GALOIS p -ÁDICAS.

En esta última sección se muestra la relación de la curva de Fargues-Fontaine, específicamente sus fibrados vectoriales, con las representaciones de Galois p -ádicas, haciendo uso del teorema de Harder-Narasimhan. En los fibrados vectoriales se tiene lo siguiente:

Definición 22. Sea X una superficie de Riemann. Para cualquier fibrado vectorial E de X asociamos dos invariantes:

- Su rango, $rk(E) \in \mathbb{N}$.
- Su grado, $\deg(E) \in \mathbb{Z}$, definido como el grado de su haz (lineal) determinante. El grado de un fibrado lineal L se define identificando a L con un divisor de Weil $\sum_{x \in X} n_x[x]$ y definimos $\deg(L) = \sum_{x \in X} n_x$.

De los dos invariantes anteriores se define un tercero, su pendiente

$$\mu(E) = \frac{\deg(E)}{rk(E)} \in \mathbb{Q}.$$

Se dice que E es semiestable si $\mu(E') \leq \mu(E)$ para todo E' subfibrado vectorial de E .

Enunciaremos ahora el teorema principal de esta sección cuya demostración puede ser consultada en [16].

TEOREMA 23 (Harder-Narasimhan (H-N)). *Sea E un fibrado vectorial de una superficie de Riemann X . Entonces E tiene una única filtración de subfibrados*

$$0 = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots \subseteq E_m = E,$$

tales que:

- El fibrado cociente $\frac{E_i}{E_{i-1}}$ es semiestable para todo $i = 1, \dots, m$.

- $\mu\left(\frac{E_1}{E_0}\right) > \cdots > \mu\left(\frac{E_m}{E_{m-1}}\right)$.

En general hay otras categorías en las cuales existe un análogo al teorema de H-N. Mencionaremos algunas de estas.

- Fibrados vectoriales de una curva X .
Sea X una superficie de Riemann. Sea $Vect(X)$ la categoría de fibrados en X . Equipado con las nociones definidas anteriormente de rango y grado, dicha categoría satisface el teorema H-N.
- Los pares \mathbb{P}^1 -algebraicos completos. Antes de definir estos objetos necesitaremos la definición de una función casi euclidiana.

Definición 24. Una función casi euclidiana de un dominio entero B es una función $\nu : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\nu(f) = -\infty \iff f = 0$.
2. Para $f, g \in B - \{0\}$ se tiene que $\nu(f) \leq \nu(fg)$.
3. Si $\nu(f) = 0$, entonces f es unidad.
4. Si $f, g \in B$ con $\nu(g) \geq 1$, entonces existen $q, r \in B$ tales que $f = gq + r$ y $\nu(r) \leq \nu(g)$.

Definición 25. Un par \mathbb{P}^1 -algebraico es un par (B, ν) que consiste de un anillo de ideales principales B y una valuación $\nu : \text{Frac}(B) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ tal que $-\nu$ es una función casi euclidiana en B . Decimos que el par es completo si

$$\nu(f) + \sum_{\mathfrak{p} \subseteq B} \text{ord}_{\mathfrak{p}}(f) = 0,$$

para todo $f \in B$, donde \mathfrak{p} corre sobre todos los ideales primos distintos del cero de B y $\text{ord}_{\mathfrak{p}}$ denota la valuación \mathfrak{p} -ádica asociada en B .

Sea (B, ν) un par \mathbb{P}^1 -algebraico completo. Un fibrado vectorial en (B, ν) se define como un par (M, M_{∞}) , donde M es un B -módulo libre de rango finito y M_{∞} es un \mathcal{O}_{ν} -retículo dentro del espacio vectorial de dimensión finita $M \otimes_B k_{\nu}$, donde k_{ν} es la completación de $k = \text{Frac}(B)$ respecto a ν y \mathcal{O}_{ν} es el anillo de enteros.

- El rango de (M, M_{∞}) es el rango del módulo M .
- El grado se calcula como la valuación ν del determinante de la matriz de cambio de base entre una base de M sobre B_e y una base de M_{∞} sobre \mathcal{O}_{ν} .⁵

Así, la categoría de fibrados vectoriales de un par \mathbb{P}^1 -algebraico (B, ν) cumple el teorema H-N.

En particular, para el par \mathbb{P}^1 -algebraico completo (B_e, ν_{dR}) , donde ν_{dR} denota la valuación en B_{dR} , los (B, ν) -pares solo son llamados B -pares. Aquí un fibrado vectorial es un par (M, M_{dR}) tal que

- M es un B_e -módulo libre de rango finito.
- M_{dR} es un B_{dR}^+ -retículo dentro de $M \otimes_{B_e} B_{dR}$.

La siguiente proposición relaciona las dos categorías antes mencionadas. Su demostración puede ser consultada en [16].

PROPOSICIÓN 26. *La categoría de (B_e, ν_{dR}) -pares se identifica con la categoría $Vect(X^{FF})$ de fibrados vectoriales de la curva de Fargues-Fontaine.*

- Espacios vectoriales con filtraciones.
Dada una extensión de campos L/F , sea $VectFil_{L/F}$ la categoría de pares

⁵Esta definición concreta se alinea con la definición general del grado de un fibrado vectorial como el grado de su fibrado determinante, que aparece en textos como [24, Ap. A] o [19, §2.2]. En efecto, si M tiene rango r , entonces $\det M := \bigwedge^r M$ es un B_e -módulo libre de rango 1, y $\det M_{\infty} \subseteq \det M \otimes_{B_e} B_{dR}$ es un retículo sobre B_{dR}^+ . La valuación $\nu(\det A)$, donde A es la matriz del cambio de base entre bases de M y M_{∞} , coincide con la posición relativa del retículo $\det M_{\infty}$, y por tanto con el grado del fibrado determinante.

$(V, \text{Fil}^\bullet V_L)$, donde V es un F -espacio vectorial de dimensión finita y Fil^\bullet es una filtración en $V_L = V \otimes_F L$ separada y exhaustiva. Se definen el rango y grado del par como:

- $rk(V, \text{Fil}^\bullet V_L) = \dim_F V$.
- $\deg(V, \text{Fil}^\bullet V_L) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \dim_L (gr^i V_L)$

Así, esta categoría cumple con el teorema H-N.

■ **Isocristales.**

Sea K campo perfecto de característica p y $K_0 = \text{Frac}(W(K))$. Un isocristal sobre K es un par (D, φ_D) , donde D es un K_0 -espacio vectorial de dimensión finita y $\varphi_D : D \rightarrow D$ es un isomorfismo φ -semilineal (esto es, $\varphi_D(ad) = \varphi(a)\varphi_D(d)$ para todo $a \in K_0$ y $d \in D$).

- $rk(D, \varphi_D) = \dim_{K_0} D$.
- $\deg(D, \varphi_D) = -\deg^+ \det(D, \varphi_D)$, donde \deg^+ de un isocristal de rango uno (L, φ_L) se define escogiendo un elemento básico $e \in L$, luego $\varphi_L(e) = ae$ para algún $a \in K_0$ y $\deg^+(L, \varphi_L) := \nu_p(a)$, ya que K_0 es campo de valuación discreta.

Así, esa categoría cumple con el teorema de H-N. A esta categoría se le suele denotar como $\varphi - \text{Mod}_{K_0}$.

Sea $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbb{Q}$, donde $(d, h) = 1$ y $h > 0$. Podemos definir un isocristal $(D_\lambda, \varphi_\lambda) \in \varphi - \text{Mod}_{K_0}$ como

- $D_\lambda = K_0^h$, con elementos básicos e_1, \dots, e_h .
- $\varphi_\lambda : D_\lambda \rightarrow D_\lambda$ como el único endomorfismo semilineal que satisface:

$$\varphi_\lambda(e_i) = \begin{cases} e_{i+1}, & \text{si } i = 1, \dots, h-1, \\ p^{-d}e_1, & \text{si } i = h. \end{cases}$$

El isocristal $(D_\lambda, \varphi_\lambda)$ tiene rango h , grado d y pendiente λ .

LEMA 27. *Sea $(D, \varphi_D) \in \varphi - \text{Mod}_{\mathbb{Q}_p}$ isocristal sobre \mathbb{F}_p . Entonces el par*

$$((B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} D)^{\varphi=1}, B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} D)$$

es un fibrado vectorial (B_e, ν_{dR}) con rango y grado dado por el rango y grado del isocristal.

Este lema asocia a un isocristal fibrado un fibrado vectorial en X^{FF} , denotado por $\xi(D, \varphi_D)$. En particular, en el caso del isocristal $(D_\lambda, \varphi_\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{Q}$, escribimos $\mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda) := \xi(D_\lambda, \varphi_\lambda)$. Por el lema, $\mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda)$ tiene rango h , grado d y pendiente λ si $\lambda = \frac{d}{h}$ con $(d, h) = 1$ y $h > 0$.

TEOREMA 28 (De clasificación de fibrados vectoriales en X^{FF}). *Sea E un fibrado vectorial en X^{FF} . Entonces existe una única sucesión de racionales $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$ tales que E es isomorfo a*

$$\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^m \xi(D_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i}).$$

La demostración de este teorema puede ser consultada en [14].

COROLARIO 29.

- El funtor $\xi(-) : \varphi - \text{Mod}_{K_0} \rightarrow \text{Vect}(X^{FF})$ es esencialmente sobreyectivo.
- Sea E un fibrado vectorial de X^{FF} y $\lambda \in \mathbb{Q}$. Entonces E es semiestable de pendiente λ si y sólo si E es isomorfo a $\mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda)^m$ para algún $m \geq 1$.
- La categoría de fibrados vectoriales de X^{FF} semiestables y de pendiente cero es equivalente a la categoría de \mathbb{Q}_p -espacios vectoriales de dimensión finita vía $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_{X^{FF}}$.

- $\varphi - \text{ModFil}_{K/K_0}$.

Esta es la categoría de los tripletes $(D, \varphi_D, \text{Fil}^\bullet D_K)$ donde

- D es un K_0 -espacio vectorial de dimensión finita.
- $\varphi_D : D \rightarrow D$, isomorfismo φ -lineal.
- Fil^\bullet es una filtración en $D_K := D \otimes_{K_0} K$ separada y exhaustiva.

Es decir, $(D, \varphi) \in \varphi - \text{Mod}_{K_0}$ y $(D, \text{Fil}^\bullet D_K) \in \text{VectFil}_{K_0/K}$. Definimos:

- $\text{rk}(D, \varphi_D, \text{Fil}^\bullet D_K) := \dim_{K_0} D$.
- $\text{deg}(D, \varphi_D, \text{Fil}^\bullet D_K) := \text{deg}(D, \varphi_D) + \text{deg}(D, \text{Fil}^\bullet D_K)$.

De esta forma, esta categoría cumple con el teorema de H-N.

Como $B_{\text{cris}} \subseteq B_{dR}$, si V es representación cristalina entonces V es de De Rham y $D_{B_{dR}}(V) = D_{B_{\text{cris}}}(V) \otimes_{K_0} K$. Así el funtor

$$D_{\text{cris}} : \text{Rep}_{\text{cris}}(G_K) \rightarrow \varphi - \text{ModFil}_{K/K_0}$$

es completamente fiel.

Fontaine conjeturó que todo isocristal filtrado estaba en la imagen esencial de $\text{Rep}_{\text{cris}}(G_K)$ si y sólo si era débilmente admisible [14, Capítulo 8: classification des fibrés vectoriels: le cas F algébriquement clos], que en este caso, es equivalente a pedir que sea semiestable y de pendiente cero. Esto demuestra que

$$D_{\text{cris}} : \text{Rep}_{\text{cris}}(G_K) \rightarrow \varphi - \text{ModFil}_{K/K_0}^{w.a.},$$

donde *w.a.* denota weakly admissible (débilmente admisible) es una equivalencia de categorías. También es posible demostrar que la categoría de representaciones semiestables se puede describir como isocristales filtrados débilmente admisibles con operador de monodromía [14].

Finalmente, hemos llegado a uno de los objetivos de la teoría de Hodge p -ádica, describir clases de representaciones de Galois p -ádicas en términos de pura álgebra lineal.

8. EPÍLOGO

El estudio de la curva de Fargues-Fontaine es actualmente un tema de investigación muy activo dentro del área de la geometría aritmética. Trabajos como los de Peter Scholze sobre perfectoides [20] o de Fargues respecto al programa de Langlands [15] son muestra del actual avance en este tópico.

A lo largo de este artículo, hemos presentado la construcción de los anillos de periodos de Fontaine, culminando en la curva de Fargues-Fontaine. Puede resultar útil reflexionar sobre la *arquitectura* de esta construcción, como bien lo detalla Colmez [21]. La necesidad de múltiples anillos $(A_{\text{inf}}, B_{\text{inf}}^+, A_{\text{cris}}, B_{dR}^+, B_{dR})$ surge de la delicada tarea de tender puentes entre mundos aparentemente dispares: la aritmética de \mathbb{Q}_p , las representaciones de Galois G_K , y la geometría p -ádica, cuyas estructuras formales guardan ciertos paralelismos con la geometría compleja.

Cada anillo juega un papel específico:

- $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ y R : Proporcionan el *material base* p -ádico y su versión perfecta R (el "tilt"), esencial para manejar Frobenius.
- $A_{\text{inf}} = W(R)$: Levanta R a característica cero, introduciendo la estructura de Witt y permitiendo la aparición de p . (Ver Definición 2).
- B_{inf}^+ : Permite la inversión (formal) de p , acercándose a un campo \mathbb{Q}_p -vectorial.
- A_{cris} : Introduce la estructura de potencias divididas y la completitud p -ádica, esencial para alojar periodos como t y conectar con la cohomología cristalina (ver Observación 1). Es el *punto* principal. (Ver Definición 7).
- B_{cris}^+ : La versión de A_{cris} con p invertido.
- B_{dR}^+ y B_{dR} : Incorporan la topología $(\ker \theta)$ -ádica y el periodo t , creando el campo p -ádico análogo a \mathbb{C} que permite la comparación con la cohomología de De Rham y define la filtración de Hodge-Tate. (Ver Definición 10).

Esta secuencia de anillos, cada uno con sus acciones de Galois y Frobenius, constituye el ingenioso andamiaje que permite a Fontaine (y Fargues-Fontaine) asociar a las representaciones p -ádicas distintos objetos de álgebra lineal con estructuras adicionales (acción de Frobenius, filtraciones, conexiones), según el contexto. En particular, permiten traducir la información aritmética en términos geométrico-lineales, como módulos con filtración (en el caso de B_{dR}) o con Frobenius (en el caso de B_{cris}).

Otro punto de vista que particularmente estamos estudiando son los sistemas dinámicos de funciones racionales sobre la curva: estudiar puntos periódicos o los conjuntos de Fatou y Julia podrían llevarnos a descubrir aún más información acerca de este objeto matemático tan importante.

Finalmente, conviene recordar que este sistema de anillos no fue diseñado para resolver un único problema, sino para tejer puentes entre estructuras profundamente distintas. Como señala Colmez [21], la teoría de periodos de Fontaine constituye una auténtica arquitectura matemática: no se trata solo de construir un anillo universal, sino de organizar múltiples niveles de compatibilidad entre geometría, aritmética y análisis. Cada anillo juega un papel estructural fundamento, puente, ventana o terraza en este edificio conceptual. Comprenderlo implica recorrer sus niveles, descifrar sus relaciones, y reconocer en ellos el lenguaje profundo de la geometría aritmética contemporánea.

AGRADECIMIENTOS. El primer autor expresa su gratitud a SECIHTI por la beca obtenida para estudiar el doctorado en el CIMAT y con el cual fue posible el desarrollo del presente artículo. El segundo autor agradece al proyecto de Frontera SECIHTI “Modelos matemáticos y computacionales no convencionales para el estudio y análisis de problemas relevantes en Biología” FORDECYT-PRONACES UNAM 217367.

REFERENCIAS

- [1] CIMPA. *Research school on Hodge theory and p -adic Hodge theory*, (2021).
- [2] Gerd Faltings. *p -adic Hodge theory*. J. Amer. Math. Soc, 1(1):255-299, (1988).
- [3] Jean-Marc Fontaine. *p -adic periods and p -adic étale cohomology*. In Current trends in arithmetical algebraic geometry, Proceedings of the AMS-IMS-SIAM joint summer research conference, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1985, pages 179-207. Amer. Math. Soc., (1987).
- [4] Jean-Marc Fontaine. *Le corps des périodes p -adiques*. Astérisque, 223:59-111, (1994).
- [5] Jean-Marc Fontaine. *Représentations p -adiques semi-stables*. Astérisque, 223:113-184, (1994).
- [6] Jean Marc Fontaine and Luc Illusie. *p -adic periods: A survey*. Université de Paris-sud, Département de mathématiques, (1990).
- [7] Jean-Pierre Serre. *Local Fields*. Graduate Texts in Mathematics;67. Springer Verlag New York Inc, (1979).
- [8] J. R. Pérez-Buendía. *A crystalline criterion for good reduction on semi-stable $k3$ -surfaces over a p -adic field*. PhD thesis, Concordia University (2014).
- [9] J. R. Pérez-Buendía. *A kulikov-type classification theorem for a one parameter family of $k3$ -surfaces over p -adic field and a good reduction criterion*. *Annales mathématiques du Québec*, 43:411–434, 2019.
- [10] G. Hernandez-Mada. *A monodromy criterion for the good reduction of $k3$ surfaces*. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 145, 2021.
- [11] Página web J.R. Pérez-Buendía. Afiliación: SECIHTI CIMAT–Mérida. Web: <http://www.cimat.mx/rogelio.perez>. Sección de Cursos: <http://www.cimat.mx/rogelio.perez/Cursos>.
- [12] Jesús Rogelio. Pérez-Buendía. *Curse: p -adic Galois representations*. <https://youtu.be/-KoXzop6X1Y?feature=shared>, CIMPA Research School on Hodge Theory and p -adic Hodge Theory. Online, CIMAT-Gto, México, (2021)
- [13] Laurent Berger. *Construction de (ϕ, γ) -modules: représentations p -adiques et b -paires*. *Algebra and Number Theory*, 2(1):91-120, (2008).
- [14] Laurent Fargues and Jean Marc Fontaine. *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p -adique*. Société mathématique de France, (2018).
- [15] Laurent Fargues and Peter Scholze. *Geometrization of the local Langlands correspondence*. arXiv preprint arXiv:2102.13459, (2021).
- [16] Matthew Morrow. *The Fargues-Fontaine curve and diamonds*. Séminaire BOURBAKI, (1150), (2018).

- [17] Matthew Morrow. *Raconte moi. . . la courbe de Fargues-Fontaine*. Gazette des Mathématiciens, (163):36-41, (2020).
- [18] Maxim Kontsevich and Don Zagier. *Periods*. Springer, (2001).
- [19] Olivier Brinon and Brian Conrad. *Cmi summer school notes on p-adic Hodge theory*. (2009).
- [20] Peter Scholze. *Perfectoid spaces and their applications*. In Proceedings of the ICM, volume 2014, (2014).
- [21] Pierre Colmez. *Le programme de fontaine*. L'Enseignement Mathématique, 65(3/4):487-531, (2019).
- [22] Serin Hong. *Notes on p-adic hodge theory*. (2020).
- [23] Xavier Caruso. *An introduction to p-adic period rings*. (2019).
- [24] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.

Jorge A. Robles Hernández

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Unidad Mérida.
Parque Científico y Tecnológico de Yucatán Km 5.5 Carretera Sierra Papacal
Chuburná Puerto Sierra Papacal; CP 97302, Mérida, Yucatán.
e-mail: jorge.robles@cimat.mx

J. Rogelio Pérez-Buendía

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Unidad Mérida.
Parque Científico y Tecnológico de Yucatán Km 5.5 Carretera Sierra Papacal
Chuburná Puerto Sierra Papacal; CP 97302, Mérida, Yucatán.
e-mail: rogelio.perez@cimat.mx



UN PANORAMA DE LOS AUTOMOVILISTAS Y SUS HÁBITOS AL VOLANTE EN SALTILLO, COAHUILA

PEDRO REYES-PÉREZ, JAIME BURGOS-GARCÍA Y CAROLINA RAMOS-DURÁN

RESUMEN. Este trabajo presenta un estudio inicial sobre los hábitos y características de los conductores en Saltillo, Coahuila. Se recopiló información de diversas fuentes para comparar esta ciudad con otras similares en México, considerando la densidad vehicular y la cantidad de accidentes. Se aplicó una encuesta a conductores del área metropolitana de Saltillo, con preguntas sobre edad, género, accidentes, entre otros factores. Los datos obtenidos respaldan de manera cuantitativa algunos hallazgos previos de estudios cualitativos difundidos por medios locales, los cuales a su vez constituyen un primer paso hacia una mejor comprensión del comportamiento vial en contextos urbanos con características comparables.

1. INTRODUCCIÓN

Muchos accidentes viales están directamente relacionados con factores humanos, como la destreza de manejo, entendida como el desempeño del conductor y su reacción a estímulos en las vialidades. El estilo de manejo influye en la causa de un accidente y está condicionado por factores como actitudes, educación y emociones. Así, la destreza y el estilo de manejo interactúan, influyendo en el riesgo de colisiones y posibles errores al conducir. Según Reason [12], la distinción entre errores y violaciones de leyes de tránsito radica en sus diferentes orígenes psicológicos: los errores provienen de dificultades en el procesamiento cognitivo, mientras que las violaciones reflejan componentes motivacionales y emocionales. Específicamente, los errores se definen como el *fracaso de las acciones planificadas para lograr las consecuencias previstas*, mientras que las violaciones son *desviaciones deliberadas de aquellas prácticas necesarias para mantener el funcionamiento seguro de un sistema potencialmente peligroso*.

Dado que el factor humano es inevitable en la ocurrencia de accidentes vehiculares, es esencial considerar tanto aspectos fisiológicos (tiempos de reacción, percepción de errores, umbrales de percepción) como psicológicos (sensibilidad a estímulos, emociones, experiencia, educación vial). Para evaluar los aspectos psicológicos, se utilizan encuestas y cuestionarios que permiten analizar las actitudes de los conductores. El “cuestionario del comportamiento al volante” (DBQ, por sus siglas en inglés) es una herramienta ampliamente utilizada a nivel mundial para investigar factores relacionados con accidentes. En países hispanohablantes, la versión adaptada, denominada “cuestionario en español del comportamiento al volante” (SDBQ), ha sido aplicada en Argentina, España, Colombia y Ecuador [17], [6]. No obstante, en México no se han documentado estudios específicos usando el DBQ, aunque existen algunos trabajos relacionados [22], [18], [7]. Recabar información en México sobre factores de riesgo vial sería útil tanto para autoridades como para aseguradoras, permitiendo planificar estrategias como reformas viales y campañas educativas, especialmente en ciudades en crecimiento como Saltillo donde se ha centrado el estudio de este trabajo.

Otro factor que incide en los accidentes es el tráfico vehicular. Su estudio microscópico permite analizar el comportamiento de los conductores mediante el seguimiento de

2010 *Mathematics Subject Classification*. 62B10, 62D05, 62Q05.

Palabras clave. Accidentes viales, Movilidad, Estadística Descriptiva, Tamaño de muestra, Saltillo.

vehículos con cámaras de video, radares o inteligencia artificial. Ejemplos de esta metodología son los estudios del Departamento de Transporte de Estados Unidos en el programa NGSIM, que recopila trayectorias vehiculares en vías como la *US 101* y el Lankershim Boulevard en Los Ángeles [19]. En consecuencia, el conocimiento de la densidad de vehículos en una población es importante para analizar, por ejemplo, el supuesto de que a mayor cantidad de vehículos mayor cantidad de accidentes. Dicha cuestión se aborda también en este trabajo y los datos muestran que no necesariamente existe una proporción directa entre el tamaño de parque vehicular y el número de accidentes.

Inspirados en lo expuesto anteriormente, en el año 2023 se planeó originalmente recabar información de los conductores de Saltillo, así como del parque vehicular, con la ayuda de alguna instancia gubernamental. Sin embargo, en ese momento no se pudo obtener el apoyo solicitado. En consecuencia, se creó un cuestionario corto y se difundió por distintos medios para obtener información sobre las características demográficas, sociales y de algunos hábitos de manejo de los conductores en Saltillo. Los detalles acerca del cuestionario y de la metodología utilizada para su aplicación se encuentran en la sección (4) donde también se realiza un análisis cualitativo y cuantitativo de las respuestas. Los datos muestran que, por ejemplo, un porcentaje significativo de los encuestados no siempre respetan las señales de tránsito ni los límites de velocidad, también se observó que los hombres son los que menos respetan estas normas, y que las mujeres protagonizan menos accidentes que los hombres. Los datos también confirman algunos estudios de otros autores acerca de la tendencia al alza en los tiempos de traslado de las personas. En la sección (2) se presenta un panorama general del parque vehicular y el número de accidentes nacionales reportados en los últimos años con la finalidad de poner en perspectiva al estado de Coahuila en el contexto nacional. Un resultado revelador muestra que el estado de Nuevo León presenta una gran cantidad de accidentes ya que, en promedio, registró casi tres veces más percances que el área metropolitana del Valle de México entre los años 2017 y 2023. En la sección (3) se presentan datos específicos para el área metropolitana de Saltillo que han sido recabados de distintas fuentes tanto nacionales como locales y que muestran una importante tendencia al alza de los accidentes viales. Finalmente, en la sección (5), se hacen conclusiones sobre la investigación realizada, y además se ofrecen perspectivas de trabajo futuro.

2. PARQUE VEHICULAR Y NÚMERO DE ACCIDENTES A NIVEL NACIONAL

En la introducción se mencionó que la cantidad de vehículos en circulación es un factor que influye en la ocurrencia de accidentes tanto a nivel local como nacional. Para obtener y analizar esta información se consultaron las bases de datos en la página del INEGI y fueron procesados con el lenguaje de programación R, [14].

2.1. Automóviles en circulación a nivel nacional. De acuerdo con el INEGI [26], los vehículos de motor se clasifican como: automóvil, camiones y camionetas ambos tanto de pasajeros como de carga, y motocicletas. Al hacer referencia del total de vehículos, se está considerando a todos los mencionados. En la figura 1, se observa el crecimiento del parque vehicular a partir del año de 1980 hasta 2023; la gráfica azul representa el total de vehículos en circulación, la cual pasó de 5, 758, 330 a 58, 199, 293, esto indica que en 43 años el incremento fue de 52, 440, 963 de unidades; la gráfica roja indica el crecimiento únicamente de automóviles, el cual pasó de 3, 950, 042 a 38, 039, 898, esto es un incremento de 34, 089, 856; la gráfica negra representa a camiones y camionetas tanto de pasajeros como de carga y motocicletas, los registros de todos estos vehículos pasaron de 5, 758, 330 a 20, 159, 395, presentando un incremento de 14,401,065 unidades.

En el cuadro 1, se presenta el número de vehículos en circulación en los últimos años de la Ciudad de México, Estado de México, Nuevo León, Coahuila, San Luis Potosí y

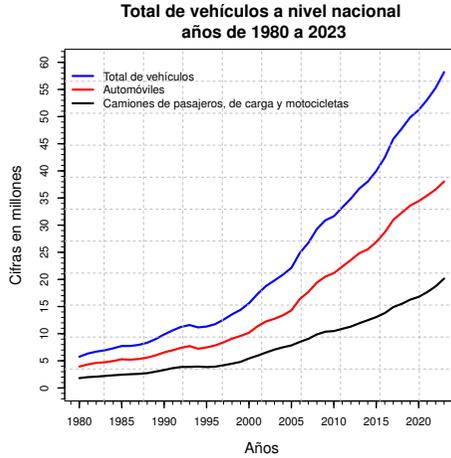


FIGURA 1. Parque vehicular nacional.

Chihuahua. Las tres primeras entidades federativas se eligieron debido a su cantidad de habitantes y por su tamaño de parque vehicular; las tres siguientes entidades se eligieron por su cantidad de población que es equiparable entre sí.

Entidad federativa	Años					Población 2020
	2019	2020	2021	2022	2023	
México	8,170,767	8,571,466	8,996,664	9,421,189	9,988,109	16,992,418
CDMX	6,084,903	6,145,553	6,235,773	6,368,520	6,471,738	9,209,944
Nuevo León	2,385,644	2,476,062	2,568,278	2,686,334	2,232,607	5,784,442
Coahuila	970,099	1,005,474	1,039,056	1,127,781	1,257,493	3,146,771
San Luis Potosí	1,243,194	1,280,233	1,328,813	1,357,909	1,476,277	2,822,255
Chihuahua	1,672,105	1,725,183	1,782,627	1,931,820	1,879,130	3,741,869

CUADRO 1. Parque vehicular en el periodo del 2019 al 2023, y población.

2.2. Accidentes. En este trabajo es de interés analizar la cantidad de accidentes ocurridos en México, para esto se utilizan los datos del INEGI. La información se obtuvo a nivel de entidad y municipal desde 1997 hasta 2023 [8], y en [9] se consultaron los registros por entidad federativa de los años 2019 a 2023. A partir de estas bases de datos se generaron las gráficas de la figura 2, que muestran el número de accidentes por entidad entre los años 2017 y 2023. Cabe destacar que Nuevo León resalta por tener la mayor cantidad de accidentes en cada uno de estos años con un promedio de 75,294 superando significativamente a las demás entidades de toda la República Mexicana, inclusive al Estado de México y la Ciudad de México, las cuales en conjunto tienen en promedio de 26,016 accidentes. Lo anterior quiere decir que Nuevo León registró casi tres veces más percances que el área metropolitana del Valle de México. También se puede observar que en este periodo de tiempo, los primeros diez lugares fueron ocupados casi por las mismas entidades, estas son: Nuevo León, Chihuahua, Sonora, Jalisco, Guanajuato, Michoacán y Estado de México. Continuando con el análisis de la figura 2, es interesante notar que Coahuila se encontró entre los diez primeros lugares en accidentes vehiculares en los años de 2017 a 2021, y presentó una ligera disminución en los años 2022 y 2023. En promedio, Coahuila de los años de 2017 a 2023 se encuentra en el décimo lugar con 12,272 accidentes.

Por otra parte, Chihuahua tiene una población equiparable con Coahuila, vea la columna derecha de el cuadro 1, pero con mayor cantidad de parque vehicular el cual

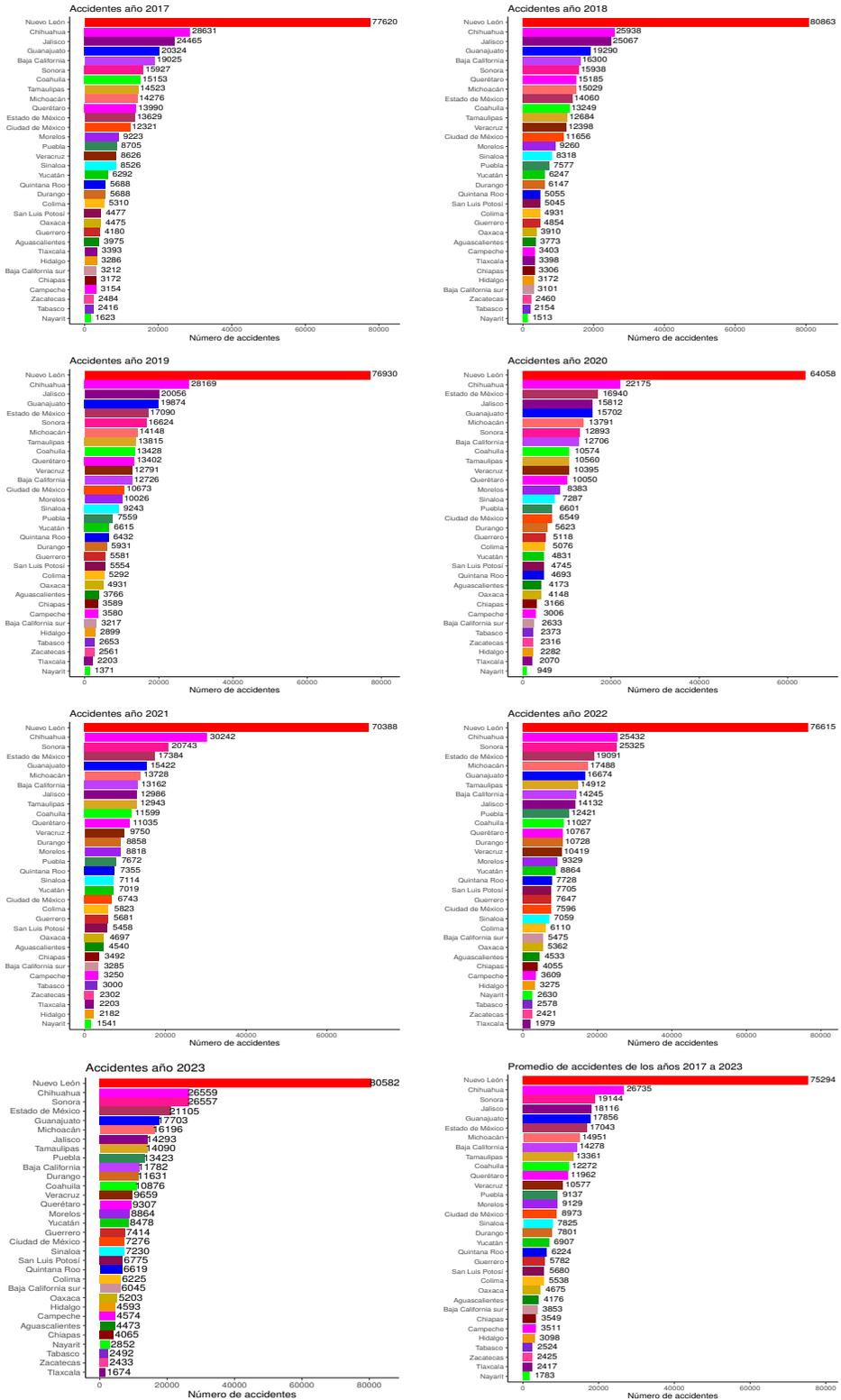


FIGURA 2. Accidentes por entidad federativa en el periodo 2017-2023. Datos obtenidos de [9].

es de aproximadamente 1, 879, 130, mientras que Coahuila tiene 1, 257, 493 unidades. Se observa que Chihuahua presenta una cantidad de accidentes mucho mayor ocupando siempre el segundo puesto con 26, 735 percances en promedio. Un caso contrario es San Luis Potosí, donde la población es equiparable con Coahuila y presenta un parque vehicular de aproximadamente 1, 476, 277, pero que reporta un número menor de accidentes con un promedio 5, 680. Vea el cuadro [1](#) y la gráfica del año 2023 de la figura [2](#).

Este breve análisis muestra que Coahuila tiene un número importante de accidentes de tránsito ubicándose en la décima posición y para el caso particular de Saltillo, dicho número ha ido a la alza y de manera lamentable también el número de decesos. Lo cual veremos en la próxima sección.

3. PARQUE VEHICULAR Y NÚMERO DE ACCIDENTES EN SALTILLO

Según los datos de la Secretaría de Economía [24](#), en 2020 la población en el área metropolitana de Saltillo fue de 1,031,779 habitantes (aproximadamente 50 % hombres y 50 % mujeres), comparando esta cantidad con la registrada en el año 2010, se observa un crecimiento de 25.3%. Por otra parte, el Instituto Municipal de Planeación (IMPLAN de Saltillo) reporta que en la ciudad circulan diariamente alrededor de 500,000 vehículos [23](#). Más aún, en la nota del periódico Vanguardia [20](#) se afirma que, “*en la zona conurbada de Saltillo existen más autos que viviendas, lo cual explica el problema de congestionamiento que padecemos a casi cualquier hora del día y la nula promoción del traslado peatonal*”. Cabe mencionar que el problema del tráfico y la movilidad en la ciudad de Saltillo ha sido estudiado anteriormente a tal punto que en la misma nota periodística [20](#) se menciona que, “*Los rezagos en materia de movilidad urbana en la zona metropolitana de Saltillo se han diagnosticado hasta la saciedad*”. Y solo recientemente se han puesto en marcha acciones prácticas para tratar de mejorar las condiciones de movilidad en la ciudad, como es el estudio del tráfico en los puntos con mayor congestionamiento usando un simulador de tráfico cuyos datos se obtienen con cámaras y drones [23](#).

Respecto a los accidentes en Saltillo, en la referencia [13](#) se puede encontrar una investigación de los accidentes viales durante el periodo del 2018 al 2023. En este trabajo se menciona que distintas fuentes, como el Área de Control de Accidentes de Policía Preventiva y Tránsito Municipal de Saltillo reportaron, para el año 2023, un total de 892 siniestros viales como: choques entre vehículos, choques contra objeto fijo, volcaduras y atropellamientos; los cuales dejaron un saldo de 467 personas heridas, de estas se reportaron 427 conductores u ocupantes de un vehículo, 38 peatones y 2 ciclistas. Más aún, las cifras de decesos relacionados con accidentes viales han ido a la alza como se puede observar en el cuadro [2](#).

Año	Automovilistas	Peatones	Ciclistas	Total
2023	26	30	0	56
2022	20	31	1	52
2021	18	25	2	45
2020	11	23	3	37
2019	16	25	1	42
2018	10	22	1	33

CUADRO 2. Número de decesos relacionado con accidentes viales en Saltillo en el periodo comprendido entre los años 2018 al 2023. Datos extraídos de [13](#).

4. ESTRUCTURA DE LA ENCUESTA Y DATOS RECADADOS

Con el fin de obtener información preliminar respecto de algunas características y hábitos de los conductores en el área metropolitana de Saltillo, se realizó una breve encuesta de 18 preguntas la cual puede encontrarse en [25]. Ésta se difundió principalmente entre la comunidad de la Universidad Autónoma de Coahuila así como a través de redes sociales. Para tener una muestra confiable, se realizó el cálculo del tamaño de muestra para una población finita, con un 96 % de confianza de acuerdo con la expresión (I). Esta fórmula puede encontrarse en diferentes textos, por ejemplo, [2] y [11], por mencionar algunos.

$$(1) \quad n = \frac{N (Z_{\alpha})^2}{p} (1 - p) E^2 (N - 1) + (Z_{\alpha})^2 p (1 - p).$$

Donde.

- $N = 879958$.
- $\alpha = 0.04$.
- $(Z_{\alpha})^2$, es el cuantil de la distribución normal estándar.
- $p = 0.5$, es probabilidad de éxito del evento.
- $E = 4\%$, es el error de estimación máximo permitido.

El valor de N es el tamaño de la población adulta en Saltillo Coahuila y se obtuvo del INEGI, lo cual puede ver en [2]. Con las especificaciones dadas, el tamaño de muestra necesario es $n \geq 576$. Sin embargo, en la encuesta aplicada se obtuvieron 722 respuestas, de éstas se quitaron los que no sabían manejar y dos preguntas en las cuales no hubo respuestas. Así que el total de encuestas contestadas correctamente fue de 676. Considerando esto, el número de respuestas es mayor que el tamaño de muestra calculado. Aunque el número de la encuestas contestadas cumple con las condiciones del tamaño de muestra dado en (I), ésta tiene sesgo debido a que no fue difundida aleatoriamente sino que se aplicó principalmente entre la comunidad universitaria y en redes sociales.

4.1. Datos sociodemográficos de la encuesta. Del total de las 676 respuestas obtenidas, el 53.7 % corresponden a mujeres y 46.3 % a hombres. De estas 676 personas, el 83.3 % son originarios de Coahuila, el 3.3 % es de la Ciudad de México, el 2.4 % de Nuevo León, el 1.1 % de Tamaulipas, y el 7.7 % de otras entidades. Del porcentaje de personas originarias de Coahuila se observó que la gran mayoría de los conductores provienen de la región Sureste con el 86 %, mientras que únicamente el 14 % proviene de las regiones: Centro, Carbonífera, Laguna, Norte y Desierto. La información descrita se puede ver en el cuadro 3.

En la sección (I) se mencionó que ciertos factores humanos relacionados con la edad como, la experiencia, umbrales de percepción, y el manejo de las emociones resultan ser factores en los accidentes. En consecuencia, es de interés saber la edad en la que han aprendido a manejar los conductores. En el cuadro 4 se observa que el 17.3 % empezó a conducir entre los 13 a 15 años, el 74 % entre los 16 a los 21 años y el 8 % a partir de los 22 años. En este punto, vale la pena recordar que la encuesta fue contestada en su mayoría por universitarios y gente con acceso a las redes sociales, por tal motivo los resultados pueden presentar un sesgo.

Un factor importante es la forma en que los conductores aprendieron a manejar. De los 676 encuestados, 455 no tomaron curso de manejo lo cual equivale al 67.3 %; así que únicamente el 32.7 % tomó curso en alguna escuela de manejo. Otro factor de interés fue saber cuántos conductores hay en cada hogar, independientemente del número de integrantes de cada familia. Se tiene que en la gran mayoría de los hogares hay dos conductores esto es el 46.2 %, el 22.3 % tiene tres conductores y en el 15 % se tienen cuatro o más. Por supuesto, este factor está relacionado con el número de vehículos que hay en cada hogar. Con respecto a las residencias, los datos muestran que sólo en 17 de ellas no cuentan con vehículo propio, en 186 hay un vehículo; en

Dato	Cantidad	Porcentaje
Conductores femeninos	363	53.7
Conductores masculinos	313	46.3
Residentes en Saltillo	631	93.3
No residentes en Saltillo	45	6.7
Nacidos en:		
Coahuila	563	83.3
Ciudad de México	22	3.3
Nuevo León	17	2.4
Tamaulipas	12	1.7
Estado de México	9	1.3
Otra entidad	53	7.7
Coahuila, región de nacimiento		
Sureste	484	71.6
Centro	29	4.3
Carbonífera	22	3.3
Laguna	13	1.9
Norte	11	1.6
Conductores en casa		
Uno	107	15.8
Dos	312	46.2
Tres	151	22.3
Cuatro o más	106	15.7

CUADRO 3. Datos sociales y demográficos de la encuesta.

Edades	Mujeres	%	Hombres	%	Total	%
7-9	0	0.0	1	0.1	1	0.1
10-12	1	0.1	2	0.3	3	0.4
13-15	43	6.4	74	10.9	117	17.3
16-18	115	17.0	153	22.6	268	39.6
19-21	155	22.9	75	11.1	230	34.0
22-24	14	2.1	1	0.1	15	2.2
25-27	21	3.1	4	0.6	25	3.7
28-30	11	1.6	1	0.1	12	1.8
34-36	3	0.4	1	0.1	4	0.6
40-42	0	0.0	1	0.1	1	0.1

CUADRO 4. Rangos de edades en que aprenden a manejar.

286 hay dos vehículos, en 136 hay tres vehículos; y en 59 hay 4 o más vehículos. Estos datos se pueden ver en los cuadros 5 y 6.

Cabe señalar que una gran cantidad de los encuestados tramitó su primera licencia tan pronto como cumplió la mayoría de edad, representando el 74.9% de la muestra, es decir, tres de cada cuatro personas, esta información se muestra en el cuadro 7. En la figura 3 observamos que el 73.6% de las personas aprendieron a manejar alrededor de los 18 años lo que muestra que casi la totalidad de las personas que aprendieron a manejar en este rango de edad, y prácticamente el mismo porcentaje de personas tramitan su licencia de conducir entre los 18 y 21 años, lo cual se puede comprobar viendo el cuadro 7. Por otra parte, también es de destacar que 5.5% de los encuestados nunca han tramitado su licencia.

En el cuadro 8 se muestran algunos datos respecto a los hábitos de manejo de los encuestados como son: los porcentajes de hombres y mujeres que respetan las señales

Variable	Mujeres	%	Hombres	%	Total	%
Tomó curso de manejo						
Sí	148	21.9	73	10.8	221	32.7
No	215	31.8	240	35.5	455	67.3
Total	363	53.7	313	45.3	676	100
Propietario de vehículo						
Sí	316	46.7	271	40.1	587	86.8
No	47	7.0	42	6.2	89	13.2
Total	363	53.7	313	46.3	676	100.0

CUADRO 5. Tomó curso de manejo y si el vehículo es propio.

No. de vehículos en casa	0	1	2	3	4	5	6	10
Residencias	17	186	286	136	38	15	5	1

CUADRO 6. Número de vehículos que hay en cada residencia.

Edades	Mujeres	%	Hombres	%	Totales	%
16-17	22	3.3	47	7.0	69	10.2
18-19	142	21.0	160	23.7	302	44.7
20-21	122	18.0	82	12.1	204	30.2
22-23	6	0.9	0	0.0	6	0.9
24-25	16	2.4	1	0.1	17	2.5
26-27	16	2.4	2	0.3	18	2.7
28-29	5	0.7	2	0.3	7	1.0
30-31	5	0.7	2	0.3	7	1.0
32-33	1	0.1	1	0.1	2	0.3
33-34	1	0.1	0	0.0	1	0.1
35-36	3	0.4	2	0.3	5	0.7
39-40	0	0.0	1	0.1	1	0.1
Sin licencia	24	3.6	13	1.9	37	5.5
Total	363	53.6	313	46.2	676	99.9

CUADRO 7. Edad en la que tramitaron su primera licencia para conducir.

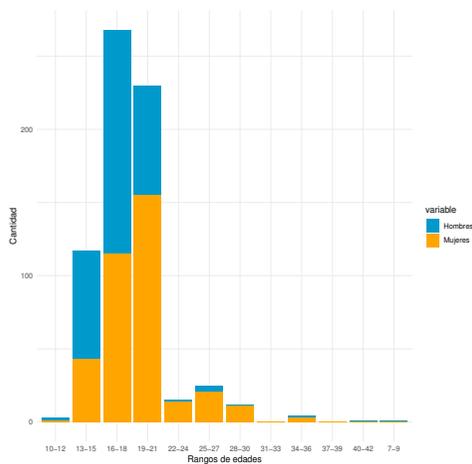


FIGURA 3. Rangos de edad en la que empezaron a conducir.

Preguntas	Frecuencia	Mujeres	%	Hombres	%	Total	%
¿Con qué frecuencia respeta las señales de tránsito?	Siempre	245	36.2	184	27.2	429	63.5
	Casi siempre	116	17.2	121	17.9	237	35.1
	Algunas veces	1	0.1	3	0.4	4	0.6
	Sólo si hay patrullas	1	0.1	5	0.7	6	0.9
¿Respetan los límites de velocidad?	Siempre	281	41.6	188	27.8	469	69.4
	Cuando hay patrullas	9	1.3	19	2.8	28	4.1
	Cuando hay tráfico	73	10.8	106	15.7	179	26.50
¿Con qué frecuencia usa las luces direccionales?	Siempre	294	43.5	234	34.6	528	78.1
	Casi siempre	67	9.9	66	9.8	133	19.7
	Regularmente	2	0.3	11	1.6	13	1.9
	Poco	0	0.0	1	0.1	1	0.1
	Nunca	0	0.0	1	0.1	1	0.1
¿Usa el celular mientras conduce?	No infraccionado	356	52.7	302	44.7	658	97.3
	Infraccionado	7	1.0	11	1.6	18	2.7
¿Cuántos accidentes ha protagonizados?	Ninguno	207	30.6	171	25.3	378	55.9
	Uno	97	14.3	77	11.4	174	25.7
	Dos	47	7.0	54	8.0	101	14.9
	Tres o más	12	1.8	11	1.6	23	3.4
Tiempo promedio extra de llegada cuando hay tráfico	5 a 10 minutos					83	12.3
	15 a 20 minutos					281	40.7
	más de 25 minutos					320	47.0

CUADRO 8. Datos de hábitos de los conductores.

de tránsito, los límites de velocidad y el uso de luces direccionales, etc. En dicho cuadro se observan porcentajes significativos de personas que no siempre respetan las señales de tránsito y los límites de velocidad, siendo los hombres los que menos respetan estas normas incluso el uso de luces direccionales. En este mismo cuadro [8](#), se observa que las mujeres son las que menos se accidentan, ya que el 69.4% de mujeres han protagonizado accidentes, mientras que el 74.7% de hombres han estado involucrados en accidentes automovilísticos.

Respecto al uso del celular mientras se conduce, lamentablemente un hábito muy común entre los conductores y en consecuencia, una fuente importante de accidentes, se observa que casi la totalidad de los encuestados no han sido infraccionados por esta falta. Esto no indica necesariamente que los conductores no utilicen su celular al volante sino que también puede deberse a la falta de instrumentos que permitan detectar este hábito y sancionarlo.

Otro dato importante recabado en la encuesta fue el tiempo de traslado entre distintos puntos del área metropolitana. Si bien es cierto que este registro depende de la ubicación geográfica del domicilio y del destino, es de resaltar que alrededor de la mitad de las personas encuestadas contestaron que consideran que en promedio demoran más de 25 minutos extra al tiempo que harían en promedio en un día sin tráfico, no importando si van a sus trabajos, escuelas o de compras. Si tenemos en cuenta que un viaje entre puntos antipodales de la ciudad, por ejemplo de sur a norte, puede tomar (según datos de Google maps) alrededor de 30 minutos sin tráfico, entonces estaríamos hablando de tiempos de traslado de alrededor de una hora o más sólo para cruzar la ciudad en automóvil. En consecuencia, este dato revela que el factor del tráfico en la ciudad está generando una pérdida considerable de horas por persona a la semana y afectando la calidad de vida de los habitantes.

Con respecto al género, de los 676 conductores, 363 son mujeres y de éstas 148 tomaron el curso de manejo, lo cual representa el 21% del total. Por otra parte, de los 313 hombres sólo 73 tomaron dicho curso, esto es únicamente el 10% del total. En conclusión, de los 676 conductores, 221 tomaron curso de manejo lo cual es el 32.7% y de éstos el 20% son mujeres. Si se considera que en una escuela de manejo enseñan

las reglas básicas para conducir, entonces el 67 % de los conductores carecen de estos conocimientos.

4.2. Respuestas cruzadas de hábitos de conductores. En esta sección se analiza si las respuestas a cada pregunta del cuestionario están asociadas entre sí. Con este propósito se construyó el cuadro 9, en el cual se incluye para cada par de preguntas una tabla de doble entrada o tabla de contingencia. Además, se presentan los coeficientes de contingencia, el V de Cramer y el Tau-b de Kendall correspondientes. Cada tabla contiene las frecuencias absolutas, y al final de cada fila y columna se muestran los totales respectivos. Los valores p en cada celda corresponden a las probabilidades conjuntas $P(A_i \cap B_j)$, donde A_i son las respuestas por filas y B_j las de las columnas; además al final de cada fila y columna se encuentra la probabilidad marginal $P(A_i)$ y $P(B_j)$, respectivamente.

En el primer bloque del cuadro 9 se clasifica en qué medida los conductores respetan las señales de tránsito con respecto a si éstos tomaron o no el curso de manejo. Se observa que 221 conductores tomaron curso de manejo, y de éstos 220 casi siempre o siempre respetan las señales de tránsito, esto representa el 33 % de las encuestas. Por el contrario, 455 no tomaron curso de manejo de los cuales 446 casi siempre o siempre no respetan las señales de tránsito esto es el 46 %. En total, 221 conductores tomaron curso de manejo esto es el 33 %; y el 67 % no tomó dicho curso. De acuerdo a lo anterior, se observa que los conductores que tomaron curso de manejo son quienes más respetan las señales de tránsito.

En el segundo bloque del cuadro 9, se muestran las respuestas acerca del uso de las luces direccionales en función de si se tomó algún curso de manejo. De entre el total de respuestas, 218 afirmaron hacer uso de luces direccionales con frecuencia o siempre; esto representa la proporción de 32 %. Por el contrario, 443 conductores no usan luces direccionales y no tomaron el curso de manejo, esto representa el 56 %. En consecuencia, podemos afirmar que el uso de las luces direccionales se ve influenciado por la asistencia a una escuela de manejo. Con respecto a ser infraccionado por conducir usando el celular y su relación con tomar un curso de manejo, en el cuadro 9 se observa que 5 conductores fueron infraccionados por usar el celular mientras conducían y 216 no fueron infraccionados, todos estos conductores tomaron curso de manejo, lo representa el 1 % y 32 % respectivamente. Por otra parte, 13 conductores fueron infraccionados por usar el celular mientras conducían y 442 no fueron infraccionados, todos estos no tomaron curso de manejo, los datos anteriores son el 2 % y 65 % respectivamente. No obstante, como ya fue mencionado, los conductores que no recibieron alguna infracción no indica necesariamente que no incurrieran en este mal hábito.

La relación entre el número de accidentes protagonizados y los cursos de manejo se muestran en la parte inferior del cuadro 9, se observa que de entre los conductores que si tomaron algún curso de manejo, 56 han tenido un accidente, 28 reportan dos accidentes y 12 han protagonizado más de dos accidentes. Mientras que, del total de conductores que no tomaron algún curso, 118 conductores han tenido un accidente, 73 reportan dos accidentes y 11 han protagonizado más de dos accidentes. En total, se observa que las personas que no cuentan con algún curso de manejo protagonizaron casi el doble de accidentes respecto a las personas que si lo tomaron.

Debido a que las reglas de tránsito deberían ser conocidas y aplicadas por todos los conductores, independientemente del tipo de vehículo que utilicen, es de interés analizar si el respeto de la reglas de tránsito son más seguidas por conductores que tomaron curso de manejo o es irrelevante. Para tal finalidad se realizó el cuadro 10, en donde se observa que 179 conductores respetan los límites de velocidad sólo si hay

	¿Tomó curso de manejo?						
1. ¿Respetar señales de tránsito?	Si	<i>p</i>	No	<i>p</i>	Suma	<i>p</i>	<i>r</i>
Sólo si hay patrullas	1	0.00	5	0.01	6	0.01	
Algunas veces	0	0.00	4	0.01	4	0.01	
Casi siempre	76	0.11	161	0.24	237	0.35	
Siempre	144	0.21	285	0.42	429	0.64	
Suma	221	0.33	455	0.67	676	1.00	
Coefficiente de contingencia, y Cramer							0.065
Coefficiente Tau de Kendall							-0.029
2. ¿Usa de luces direccionales?							
Nunca	0	0	1	0.00	1	0.00	
Poco	0	0.00	1	0.00	1	0.00	
Regularmente	3	0.00	10	0.01	13	0.02	
Con frecuencia	42	0.06	91	0.14	133	0.20	
Siempre	176	0.26	352	0.52	528	0.78	
Suma	221	0.33	455	0.67	676	1.00	
Coefficiente de contingencia, y Cramer							0.05
Coefficiente Tau de Kendall							-0.025
3. ¿Le han infracción por usar celular al conducir?							
Sí	5	0.01	13	0.02	18	0.03	
No	216	0.32	442	0.65	658	0.97	
Suma	221	0.33	455	0.67	676	1.00	
Coefficiente de contingencia, y Cramer							0.017
Coefficiente Tau de Kendall							-0.0173
4. ¿Número de accidentes protagonizados?							
0	125	0.18	253	0.37	378	0.56	
1	56	0.08	118	0.17	174	0.26	
2	28	0.04	73	0.11	101	0.15	
+2	12	0.02	11	0.02	23	0.03	
Suma	221	0.33	455	0.67	676	1.00	
Coefficiente de contingencia, y Cramer							0.087
Coefficiente Tau de Kendall							0.003

CUADRO 9. Relación entre las preguntas.

tráfico, de éstos, 86 han tenido al menos un accidente automovilístico, en porcentaje es el 13%; 28 respetan límites de velocidad sólo si hay patrullas cerca y 16 de estos han tenido al menos un accidente esto equivale al 2%; 469 siempre respetan los límites de velocidad y 196 de ellos han protagonizado al menos un accidente esto es el 28%.

	¿Respetar los límites de velocidad?								
No. de accidentes protagonizados	Si hay tráfico	<i>p</i>	Si hay patrullas	<i>p</i>	Siempre	<i>p</i>	Suma	<i>p</i>	<i>r</i>
0	93	0.14	12	0.02	273	0.40	378	0.56	
1	54	0.08	9	0.01	111	0.16	174	0.26	
2	26	0.04	4	0.01	71	0.10	101	0.15	
+2	6	0.01	3	0.00	14	0.02	23	0.03	
Suma	179	0.26	28	0.04	469	0.69	676	1.00	
Coefficiente de contingencia									0.115
Coefficiente de Cramer									0.082
Coefficiente Tau de Kendall									-0.049

CUADRO 10. Accidentes protagonizados y el respeto a los límites de velocidad.

En el cuadro [11](#), se tienen las proporciones del número de accidentes y el uso de las luces direccionales. Cabe resaltar que el total de conductores que usan las luces frecuentemente son 133 de los cuales 72 han protagonizado al menos un accidente, el porcentaje es de 11%; 528 conductores siempre usan las luces direccionales y de éstos 312 han protagonizado accidentes, esto corresponde al 44% .

No. de accidentes protagonizados	Uso de luces direccionales										r	
	Nunca	p	Poco	p	Frec	p	Regular	p	Siempre	p		Suma
0	0	0.00	1	0.00	61	0.09	4	0.01	312	0.46	378	0.56
1	0	0.00	0	0.00	44	0.06	4	0.01	126	0.19	174	0.26
2	1	0.00	0	0.00	22	0.03	3	0.00	75	0.11	101	0.15
+2	0	0.00	0	0.00	6	0.01	2	0.00	15	0.02	23	0.03
Suma	1	0.00	1	0.00	133	0.20	13	0.02	528	0.78	676	1.00
Coefficiente de contingencia												0.179
Coefficiente de Cramer												0.105
Coefficiente Tau de Kendall												-0.106

CUADRO 11. Accidentes protagonizados y el uso de luces direccionales.

Respecto a la correlación, en los cuadros 9 a 11 se presentan el coeficiente de contingencia, el V de Cramer y el Tau-b de Kendall. En todos los casos, los valores obtenidos son muy cercanos a cero, lo que indica una correlación muy débil entre cada par de preguntas. En particular, en el cuadro 9 se observa que los valores del coeficiente de contingencia y del V de Cramer coinciden, esto puede deberse a la baja magnitud de las correlaciones y al tamaño grande de la muestra. Cabe señalar que la tabla de contingencia muestra únicamente cuántas veces ocurren ciertas combinaciones específicas de valores entre dos variables, pero no proporciona información sobre la fuerza, dirección o significancia estadística de la relación entre ellas. En cambio, las medidas de correlación sí permiten evaluar estos aspectos. Para una discusión más detallada, puede consultarse [1]. En consecuencia, los valores contenidos en una tabla de contingencia no garantizan la existencia de correlación entre las respuestas. El coeficiente V de Cramer puede encontrarse en diversos textos básicos de estadística, como en la referencia [5]. Este coeficiente se define mediante la siguiente expresión:

$$(2) \quad V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \times \min(k-1, r-1)}}$$

donde

- χ^2 , es el estadístico chi-cuadrado, el cual se obtiene a partir de la tabla de contingencia.
- n , es el tamaño de la muestra.
- k , es el número de columnas.
- r , es el número de renglones.
- $\min(k-1, r-1)$, es el mínimo entre el número de renglones menos uno, y el número de columnas menos uno.

Por otra parte, el coeficiente Tau-b de Kendall es una medida de correlación no paramétrica, dado por

$$(3) \quad \tau_b = \frac{n_c - n_d}{\sqrt{(n_c + n_d + T_x) + (n_c + n_d + T_y)}}$$

siendo

- n_c , es el número de pares concordantes.
- n_d , es el número de pares discordantes.
- n , es el número de observaciones.
- T_x , es el número de pares empatados en x , pero no en y .
- T_y , es el número de pares empatados en y , pero no en x .

Este coeficiente se puede encontrar en diversos textos, por ejemplo en [10].

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Este trabajo presenta datos sobre el parque vehicular y el número de accidentes a nivel nacional para contextualizar la situación del estado de Coahuila en los últimos años. Al comparar con otras ciudades mexicanas con población y parque vehicular similares, se encontró que Chihuahua posee más vehículos y accidentes que Coahuila, que ocupa el segundo lugar en percances. Por otro lado, San Luis Potosí tiene un parque vehicular mayor que Coahuila, pero registra menos accidentes. Esto sugiere que una mayor densidad vehicular no implica necesariamente un mayor número de accidentes como en el caso de Nuevo León cuyos datos muestran que este estado registró casi tres veces más percances que la Ciudad de México y el Estado de México en conjunto. Además, se observó que Coahuila se ubica, en promedio, entre los diez estados con más accidentes vehiculares entre 2017 y 2023.

En el caso específico del área metropolitana de Saltillo, los datos coinciden con estudios previos sobre el aumento en los tiempos de traslado y en el número de accidentes viales. Asimismo, se identificó que un porcentaje significativo de los encuestados no respeta siempre las señales de tránsito ni los límites de velocidad. Se observó que las mujeres son las que menos se accidentan en comparación con los hombres. Por otra parte, los datos del cuadro 6 muestran que aproximadamente el 42.31 % y el 20.12 % de los hogares tienen 2 y 3 vehículos; si comparamos estos datos con los de la parte inferior del cuadro 3, notamos que hay un número similar de residencias que tienen 2 o 3 conductores. En consecuencia, se infiere que en los hogares, cada persona que sabe conducir utiliza un vehículo, lo que refleja una preferencia por el automóvil sobre el transporte público. Esto se evidencia en el rápido crecimiento del parque vehicular y confirma cuantitativamente lo señalado en notas periodísticas que indican que hay más autos que viviendas en la ciudad [20], [23].

Por lo tanto, este primer estudio sugiere que Saltillo es una ciudad donde se “privilegia” el uso del automóvil y que muchos habitantes carecen de buenos hábitos de manejo, lo que podría llevar a niveles preocupantes de accidentes viales, como en Nuevo León. Para validar estas afirmaciones y generalizarlas, es necesario un muestreo probabilístico aleatorio. Por ello, como un primer trabajo a futuro se propone adaptar y validar los cuestionarios DBQ y SDBQ para el área metropolitana de Saltillo, en colaboración con el Instituto Municipal de Movilidad Urbana Sostenible, con el fin de recopilar datos útiles para la sociedad, el gobierno y/o el sector privado sobre la propensión a accidentes.

Otro objetivo de trabajo a futuro es utilizar algunos datos de este trabajo para formar una muestra representativa de conductores en el área metropolitana de Saltillo y realizar experimentos controlados en condiciones de tráfico real. Estos experimentos se enfocarán en situaciones de tránsito denso en las salidas de la ciudad, para obtener datos estadísticos sobre los tiempos de reacción de los conductores ante estímulos como incorporaciones de vehículos, frenadas repentinas o avances lentos. Este escenario, donde los vehículos avanzan en un solo carril y los conductores deben reaccionar a ciertos estímulos, puede estudiarse mediante los modelos *car following*. Dichos modelos, descritos en [16], son sistemas de ecuaciones diferenciales con retardo donde el tiempo de reacción del conductor es un parámetro clave. La dinámica del pelotón vehicular depende significativamente de los retardos temporales, cuya determinación es fundamental para estudiar escenarios específicos. Estos escenarios se han investigado a lo largo de las últimas décadas utilizando mediciones directas con instrumentación en condiciones de tráfico controladas, así como análisis de datos obtenidos mediante videocámaras ubicadas en las vialidades. El lector interesado en este tema puede consultar las referencias [21], [3], [15].

AGRADECIMIENTOS. El autor Reyes-Pérez agradece al Dr. Luis Antonio Rincón Solís por sus valiosos comentarios durante la elaboración de este trabajo. El autor Burgos-García expresa su gratitud al Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores por el apoyo recibido, así como al Departamento de Matemáticas de la UAM-I por la hospitalidad brindada durante el desarrollo de esta investigación. La autora Ramos-Durán agradece a las personas que colaboraron en la difusión de la encuesta. Los autores brindan su agradecimiento al revisor anónimo por sus críticas constructivas y sugerencias, las cuales contribuyeron significativamente a mejorar este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Agresti, A. (2010). *Analysis of Ordinal Categorical Data*. Wiley.
- [2] Cochran W. G. *Sampling Techniques (3rd ed.)*. New York: John Wiley & Sons. 1977.
- [3] Drozdziel, P., et al. Drivers' reaction time research in the conditions in the real traffic. *Open Engineering*. 10(1), 35–47. 2020
- [4] El Siglo de Torreón. *Educación vial en México salva millones de vidas*. <https://www.elsiglodetorreon.com.mx/noticia/2023/educacion-vial-en-mexico-salva-millones-de-vidas.html>. 2023.
- [5] Everitt B.S. *The Analysis of Contingency Tables (2nd ed.)*. Chapman and Hall/CRC. 1992
- [6] Espinoza-Molina, F.E. Ortega, M. Sandoval Escobar, K.E. Vazquez Salazar, J.S. *An Integrated Approach to the Spanish Driving Behavior Questionnaire (SDBQ) in the City of Cuenca, Ecuador*. *Sustainability* 16, no, 4885. 2024
- [7] Hernández-Hernández A.M., Siqueiros-García J.M., Robles-Belmont E, Gershenson C. *Anger while driving in Mexico City*. *PLoS ONE* 14(9): e0223048. 2019.
- [8] INEGI. Accidentes de tránsito terrestre en zonas urbanas y suburbanas https://www.inegi.org.mx/sistemas/olap/Proyectos/olap/Proyectos/bd/continuas/transporte/accidentes.asp?s=est&c=13159&proy=atus_accidentes, 2024.
- [9] https://www.inegi.org.mx/app/tabulados/interactivos/?pqx=ATUS_ATUS_1_53fef2cc-0d30-497a-b292-f2d32d882113
- [10] Kendall, M. G., & Gibbons, J. D. (1990). *Rank Correlation Methods (5th ed.)*. Oxford University Press.
- [11] Kish, L. (1995). *Survey Sampling*. New York: John Wiley & Sons.
- [12] Reason J. *Human Error*. Cambridge University Press. 1990.
- [13] Ruedas Rebeldes. *2023, el año con menos multas a conductores y con más muertos en siniestros viales en Saltillo*. <https://www.ruedasrebeldes.com/blog/2024/05/20/2023-el-ano-con-menos-multas-a-conductores-y-con-mas-muertos-en-siniestros-viales-en-saltillo/> 2024.
- [14] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. 2022. <https://www.R-project.org/>
- [15] Siuhi, S. *Parametric study of stimulus-response behavior incorporating vehicle heterogeneity in car-following models*. UNLV Theses, Dissertations, Professional Papers, and Capstones 152. 2009
- [16] Treiber, M. Kesting, A. *Traffic Flow Dynamics. Data, Models and Simulation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2013
- [17] Türker, O. Timo, L. Heikki, S. *Driver Behaviour Questionnaire: A follow-up study*. *Accident Analysis & Prevention* 38(2) 2006.
- [18] Useche, S.A. Alonso, F. Faus, M. Cervantes Trejo, A. Castaneda, I. Oviedo-Trespalcacios, O. *It's okay because I'm just driving: an exploration of self-reported mobile phone use among Mexican drivers*. *PeerJ* 12:e16899. 2024.
- [19] U.S. Department of Transportation. *Traffic Analysis Tools Program. Next Generation Simulation*. <https://ops.fhwa.dot.gov/trafficanalysistools/ngsim.htm>
- [20] Vanguardia. *Saltillo; el problema de movilidad urbana ha sido sobre diagnosticado*. 2023. <https://vanguardia.com.mx/opinion/saltillo-el-problema-de-movilidad-urbana-ha-sido-sobre-diagnosticado-MN7791097>
- [21] Zhu, M. Wang, X. Tarko, A. Fang, S. *Modeling car-following behavior on urban expressways in Shanghai: A naturalistic driving study*. *Transportation Research Part C* 93. 2018
- [22] Ylízaliturri-Salcedo, M.A. Tentori, M. Garcia-Macias, J.A. *Detecting Aggressive Driving Behavior with Participatory Sensing*. In: *García-Chamizo, J., Fortino, G., Ochoa, S. (eds) Ubiquitous Computing and Ambient Intelligence. Sensing, Processing, and Using Environmental Information. UCAmI 2015*. Lecture Notes in Computer Science 9454. Springer, Cham. 2015.
- [23] Zócalo. *Atiborran Saltillo 500 mil autos al día; usan simulador para reducir tráfico*. 2024. <https://www.zocalo.com.mx/con-simulador-de-trafico-implan-realizo-estudio-de-vialidades-en-saltillo>
- [24] <http://www.economia.gob.mx/datamexico/es/profile/geo/saltillo#economia-comercio-internacional>
- [25] <https://github.com/numericfcfm/Numerics-for-ode>

[26] <https://sinegi.page.link/AVox>

Pedro Reyes-Pérez

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a
Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.
e-mail: prp@xanum.uam.mx

Jaime Burgos García y Carolina Ramos-Durán

Universidad Autónoma de Coahuila,
Unidad Saltillo,
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Prol. David Berlanga S/N. Edificio A. Unidad Camporredondo
Saltillo, C.P. 25020 Coahuila
e-mail: jburgos@uadec.edu.mx
e-mail: dura.c@uadec.edu.mx



POLINOMIOS Y EL CÁLCULO DE PROPOSICIONES

ALEJANDRO AGUILAR ZAVOZNIK

RESUMEN. Estudiaremos una forma de usar polinomios como funciones de verdad. Mediante éstos, podemos utilizar elementos algebraicos para comparar dos fórmulas bien formadas, así como verificar si un argumento es válido.

En los cursos de lógica, usualmente se utilizan las tablas de verdad para demostrar las propiedades elementales de las proposiciones. Una alternativa es utilizar funciones de verdad para esto, pero la mayoría de los libros de texto apropiados para este nivel no suelen definir este concepto o lo muestran como una curiosidad. En este trabajo estudiaremos una forma de usarlas, ya sea en lugar de o además de las tablas de verdad.

En la primera sección se verá una forma de definir los conceptos básicos del cálculo de proposiciones sin usar tablas de verdad. La presentación mezcla ideas de [1] y [7], pero se modifica la notación. Además de esta modalidad, otra forma de planear un curso es comenzando con tablas de verdad y, posteriormente, introduciendo el concepto de función de verdad como una alternativa con la que conseguimos los mismos resultados.

A partir de la segunda sección se mostrará cómo se pueden utilizar las funciones de verdad para demostrar algunas propiedades básicas del cálculo de proposiciones.

Para que este artículo sea breve, los temas se presentarán asumiendo que el lector tiene conocimientos básicos sobre conjuntos y funciones. Junto con los ya mencionados [1] y [7], los siguientes textos son opciones para estudiar los antecedentes: [2], [3] y [4].

Las personas interesadas en temas más profundos relacionados con las funciones de verdad pueden consultar los libros [5] y [6].

1. NOTACIÓN Y ANTECEDENTES

Una *proposición* es una afirmación que toma exactamente uno de dos valores: verdadero (V) o falso (F). Frases como “La mochila de Ana es roja” o “El primer día del año es el 25 de octubre” son dos proposiciones pues podemos decidir si son verdaderas o falsas. Sin embargo, nosotros nos concentraremos en un enfoque abstracto, no nos importará qué es lo que dice, solamente nos preocuparemos por su valor de verdad. Comenzaremos viendo como construir frases, a las que llamaremos *fórmulas bien formadas*, y posteriormente veremos como obtener su valor de verdad.

Para construir fórmulas en el cálculo de proposiciones usaremos dos tipos de símbolos, por un lado, las letras minúsculas (por lo general comenzando con p) a las que llamaremos *proposiciones atómicas* o *letras proposicionales*. Por otro lado, tenemos los *operadores booleanos*, que en nuestro caso usaremos cinco: la *negación* (\neg), la *conjunción* (\wedge), la *disyunción* (\vee), la *implicación* (\Rightarrow) y la *equivalencia* (\Leftrightarrow). El primero es un *operador unario*, mientras que los otros cuatro son *operadores binarios*.

Definimos de forma recursiva el concepto de fórmula bien formada (fbf)¹ de la siguiente manera:

- Una letra proposicional es una fbf.
- Si α es una fbf, $\neg(\alpha)$ es una fbf.

2010 *Mathematics Subject Classification*. 03B05, 06E30.

Palabras clave. Funciones de verdad, cálculo de proposiciones, polinomios.

¹Algunas referencias, como [1], utiliza el nombre fórmula, mientras que otras como [7], las llaman fórmulas bien formadas.

- Si α, β son fbf y \circ es un operador booleano binario, $(\alpha \circ \beta)$ es una fbf.
- Cualquier cosa que no se construya con las reglas anteriores no es una fbf.

Si seguimos lo anterior de forma literal, acabaremos con fórmulas saturadas de paréntesis, por lo que en ocasiones nos conviene omitir algunos. Para esto, utilizaremos el siguiente orden de prelación para los operadores booleanos: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Así, podemos agregar:

- Si α es una fbf, $\neg\alpha$ es una fbf.
- Si α, β son fbf y \circ es un operador booleano binario, $\alpha \circ \beta$ es una fbf.

A continuación veremos, por un lado, algunas fórmulas con los paréntesis mínimos y, por otro, la misma con todos los paréntesis.

$p \wedge \neg q \vee r$	$\left((p \wedge (\neg q)) \vee r \right)$
$p \vee q \wedge r$	$\left(p \vee (q \wedge r) \right)$
$(p \vee q) \wedge r$	$\left((p \vee q) \wedge r \right)$
$\neg p \Leftrightarrow q \Rightarrow r$	$\left((\neg p) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r) \right)$
$p \wedge q \Rightarrow (r \Leftrightarrow t)$	$\left((p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow t) \right)$

Dada una fbf α , \mathfrak{P}_α es el conjunto de las proposiciones atómicas utilizadas en α . Una *interpretación* de α es una función $\varphi : \mathfrak{P}_\alpha \rightarrow \{V, F\}$. Es decir, le asignamos valores de verdad a todas las proposiciones atómicas que utiliza α .

Por ejemplo, si $\alpha = (p \vee q) \wedge r$, la siguiente es una interpretación de α :

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= V \\ \varphi(q) &= F \\ \varphi(r) &= V.\end{aligned}$$

Si $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ es un conjunto con k proposiciones, definimos

$$\mathfrak{P}_{\mathcal{A}} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathfrak{P}_\alpha.$$

Una interpretación de \mathcal{A} es una función $\varphi : \mathfrak{P}_{\mathcal{A}} \rightarrow \{V, F\}$.

Dada una fbf, α , y una interpretación φ de ésta, el *valor de verdad* de α bajo φ lo denotaremos $v(\varphi, \alpha)$. Para calcular esto, debemos de considerar las siguientes reglas donde α, β son proposiciones y, cuando sea necesario, el conjunto de átomos será $\mathfrak{P}_{\{\alpha, \beta\}}$:

- Si α es una letra proposicional, $v(\varphi, \alpha) = \varphi(\alpha)$.
- $v(\varphi, (\alpha)) = v(\varphi, \alpha)$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = V$, $v(\varphi, \neg\alpha) = F$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = F$, $v(\varphi, \neg\alpha) = V$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = v(\varphi, \beta) = V$, $v(\varphi, \alpha \wedge \beta) = V$, en cualquier otro caso, $v(\varphi, \alpha \wedge \beta) = F$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = v(\varphi, \beta) = F$, $v(\varphi, \alpha \vee \beta) = F$, si no, $v(\varphi, \alpha \vee \beta) = V$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = V$ y $v(\varphi, \beta) = F$, entonces $v(\varphi, \alpha \Rightarrow \beta) = F$, en cualquier otro caso $v(\varphi, \alpha \Rightarrow \beta) = V$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = v(\varphi, \beta)$, entonces $v(\varphi, \alpha \Leftrightarrow \beta) = V$; si $v(\varphi, \alpha) \neq v(\varphi, \beta)$, $v(\varphi, \alpha \Leftrightarrow \beta) = F$.

La necesidad de estas reglas es una de las desventajas de usar únicamente funciones de verdad, pues es más claro cuando lo anterior se presenta mediante tablas de verdad, las que podemos construir como sigue. Dada una fbf α , colocamos una columna por cada elemento de \mathfrak{P}_α y una para α . Por cada interpretación de α , tendremos un renglón. Por ejemplo, la tabla de verdad de $\neg p$ es:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Dado un operador binario, \circ , $p \circ q$ tiene cuatro interpretaciones posibles, por lo que tenemos esta cantidad de renglones.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Sean $\alpha = (p \vee (q \Rightarrow \neg r)) \Leftrightarrow (s \wedge t)$ y φ la interpretación:

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= F \\ \varphi(q) &= V \\ \varphi(r) &= V \\ \varphi(s) &= F \\ \varphi(t) &= V. \end{aligned}$$

Podemos obtener $v(\varphi, \alpha)$ como sigue, utilizando las reglas que definimos anteriormente:

$$\begin{aligned} v(\varphi, \neg r) &= F \\ v(\varphi, q \Rightarrow \neg r) &= F \\ v(\varphi, p \vee (q \Rightarrow \neg r)) &= F \\ v(\varphi, s \wedge t) &= F \end{aligned}$$

y, finalmente, utilizando los dos últimos resultados junto con la regla de la equivalencia

$$v(\varphi, \alpha) = V.$$

En ocasiones, en lugar del símbolo \Leftrightarrow utilizaremos \equiv . El primero lo usaremos cuando sea parte de una fórmula bien formada; el segundo, cuando comparemos dos fbf. El primero es parte del *lenguaje* que estamos estudiando, mientras que el segundo es parte del *metalenguaje* (ver la sección 2.3.1 de [1] o la sección 1.3 de [7] para más detalles).

2. FUNCIONES DE VERDAD DE PROPOSICIONES CON UN OPERADOR BOOLEANO

Frecuentemente, los valores “verdadero” y “falso” de una proposición se intercambian por 1 y 0 respectivamente. Para distinguir entre estas dos versiones, usaremos las letras mayúsculas cuando trabajemos con números. Así, la proposición atómica p estará asociada a la *variable binaria* P .

Una de las ventajas de la versión numérica es que podemos usar operaciones algebraicas para resolver problemas del cálculo de proposiciones. En particular, podemos encontrar una función que representa una proposición. A esto se le conoce como *funciones de verdad* y, como ya se mencionó, son una alternativa a las tablas de verdad.

La mayoría de los libros de lógica no mencionan las funciones de verdad o únicamente hacen una breve presentación. Adicionalmente, existen varias opciones para tratarlas, debido a que distintas expresiones algebraicas, restringidas al dominio $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ dan el mismo resultado; en particular, [7] utiliza la función de verdad $\text{mín}(P, Q)$ para representar $p \wedge q$ y $\text{máx}(P, Q)$ para $p \vee q$. Podemos notar que, si el dominio es \mathcal{B} :

$$\text{mín}(x, y) = xy,$$

mientras que

$$\text{máx}(x, y) = x + y - xy.$$

Nosotros estaremos utilizando polinomios, por lo que preferiremos la segunda forma. Más adelante se verá la utilidad de esto. A continuación, vamos a encontrar funciones para cada uno de los operadores binarios que definimos anteriormente.

Si α es una fbf, $FV(\alpha) = f$ indicará que f es una función de verdad que representa a la fbf α . Agregando ciertas restricciones que mencionaremos posteriormente, $FV(\alpha)$ es una función cuyo dominio son las fórmulas bien formadas y su codominio son los polinomios con coeficientes enteros; recalcando el hecho de que, por ser función, a cada fbf le corresponde exactamente un polinomio.

Podemos notar que las siguientes funciones cumplen con los resultados mostrados en la sección anterior:

PROPOSICIÓN 1. *Sean p, q proposiciones y P, Q variables asociadas a éstas. Entonces:*

1. $FV(\neg p) = 1 - P$.
2. $FV(p \wedge q) = PQ$.
3. $FV(p \vee q) = P + Q - PQ$.
4. $FV(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ$.
5. $FV(p \Leftrightarrow q) = 1 - P - Q + 2PQ$.

Hay dos formas de presentar lo anterior en un curso. Por un lado, si no se usarán tablas de verdad, se pueden definir estas cinco y luego se verifica que coincide con las propiedades de v que se vieron en la sección anterior. La segunda opción es demostrando las siguientes propiedades usando tablas de verdad: $p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$, $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ y $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Posteriormente, se verifica que las primeras dos funciones son claramente equivalentes a las tablas correspondientes, y usando estas propiedades se pueden deducir las reglas de inferencia de las últimas tres.

$$\begin{aligned} FV(p \vee q) &= FV(\neg(\neg p \wedge \neg q)) \\ &= 1 - FV(\neg p \wedge \neg q) \\ &= 1 - \left(FV(\neg p)FV(\neg q) \right) \\ &= 1 - \left((1 - P)(1 - Q) \right) \\ &= P + Q - PQ \end{aligned}$$

Notemos que el procedimiento se hace de afuera hacia adentro. Por ejemplo, en el primer renglón comenzamos con la negación que está a la izquierda, aplicamos la función de verdad que le corresponde. Si asignamos $\alpha = \neg p \wedge \neg q$, entonces $p \vee q \equiv \neg\alpha$, por lo que

$$FV(p \vee q) = FV(\neg\alpha) = 1 - FV(\alpha) = 1 - FV(\neg p \wedge \neg q).$$

El resto del procedimiento se hace de esta manera, siempre yendo de afuera hacia adentro.

De forma análoga, con la identidad $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ obtenemos

$$FV(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ.$$

Es importante notar que el término que se resta es el que está a la izquierda, por lo que $FV(q \Rightarrow p) = 1 - Q + QP$.

Para la equivalencia, primero debemos de mencionar la siguiente afirmación obvia que estaremos usando a lo largo de todo este trabajo.

LEMA 2. *Si P es una variable cuyos valores están en \mathcal{B} y k un entero positivo, entonces $P = P^k$.*

A partir de lo anterior y de la equivalencia $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$:

$$\begin{aligned} FV(p \Leftrightarrow q) &= FV\left((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \right) \\ &= FV(p \Rightarrow q) \cdot FV(q \Rightarrow p) \\ &= (1 - P + PQ)(1 - Q + QP) \\ &= 1 - Q + QP - P + PQ - P^2Q + PQ - PQ^2 + P^2Q^2 \\ &= 1 - P - Q + 2PQ \end{aligned}$$

Notemos que, por el lema anterior, podemos cancelar PQ con $-P^2Q$ y tenemos $P^2Q^2 = PQ$.

A continuación se presentan otras operaciones booleanas que se suelen utilizar en algunos lenguajes de programación.

1. Disyunción exclusiva (xor). $p \oplus q \equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$. $FV(p \oplus q) = P + Q - 2PQ$.
2. Incompatibilidad (nand). $p \uparrow q \equiv \neg(p \wedge q)$. $FV(p \uparrow q) = 1 - PQ$.
3. Negación disjunta (nor). $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$. $FV(p \downarrow q) = 1 - P - Q + PQ$.

Usando estos resultados podemos hallar la función de cualquier proposición, por ejemplo, vamos a calcular lo siguiente.

$$X = FV\left((p \vee \neg q) \wedge r \Rightarrow (s \vee t) \vee \neg u\right).$$

Tomando en cuenta que lo siguiente se utilizará dos veces, definamos

$$\begin{aligned} Y &= FV\left((p \vee \neg q) \wedge r\right) \\ &= FV(p \vee \neg q) \cdot FV(r) \\ &= \left(P + (1 - Q) - P(1 - Q)\right) \cdot R \\ &= R - QR + PQR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 1 - FV\left((p \vee \neg q) \wedge r\right) + FV\left((p \vee \neg q) \wedge r\right) \cdot FV\left((s \vee t) \vee \neg u\right) \\ &= 1 - Y + Y \cdot \left(FV(s \vee t) + FV(\neg u) - FV(s \vee t) \cdot FV(\neg u)\right) \\ &= 1 - Y + Y \left((S + T - ST) + (1 - U) - (S + T - ST)(1 - U)\right) \\ &= 1 - Y + Y(SU + TU - STU + 1 - U) \\ &= 1 + Y(\neg X + (SU + TU - STU + X - U)) \\ &= 1 + (R - QR + PQR)(-U + SU + TU - STU) \\ &= 1 - RU + QRU + RSU + RTU - PQRU - QRSU - QRTU \\ &\quad - RSTU + PQRSU + PQRTU + QRSTU - PQRSTU. \end{aligned}$$

Los resultados los estaremos ordenando de tal forma que el número de variables que aparece en cada sumando sea no decreciente y donde las letras en cada uno estén en orden alfabético, como en el ejemplo anterior.

Si bien, el trabajo algebraico que realizamos al resolver estos problemas parece arduo, hay que tomar en cuenta que la tabla de verdad correspondiente tiene sesenta y cuatro renglones y hay que hacer siete columnas para obtener el resultado final.

Para hallar el valor de verdad de la proposición original con la interpretación $\varphi(p) = F$, $\varphi(q) = V$, $\varphi(r) = V$, $\varphi(s) = F$, $\varphi(t) = F$ y $\varphi(u) = V$, podemos calcular X usando $P = 0$, $Q = 1$, $R = 1$, $S = 0$, $T = 0$, $U = 1$.

$$X = 1 - 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 - 0 + 0 + 0 + 0 - 0 = 1.$$

Es importante notar que en el caso de la implicación, puede resultar útil factorizar previamente la función como sigue:

$$FV(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ = 1 + P(Q - 1).$$

Esto facilitará el trabajo cuando $FV(q)$ tenga el sumando 1. Por ejemplo:

$$FV(p \Rightarrow \neg q) = 1 + P(FV(\neg q) - 1) = 1 + P(X - Q) - X = 1 - PQ.$$

3. UNICIDAD

Al conjunto de variables de una función de verdad f lo denotaremos \mathfrak{P}_f . Una *interpretación* de f es una función $\psi : \mathfrak{P}_f \rightarrow \mathcal{B}$. Dada una función de verdad f y una interpretación ψ , denotaremos $v(\psi, f)$ como el valor de f donde cada una de las variables $X \in \mathfrak{P}_f$ toma el valor $\psi(X)$. En esta sección vamos a demostrar que dada una función de verdad f , existe un único polinomio $g : \mathcal{B}^{|\mathfrak{P}_f|} \rightarrow \mathcal{B}$ con ciertas restricciones, tal que, para cualquier interpretación ψ , $v(\varphi, f) = v(\psi, g)$, donde φ es ψ intercambiando 0,1 por V, F .

Sea $f : \mathcal{B}^k \rightarrow \mathcal{B}$ un polinomio. Diremos que f es válido si cumple dos condiciones:

1. La primera ya está indicada en el codominio de f , pero es importante recalcarlo: Para cualquier interpretación ψ_f de f , $v(\psi_f, f) \in \mathcal{B}$.
2. La segunda se justifica usando el lema 2. En cada monomio de f , cualquier variable $X \in \mathfrak{P}_f$ aparece, a lo más, elevada a la potencia 1.

TEOREMA 3. Sean α, β dos fórmulas bien formadas con $\mathfrak{P}_\alpha = \mathfrak{P}_\beta$ y f_α, f_β dos polinomios tales que $\text{FV}(\alpha) = f_\alpha$ y $\text{FV}(\beta) = f_\beta$; f_α es el mismo polinomio que f_β si y sólo si $\alpha \equiv \beta$.

Demostración. Es obvio que si los polinomios son el mismo, los valores de verdad de α y de β también lo son, con lo que la ida queda demostrada.

Ahora supongamos que $\alpha \equiv \beta$. Usaremos inducción sobre $k = |\mathfrak{P}_\alpha| = |\mathfrak{P}_\beta|$.

Si $k = 1$, hay una proposición atómica, digamos p . En total hay cuatro funciones distintas:

$$\begin{array}{ll} f_1(0) = 0 & f_1(1) = 0 \\ f_2(0) = 0 & f_2(1) = 1 \\ f_3(0) = 1 & f_3(1) = 0 \\ f_4(0) = 1 & f_4(1) = 1 \end{array}$$

Vamos a ver que cada una de éstas solamente tiene un polinomio asociado y que cualquier otro polinomio con una variable no es válido.

Por un lado, dado que las potencias no pueden ser mayores que 1, las únicas posibilidades son de la forma $f_\alpha(P) = a_0 + a_1P$. Para el caso en que $P = 0$, $f_\alpha = a_0$, por lo que $a_0 \in \mathcal{B}$. Ahora, si $P = 1$, $f(P) = a_0 + a_1$. Si $a_0 = 0$, entonces a_1 puede ser 0 ó 1; y si $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ ó $a_1 = -1$. En cualquier otro caso, el polinomio toma algún valor que no está en \mathcal{B} . De esta forma:

$$\begin{array}{ll} f_1(P) & = 0 \\ f_2(P) & = P \\ f_3(P) & = 1 - P \\ f_4(P) & = 1. \end{array}$$

Esto demuestra el regreso cuando hay una variable.

Supongamos la propiedad se cumple para $k = \ell$ variables. Vamos a verificar el caso $k = \ell + 1$.

Sean α y β dos fórmulas bien formadas que en total utilizan $\ell + 1$ proposiciones atómicas, digamos, $p_1, p_2, \dots, p_\ell, p_{\ell+1}$. Supongamos que $g(P_1, \dots, P_\ell, P_{\ell+1}) = \text{FV}(\alpha)$ y $h(P_1, \dots, P_\ell, P_{\ell+1}) = \text{FV}(\beta)$. Tomando en cuenta que la variable $P_{\ell+1}$ solamente puede aparecer a la potencia 0 ó 1, entonces:

$$\begin{array}{ll} g(P_1, \dots, P_{\ell+1}) & = g_0(P_1, \dots, P_\ell) + g_1(P_1, \dots, P_\ell)P_{\ell+1} \\ h(P_1, \dots, P_{\ell+1}) & = h_0(P_1, \dots, P_\ell) + h_1(P_1, \dots, P_\ell)P_{\ell+1} \end{array}$$

Si $P_{\ell+1} = 0$, entonces

$$\begin{array}{ll} g(P_1, \dots, P_\ell, 0) & = g_0(P_1, \dots, P_\ell) \text{ y} \\ h(P_1, \dots, P_\ell, 0) & = h_0(P_1, \dots, P_\ell). \end{array}$$

Usando la hipótesis de inducción, g_0 y h_0 son el mismo polinomio. Ahora supongamos que $P_{\ell+1} = 1$, $g = g_0 + g_1$ y $h = h_0 + h_1$. De nuevo, por hipótesis de inducción, g y h coinciden, y como $g_0 = h_0$, entonces g_1 y h_1 son el mismo polinomio. Por lo tanto, el regreso es verdadero en el caso $n = \ell + 1$. \square

Lo relevante del resultado anterior es que podemos usar los polinomios para decidir si dos proposiciones son equivalentes, o incluso, si un argumento es válido. A continuación veremos los detalles para esto.

4. DEMOSTRACIÓN DE EQUIVALENCIAS

Primero veremos como utilizar polinomios para demostrar que dos proposiciones son equivalentes. Esto es una aplicación directa del teorema demostrado en la sección anterior.

PROPOSICIÓN 4. Sean p, q, r proposiciones. Tenemos las siguientes propiedades de los operadores booleanos.

1. Involución: $\neg\neg p \equiv p$.
2. Conmutatividad: $p \wedge q \equiv q \wedge p$.
3. Conmutatividad: $p \vee q \equiv q \vee p$.
4. Asociatividad: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.
5. Asociatividad: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.
6. Distributividad: $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$.
7. Distributividad: $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.
8. Ley de De Morgan: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.
9. Ley de De Morgan: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.
10. Absorción: $(p \wedge q) \vee q \equiv q$.
11. Absorción: $(p \vee q) \wedge q \equiv q$.
12. Forma disyuntiva de la implicación: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
13. Contrapositiva: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

Demostración. En cada caso, denotaremos X, Y a las funciones de verdad de cada uno de los dos lados de la equivalencia. Calcularemos X, Y y verificaremos que $X = Y$; con lo que, usando el teorema 3, se demuestra la afirmación. A continuación se muestran algunos casos. El resto se deja como ejercicio para el lector.

$$2. X = \text{FV}(p \wedge q) = PQ. Y = \text{FV}(q \wedge p) = QP.$$

$$5. X = \text{FV}((p \vee q) \vee r). Y = \text{FV}(p \vee (q \vee r)).$$

$$\begin{aligned} X &= (P + Q - PQ) + R - (P + Q - PQ)R \\ &= P + Q + R - PQ - PR - QR + PQR. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= P + (Q + R - QR) - P(Q + R - QR) \\ &= P + Q + R - PQ - PR - QR + PQR \end{aligned}$$

$$6. X = \text{FV}((p \wedge q) \vee r). Y = \text{FV}((p \vee r) \wedge (q \vee r)).$$

$$X = R + PQ - PQR.$$

$$\begin{aligned} Y &= (P + R - PR)(Q + R - QR) \\ &= PQ + PR - PQR + RQ + R^2 - QR^2 - PRQ - PR^2 + PR^2Q \\ &= R + PQ - PQR. \end{aligned}$$

$$9. X = \text{FV}(\neg(p \vee q)), Y = \text{FV}(\neg p \wedge \neg q).$$

$$X = 1 - \text{FV}(p \vee q) = 1 - (P + Q - PQ) = 1 - P - Q + PQ.$$

$$Y = \text{FV}(\neg p)\text{FV}(\neg q) = (1 - P)(1 - Q) = 1 - P - Q + PQ.$$

$$12. X = \text{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ. Y = \text{FV}(\neg p \vee q).$$

$$\begin{aligned} Y &= \text{FV}(\neg p) + Q - \text{FV}(\neg p)Q \\ &= (1 - P) + Q - (1 - P)Q \\ &= 1 - P + PQ. \end{aligned}$$

□

En algunos casos, como en 2, la demostración es muy sencilla, es simple consecuencia de la conmutatividad del producto, otras son un poco más complicadas, como 5. En ocasiones un lado es más sencillo que el otro, como en 6, mientras que a veces ambos tienen la misma complejidad como en 9.

5. CONSECUENCIAS TAUTOLÓGICAS

En esta sección veremos cómo usar funciones de verdad para analizar argumentos. En [3], [4] y [7] se puede profundizar más sobre estos temas.

Si $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ es un conjunto de fórmulas bien formadas y β es una fbf, diremos que β es una consecuencia tautológica de \mathcal{A} si y sólo si, para toda interpretación φ de \mathcal{A} tal que $v(\varphi, \alpha_i) = V$ para $1 \leq i \leq k$, entonces $v(\varphi, \beta) = V$. Esto se denotará $\mathcal{A} \models \beta$. Usualmente, lo anterior se suele expresar como sigue:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \hline \therefore \beta \end{array}$$

Es importante notar que esto es equivalente a

$$(1) \quad (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k) \Rightarrow \beta,$$

cuya función de verdad es

$$(2) \quad X = 1 + \text{FV}(\alpha_1) \cdots \text{FV}(\alpha_k) (\text{FV}(\beta) - 1).$$

Para demostrar que $\mathcal{A} \models \beta$, basta con ver que $X = 1$, lo que implica que (1) es verdadera para cualquier interpretación.

Diremos que una fbf, α es una *tautología* si es verdadera para cualquier interpretación ($\emptyset \models \alpha$), es una *contradicción* si siempre es falsa ($\emptyset \models \neg\alpha$) y es una *contingencia* si no es ninguna de las dos anteriores. Usaremos los símbolos V_0, F_0 para representar una tautología y una contradicción, respectivamente. Claramente, $\text{FV}(V_0) = 1$ y $\text{FV}(F_0) = 0$.

De esta forma, vamos a demostrar que (1) es una tautología para ciertos casos específicos.

PROPOSICIÓN 5. *Las siguientes son consecuencias tautológicas:*

1. *Modus ponens*

$$\frac{p \quad p \Rightarrow q}{\therefore q}$$

2. *Modus tollens*

$$\frac{\neg q \quad p \Rightarrow q}{\therefore \neg p}$$

3. *Ley del silogismo*

$$\frac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r}{\therefore p \Rightarrow r}$$

4. *Regla de conjunción*

$$\frac{p \quad q}{\therefore p \wedge q}$$

5. *Silogismo disyuntivo*

$$\frac{p \vee q \quad \neg p}{\therefore q}$$

6. *Regla de contradicción*

$$\frac{\neg p \Rightarrow F_0}{\therefore p}$$

7. *Simplificación conjuntiva*

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

8. *Amplificación disyuntiva*

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

9. *Demostración condicional*

$$\frac{p \wedge q \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r)}{\therefore r}$$

10. *Demostración por casos*

$$\frac{p \Rightarrow r \quad q \Rightarrow r}{p \vee q}$$

11. *Dilema constructivo*

$$\frac{p \Rightarrow q \quad r \Rightarrow s \quad p \vee r}{\therefore q \vee s}$$

12. *Dilema destructivo*

$$\frac{p \Rightarrow q \quad r \Rightarrow s \quad \neg q \vee \neg s}{\therefore \neg p \vee \neg r}$$

Demostración. Probaremos algunos casos, el resto se deja al lector. Calcularemos las funciones de cada premisa, denotándola Y_1, Y_2, \dots, Y_k y la función de la conclusión Z . Al final, se calculará la función del argumento $X = 1 + Y_1 Y_2 \cdots Y_k (Z - 1)$, como se ve en (2). Si $X = 1$, entonces lo que se tiene es una consecuencia tautológica.

$$1. Y_1 = \text{FV}(p) = P. Y_2 = \text{FV}(q) = Q. Z = \text{FV}(p \wedge q) = PQ.$$

$$X = 1 + PQ(PQ - 1) = 1 + \cancel{P^2 Q^2} - PQ = 1.$$

$$2. Y_1 = \text{FV}(\neg q) = 1 - Q. Y_2 = \text{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ. Z = \text{FV}(\neg p) = 1 - P.$$

$$\begin{aligned} X &= 1 + (1 - Q)(1 - P + PQ)(\cancel{1} - P + \cancel{1}) \\ &= 1 + (1 - Q)(\cancel{-P} + P^2 - P^2 Q) \\ &= \cancel{1 - P^2 Q} + P^2 Q^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$3. Y_1 = \text{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ. Y = \text{FV}(q \Rightarrow r) = 1 - Q + QR. Z = \text{FV}(p \Rightarrow r) = 1 - P + PR.$$

$$\begin{aligned} X &= 1 + (1 - P + PQ)(1 - Q + QR)(1 - P + PR - 1) \\ &= 1 + (1 - P + PQ)(-P + PQ - PQR + PR - \cancel{PQR} + \cancel{PQR^2}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$4. Y_1 = \text{FV}(p) = P. Y_2 = \text{FV}(q) = Q. \text{FV}(p \wedge q) = PQ.$$

$$\begin{aligned} X &= 1 + (P)(Q)(PQ - 1) \\ &= 1 + \cancel{P^2 Q^2} - PQ \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$5. Y_1 = \text{FV}(p \vee q) = P + Q - PQ. Y_2 = \text{FV}(\neg p) = 1 - P. Z = \text{FV}(q) = Q.$$

$$\begin{aligned} X &= 1 + (P + Q - PQ)(1 - P)(Q - 1) \\ &= 1 + (\cancel{P} + Q - PQ - \cancel{P^2} - \cancel{PQ} + \cancel{P^2 Q})(Q - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$9. Y_1 = \text{FV}(p \wedge q) = PQ.$$

$$\begin{aligned} Y_2 &= \text{FV}(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \\ &= 1 + P(\text{FV}(q \Rightarrow r) - 1) \\ &= 1 + P(1 - Q + QR - 1) \\ &= 1 - PQ + PQR. \end{aligned}$$

$$Z = \text{FV}(r) = R.$$

$$X = 1 + PQ(1 - PQ + PQR)(R - 1) = 1.$$

$$12. Y_1 = \text{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ. Y_2 = \text{FV}(r \Rightarrow s) = 1 - R + RS.$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= \text{FV}(\neg q \vee \neg s) \\ &= (1 - Q) + (1 - S) - (1 - Q)(1 - S) \\ &= \cancel{2 - Q - S} - 1 + \cancel{Q} + \cancel{S} - QS \\ &= 1 - QS. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$Z = 1 - PR.$$

$$\begin{aligned} X &= 1 + Y_1 Y_2 Y_3 (1 - Z) \\ &= 1 + (1 - P + PQ)(1 - R + RS)(1 - QS)(\cancel{1} - PR - \cancel{1}). \end{aligned}$$

Comenzaremos el cálculo de lo anterior con:

$$X_1 = (1 - P + PQ)(-PR) = \cancel{-PR} + \cancel{P^2 R} - P^2 QR = -PQR.$$

$$X_2 = X_1(1 - R + RS) = \cancel{-PQR} + \cancel{PQR^2} - PQR^2 S = -PQRS.$$

$$X_3 = X_2(1 - QS) = -PQRS + PQ^2 RS^2 = 0.$$

Así,

$$X = 1 - 0 = 1.$$

□

Como ejemplo, queremos decidir si el siguiente argumentos es una consecuencia tautológica.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow \neg q \\ r \wedge s \\ \hline \neg s \vee t \\ \hline \therefore \neg p \wedge t \end{array}$$

Lo anterior se puede verificar usando la proposición 5:

- | | | |
|------|-----------------------------------|--|
| (1) | $p \Rightarrow q$ | premisa. |
| (2) | $r \Rightarrow \neg q$ | premisa. |
| (3) | $r \wedge s$ | premisa. |
| (4) | $\neg s \vee t$ | premisa. |
| (5) | $\neg(\neg q) \Rightarrow \neg r$ | contrapositiva de (2). |
| (6) | $q \Rightarrow \neg r$ | por (5) e involución. |
| (7) | $p \Rightarrow \neg r$ | por (1), (6) y la ley del silogismo. |
| (8) | r | por (3) y simplificación conjuntiva. |
| (9) | $s \wedge r$ | por (3) y la conmutatividad de la conjunción. |
| (10) | s | por (9) y simplificación conjuntiva. |
| (11) | t | por (4), (10) y el silogismo disyuntivo,
considerando que $\neg(\neg s) \equiv s$. |
| (12) | $\neg p$ | por (7), (8) y el modus tollens. |
| (13) | $\neg p \wedge t$ | por (11), (12) y la regla de conjunción. |

Si bien, las funciones de verdad no son capaces de verificar que la demostración anterior no tiene errores, sí permite verificar que tenemos una consecuencia tautológica (lo que también se puede hacer mediante tablas de verdad):

$$Y_1 = \text{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ.$$

$$Y_2 = \text{FV}(r \Rightarrow \neg q) = 1 - R + R(1 - Q) = 1 - QR.$$

$$Y_3 = \text{FV}(r \wedge s) = RS.$$

$$Y_4 = \text{FV}(\neg s \vee t) = (1 - S) + T - (1 - S)T = 1 - S + ST.$$

$$Z = \text{FV}(\neg p \wedge t) = (1 - P) + T - (1 - P)T = 1 - P + PT.$$

$$Y_1 Y_2 = (1 - P + PQ)(1 - QR) = 1 - P + PQ - QR.$$

$$Y_1 Y_2 Y_3 = (1 - P + PQ - QR)(RS) = RS - PRS - QRS + PQRS.$$

$$\begin{aligned} Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 &= (RS - PRS - QRS + PQRS)(1 - S + ST) \\ &= RST - PRST - QRST + PQRST. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 1 + Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 (Z - 1) \\ &= 1 + (RST - PRST - QRST + PQRST)(1 - P + PT - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ahora consideremos el argumento:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \Rightarrow r \\ r \Leftrightarrow t \\ \hline \therefore t \end{array}$$

$$Y_1 = \text{FV}(p \vee q) = P + Q - PQ.$$

$$Y_2 = \text{FV}(p \Rightarrow r) = 1 - P + PR.$$

$$Y_3 = \text{FV}(r \Leftrightarrow t) = 1 - R - T + 2RT.$$

$$Z = \text{FV}(t) = T.$$

$$Y_1 Y_2 = (P + Q - PQ)(1 - P + PR) = Q - PQ + PR.$$

$$\begin{aligned} Y_1 Y_2 Y_3 &= (Q - PQ + PR)(1 - R - T + 2RT) \\ &= Q - PQ - QR - QT + PQR + PQT + PRT + 2QRT - 2PQRT. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 1 + Y_1 Y_2 Y_3 (Z - 1) \\ &= 1 - Q + PQ + QR + QT - PQR - PQT - QRT + PQRT \end{aligned}$$

En este caso, la función de verdad no es 1, por lo que no tenemos una consecuencia tautológica. Si queremos encontrar una interpretación que muestre lo anterior, podemos resolver la ecuación $X = 0$. Buscamos un 0 usando los primeros sumandos del polinomio $1 - Q = 0$, con lo que $Q = 1$. A partir de ahí, queremos que el resto de los monomios sean 0, lo que conseguimos con $P = R = T = 0$.

En el caso de la proposición

$$(p \vee q) \wedge (r \vee t) \wedge (\neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \vee t),$$

la función de verdad es

$$X = 1 - PR - PT + PQR + PQT + 2PRT - 2PQRT.$$

Si queremos encontrar una interpretación que cumpla las mismas condiciones que el ejemplo anterior, de nuevo, tomamos monomios del principio que hagan que el valor sea 0. En este caso, $1 - PR = 0$ con lo que $P = R = 0$. Notemos que, por la forma en la que propusimos ordenar los sumandos, los siguientes cumplen alguna de dos condiciones:

1. Tienen el mismo número de variables que PR , pero no son las mismas.
2. Tiene más variables que PR .

Así, si el resto de las variables son 0, en este caso $Q = T = 0$, tendremos que $X - (1 - PR) = 0$; ya sea porque alguna variable que no es común vale 0 o, en el segundo caso, porque incluso si usa P y R , habrá alguna adicional igual a 0. Por ejemplo, $PT = 0$, ya que T es una variable que no usaba PR , mientras que $2PRT = 0$ ya que, aunque $PR = 1$, $T = 0$. Si, por el contrario, queremos una interpretación tal que $X = 1$, es obvio que $P = Q = R = T = 0$ sirve.

Con esto concluimos nuestro estudio de las funciones de verdad. Hemos visto cómo el uso de polinomios puede ser empleado para trabajar con proposiciones. Si bien, en algunas ocasiones es necesario realizar varias operaciones para llegar al resultado simplificado, el trabajo para hacer algo equivalente con tablas de verdad también puede ser muy laborioso.

AGRADECIMIENTOS. El autor agradece los comentarios del árbitro anónimo, los que ayudaron a mejorar este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Ben-Ari M, *Mathematical Logic for Computer Science*. Springer, 3a ed. 2013.
- [2] Gerstein L J, *Introduction to Mathematical Structures and Proof*, Springer, 2a ed. 2012.
- [3] Grimaldi R P, *Matemáticas discretas y combinatoria. Una introducción con aplicaciones*, Addison-Wesley, 3a ed. 1997.
- [4] Hein J L, *Discrete structures, logic, and computability*. Jones & Bartlett Learning, 4a ed. 2016.
- [5] Posthoff C, Steinbach B, *Logic Functions and Equations. Examples and Exercises*, Springer, 2009.
- [6] Posthoff C, Steinbach B, *Logic Functions and Equations. Binary Models for Computer Science*. Springer, 2a ed. 2019.
- [7] Solís Daun J E, Torres Falcón Y, *Lógica Matemática*. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, 1995.

Alejandro Aguilar Zavoznik

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Azcapotzalco,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Ciencias Básicas.

Av. San Pablo 420, Col. Nueva el Rosario

Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02128 Ciudad de México.

e-mail: aaz@azc.uam.mx



USO DE LA HERRAMIENTA DE SIMULACIÓN MATLAB PARA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y SUS APLICACIONES

LUIS A. VÁSQUEZ TOLEDO

Resumen

En estas notas se exponen con detalle y de manera autocontenida las herramientas básicas de la teoría de los espacios de Hilbert complejos de dimensión infinita, que son necesarias para un primer estudio, matemáticamente riguroso, de la mecánica cuántica. En la última parte incluimos una introducción axiomática a la mecánica cuántica y una breve exposición del modelo del oscilador armónico y de la teoría de estados cuánticos Gaussianos.

Introducción

Las herramientas de simulación, hoy día, juegan un papel indispensable en la vida académica y profesional en diversos aspectos (laboral, personal, familiar, de entretenimiento, de negocios, etc.). Una herramienta muy utilizada en la actualidad en distintas disciplinas es MATLAB. MATLAB es un programa comercial que permite realizar una gran variedad de cálculos matemáticos y técnicos, es un potente lenguaje diseñado para computación técnica. El nombre de MATLAB proviene de MATrix LABORatory, puede ser utilizado en computación matemática, modelado y simulación, análisis y procesamiento de datos, visualización y representación de gráficos, así como para el desarrollo de algoritmos.

MATLAB es ampliamente conocido y utilizado en universidades e institutos para el aprendizaje en cursos básicos y avanzados de matemáticas, ciencias y, especialmente, ingeniería. Recientemente la Universidad Autónoma Metropolitana adquirió la licencia con una suscripción de “Campus-Wide License de MATLAB” para todo el personal y alumnos. Está disponible para las plataformas Unix, Windows, macOS y GNU/Linux.

Una herramienta de simulación es un componente fundamental para el diseño, la implementación y el monitoreo de los sistemas, permiten predecir el comportamiento de diferentes eventos que se pueden presentar en el sistema, por lo que el objetivo primordial del presente manual está dirigido a estudiantes que utilizan MATLAB por primera vez y que no tienen conocimientos previos sobre programación. Este manual se puede utilizar como un libro de texto para estudiantes de los primeros cursos de ingeniería y ciencias básicas, así como para estudiantes avanzados o incluso para seminarios orientados al aprendizaje de MATLAB. El presente manual también pretende ser una referencia en cursos más avanzados de ciencias e ingeniería, donde MATLAB se utilice básicamente como una herramienta para la resolución de problemas.

En la unidad 1 “Fundamentos de MATLAB”, el objetivo es aprender los fundamentos de: operaciones básicas, creación de funciones, etc. Al final de la sesión debemos estar en condiciones

de crear también ficheros guión (“script”) y funciones sencillas.

En la unidad 2 “Gráficas con MATLAB” se adentra al alumno en el diseño de funciones que sirvan para mostrar gráficamente resultados. Las gráficas en el entorno de computación con MATLAB son una parte natural, es decir, son sencillas. La gráfica de los resultados de los cálculos puede efectuarse con algunos comandos. Esta unidad se escribió con la intención de ayudar al lector a hacer precisamente esto.

La unidad 3 “Aplicaciones en Comunicaciones Analógicas y Comunicaciones Digitales”, se enfoca en mostrar aplicaciones que se utilizan en campos importantes en Telecomunicaciones. Algunas de las aplicaciones son: el teorema de muestreo, el proceso de cuantización y codificación, la modulación en amplitud, los códigos de línea, densidad espectral de potencia, etc. En este capítulo se desarrolla la parte teórica y el desarrollo matemática de las posibles aplicaciones.

En la unidad 4 “Series y Transformada de Fourier” se adentra al alumno al manejo de MATLAB para resolver series de Fourier y transformada de Fourier para la representación de señales periódicas y las no periódicas determinísticas respectivamente. También se muestra la parte teórica y el desarrollo matemático de la serie y transformada de Fourier.

En la unidad 5 “Aplicaciones en Propagación y Desvanecimientos” se analizan y simulan los fenómenos presentes en la propagación de la señal en el espacio libre, como son canales con desvanecimientos lentos, canales con desvanecimientos rápidos, radio enlace, zonas de Fresnel, cálculo de altura de las torres, entre otros. Cabe mencionar que estos análisis pueden servir para los sistemas celulares 5G, ya que una de las propuestas para 5G es el uso de nuevas técnicas de acceso al medio, NOMA (acceso múltiple no ortogonal), en el cual uno de los requerimientos es calcular las ganancias de canal de cada usuario, para el cual es necesario el cálculo de los desvanecimientos como se realiza en esta unidad.

En la unidad 6 “Aplicaciones en Modulación y Telefonía”, se tratarán ejemplos sobre modulación QAM y se calcula la probabilidad de bit erróneo, se simulan redes jerárquicas, utilizadas en la telefonía y se calcula la probabilidad de bloqueo.

En la unidad 7 “Aplicaciones en Sistemas Celulares”, se enfoca en mostrar la simulación de celdas celulares, usuarios con movimientos en las celdas. Esto puede servir para analizar el comportamiento de los usuarios en una red 5G. También se muestra un ejemplo para NOMA en una red 5G.

Finalmente, MATLAB nos ofrece una herramienta llamada Simulink, la cual es un entorno de simulación multidominio y diseño basado en modelos mediante diagrama de bloques, esto se aborda en la unidad 8 “Introducción a Simulink”. En la **Tabla 1** se presentan las UEA’s en las que se pueden aplicar los temas desarrollados en este manual.

Tabla 1: Unidades Enseñanza-Aprendizaje Licenciatura.

División	CBI	
Clave	UEA	Plan de estudios
2130039	Cálculo Integral	
2131084	Temas Selectos de Matemáticas Aplicadas II	
2131106	Matemáticas Discretas	
2131110	Diseño de Experimentos	
2131145	Probabilidad I	Licenciatura en Matemáticas
2131167	Simulación	
2150008	Introducción a la Programación	

Índice

1. Fundamentos de MatLab	6
1.1. Ventana de comandos	6
1.2. Funciones matemáticas en MATLAB	8
1.2.1. Variables de arreglo	8
1.3. Instrucciones de control (sentencias)	13
1.3.1. Sentencia if	13
1.3.2. Sentencia for	13
1.3.3. Sentencia while	14
1.3.4. Sentencia break	14
1.4. Funciones que facilitan los cálculos	15
1.4.1. Máximo y mínimo	15
1.4.2. Sumatoria	16
1.4.3. Ordenar	16
1.4.4. Variables Aleatorias	17
1.5. Creación de archivos M	17
1.6. Crear archivos M de función	18
1.6.1. Función que devuelve una sola variable	19
1.6.2. Función que devuelve múltiples variables	20
1.6.3. Función que utiliza otra función	20
1.7. Cómo utilizar MATLAB con señales de tiempo continuo	21
2. Gráficas con MATLAB	22
2.1. Gráficas simples	23
2.2. Gráficas con marcas	24
2.3. Colores y tipos de líneas	25
2.4. Eje y retícula	26
2.4.1. Retícula	28
2.5. Gráficas polares	28
2.6. Gráficas logarítmicas y semilogarítmicas	29
2.7. Múltiples curvas	30
2.7.1. Retención	31
2.7.2. Leyenda	34
2.7.3. Figura	35
2.8. Subgráficas	35
2.9. Versión tridimensional de una gráfica	36
3. Aplicaciones en Comunicaciones Analógicas y Digitales	37
3.1. Conceptos básicos de señales	37
3.1.1. Corrimiento de una señal en el tiempo	39
3.1.2. Inversión de una señal en el tiempo	40
3.1.3. Escalamiento de una señal en el tiempo	42
3.1.4. Función escalón unitario y rampa unitaria	44
3.1.5. El impulso	48
3.1.6. Señales periódicas	51
3.1.7. Señales pares e impares	56
3.2. Teorema de Muestreo	59
3.3. Cuantización	65

3.4. Conversión Analógica a Digital (PCM)	65
3.5. Modulación AM y FM	68
3.6. Densidad Espectral de Potencia	69
3.7. Código AMI	75
4. Serie y Transformada de Fourier	77
4.1. Serie de Fourier	77
4.1.1. Representación de señales en términos de sus componentes de frecuencia .	77
4.1.2. Serie trigonométrica de Fourier	81
4.1.3. Serie exponencial compleja	89
4.2. Transformada de Fourier	95
4.3. Transformada inversa de Fourier	98
5. Aplicaciones en propagación y desvanecimientos	98
5.1. Patrón de Radiación	98
5.2. Desvanecimientos	100
5.3. Diseño de radioenlace	103
5.3.1. Pérdida en el espacio libre	105
5.3.2. Cálculo de zonas de Fresnel	106
5.3.3. Cálculo de la altura de las antenas en un radioenlace	108
5.3.4. Uso de antenas repetidoras	109
5.3.5. Método de diseño	109
6. Aplicaciones en Modulación y Telefonía	116
6.1. 4QAM	116
6.2. MPSK	120
6.3. Telefonía	120
7. Aplicaciones en Sistemas Celulares	123
7.1. Celdas celulares	124
7.2. Usuarios en las celdas celulares	125
7.3. Esquema NOMA para 5G	129
8. Introducción a SIMULINK	134
8.1. Ingresar a SIMULINK	135
8.2. Entorno de trabajo de SIMULINK	135
8.3. Muestreo y Cuantización	136
Referencias	143

1. Fundamentos de MatLab

“Fundamentos de MatLab” es una sección que será útil al discente como un tutorial para aquellos que van iniciando su aprendizaje en **MATLAB**. Antes de iniciar a leer este material, recomendamos al alumnado instalar el software de **MATLAB** en su ordenador y, posterior a ello, abrir la ventana de comandos. La ventana de comandos es el espacio principal donde se ingresan los comandos, aquí el alumnado escribe instrucciones y puede ver los resultados al concluir las operaciones. La ventana de comandos en **MATLAB** es como la que se muestra en la **Figura 1**.

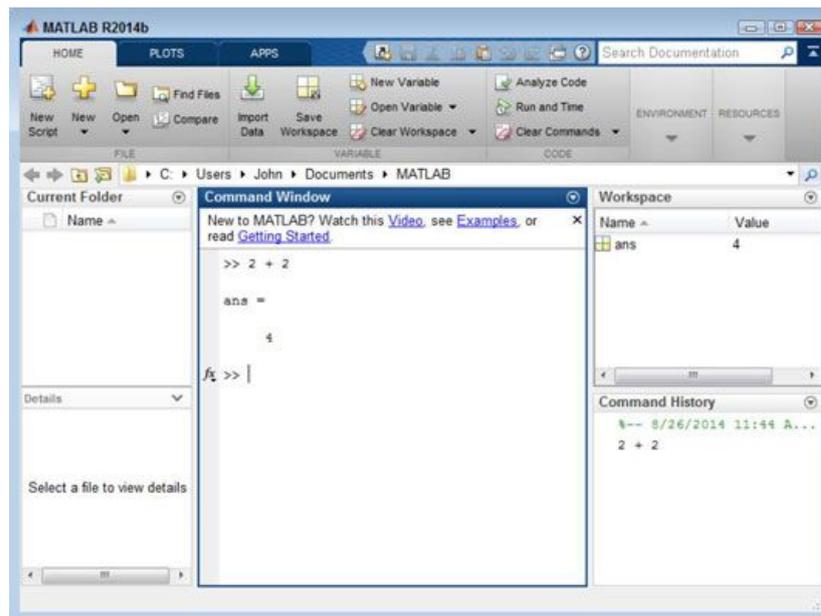


Figura 1: Ventana de comando en MATLAB.

1.1. Ventana de comandos

Una vez descargado e instalado el software **MATLAB**, la instrucción para abrir **MATLAB** en un ordenador con sistema operativo *Unix* sería tecleando:

```
>matlab
```

Para abrir el software **MATLAB** en *Macintosh* o *Windows*, haga clic en el icono de **MATLAB**. Una vez iniciado el software **MATLAB** aparece la ventana de comandos (ver **Figura 1**), en la cual aparece el siguiente símbolo `>>`. Seguido de este símbolo, se teclean los “comandos” que se explican en esta sección.

Si se desea salir de **MATLAB**, el procedimiento es similar para *Unix*, *Macintosh* o *Windows*, y se debe teclear la siguiente instrucción:

```
>>quit
```

Una de las instrucciones que se utiliza con mayor frecuencia en **MATLAB**, es la instrucción `help`. Esta instrucción despliega una explicación de los comandos y, en algunos casos, incluso se incluyen ejemplos que ayudan al alumnado a entender de manera sencilla y fácil cada uno de los comandos bajo cuestión. Un ejemplo sería el siguiente:

```
help log
```

Al teclear esta instrucción vemos que `log` significa logaritmo natural, y la función logaritmo base 10 se denotara como `log10`.

Una de las principales ventajas que nos ofrece **MATLAB** radica en la flexibilidad para la gestión de las variables. Es decir, del hecho que no es necesario declarar los nombres de las variables, ni el tipo de variable, ni tampoco es necesario declarar la dimensión de un arreglo. Todo esto es debido a que los nombres de las variables en **MATLAB** no son diferentes para las variables enteras, reales y complejas, es decir, cualquier variable puede adoptar valores reales, complejos o enteros.

Como ya se mencionó, aunque no es necesario declarar los nombres de las variables, hay que tener mucho cuidado con las variables que se emplean, ya que algunas variables en el entorno de **MATLAB** tienen asignados ciertos valores, nombres de funciones o nombres de comandos.

Una forma rápida y sencilla de verificar si el nombre de una variable es válido en **MATLAB** sería ejecutándolo desde la ventana de comando. Es decir, que un ejemplo de lo que acabamos de comentar sería introducir la instrucción `x=9`, si ésta es aceptada, generará una respuesta como la que se muestra a continuación:

```
>> x =  
9
```

De lo contrario, si se intenta asignar un valor a la palabra `end`, es decir, si se introduce `end = 4`, se producirá un error, dado que `end` es una palabra reservada del lenguaje. Ahora, si se utilizan los comandos `sin` y `cos` como nombres de variables, es decir, que no tengan relación con las funciones trigonométricas cosenoidales, como las que se muestran a la derecha...

```
>> sin = 3  
>> cos = sin * 2
```

...las operaciones continuarán ejecutándose, sin embargo, las funciones trigonométricas `sin` y `cos` dejarán de estar disponibles si han sido sobrescritas como nombres de variables, a menos que se utilice el comando `clear` o se reinicie el entorno de **MATLAB**, es decir, adquieren nuevamente la función `sin` y `cos`. Las variables `i` y `j` están reservadas para denotar el valor imaginario unitario, $\sqrt{-1}$; por tanto, si un cálculo incluye variables complejas es recomendable evitar el uso de `i` y `j` como variables definidas por el usuario con el fin de evitar conflictos o resultados incorrectos.

En la **Tabla 2** se presentan ejemplos de los nombres de variables reservados que tienen significado especial (Gilat, 2008).

Tabla 2: Variables especiales.

Variable	Significado	Valor
eps	Épsilon	$2.2204e^{-16}$
π	π	3.14159...
i y j	Unidad imaginaria	$\sqrt{-1}$
inf	Infinito	∞
NaN	No es número	
date	Fecha	
flops	Contador de operaciones de punto flotante	
nargin	Número de argumentos de entrada de una función	
nargout	Número de argumentos de salida de una función	

1.2. Funciones matemáticas en MATLAB

MATLAB cuenta con numerosas funciones matemáticas, que resuelven tareas específicas. En la **Tabla 3** se muestran algunas de estas funciones específicas (Gilat, 2008).

Tabla 3: Variables especiales.

Función T.	Comentarios	Función T.	Comentarios
$\sin(x)$		\sqrt{x}	Raíz cuadrada de x
$\cos(x)$		$real(x)$	Parte real del valor complejo x
$\tan(x)$		$imag(x)$	Parte imaginaria del valor complejo x
$asin(x)$		$conj(x)$	Conjugado complejo x
$acos(x)$		$round(x)$	Redondear al entero más cercano
$atan(x)$	$-\pi/2 \geq atan(x) \geq \pi/2$	$fix(x)$	Redondear al valor real hacia cero
$atan2(y, x)$	$-\pi \geq atan(y, x) \geq \pi$	$floor(x)$	Redondear x hacia $-\infty$
$\sinh(x)$		$ceil(x)$	Redondear x hacia $+\infty$
$\cosh(x)$		$sign(x)$	+1 si $x > 0$; -1 si $x < 0$
$\tanh(x)$		$rem(x, y)$	Residuo al dividir: $x - y * fix(x/y)$
$asinh(x)$		$exp(x)$	Base exponencial e
$acosh(x)$		$log(x)$	Logaritmo base e
$abs(x)$	Valor absoluto de x	$log10(x)$	Logaritmo base 10
$angle(x)$	Ángulo de fase de un valor complejo		

1.2.1. Variables de arreglo

En MATLAB, se distinguen dos clases principales de variables tipo arreglo:

- (a) Unidimensional
- (b) Bidimensional

Variable de arreglo unidimensional. Los arreglos unidimensionales pueden adoptar la forma de una fila o una columna, lo que los vincula directamente con los conceptos de vectores fila y columna, respectivamente. En este contexto, un arreglo en forma de fila equivale a un *vector fila*, y uno en forma de columna corresponde a un *vector columna*.

En el entorno **MATLAB**, para definir los elementos de un *vector fila*, se separa cada uno de los elementos ya sea con un simple espacio o con una coma (,), y estos elementos se colocan entre corchetes ([]), como se indica en el siguiente ejemplo:

```
>> x = [1 3 5 7 9]
```

Que, como ya se mencionó antes, es lo mismo que tener:

```
>> x = [1, 3, 5, 7, 9]
```

Ahora veamos un ejemplo de la variable de arreglo tipo *vector fila*, en este se puede observar que la variable de arreglo tipo *vector fila* "x", contiene los primeros 5 números impares. Sabiendo esto, se puede definir la variable de arreglo tipo *vector fila* con un *incremento* o *decremento* fijo como se presenta a continuación:

```
>> x = 1 : 2 : 9
```

Aquí, el primer valor es el *límite inferior* del arreglo, el segundo valor nos indica el *incremento*, que en este ejemplo en específico es un incremento de 2 en 2, y el tercer valor es el *límite superior* del arreglo. Una vez mencionado esto, a continuación se presenta lo que da como resultado en el entorno:

```
x = 1 3 5 7 9
```

Una vez que ya tenemos la variable de arreglo tipo *vector fila*, si requerimos conocer y desplegar (imprimir) un elemento en particular de este arreglo, lo que debemos teclear es la instrucción *x* (*subíndice*). Aquí, el "subíndice" indica el elemento seleccionado del arreglo.

Ejemplo, si insertamos la instrucción $x(2)$, los arreglos se enumeran de 1 a n , estamos solicitando que se despliegue el valor contenido en la posición número dos del arreglo, a lo que el sistema mostrará en pantalla lo siguiente:

```
ans =  
3
```

En el entorno **MATLAB**, para definir los elementos de un *vector columna* es muy similar a la de una variable de arreglo tipo *vector fila*, excepto que aquí, para separar cada uno de los elementos del arreglo se emplea el delimitador de punto y coma (;). A continuación se presenta un ejemplo de cómo se debe de declarar una variable de arreglo tipo *vector columna*:

```
>> x = [1; 3; 5; 7; 9]
```

Una vez declarado la variable de arreglo tipo *vector columna* se presenta a continuación lo que se produce en el entorno:

```
x =
  1
  3
  5
  7
  9
```

Podemos observar que al escribir la instrucción `x=[1;3;5;7;9]`, los elementos del arreglo se despliegan en pantalla como se observa arriba. De lo contrario, si no se desea la impresión de los elementos del arreglo se debe colocar al final de la instrucción el signo de punto y coma (;) como se presenta a continuación:

```
>> x = [1; 3; 5; 7; 9];
```

En el entorno de **MATLAB** podemos procesar operaciones básicas entre variables de arreglo como son:

- (a) Suma
- (b) Resta
- (c) Multiplicación
- (d) División

Si x y z son arreglos del mismo tipo (*vector fila* o *vector columna*) y, tienen la misma longitud (es decir, la misma cantidad de elementos), entonces x y z se pueden sumar, restar, multiplicar o dividir empleando los operadores aritméticos de arreglos (**Gilat, 2008**).

```
y = z + x
y = z - x
y = z .* x
y = z ./ x
```

Ejemplo 1.1 Ejemplo de suma entre arreglos

```
>> x = [4, 2, 8, 12, 6, 4];
>> y = [2, 1, 4, 6, 3, 2];
>> z = x + y;

>> z

z = 6 3 12 18 9 6
```

■

Ejemplo 1.2 Ejemplo de resta entre arreglos

```
>> x = [4, 2, 8, 12, 6, 4];
>> y = [2, 1, 4, 6, 3, 2];
>> z = x - y;

>> z

z = 2 1 4 6 3 2
```

■

Ejemplo 1.3 Ejemplo de multiplicación entre arreglos

```
>> x = [4, 2, 8, 12, 6, 4];
>> y = [2, 1, 4, 6, 3, 2];
>> z = x .* y;

>> z

z = 2 1 4 6 3 2
```

■

Ejemplo 1.4 Ejemplo de división entre arreglos

```
>> x = [4, 2, 8, 12, 6, 4];
>> y = [2, 1, 4, 6, 3, 2];
>> z = x ./ y;

>> z

z = 2 1 4 6 3 2
```

■

Los operadores `.*` y `./` son operadores asignados para realizar la multiplicación y la división de arreglos respectivamente. El operador matemático que realiza la potenciación de arreglos se ilustra a continuación:

```
w = y.^2;
```

Aquí se observa que se coloca un punto (.) antes del operador “^”. En este caso, w se convierte en un vector de la misma longitud que y .

En algunas ocasiones, se requiere agregar elementos a los arreglos ya sea al principio o al final. Por ejemplo, consideremos el siguiente arreglo $x = [1, 3]$, al cual, se le desea agregar un elemento de valor 5 al final del arreglo. Para realizar esta acción, se debe escribir la instrucción es la siguiente:

```
>> x = [x, 5]
```

Ahora, si lo que se desea es agregar el elemento al principio del arreglo la instrucción sería la siguiente:

```
>> x = [5, x]
```

Por otro lado, si x es una variable de arreglo tipo *vector columna* basta con cambiar el signo de coma (,) por el signo de punto y coma (;). Si necesitamos conocer el número de elementos que contiene un arreglo se debe usar el comando `length()`. Por ejemplo, si la variable de arreglo tipo *vector fila* es $x = [1, 3]$, la instrucción que se debe escribir para conocer el número de elementos que contiene el arreglo es `length(x)`, lo que despliega:

```
ans =  
2
```

Variable de arreglo bidimensional. Las variables de arreglo bidimensional, que es lo mismo que una matriz en **MATLAB**, se puede definir con la siguiente instrucción:

```
b = [1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9]
```

La instrucción anterior despliega lo siguiente:

```
b =  
1 2 3  
4 5 6  
7 8 9
```

Una vez que se declara un arreglo bidimensional se puede acceder a un elemento en particular de este, por ejemplo, si se desea acceder al elemento de valor 4, el cual está ubicado en la fila 2 y columna 1, entonces la instrucción para acceder a este elemento sería la siguiente:

```
b(2, 1)
```

En el manejo de *arreglos bidimensionales*, es posible referenciar una *fila* o *columna* completa mediante el operador de dos puntos (:). Ejemplificando lo anterior, la instrucción `b(1, :)` denota

la primera *fila* de la matriz b , mientras que $b(:,3)$ hace referencia a su tercera *columna*.

Nota Ambos casos se interpretan como estructuras vectoriales unidimensionales.

1.3. Instrucciones de control (sentencias)

En esta sección se describirán las estructuras para las sentencias `if`, `for`, `while` y `break`. Antes de adentrarnos en las sentencias, a continuación presentaremos los operadores *mayor que*, *menor que*, *igual o mayor que*, *igual o menor que* y *diferente de* respectivamente (Gilat, 2008):



1.3.1. Sentencia if

La sentencia `if` siempre debe de terminar con la palabra reservada `end`, la sintaxis para esta sentencia es la siguiente:

```
if(condición)
    > Operaciones
end
```

La estructura condicional `if` puede complementarse también con las sentencias `else` o `elseif`, y estas servirán para evaluar múltiples condiciones. Es importante destacar que el operador `elseif` puede utilizarse sucesivamente y sin limitaciones, permitiendo así una verificación escalonada de tantos casos como sean necesarios. A continuación, se presenta un ejemplo de la estructura de varias sentencias `elseif` y `else`:

```
if(condición 1)
    > Operación1
elseif(condición 2)
    > Operación2
elseif(condición 3)
    > Operación3
    ...
else
    > OperaciónN
end
```

1.3.2. Sentencia for

En la estructura de la sentencia `for` siempre debe terminar con `end`. La sintaxis para una estructura de la sentencia `for` es la siguiente:

```
for variable = límite_inferior : incremento : límite_superior
    > Operaciones
end
```

Se observa que la variable se inicializa con el valor de *límite inferior*, y la ejecución se detendrá cuando la variable alcance el valor del *límite superior*, esta se incrementará por pasos dependiendo del valor de la variable *incremento*.

1.3.3. Sentencia while

En la estructura de una sentencia **while** esta siempre se debe terminar con la palabra reservada **end**. La sintaxis para una estructura de la sentencia **while** es la siguiente:

```
while(condición)
    > Operaciones
end
```

1.3.4. Sentencia break

La función de una sentencia **break** es la de terminar la ejecución de un ciclo **for** o **while**. Esta sentencia se emplea de la siguiente manera:

```
for variable = límite_inferior : incremento : límite_superior
    if(condición), break, end
    > Operaciones
end
```

Al ejecutar los comandos, **MATLAB** memoriza las variables utilizadas. Los valores de estos comandos permanecen en la memoria hasta que uno finaliza el programa de **MATLAB** o hasta que se borran las variables, ya sea de manera individual o de manera general. Si empleamos el comando **clear**, lo que sucederá es que borrará todas las variables guardadas, por otro lado, si solo se desea borrar algunas variables en específico, sus nombres se indican después de la palabra **clear**.

A continuación, se muestra el ejemplo para borrar una variable en específico:

```
>> clear x
```

Cuando utilizamos el comando **clc** lo que sucederá será que borraremos sólo la ventana de comandos, a continuación se presenta la sintaxis para este comando:

```
>> clc
```

1.4. Funciones que facilitan los cálculos

En esta sección se describirán algunas funciones que nos ayudan a realizar cálculos y nos ahorran el desarrollo de líneas de código, así como tiempo (Gilat, 2008).

1.4.1. Máximo y mínimo

Uno de los cálculos más utilizados en el entorno de **MATLAB** es encontrar el valor *máximo* o *mínimo* de un arreglo. Por ejemplo, consideremos un arreglo x como el que se muestra a continuación:

```
>> x = [2, 1, 4, 6, 3, 2];
```

Si se requiere hallar el elemento con valor *máximo* de este arreglo, se deberían escribir las instrucciones que se muestran a la derecha.

```
>> x = [2, 1, 4, 6, 3, 2];  
>> y = x(1);  
>> for k = 1 : length(x)  
    if x(k) > y  
        y = x(k);  
    else  
        y = y;  
    end  
end
```

Pero, en **MATLAB** está configurado el comando `max(variable)`. El cual, al ser aplicado a la variable x , lo que se desplegará al ejecutar dicho comando, será el valor *máximo* del arreglo, quedando almacenado en la variable y de la siguiente manera:

```
>> x = [2, 1, 4, 6, 3, 2];  
>> y = max(x);
```

Comparando el resultado aplicando `max(x)` con el código anterior, se observa que utilizando las herramientas que ofrece **MATLAB** nos facilita y nos ahorra líneas de código. Análogamente, para conocer o desplegar el elemento de valor mínimo de un arreglo, podemos utilizar el comando `min`, como se muestra a continuación:

```
>> x = [2, 1, 4, 6, 3, 2];  
>> y = min(x);
```

1.4.2. Sumatoria

Otro de los comandos que podemos encontrar en el entorno de **MATLAB**, es el comando *sum(variable)*, el cual realiza la suma discreta de los elementos de un vector o matriz x . Para los vectores tanto de fila como de columna, **sum** calcula la suma total de los elementos. Si x es una matriz, se calcula la suma discreta de cada columna y como resultado se obtiene un vector tipo fila, el cual estará formado por las sumas de todas las columnas. En resumen, la manera de realizar la suma varía según la estructura de los datos.

- Para **vectores** (tanto fila como columna), devuelve un escalar con la suma total de todos sus elementos.
- En el caso de **matrices**, opera a nivel columna, calculando la suma de cada columna y retornando un vector fila compuesto por estas sumas parciales.

A continuación se presentan ejemplos de lo antes descrito:

Ejemplo 1.5 Ejemplo de sumatoria de un vector

```
>> sum([2, 1, 5]);  
>> ans =  
      8
```

■

Ejemplo 1.6 Ejemplo de sumatoria de una matriz

```
>> sum([2, 1, 5; 9, 8, 5]);  
>> ans =  
     11     9    10
```

■

1.4.3. Ordenar

La función **sort** que se encuentra en el entorno de **MATLAB** ordena los elementos contenidos dentro de un vector de manera ascendente. El argumento puede ser un *vector fila*, un *vector columna* o una *matriz*. Su comportamiento varía según el tipo de entrada como se describe:

- Para vectores (fila o columna): La función ordena todos sus elementos.
- Para matrices: Se realiza el ordenamiento de manera independiente en cada una de las columnas.

A continuación, se presentan ejemplos de aplicación:

Ejemplo 1.7 Ejemplo de ordenar de un vector

```
>> sort([2, 1, 5]);  
>> ans =  
     1     2     5
```

■

Ejemplo 1.8 Ejemplo de ordenar de una matriz

```
>> sum([9, 1, 5; 2, 8, 4]);  
>> ans =  
     2     1     4  
     9     8     5
```

1.4.4. Variables Aleatorias

Una de las ramas de las ciencias matemáticas más utilizadas en el análisis de sistemas de comunicaciones es la probabilidad, debido a que es necesario caracterizar los fenómenos que ocurren en el sistema. Y más específico, el estudio de la distribución uniforme. En el entorno de **MATLAB**, existe una herramienta para generar variables aleatorias distribuidas uniformemente (**rand**), y esta se logra con el comando $rand(n)$, donde n especifica el tamaño de la matriz de los números aleatorios que se deben generar. Si $n = 1$, se devuelve un solo número aleatorio que está entre 0 y 1. Si lo que se desea es generar una variable aleatoria con distribución normal (Gaussiana), el comando utilizado es **randn**.

1.5. Creación de archivos M

Hasta ahora, el trabajo se ha limitado a la ventana de comandos, ya que esta es apropiada si se ejecutan instrucciones breves, si no hay que teclear mucho código o si se desea hacer el llamado de alguna función. De no ser así, conviene que el usuario escriba un archivo “*M* de subrutina” o un archivo “*M* de función”, ya que permite guardar el archivo y, posteriormente, pueden realizarse correcciones tantas veces se necesite.

Para elaborar un archivo “*M*” en Macintosh o Windows, se deben seguir los siguientes pasos:

- (a) Clic en el menú **File** (Archivo) en la parte superior de la ventana de comandos.
- (b) En **New**, aparecerá una ventana nueva.
- (c) Para guardar el archivo haga clic en **Save AS** del menú **File**.
- (d) Guarde el archivo con el siguiente formato, **nombre.m** (ejemplo: **funcion.m**).
- (e) El archivo puede ejecutarse desde la ventana de comando escribiendo el nombre del archivo sin la extensión seguido de **Enter** (Gilat, 2008).

Para crear un archivo “*M*” en sistemas Unix inicie **MATLAB** desde el directorio destino donde se almacenarán los archivos. Abra simultáneamente un editor de texto en esa misma ubicación empleando cualquier programa de edición disponible. Modifique el contenido en la ventana del editor y guarde los cambios manteniendo la sesión activa. Asigne al archivo la extensión obligatoria **.m**. Después, nos dirigimos a la ventana de **MATLAB** y ejecutamos el código ingresando el nombre del archivo sin la extensión según lo indicado por (Gilat, 2008).

El símbolo **%** dentro de archivos “*M*” denota comentarios, y todo el texto posterior a este caracter en la línea será ignorado durante la ejecución. Estos comentarios incorporados estratégicamente mejoran la documentación del código al explicar el propósito de cada una de las

variables y estructuras que conforman el archivo.

Ejemplo 1.9 Ejemplo de creación de un archivo “M” empleando el comando *rand*

Como ya se comentó en la sección anterior, el comando *rand* genera variables aleatorias con distribución uniforme entre 0 y 1, es decir, genera un número aleatorio entre estos dos números.

Si lanzamos una moneda legal, la probabilidad de que salga cara o salga cruz es la misma, es decir, de 0.5. Desarrolle el código que simule la acción de lanzar una moneda y que calcule la probabilidad de que salga cara.

Para dar solución a este problema, utilizaremos la definición de probabilidad relativa, la cual nos dice que para calcular la probabilidad de un evento, el evento se tiene que repetir un número grande de veces y, además, contabilizar los eventos que salen favorables. Una vez realizado esto, para el cálculo de la probabilidad sólo se toma el promedio, es decir, dividir el número de eventos favorables que se contabilizaron entre eventos totales.

A continuación presentamos el código que determina la probabilidad de que salga cara al lanzar una moneda.

Código 3.1.

```
1 k=0;
2 t=10000;
3 for i=1:t
4 x=rand(1);
5 if x <= 0.5
6 k=k+1;
7 end
8 end
9 P=k/t
```

Código

Nota

Una de las grandes ventajas de los archivos “M” es que dentro de estos se pueden mandar a llamar a otros archivos “M”. Ahora a estos archivos se denominan archivos “M” de función.

1.6. Crear archivos M de función

Para desarrollar funciones propias en el entorno de **MATLAB**, las cuales pueden ser equivalentes a las subrutinas y funciones de otros lenguajes, se deben crear archivos “M” (Gilat, 2008).

Para desarrollar funciones personalizadas en **MATLAB** equivalentes a subrutinas o funciones de otros lenguajes de programación se deben implementar archivos “M”. Estos archivos “*independientes*” contienen la definición completa de las funciones y operan como unidades modulares autocontenidas, y como se presenta en (Gilat, 2008), las funciones almacenadas en archivos “M” externos cumplen el mismo rol estructural que las subrutinas en otros entornos de programación.

1.6.1. Función que devuelve una sola variable

En los sistemas de comunicaciones se requiere convertir señales continuas a señales discretas en el tiempo, y este proceso se realiza midiendo la señal en momentos periódicos del tiempo. A este proceso se le conoce como *muestreo* y, en efecto, en el entorno de **MATLAB** podemos encontrar esta función a través del comando *sampling*. Consideremos la siguiente ecuación:

$$f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

Suponiendo que el archivo “*M*” se guarda como *ec_a.m*, su código es el siguiente:

Código

Código 3.2.

```
1 function y=ec_a(x)
2 y=sin(x)./x;
```

Podemos observar del **código 3.2** que el nombre del archivo “*M*” es idéntico al nombre de la *función* (que aparece a la derecha del signo de igual). En el archivo “*M*” se utilizan los operadores aritméticos de arreglos, así el argumento *x* puede ser un número escalar, un arreglo tipo vector o una matriz. Una vez que se guarda *ec_a.m* como archivo “*M*”, este se puede mandar a llamar desde la ventana de comandos o incluso dentro de otro archivo “*M*”. Explicado lo anterior, si escribimos la siguiente instrucción:

```
>> y = ec_a(20)
```

El entorno de **MATLAB** desplegará lo siguiente:

```
y =
    0.0456
```

En otro ejemplo, si ahora trabajamos con una matriz, como la que se presenta a continuación:

```
>> x = [10, 20; 5, 30];
>> y = ec_a(x)
```

El resultado también será una matriz como la que se presenta abajo:

```
>> y =;
   -0.0544    0.0456
   -0.1918   -0.0329
```

1.6.2. Función que devuelve múltiples variables

Continuando con el tema de funciones, podemos mencionar que una función puede devolver más de una variable. Por ejemplo, supongamos una función que tiene que evaluar la media y la desviación estándar de una serie de datos y, para devolver las dos variables, utilizaremos un vector en el miembro izquierdo del enunciado de la función como se puede observar abajo:

Código 3.3.

Código

```
1 function [media, dvstd] = ec_b(x)
2 n=length(x);
3 media = sum(x)/n;
4 dvstd = sqrt(sum(x.^2)/n - media.^2);
```

Para utilizar esta función, el miembro derecho del enunciado de llamada también debe ser un vector. El código anterior debe guardarse como *ec_b.m*. Entonces:

```
>> x = [1 5 3 4 6 5 8 9 2 4];
>> [m,d] = ec_b(x)
```

El **Código 3.3** entonces generará y almacenará en las variables “*m*” y “*d*” el valor de estas dos operaciones como se puede observar a continuación:

```
m =
    4.7000
s =
    2.3685
```

1.6.3. Función que utiliza otra función

En secciones previas, se había comentado que el argumento de una función puede ser el nombre de otra función. Por ejemplo, supongamos la siguiente ecuación:

$$ec_c = f(a) + 2f(b) + f(c)$$

donde

$f(x)$ es la función que se nombraría en el argumento.

Ejemplo 1.10 Ejemplo de una función que utiliza otra función

El siguiente código ilustra una función *ec_c.m* que calcula la ecuación anterior:

Código

Código 3.4.

```

1 function mp = ec_c(nombre_f, a, b, c)
2 mp = (feval(nombre_f, a)+2*feval(nombre_f, b)+feval(
    nombre_f, c));

```

En el código anterior, *nombre_f* (una variable de cadena) es el nombre de la función $f(x)$. Si $f(x)$ es la función seno, *nombre_f* será *sin*. *feval* (*nombre_f*) es un comando de **MATLAB** que evalúa la función llamada *nombre_f* para el argumento x . Por ejemplo, $y = \text{feval}('sin', x)$ equivale a $y = \sin(x)$.

Si queremos evaluar *ec_a* para la función definida por *ec_c* (el **Código 3.4** se guardó como *ec_c*, se guardó como archivo “M”) con $a = 10$, $b = 20$ y $c = 30$, entonces, el comando:

```
>> A = ec_c('ec_a', 10, 20, 30)
```

Produce

0.0040

El número de argumentos de entrada y de salida de *feval* debe coincidir con el formato de la función *nombre_f*. A partir de este tema todos los códigos se consideran que son creados en archivos “M”. ■

1.7. Cómo utilizar MATLAB con señales de tiempo continuo

Una señal de tiempo continuo $x(t)$, dada por una expresión matemática puede definirse y graficarse a través del entorno de **MATLAB**. Para tener una mejor comprensión de los términos, se sugiere que el alumnado se familiarice con los comandos básicos del entorno de **MATLAB** revisando diferentes tutoriales o libro de texto.

Un ejemplo de una señal continua en el entorno de **MATLAB** puede ser representada como $x(t)$:

$$x(t) = e^{-0.1t} \sin\left(\frac{2}{3}t\right)$$

Una gráfica de $x(t)$ vs. t , para un intervalo de valores de t , puede generarse mediante **MATLAB**. Por ejemplo, para un intervalo r entre 0 y 30 segundos, con incrementos de 0.1 segundos, las instrucciones de **MATLAB** para generar $x(t)$ son:

```

1 t = 0:0.1:30;
2 x = exp(-.1*t).*sin(2/3*t);
3 plot(t,x)
4 axis([0 30 -1 1])
5 grid
6 xlabel('Time (sec)')
7 ylabel('x(t)')

```

En el código, los valores de tiempo para los que x se grafica, se almacenan como elementos en el

vector t . Cada una de las expresiones `exp(-.1*t)` y `sin(2/3*t)` crea un vector con elementos iguales a los de la expresión evaluada en los valores de tiempo correspondientes. Los vectores resultantes deben multiplicarse, elemento por elemento, para definir el vector x . Como se ve en el comando `x=exp(-.1*t).*sin(2/3*t)`, las operaciones elemento por elemento necesitan un punto antes del operador. Entonces, mediante el comando `plot(t,x)`, x se grafica contra t .

El comando `axis` se utiliza para sobrescribir los valores predeterminados (por lo general, los predeterminados son aceptables, y este comando no se necesita). Es importante destacar que el uso del comando `axis` varía según la versión de **MATLAB** que se utilice. La gráfica resultante de $x(t)$ aparece en la **Figura 2**. Observe que la gráfica que genera **MATLAB** es en forma de caja, y los ejes son etiquetados como se muestra.

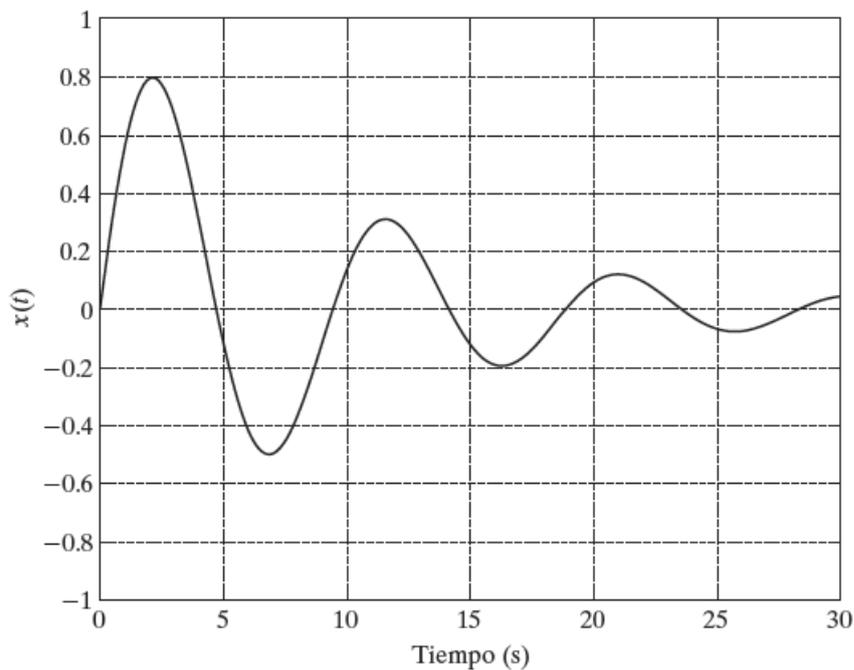


Figura 2: Gráfica en MATLAB para la señal $x(t) = e^{-0.1t} \sin(\frac{2}{3}t)$.

Es importante tomar en cuenta que, cuando generemos gráficas de señales de tiempo continuo con **MATLAB**, el incremento en el escalón de tiempo debe elegirse lo suficientemente pequeño para generar una gráfica suave. Si el incremento se elige demasiado grande (para una señal dada), entonces cuando los valores de la señal se conecten mediante líneas rectas (en la generación por computadora de la gráfica), el resultado será que la gráfica se verá dentada. Para ver este efecto, invitamos al lector a que ejecute de nuevo el programa anterior, utilizando un incremento de tiempo de 1 segundo para graficar $x(t) = e^{-0.1t} \sin(\frac{2}{3}t)$.

2. Gráficas con MATLAB

En el entorno de **MATLAB** las ecuaciones matemáticas se pueden expresar en relación de una, dos, tres o más dimensiones, sin embargo, entender estas ecuaciones sin la ayuda de gráficas resulta muy complicado. Es por esto que el empleo de gráficas en la ingeniería en general es muy importante, y más en aquellas áreas de estudios científicos y de ingeniería, e incluso hoy en día

en las áreas médicas (Gilat, 2008).

En los lenguajes disponibles en las décadas pasadas resulta complicado presentar los resultados con gráficas. Las gráficas en el entorno de computación con **MATLAB** son una parte natural, es decir, son sencillas, y esto conlleva a que los resultados obtenidos de diferentes cálculos, puedan desplegarse con sencillos comandos. Analizar las ecuaciones matemáticas a través de gráficas es una forma atractiva y eficiente de aprender matemáticas. En esta sección se presentarán los temas más relevantes sobre las gráficas en **MATLAB** con la intención de ayudar al alumnado a adquirir los comandos básicos del entorno.

2.1. Gráficas simples

Suponga que se desea graficar lo siguiente:

$$\{x(t_0), x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_N), \}$$

En este punto, lo primero que hay que realizar es adecuar tanto t como y en arreglos idénticos, es decir, convertirlos en arreglos de tipo *fila* o de *columna* de la misma longitud. El comando a emplear para desplegar el gráfico es `plot`, la manera de emplearse este comando se puede observar en el **código 4.1**, el cual produce la gráfica de la **Figura 3** (Gilat, 2008).

Código

Código 4.1.

```
1 t=0:0.05:2;  
2 y=cos(2*pi*t);  
3 plot(t,y)
```

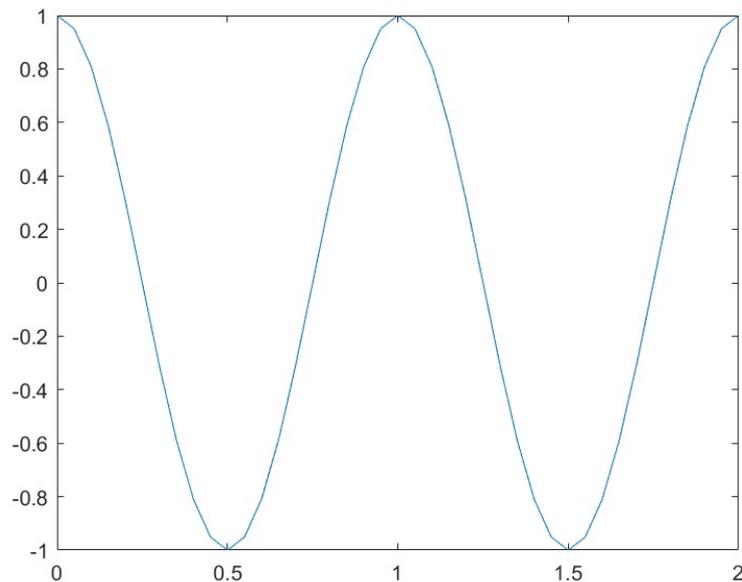


Figura 3: Gráfica usando plot sin asignar etiquetas a los ejes.

Para agregar etiquetas en los ejes se utilizan los comandos `xlabel` y `ylabel`. Para agregar un título en la gráfica se utiliza el comando `title`, esto se muestra a continuación en el siguiente código 4.2, el cual produce la gráfica de la Figura 4.

Código 4.2.



```

1 t=0:0.05:2;
2 y=cos(2*pi*t);
3 plot(t,y)
4 xlabel('t ')
5 ylabel('y ')
6 title('Grafica del coseno')
    
```

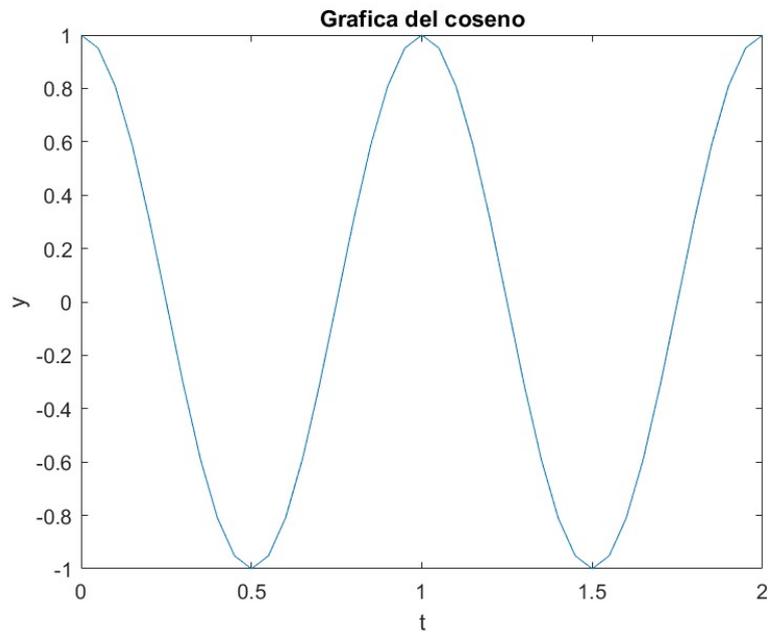


Figura 4: Gráfica de la Figura 3 con etiquetas en los ejes.

2.2. Gráficas con marcas

En las gráficas del entorno de **MATLAB** se pueden representar los datos de manera puntual, es decir, colocar marcas en cada uno de los valores sin que estos estén conectados entre sí por líneas. En la **Tabla 4** se presentan algunos de los tipos de marcas o letras que se pueden utilizar. Si se desea graficar con un solo tipo de marca, lo que se debe hacer es colocar el símbolo después de las coordenadas en los argumentos de `plot`. La gráfica producida por el código 4.3 se muestra en la **Figura 5** (Gilat, 2008).

Código 4.3.



```

1 t=0:0.05:2;
2 y=cos(2*pi*t);
3 plot(t,y, '+ ')
4 xlabel('t ')
5 ylabel('y ')
6 title('Grafica del coseno con marcas')
    
```

Tabla 4: Marcas para gráficas.

Tipo de marca	Símbolo
Punto	.
Más	+
Estrella	*
Círculo	o
Marca x	x

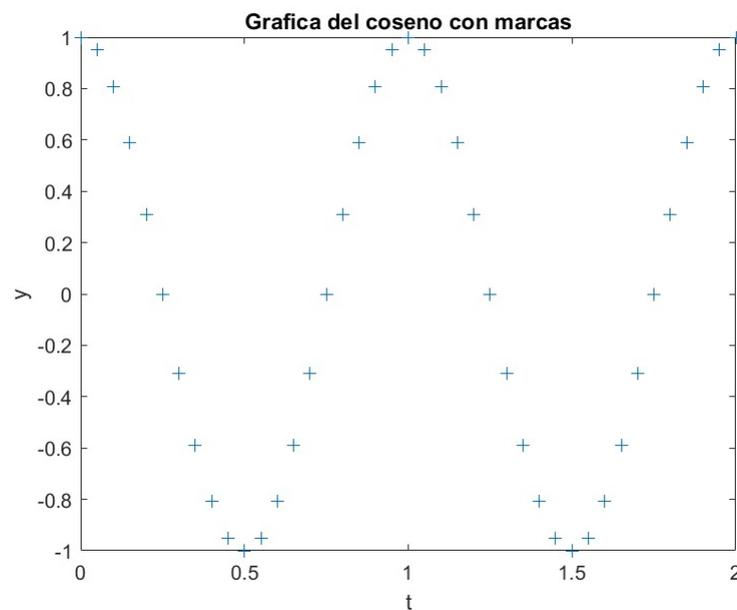


Figura 5: Gráfica con marcas.

2.3. Colores y tipos de líneas

En relación a las líneas con las que se unen los valores en las gráficas de **MATLAB**, en la **Tabla 5** se pueden observar cuatro tipos diferentes de líneas (**Gilat, 2008**). Se hace notar que el tipo de línea por omisión es el continuo, y si se desea desplegar alguna gráfica con algún tipo de línea en particular, se debe especificar la marca de línea después de las coordenadas como se presenta en el ejemplo siguiente:

```
plot(x,y,'-')
```

En términos de *color* las opciones de pueden observar en la **Tabla 6**. Para asignar un color específico a una gráfica se debe colocar el símbolo del color, así como se realizó para el tema de la *marca*. Si es el mismo proceso que para los tipos de línea, en el argumento del comando **plot**, debemos escribir de la siguiente manera:

Tabla 5: Tipos de líneas.

Tipo de línea	Símbolo
Continua	—
Guiones	--
Punteada	:
Guiones y puntos	—.

`plot(x,y,'g')`

Tabla 6: Colores de líneas.

Color de línea	Símbolo
Rojo	<i>r</i>
Amarillo	<i>y</i>
Magenta	<i>m</i>
Turquesa	<i>c</i>
Verde	<i>g</i>
Azul	<i>b</i>
Blanco	<i>b</i>
Negro	<i>k</i>

Tanto el tipo de línea como el color se pueden combinar en una gráfica de **MATLAB**, y en el ejemplo siguiente se puede observar como es la sintaxis de una gráfica con marcas *+* en color verde:

`plot(x,y,'+g')`

Grafica los datos con marcas *+* en color verde.

2.4. Eje y retícula

El valor mínimo y el valor máximo de los ejes coordenados, las marcas de la escala, así como los valores de las coordenadas en las marcas de escala el entorno de **MATLAB** los asigna de manera automática. Sin embargo, es posible modificar la forma del marco, así como los valores mínimos y valores máximos de las coordenadas con el comando `axis` (Gilat, 2008).

Para modificar la forma del entorno figura, a una forma “cuadrada”, se tiene que colocar la siguiente sintaxis:

`axis('square')`

Si se desea que los ejes de coordenadas y las marcas de escala se omitan, se debe colocar la siguiente instrucción:

```
axis('off')
```

Si ahora colocamos la instrucción `axis('on')`, lo que sucederá, será que se cancela la instrucción previa que fue (`axis('off')`). El valor máximo y el valor mínimo de las coordenadas en una gráfica se pueden especificar con la siguiente instrucción:

```
axis([ $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ,  $y_{min}$ ,  $y_{max}$ ])
```

Las líneas que se salgan de estos límites serán recortados. El comando `axis` se utiliza después de `plot` para poder modificar el área de visualización. Por ejemplo, en el **código 4.4** que realiza la gráfica del coseno (**Figura 6**), si queremos sólo graficar la parte del eje x con un rango de entre $[0.75, 1.25]$ y del eje y con un rango de entre $[0, 1]$, se deben escribir las siguientes instrucciones:

Código 4.4.

```
1 t=0:0.05:2;  
2 y=cos(2*pi*t);  
3 plot(t,y, '+ ')  
4 axis([0.75, 1.25, 0, 1])  
5 xlabel('t ')  
6 ylabel('y ')  
7 title('Grafica del coseno utilizando axis')
```

Código

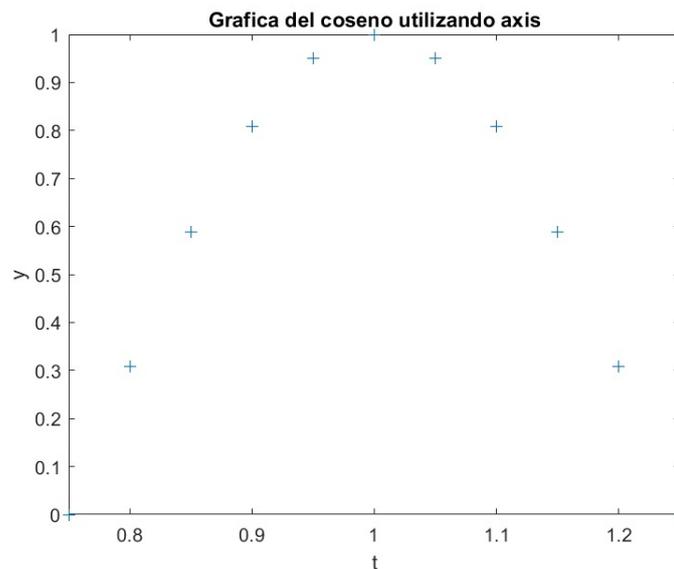


Figura 6: Uso de axis.

2.4.1. Retícula

En las gráficas del entorno de **MATLAB** se puede agregar una retícula a la gráfica con el comando `grid on`. Por otro lado, la acción que realiza el comando `grid off` es la de eliminar la retícula en la gráfica (Gilat, 2008). Si se utiliza de manera simple el comando `grid`, la acción que se realizará será la de activar y desactivar la retícula alternadamente. El código 4.5 es un ejemplo del empleo del comando `grid on`, el cual produce la gráfica de la Figura 7.

Código 4.5.

```
1 t=0:0.05:2;  
2 y=cos(2*pi*t);  
3 plot(t,y)  
4 grid on  
5 xlabel('t ')  
6 ylabel('y ')  
7 title('Grafica del coseno con reticula')
```

Código

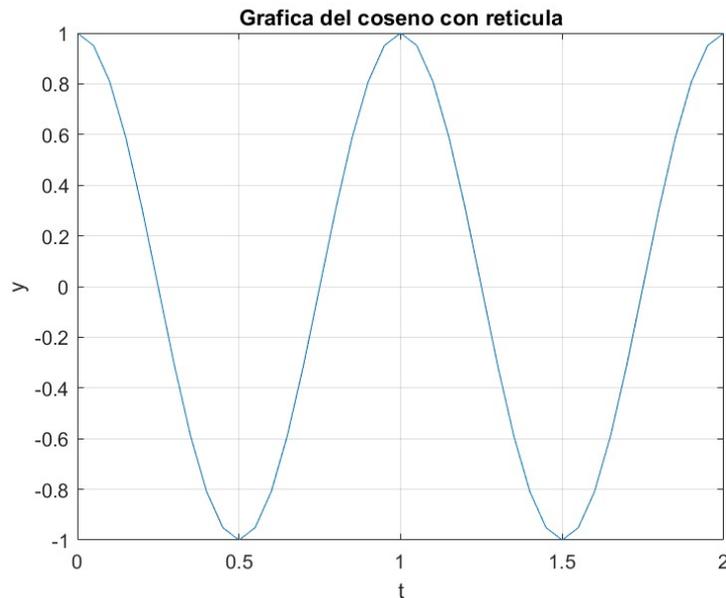


Figura 7: Gráfica usando retícula.

2.5. Gráficas polares

Uno de los diferentes tipos de gráficos en el entorno de **MATLAB** son las gráficas *polares*. Para realizar la gráfica de una función en *coordenadas polares* se emplea el comando `polar` (Gilat, 2008). El código 4.6 es un ejemplo del empleo del comando `polar`, el cual produce la gráfica de la Figura 8.

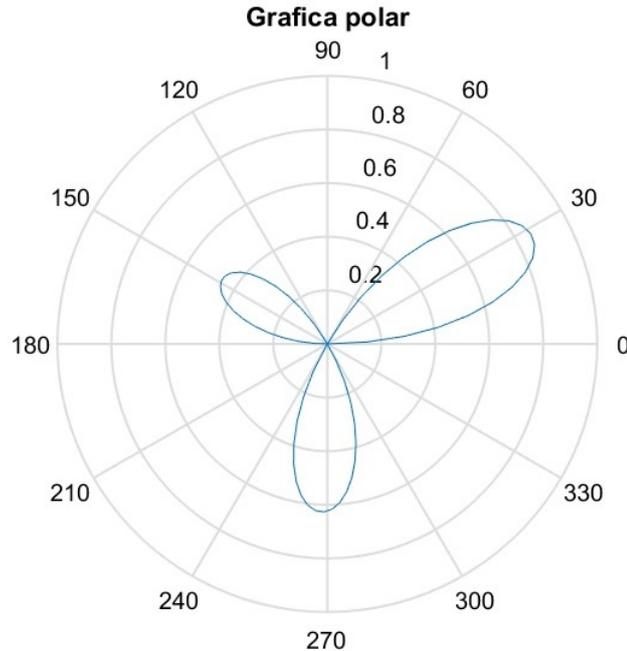
Código 4.6.

Código

```

1 t=0:0.05:pi+0.01;
2 y=sin(3*t).*exp(-0.3*t);
3 polar(t,y)
4 title('Grafica polar')
5 grid

```

**Figura 8:** Gráfica usando el comando `polar`.**2.6. Gráficas logarítmicas y semilogarítmicas**

En el área de ingeniería, la escala logarítmica es muy útil tanto en cálculos matemáticos como en la generación de gráficas. En el entorno de **MATLAB**, las funciones pueden graficarse en una escala log-log con el comando `loglog` como se muestra en el **código 4.7**. Este código produce la gráfica de la **Figura 9** (Gilat, 2008).

Código 4.7.

Código

```

1 t=0.1:0.1:3;
2 x=exp(t);
3 y=exp(t.*sinh(t));
4 loglog(x,y)
5 title('Grafica log-log')
6 xlabel('x')
7 ylabel('y')
8 grid

```

En la **Figura 9** se observa que, tanto el eje horizontal como el eje vertical, están en escala logarítmica. Si queremos cambiar esta característica, que sólo uno de los ejes esté en escala logarítmica, por ejemplo el eje y , el comando utilizado es `semilogy`, como se muestra en el siguiente **código 4.8**. El resultado de aplicar esta instrucción se puede observar en la gráfica de la **Figura**

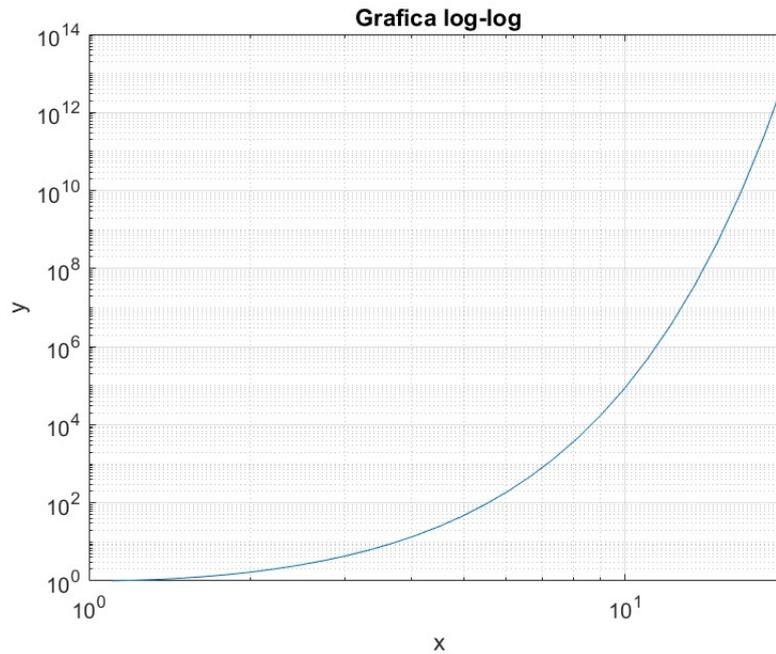


Figura 9: Gráfica en escala logarítmica.

10.

Código 4.8.



```

1 t=0.1:0.1:3;
2 y=exp(t.*t);
3 semilogy(t,y)
4 title('Grafica semilogy')
5 xlabel('t ')
6 ylabel('y ')
7 grid
    
```

De forma similar, si lo que se desea es el eje x en escala logarítmica el comando utilizado es `semilogx`.

2.7. Múltiples curvas

En el entorno de **MATLAB** si se desea desplegar dos o más curvas con una sola gráfica empleando el comando `plot`, se debe escribir todos los conjuntos de coordenadas repetidamente con el comando `plot`. En el siguiente **código 4.9**, se presenta es un ejemplo de lo antes explicado, el cual produce la gráfica de la **Figura 11 (Gilat, 2008)**.

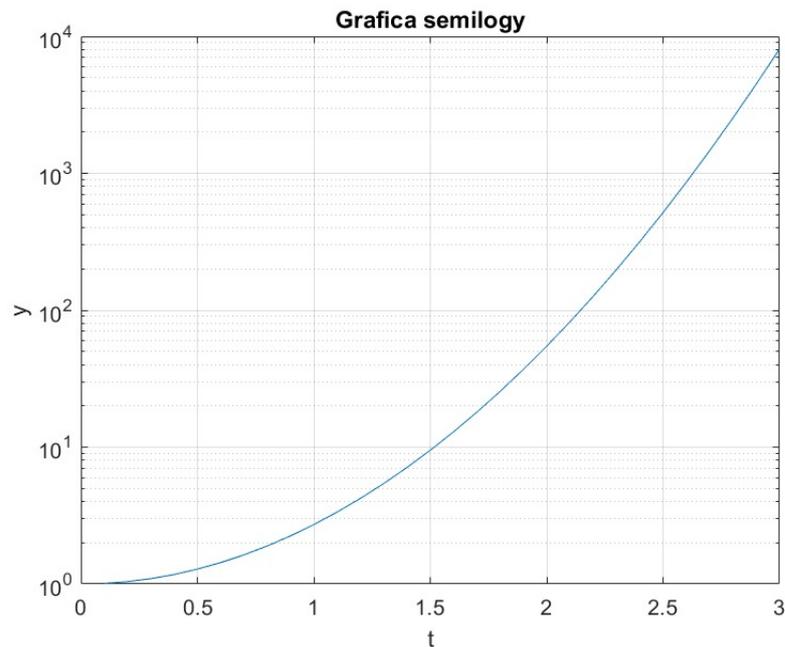


Figura 10: Gráfica en escala semilogarítmica.

Código 4.9.

```

1 t=0:0.05:2;
2 y=cos(2*pi*t);
3 z=sin(2*pi*t);
4 plot(t,y,t,z)
5 xlabel('t ')
6 ylabel('y, z ')
7 title('Grafica del coseno y seno ')
8 grid
    
```

Código

El entorno de **MATLAB** elegirá automáticamente diferentes tipos y colores de línea para las diferentes curvas contenidas dentro de una misma gráfica. Aunque, el usuario puede especificar el color de la línea, el tipo de línea e incluso el tipo de marca para representar los datos, y esto es posible indicándolo después de cada par de coordenadas. A continuación presentamos un ejemplo de cómo se debería colocar la sintaxis:

```

plot(x,y,'-x,z,*')
plot(x,y,':x,z,*g')
plot(x,y,'r',x,z,'y')
    
```

2.7.1. Retención

Hasta este punto de las notas hemos graficado las curvas en una sola operación con el comando **plot**. Sin embargo, frecuentemente se tiene la necesidad de añadir alguna curva a una gráfica que ya se desplegó. Esta necesidad puede ser solventada con el comando **hold on**. En el siguiente **código 4.10**, se presentan las instrucciones para resolver esta necesidad de añadir una curva,

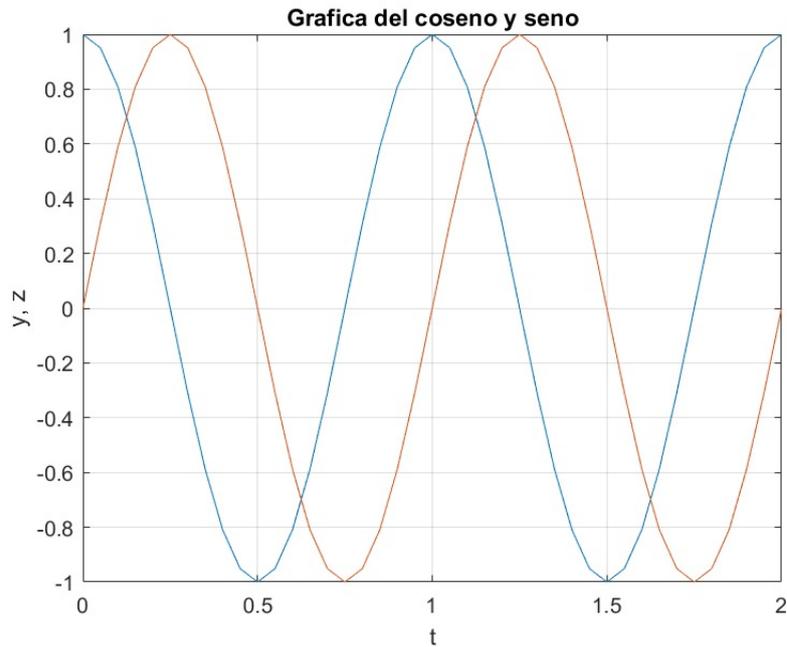


Figura 11: Múltiples curvas.

el código despliega la gráfica de la **Figura 12 (Gilat, 2008)**.

Código 4.10.

```

1 t=0:0.05:2;
2 y=cos(2*pi*t);
3 plot(t,y)
4 hold on
5 z=sin(2*pi*t);
6 plot(t,z, '- - ')
7 xlabel('t ')
8 ylabel('y(-), z( '- - ')')
9 title('Grafica del coseno y seno ')
10 grid
    
```

Código

Una vez que se ha agregado el comando `hold on`, la gráfica se mantiene en la pantalla e incluso si se ejecuta otro código. Debido a esto, se requiere insertar el comando `hold off` tanto al principio como al final para que las nuevas gráficas agregadas a los ejes borren las gráficas existentes y restablezcan todas las propiedades de los ejes. El siguiente **código 4.11** es un ejemplo del uso del comando `hold on`.

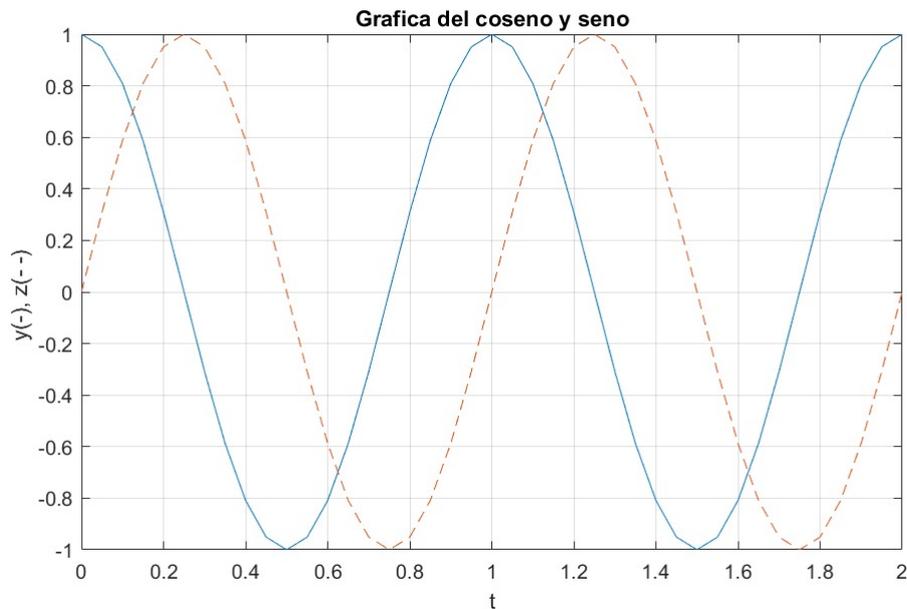


Figura 12: Múltiples curvas.

Código 4.11.

```

1 clear; clf; hold on
2 t=0:0.05:2;
3 y=cos(2*pi*t);
4 plot(t,y) hold on
5 z=sin(2*pi*t);
6 plot(t,z, '- - ') hold on
7 xlabel('t ') ylabel('y(-), z(- -) ')
8 title('Grafica del coseno y seno ')
9 grid
    
```

Código

Cuando graficamos diferentes curvas empleando el comando `hold on`, se recomienda especificar los valores mínimos y máximos de los ejes coordenados con el comando `axis`, ya que si no se realiza esta especificación, los límites se determinarán por default con base en los datos de la primera curva.

El comando `hold on` es un comando que resulta indispensable cuando se está trabajando una gráfica que tarda mucho en desplegarse. Por este motivo, los comandos para modificar los parámetros de las figuras tales como:

- 1 Los ejes,
- 2 El mapa de color
- 3 Los ángulos de perspectiva
- 4 El eje de color, entre otros,

se pueden modificar después de haber desplegado una figura, sin embargo, cada vez que se ejecute un comando nuevo se dibujará la figura completa. Para reducir el tiempo, se sugiere emitir todos

los comandos de los parámetros antes de graficar, retener la figura con el comando `hold on`, y luego el comando de `plot`.

2.7.2. Leyenda

En las gráficas del entorno de **MATLAB** se pueden agregar leyendas a estas, utilizando el comando `legend`. El siguiente **código 4.12** es un ejemplo de cómo se utiliza el comando `legend`, el cual produce la gráfica de la **Figura 13** (Gilat, 2008).

Código 4.12.

```

1 t=0:0.05:2;
2 y=cos(2*pi*t);
3 plot(t,y)
4 hold on
5 z=sin(2*pi*t);
6 plot(t,z, '- - ')
7 legend('cos ', 'sin ', 2)
8 xlabel('t ')
9 ylabel('y(-), z(- -)')
10 title('Grafica del coseno y seno ')
11 grid
    
```

Código

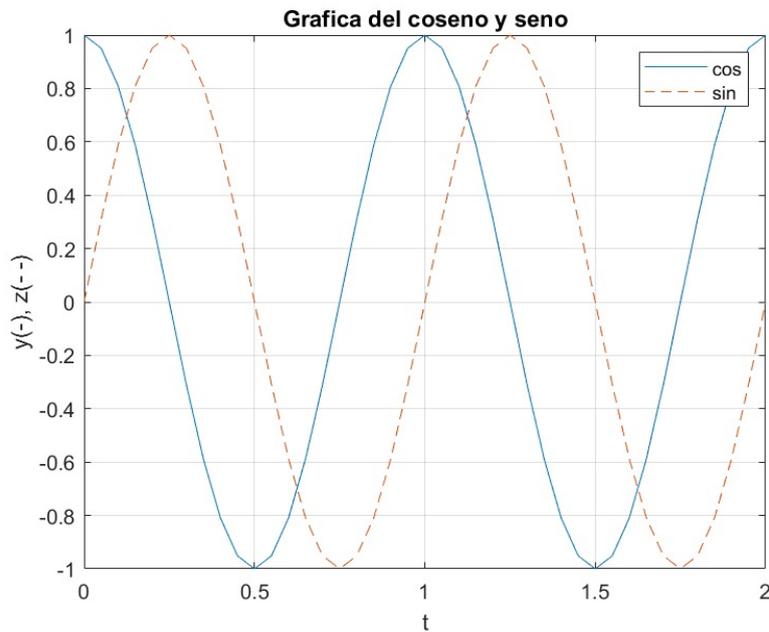


Figura 13: Gráfica con legend.

El primer parámetro es nombre o etiqueta para la primera gráfica, el segundo parámetro corresponde a la segunda gráfica, el tercer parámetro corresponde a la posición de la leyenda.

2.7.3. Figura

Es posible abrir múltiples ventanas de gráficos con `figure`. Si sólo se utiliza una ventana, no hay necesidad de usar este comando, pero si se requiere trabajar en más de una ventana de gráficos se pueden abrir con este comando. Si se requiere volver a activar una ventana de algún gráfico que ya se había desplegado, se puede utilizar el comando `figure(n)`. Este comando reactivará la *n*-ésima ventana, donde *n* es el número secuencial de figura que aparece en la parte superior de la ventana de gráficos. Las propiedades de las figuras, como su tamaño, ubicación, mapa de color asignado, etc., pueden modificarse.

2.8. Subgráficas

Con el comando `subplot` podemos desplegar diferentes gráficas en una misma ventana de figura, es decir, distribuir en *m* por *n* gráficas en una sola ventana de figura. La sintaxis la presentamos a continuación (Gilat, 2008):

```
subplot(m,n,k)
```

Nota Los argumentos *m*, *n* y *k* son números enteros.

En esta sintaxis, tanto *m* como *n*, representan un arreglo de *m* por *n* gráficas, por lo que *k* es el número secuencial de la gráfica (cuadrante). El siguiente código 4.13, es un ejemplo del empleo del comando `subplot`, el cual produce la gráfica de la Figura 14.

Con el comando `subplot` podemos trazar un arreglo vertical de dos gráficas con las siguientes instrucciones:

```
subplot(2, 1, 1), plot(...)
```

```
subplot(2, 1, 2), plot(...)
```

De forma similar, trazamos una fila de dos gráficas con:

```
subplot(1, 2, 1), plot(...)
```

```
subplot(1, 2, 2), plot(...)
```

Código 4.13.

```
1 clear; clf
2 t=0:0.05:2;
3 x=cos(2*pi*t);
4 y=sin(2*pi*t);
5 z=(cos(2*pi*t)).^2;
6 w=(sin(2*pi*t)).^2;
7 subplot(2,2,1)
8 plot(t,x)
9 xlabel('t ')
10 ylabel('x ')
11 title('Subgrafica 2,2,1 ')
12 grid on
13 subplot(2,2,2)
14 plot(t,y)
15 xlabel('t ')
16 ylabel('y ')
17 title('Subgrafica 2,2,2 ')
18 grid on
19 subplot(2,2,3)
20 plot(t,z)
21 xlabel('t ')
22 ylabel('z ')
23 title('Subgrafica 2,2,3 ')
24 grid on
25 subplot(2,2,4)
26 plot(t,w)
27 xlabel('t ')
28 ylabel('w ')
29 title('Subgrafica 2,2,4 ')
30 grid on
```

Código

2.9. Versión tridimensional de una gráfica

El comando `plot3` es un comando para generar gráficas en la versión tridimensional de `plot`. Para el comando `plot3`, todas las reglas y comandos que ya explicamos para `plot` se pueden aplicar también. El siguiente **código 4.14**, es un ejemplo de cómo desplegar una gráfica 3D, el cual produce la gráfica de la **Figura 15 (Gilat, 2008)**.

Código 4.14.

```
1 clear, clf
2 t=0:0.1:20;
3 r=exp(-0.2*t);
4 th=pi*t*0.5;
5 z=t;
6 x=r.*cos(th);
7 y=r.*sin(th);
8 plot3(x,y,z)
9 hold on
10 plot3([1,1], [-0.5,0], [0,0])
11 xlabel('X ');
12 ylabel('Y ');
13 zlabel('Z ');
```

Código

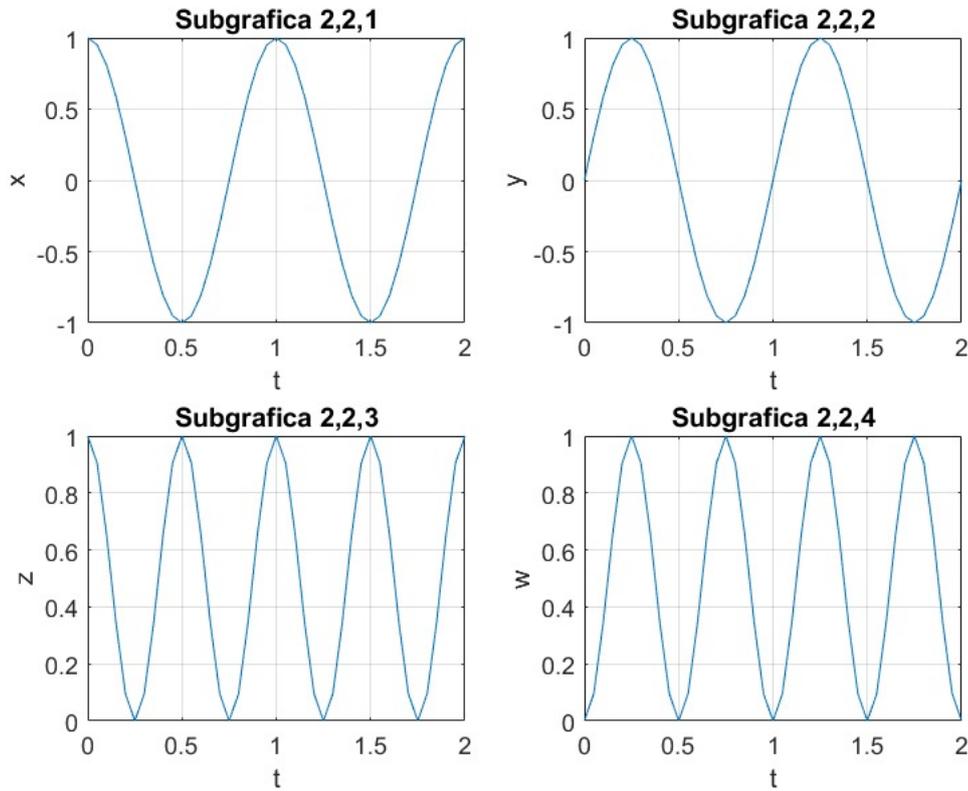


Figura 14: Gráfica usando subplot.

También puede utilizarse el comando `axis` como se presenta a continuación.

```
axis([xmin; xmax; ymin; ymax; zmin; zmax])
```

3. Aplicaciones en Comunicaciones

Dos de los campos más importantes para un ingeniero en telecomunicaciones son las comunicaciones analógicas y comunicaciones digitales, ya que son la base y son fundamentales en la formación en su profesión. En esta sección nos enfocaremos en mostrar algunas aplicaciones que se utilizan para dichos campos, como son el muestreo de las señales, la cuantización, la modulación, la representación de las señales digitales mediante códigos de líneas, entre otros.

3.1. Conceptos básicos de señales

Una señal $x(t)$ se considera una función, la cual, se asume que tendrá valores *reales* o *escalares* de la variable independiente (t). Cuando hablamos de un término con valor *real* significa que cualquier valor que tome t (fijo), la señal $x(t)$ resultará en un número real. Cuando a t se le asignan estos valores (\mathfrak{R}), se dice que es una *variable de tiempo continuo* y, por lo tanto, la señal $x(t)$ también se considera como una *señal de tiempo continuo*, o en su defecto, una *señal analógica* como se estudia en (Oppenheim, Willsky, & Nawab, 1998). Existen infinidad de señales

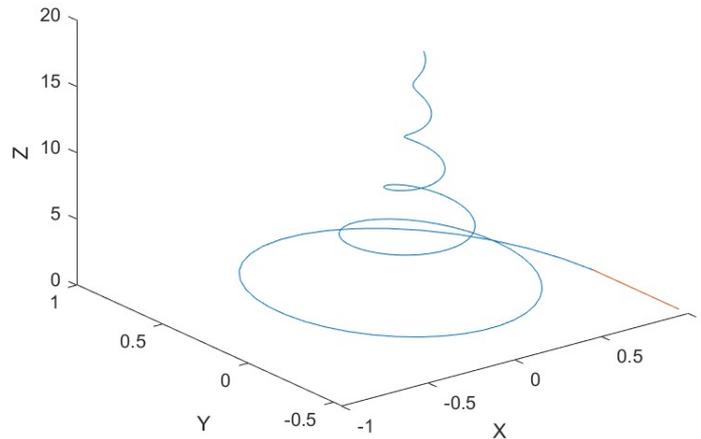


Figura 15: Gráfica en 3D.

análogas, sin embargo los ejemplos más comunes de este tipo de señales los podemos asociar con señales de voltaje, señales que representan ondas de corriente de un circuito eléctrico, la voz, señales de audio, ondas musicales, representación de la velocidad de un cuerpo en movimiento, cualquier tipo de fuerza mecánica, cualquier señal bioeléctrica (electrocardiogramas (ECG) o electroencefalogramas (EEG)), flujos de líquidos, etc. Por naturaleza, las señales continuas $x(t)$ no siempre son fáciles de representar a través de una función matemática, por lo que es muy complejo intentar darle esta representación. Por ejemplo, si consideramos una señal de voz de duración de 50 ms como la que se observa en la **Figura 16**, aquí se escucha la pronunciación de la palabra *should*, la cual quedará representada por estas variaciones cuando transcurre de la “sh” a “u”.

Esta expresión, al ser complicada de expresar, las variaciones de amplitud al pronunciar la palabra no se especifican en forma matemática, sino que se establecen como un conjunto de muestras tal y como lo menciona (**Kamen & Heck, 2008**). Analizando nuevamente la **Figura 16**, $x(t)$ que es la señal de la voz, puede representarse a través de un conjunto de muestras como se observa a continuación.

Consideremos a $x(t)$, la cual expresa la señal de voz de la **Figura 16**. Esta señal puede representarse mediante el conjunto de muestras como se presenta a continuación:

$$\{x(t_0), x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_N), \}$$

En donde:

- $x(t_i)$ valor de la señal cuando es evaluada en un t_i , donde i toma valores de 0, 1, 2, ..., hasta N .
- $N + 1$ será el número de puntos muestreados.

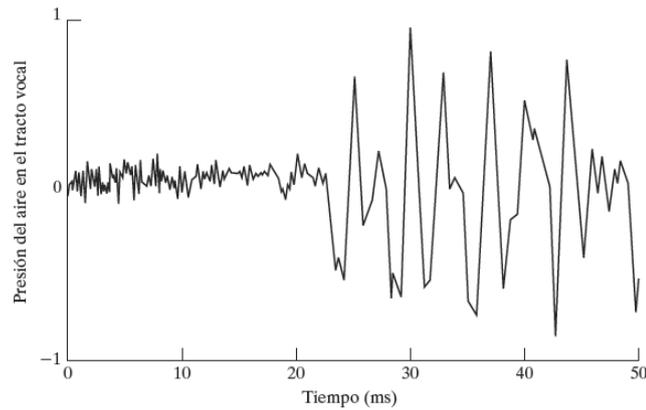


Figura 16: Segmento de un diálogo de la palabra *should*.

Para representar cualquier señal $x(t)$ en un conjunto de muestras como las presentadas arriba, se le realiza a la señal $x(t)$ el proceso de muestreo. Además, de poder con esto obtener la representación matemática de una señal, las señales también pueden analizarse en términos de su “*contenido de frecuencias*” o “*espectro en frecuencia*”. Cuando hablamos de representar a una señal en términos de su espectro en frecuencia podemos utilizar la transformada de Fourier, la cual se abordará en la siguiente sección (**Sección 4**).

Una señal puede presentar una transformación de su variable independiente como (**Kamen & Heck, 2008**):

- Corrimiento de tiempo
- Inversión de tiempo
- Escalamiento de tiempo

3.1.1. Corrimiento de una señal en el tiempo

Una señal $x(t)$ puede presentar corrimiento de tiempo si esta señal se desplaza en el eje del tiempo, es decir, representa una versión de $x(t)$ desplazada como se puede observar en la **Figura 17** (**Kamen & Heck, 2008**).



El valor de t_0 puede ser negativo o positivo.

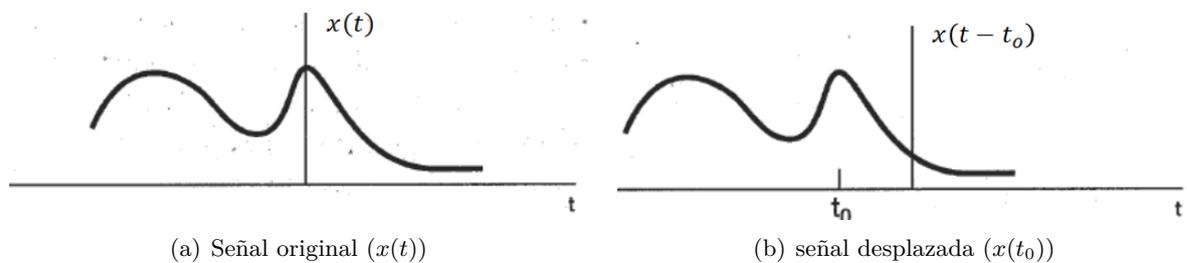


Figura 17: Corrimiento en tiempo de una señal.

$$x(t - t_0)$$

t_0 positivo \Rightarrow Retardada

t_0 negativo \Rightarrow Adelantada

Ejemplos de corrimiento de una señal en el tiempo pueden ser las señales de radar, sonar, procesamiento de señales sísmicas, etc.

Ejemplo 3.1 Corrimiento de una señal en el tiempo

El siguiente **código 5.1** realiza el corrimiento de una señal en el tiempo como se puede ver en la **Figura 18**.

Código 5.1.

```

1 %% Desplazamiento
2 t1 = -1:0.1:0; x1 = [0*t1];
3 t2 = 0:0.01:1; x2 = [1+0*t2];
4 t3 = 1:0.01:2; x3 = [-t3+2];
5 t4 = 2:0.01:3; x4 = [0*t4];
6 t = [t1 t2 t3 t4]; x = [x1 x2 x3 x4];
7 plot(t,x,'r','LineWidth',2,'DisplayName','Señal
  original');
8 grid on;
9 hold on;
10 %% Desplazamiento—Retraso por 3 unidades
11 to = 3;
12 plot(t+to,x,'k','LineWidth',2,'DisplayName','Señal
  retrasada');
13 %% Desplazamiento—Adelanto por 3 unidades
14 xlabel('t','FontName','Times','FontSize',14);
15 ylabel('Amplitud','FontName','Times','FontSize',
  14);
16 title('Desplazamiento de una señal','FontName','
  Times','FontSize',16);
17 plot(t-to,x,'g','LineWidth',2,'DisplayName','Señal
  adelantada');
```

Código

3.1.2. Inversión de una señal en el tiempo

Una señal $x(t)$ puede presentar inversión en el tiempo si esta señal se invierte en $t = 0$, es decir, representa una versión de $x(t)$ invertida ($x(-t)$) como se puede observar en la **Figura 19** (Kamen & Heck, 2008).

Ejemplos de la inversión de una señal en el tiempo pueden ser una grabación de audio pero que se reproduce en sentido contrario.

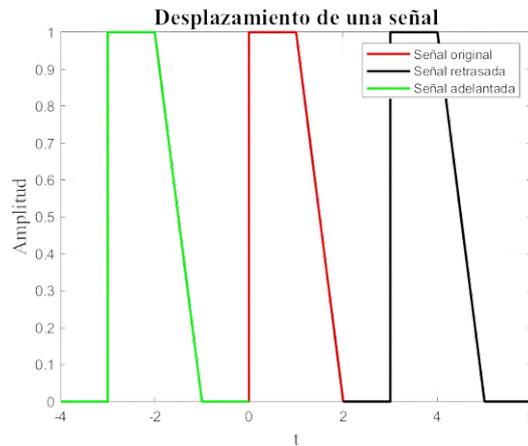


Figura 18: Corrimiento en el tiempo de una señal.

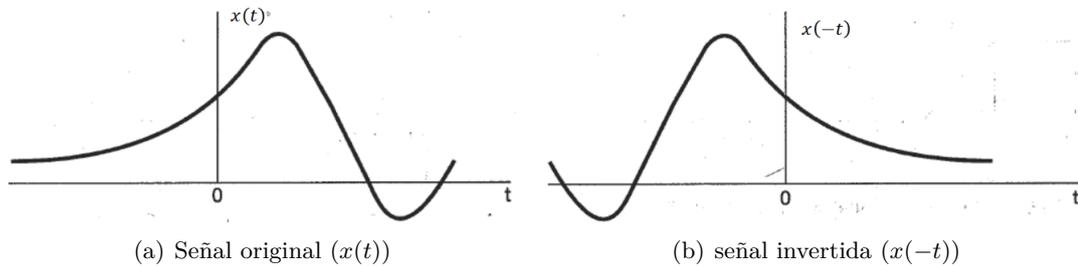


Figura 19: Inversión en tiempo de una señal.

Ejemplo 3.2 Inversión en tiempo de una señal

El siguiente código 5.2 realiza la inversión en tiempo de una señal como se puede ver en la Figura 20.

Código 5.2.

```

1 %% Inversion
2 t1 = -1:0.01:0; x1 = [0*t1];
3 t2 = 0:0.01:1; x2 = [1+0*t2];
4 t3 = 1:0.01:2; x3 = [-t3+2];
5 t4 = 2:0.01:3; x4 = [0*t4];
6 t = [t1 t2 t3 t4]; x = [x1 x2 x3 x4];
7 plot(t,x,'r','LineWidth',2,'DisplayName','Senal
  original');
8 grid on;
9 hold on;
10 %% Inversion
11 t_inv = -t;
12 xlabel('t','FontName','Times','FontSize',14);
13 ylabel('Amplitud','FontName','Times','FontSize',
  14);
14 title('Inver. de una senal','FontName','Times','
  FontSize',16);
15 plot(t_inv,x,'k','LineWidth',2,'DisplayName','
  Senal invertida');

```

Código

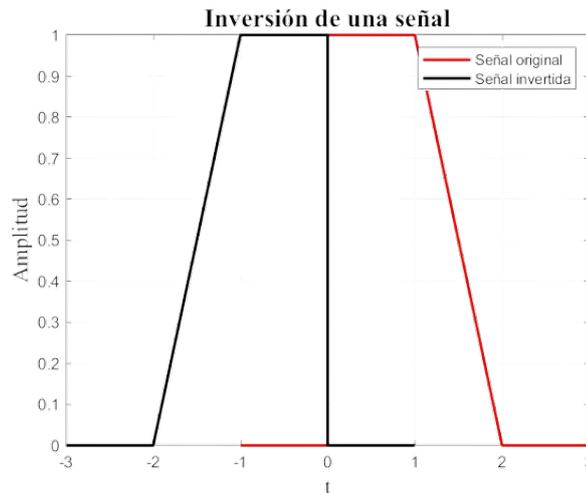


Figura 20: Inversión en el tiempo de una señal.

3.1.3. Escalamiento de una señal en el tiempo

Una señal $x(t)$ puede ser escalada en tiempo si esta señal se modifica por un factor n que afecte la variable independiente (t), es decir, una señal cuyo argumento se vea multiplicado o dividido por este factor n como se puede observar en la **Figura 21** (Kamen & Heck, 2008).

Ejemplos del escalamiento en tiempo de una señal puede ser una grabación de audio, es decir, para la señal $x(nt)$ la grabación de audio será n veces más rápida, lo contrario para para la señal $x(t/n)$, donde la grabación de audio será n veces más lenta.

Ejemplo 3.3 Expansión en el tiempo de una señal

El siguiente **código 5.3** realiza la expansión en tiempo de una señal como se puede ver en la **Figura 22**.

Código 5.3.

```

1 t1 = -1:0.01:0; x1 = [0*t1];
2 t2 = 0:0.01:1; x2 = [1+0*t2];
3 t3 = 1:0.01:2; x3 = [-t3 + 2];
4 t4 = 2:0.01:3; x4 = [0*t4];
5 t = [t1 t2 t3 t4]; x = [x1 x2 x3 x4];
6 plot(t,x,'r','LineWidth',2,'DisplayName','Señal
original');
7 grid on;
8 hold on;
9 %% Expans. n=2
10 n=2;
11 t_compr=n*t;
12 xlabel('t','FontName','Times','FontSize',14);
13 ylabel('Amplitud','FontName','Times','FontSize',
14);
14 title('Expans.','FontName','Times','FontSize',
16);
15 plot(t_compr,x,'k','LineWidth',2,'DisplayName','
Señal expandida');

```

Código

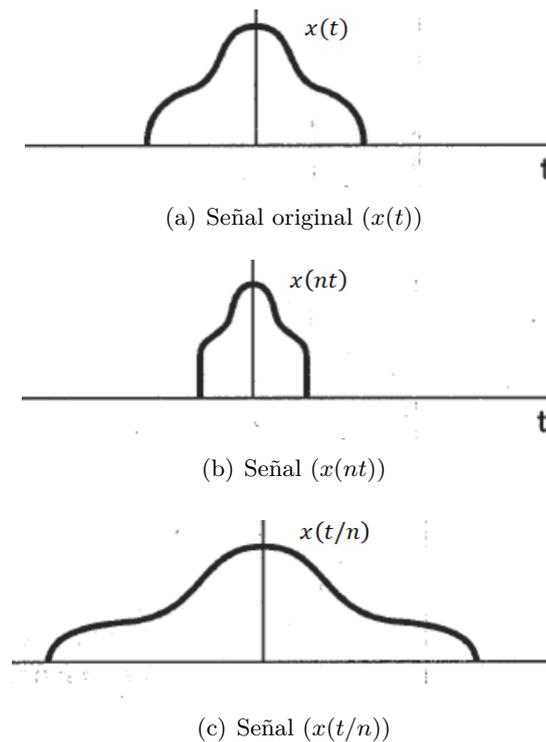


Figura 21: Escalamiento en tiempo de una señal.

Ejemplo 3.4 Compresión en el tiempo de una señal

El siguiente **código 5.4** realiza la compresión en tiempo de una señal como se puede ver en la **Figura 23**.

Código 5.4.

```

1 t1=-1:0.01:0;x1=[0*t1];
2 t2=0:0.01:1;x2=[1+0*t2];
3 t3=1:0.01:2;x3=[-t3+2];
4 t4=2:0.01:3;x4=[0*t4];
5 t=[t1 t2 t3 t4];x=[x1 x2 x3 x4];
6 plot(t,x,'r','LineWidth',2,'DisplayName','Señal
original');
7 grid on;
8 hold on;
9 %% Compres n=2
10 n=2;
11 t_compr=t/n;
12 xlabel('t','FontName','Times','FontSize',14);
13 ylabel('Amplitud','FontName','Times','FontSize',
14);
14 title('Compres. de una señal','FontName','Times',
'FontSize',16);
15 plot(t_compr,x,'k','LineWidth',2,'DisplayName','
Señal comprimida');
```

Código

En la siguiente sección, se presentan algunas señales de tiempo continuo, y las cuales se pueden

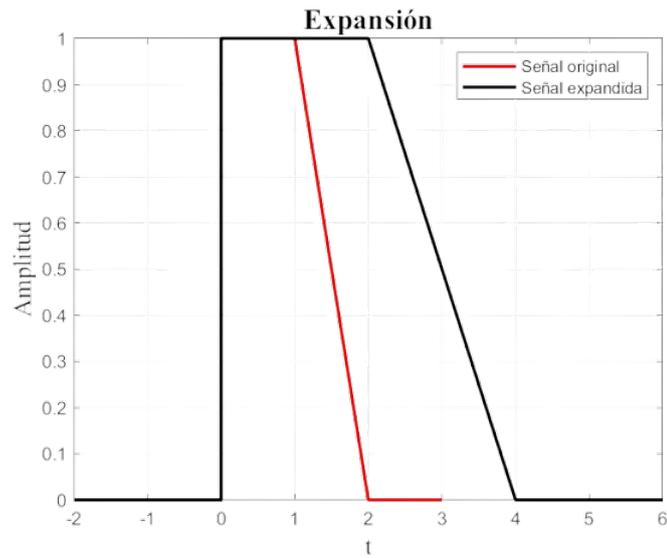


Figura 22: Expansión en el tiempo de una señal.

expresar en forma matemática.

3.1.4. Función escalón unitario y rampa unitaria

Las señales de tiempo continuo básicas e indispensables en los cursos de **MATLAB** son la función escalón unitario y la función rampa unitaria. La función escalón unitario se representa como $u(t)$ y la función rampa unitaria se representa como $r(t)$. La función escalón unitario se puede observar en la **Figura 24(a)** y la función rampa unitaria se puede observar en la **Figura 24(b)** (**Kamen & Heck, 2008**).

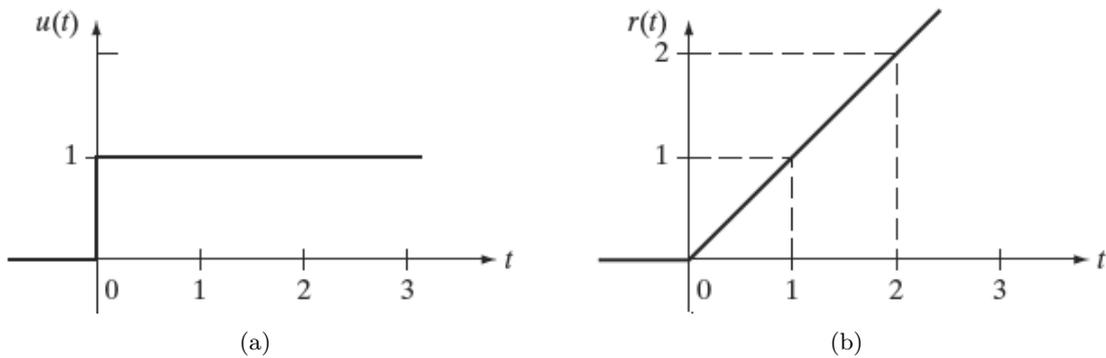


Figura 24: Funciones: (a) escalón unitario y (b) rampa unitaria.

La representación matemática para una función escalón unitario ($u(t)$) se presenta a continuación:

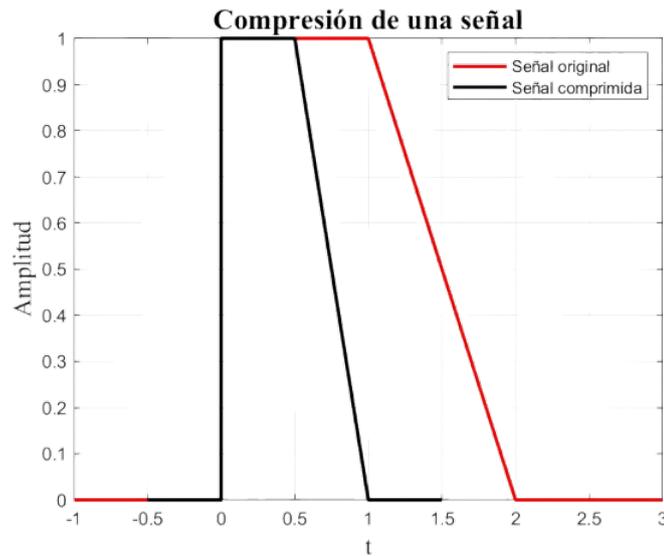


Figura 23: Compresión en el tiempo de una señal.

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Para este material, la función *escalón unitario* se define con una amplitud de $u(t)$ es igual a 1 para toda $t \geq 0$.

Nota En algunos casos, dependiendo la bibliografía consultada, la función de escalón unitario está definido como $u(0) = 1$, mientras que en otros está definido como $u(0) = 0$.

Si la variable K se considera como un número real diferente de cero, entonces, $Ku(t)$ es la función escalón tomando como valor de amplitud el valor que se le asigne a K para valores mayores o iguales a cero ($t \geq 0$). Consideremos una señal de tiempo continuo $x(t)$, y si a esta señal le aplicamos la operación de producto con una función escalón, es decir, $x(t)u(t)$, el resultado será igual a $x(t)$ para los valores que tome t mayores o iguales a cero ($t \geq 0$). Para cuando t tome valores menores a cero ($t < 0$), el resultado del producto será cero. En conclusión, realizar la multiplicación una señal $x(t)$ por una función escalón ($u(t)$), resultará en eliminar cualquier valor diferente de cero de $x(t)$ para $t < 0$.

La representación matemática para una función rampa unitaria ($r(t)$) se presenta a continuación:

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2)$$

En esta representación matemática podemos observar que para $t \geq 0$, la pendiente de $r(t)$ es de valor 1 ($m = 1$), por lo que se considera que $r(t)$ tiene “*pendiente unitaria*”. Derivado de lo anterior, es que a $r(t)$ se le conoce como la “*función rampa unitaria*”. Si nuevamente, la variable K es un número escalar (número real) cualquiera diferente de cero, la función rampa $Kr(t)$, tendrá una pendiente m que tomará los valores de K para $t \geq 0$.

Analizando estas dos funciones, podemos observar que la función rampa unitaria $r(t)$ se puede representar como la integral de la “*función escalón unitario*” $u(t)$ como se presenta a continuación:

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda \quad (3)$$

Nota Caso inverso, podemos identificar a la 1ra. derivada de $r(t)$ respecto a t es igual a $u(t)$, excluyendo a $t = 0$, donde la derivada de $r(t)$ no está definida.

Ejemplo 3.5 Función escalón unitario

El siguiente **código 5.5** grafica la “*función escalón unitario*”, y la gráfica que despliega este código se observa en la **Figura 25**.

Código 5.5

```
1 %% Funcion escalon
2 t = -5:.001:5;
3 uo = heaviside(t);
4 plot(t,uo,'LineWidth',3,'Color','r');
5 axis([-5 5 -1 2])
6 hold on;
7 plot([-5 5],[0 0])
8 plot([0 0],[-1 2])
9 grid on;
10 title('Grafica de la se al escalon unitario u_{0}(t)')
11 xlabel('Variable independiente t')
12 ylabel('u(t)')
```

Código

Ejemplo 3.6 Suma de escalones unitarios

El siguiente **Código 5.6** grafica la suma de diferentes escalones unitarios como se puede observar en la **Figura 26**.



Figura 25: Gráfica de la función escalón unitario.

Código 5.6.

```

1 %% Suma de escalones unitarios "x(t)=u(t + 1) - 2u (t
  -1)+u(t-3)"
2 t = -2:.001:2;
3 f = heaviside (t+1)-1*heaviside (t-1)+1*heaviside (t-3)
  ;
4 plot(t,f,'LineWidth',3,'Color','r');
5 grid on
6 title('Combinación de señales escalon unitario')
7 xlabel('Variable independiente t')
8 ylabel('u(t)')
    
```

Código

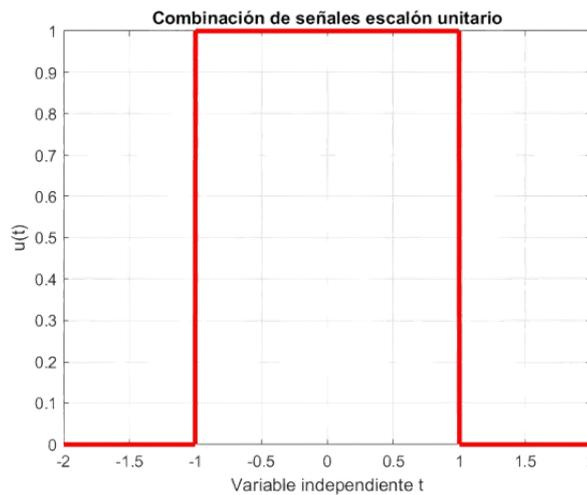


Figura 26: Suma de escalones unitarios del ejemplo 3.6.

Ejemplo 3.7 Suma de escalones unitarios

El siguiente Código 5.7 grafica la suma de diferentes escalones unitarios como se puede observar en la Figura 27.

Código 5.7.

Código

```

1 f = heaviside(t+1)-heaviside(t-1)+2*heaviside(t-3)
  -2*heaviside(t-5)+2*heaviside(t-7)-2*heaviside(t
  -9);
2 plot(t,f,'LineWidth',3,'Color','r');
3 grid on
4 title('Combinacion de se ales escalon unitario')
5 xlabel('Variable independiente t')
6 ylabel('u(t)')
    
```

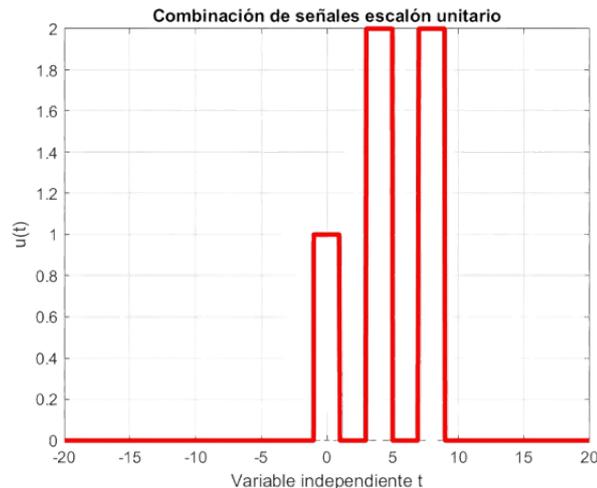


Figura 27: Suma de escalones unitarios del ejemplo 3.7.

Ejemplo 3.8 Función rampa

El siguiente **Código 5.8** grafica una señal rampa como se puede observar en la **Figura 28**.

Código 5.8.

Código

```

1 t = -1:.001:1;
2 Rampa =t.* heaviside(t);
3 plot(t,Rampa,'LineWidth',3,'Color','r');
4 grid on;
5 title('Grafica de la se al rampa unitaria r(t)')
6 xlabel('Variable independiente t')
7 ylabel('r(t)')
    
```

3.1.5. El impulso

Un *impulso unitario* se representa como $\delta(t)$, y es también conocido como una *función delta* o *distribución de Dirac*. Su definición la podemos consultar más a detalle en (Kamen & Heck, 2008), y su representación matemática es como se presenta a continuación:

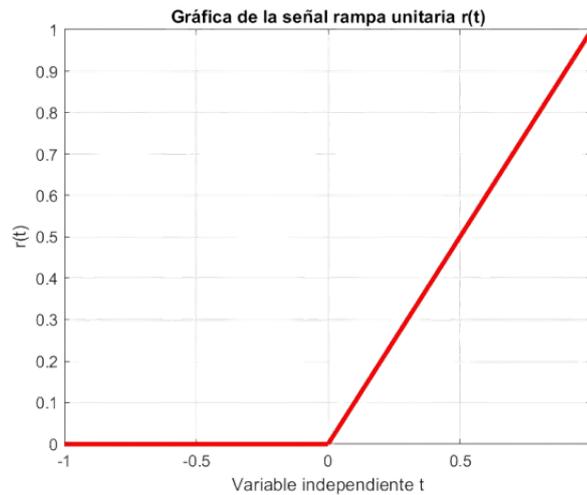


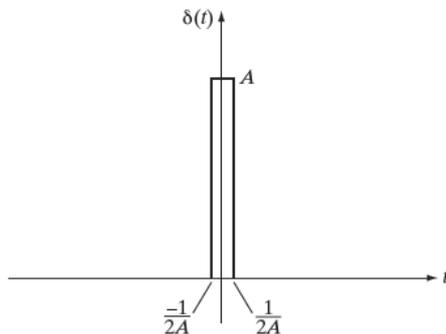
Figura 28: Señal rampa.

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\lambda) d\lambda, \quad \text{para cualquier número real } \varepsilon > 0$$

(4)

Una de las principales condiciones establece que $\delta(t) = 0$ para todo $t \neq 0$. También, se establece que el área bajo el impulso es 1, por lo que $\delta(t) = 1$. Cabe señalar que cuando se evalúa el impulso en un $t = 0$ ($\delta(0)$), la función no está definida (en particular, $\delta(0)$ no es igual a infinito). La función impulso unitario la podemos aproximar empleando un pulso centrado en cero, con A de amplitud y duración de $1/A$. Siendo así, A tomaría un valor positivo muy grande. La interpretación de pulso para $\delta(t)$ la presentamos en la **Figura 29**.



Considerando lo anterior, asignaremos valores reales positivos a la variable K , $K\delta(t)$ será el impulso con un área igual a K , y estará definida entonces como:

$$K\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

Figura 29: Interpretación de pulso para $\delta(t)$.

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} K\delta(\lambda) d\lambda = K, \quad \text{para cualquier número real } \varepsilon > 0$$

En la **Figura 30** se muestra la representación gráfica de $K\delta(t)$, en donde “ (K) ” hace referencia al área del impulso ($K\delta(t)$).

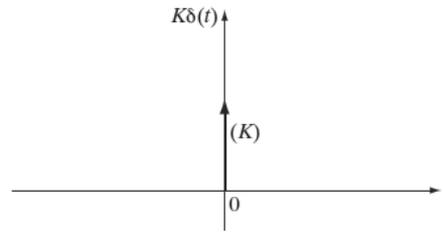


Figura 30: Impulso $K\delta(t)$.

También podemos representar a la función escalón unitario $u(t)$ como la integral del impulso unitario $\delta(t)$. En la **ecuación 5** podemos observar esta interpretación:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda, \quad \text{para toda } t, \text{ excepto } t=0 \quad (5)$$

Para demostrar la **ecuación 5**, debemos analizar primero que para valores menores a cero ($t < 0$), se cumple que:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda = 0, \quad \text{debido a que } \delta(t) = 0, \text{ para toda } t < 0$$

Considerando valores mayores a cero ($t > 0$),

$$\int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda = \int_{-t}^t \delta(\lambda) d\lambda = 1, \quad \text{ya que } \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\lambda) d\lambda = 1, \text{ para cualquier } \varepsilon > 0$$

Ejemplo 3.9 Generar la función impulso unitario en Matlab

En este ejemplo, se presentará un intervalo de 0 a 9, en el cual graficaremos un impulso en la posición 5. El siguiente **Código 5.9** ejemplifica el concepto de función delta, en el cual se desea graficar:

$$\delta_{[n-n_0]} = \begin{cases} 1; & n = n_0 \\ 0; & n \neq n_0 \end{cases}$$

En el intervalo de $n_1 < n_0 < n_2$ (en donde $n_1 = 0$ y $n_2 = 9$), declararemos la función presentada en el siguiente código:

Código 5.9.

```
1 function [x,n]=impulso(n0,n1,n2) % Genera x[n]=delta(n-n0); n1<=n<=n2
2 n=[n1:n2];
3 x=[(n-n0)==0];
```

Código

Una vez que tenemos definida nuestra función “impulso”, la utilizaremos dentro del siguiente **Código 5.10** esto con el fin de implementar una función arbitraria $T = \delta_{[n-5]}$ en el intervalo

antes mencionado, lo que generará la gráfica de la **Figura 31**.

Código 5.10.

```

1 %% Graficar el impulso en 5
2 n=[0:9];
3 T=impulso(5,0,9);
4 grid on
5 stem(n,T)
6 xlabel('n')
7 ylabel('x[n]')
8 title('Impulso unitario en la posición 5')
    
```

Código

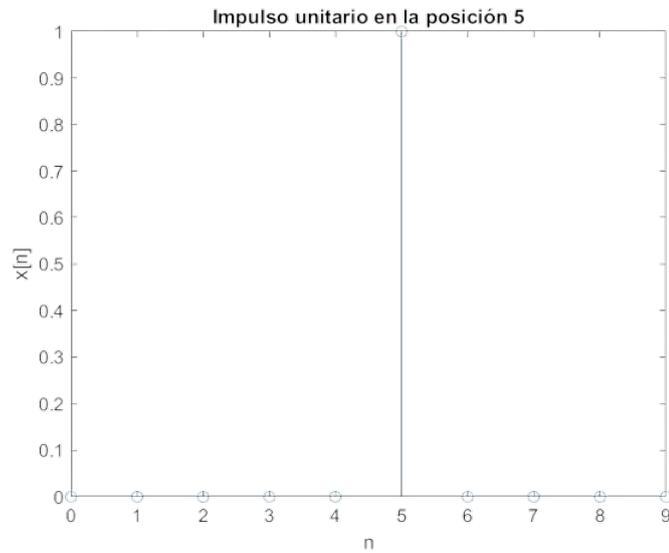


Figura 31: Ejemplo de función delta en la posición 5.

Ejemplo 3.10 Generar dos impulsos unitarios en Matlab

En este ejemplo, se generará y graficará una secuencia sobre un intervalo de -5 a 5 para:

$$x[n] = 2\delta_{[n+2]} - \delta_{[n-4]}; \quad -5 \leq n \leq 5$$

Código 5.11.

```

1 n=[-5:5];
2 x=2*impulso(-2,-5,5)-impulso(4,-5,5);
3 stem(n,x);
4 xlabel('n')
5 ylabel('x[n]')
6 title('Grafica de 2 impulsos unitarios')
    
```

Código

El código generará la gráfica de la **Figura 32**.

3.1.6. Señales periódicas

Para explicar una señal periódica, consideremos que T tomará valores reales positivos fijos. Para que una señal sea considerada continua y periódica con periodo T , $x(t)$ debe cumplir (**Kamen**

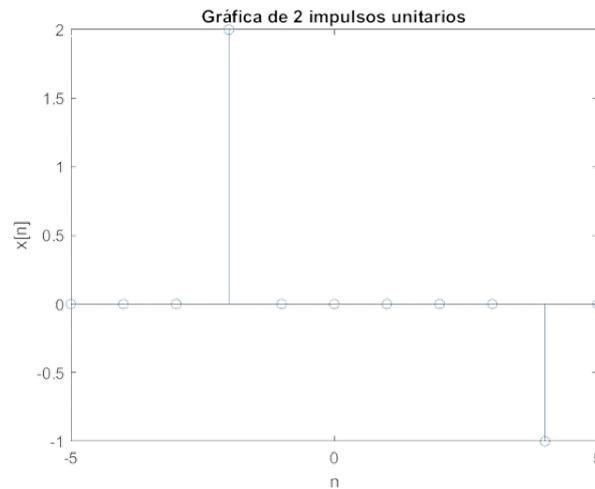


Figura 32: Gráfica de 2 impulsos unitarios.

& Heck, 2008):

$$x(t + T) = x(t), \quad \text{para toda } t, -\infty < t < \infty \quad (6)$$

Analizando la **ecuación 6** podemos resumir que si $x(t)$ es periódica con un periodo T , también lo será con un periodo qT , donde q tomará cualquier valor entero positivo. De aquí se desprende un nuevo concepto que es el *periodo fundamental* (T_o). Este concepto nos refiere al número positivo más pequeño de T , para el cual la **ecuación 7** se cumple.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta), \quad -\infty < t < \infty \quad (7)$$

donde

- A es la amplitud.
- ω es la frecuencia [rad/s].
- θ es la fase [rad].

La frecuencia f en hertz [Hz] es:

$$f = \omega/2\pi \quad (8)$$

Las señales periódicas más relevantes bajo estudio son las señales senoidales. Para comprobar que la señal senoidal dada por la **ecuación 7** es periódica, analizamos que para cualquier valor de la variable de tiempo t se cumple lo siguiente:

$$A \cos \left[\omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) \right] = A \cos (\omega t + 2\pi + \theta) = A \cos (\omega t + \theta)$$

Con esto, comprobamos que la señal senoidal es periódica con periodo $T = 2\pi/\omega$ y, también, $2\pi/\omega$ es el *periodo fundamental* T_o . La señal senoidal $A \cos (\omega t + \theta)$ se observa en la **Figura 33**,

en este caso θ toma valores entre $-\pi/2$ y 0 ($-\pi/2 < \theta < 0$).

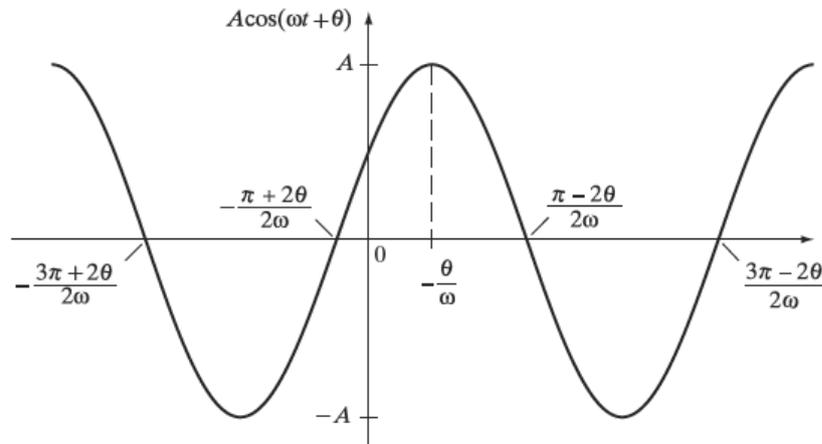


Figura 33: Sinusoide $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ con $-\pi/2 < \theta < 0$.

Si ahora consideramos que $\theta = -\pi/2$, entonces observamos que nuestra señal coseno defasado $-\pi/2$ se convierte en una señal seno con argumento ωt ($\sin(\omega t)$) como se observa en la siguiente expresión:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta) = A \sin(\omega t)$$

Cuando trabajamos con señales periódicas en ocasiones se requiere trabajar con la suma de estas, y surge la incógnita de saber si la suma de dos señales periódicas resultará también en una señal periódica. Entonces, consideremos ahora dos señales periódicas definidas como $x_1(t)$ y $x_2(t)$, con sus respectivos *periodos fundamentales* T_1 y T_2 . La pregunta problema a resolver:

¿Es periódica la suma $x_1(t) + x_2(t)$?

es decir,

¿Existe un número positivo T , tal que satisfaga lo siguiente?

$$x_1(t + T) + x_2(t + T) = x_1(t) + x_2(t) \quad \text{para toda } t \tag{9}$$

Concluimos que la **ecuación 9** se satisface si y sólo si la relación entre los periodos fundamentales T_1/T_2 se logra escribir también como una relación de dos números enteros, por ejemplo q y r (q/r). Una vez explicado lo anterior, podemos observar que si se cumple que $T_1/T_2 = q/r$, relacionamos estos conceptos como $rT_1 = qT_2$, y como ya se mencionó que tanto r como q son números enteros, concluimos que la señal $x_1(t)$ y la señal $x_2(t)$ son también señales periódicas con periodo rT_1 . Es por eso que la expresión de la **ecuación 9** se sigue satisfaciendo con $T = rT_1$.

Adicional, si los valores que toman r y q son coprimos, es decir, r y q no tienen factores enteros comunes diferentes de 1, entonces $T = rT_1$ es el *periodo fundamental* de la suma de ambas señales $x_1(t) + x_2(t)$.

Ejemplo 3.11 Suma de señales periódicas

Considerando la señal periódica $x_1(t) = \cos(\pi t/2)$ y la señal periódica $x_2(t) = \cos(\pi t/3)$, expresamos que las señales son periódicas con periodos fundamentales de $T_1 = 4$ s y $T_2 = 6$ s, respectivamente, como se observa a continuación:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Resultando en que si $q = 2$ y $r = 3$, se concluye que la suma entre ambas señales ($x_1(t) + x_2(t)$) es periódica, con un *periodo fundamental* de $rT_1 = (3)(4) = 12$ segundos. El siguiente **Código 5.12** presenta la sintaxis del procedimiento antes explicado y este genera la gráfica que se presenta en la **Figura 34**.

Código 5.12

```

1 T=12;
2 t=0:0.001:T;
3 x1=cos((pi*t)/(2));
4 x2=cos((pi*t)/(3));
5 y=x1+x2;
6 plot(t,y,'r')
7 xlabel('t','FontName','Times','FontSize',14);
8 ylabel('Amplitud','FontName','Times','FontSize',
9       14);
9 grid on;
10 hold on;
11 title('Suma de dos senales periodicas','FontName',
12       'Times','FontSize',16);

```

Código

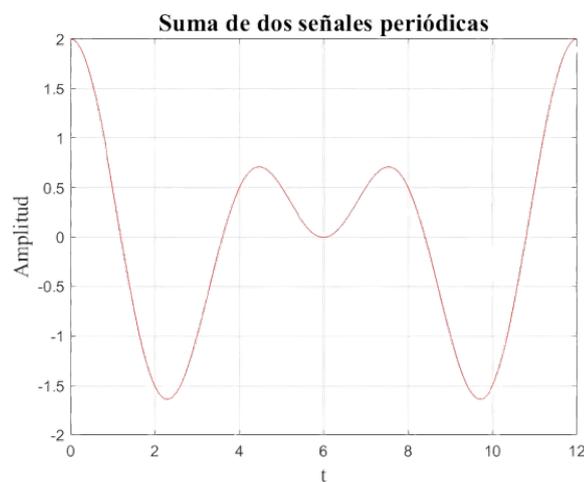


Figura 34: Suma de dos señales periódicas.

Nota El *periodo fundamental* T_0 de una señal $x(t)$ es el valor positivo más pequeño de T . Una

señal $x(t)$ que no cumple con ser periódica se define como una señal *aperiódica*.

Ejemplo 3.12 Señal periódica

Consideremos la siguiente señal periódica $x(t)$:

$$x(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right)$$

Como primer paso calcularemos el *periodo fundamental* de la señal $x(t)$, seguido graficaremos la señal con período con duración de 4 ciclos. El siguiente **Código 5.13** presenta la sintaxis para calcular el *periodo fundamental*, y con este dato grafica la señal en 4 ciclos como se observa en la **Figura 35**.

Código 5.13

Código

```

1 T=6*pi;
2 m0=1;
3 t=0:0.1:m0*T;
4 y=cos(t/3);
5 plot(t,y,'r','DisplayName','Señal original')
6 grid on;
7 hold on;
8 m1=2;t1=m0*T:0.1:m1*T;y1=cos(t1/3);
9 plot(t1,y1,'b','DisplayName','Señal 2do periodo')
10 m2=3;t2=m1*T:0.1:m2*T;y2=cos(t2/3);
11 plot(t2,y2,'g','DisplayName','Señal 3er periodo')
12 m3=4;t3=m2*T:0.1:m3*T;y3=cos(t3/3);
13 plot(t3,y3,'k','DisplayName','Señal 4to periodo')
14 xlabel('t','FontName','Times','FontSize',14);
15 ylabel('Amplitud','FontName','Times','FontSize',14);
16 title('Señal 4*T','FontName','Times','FontSize',16);

```

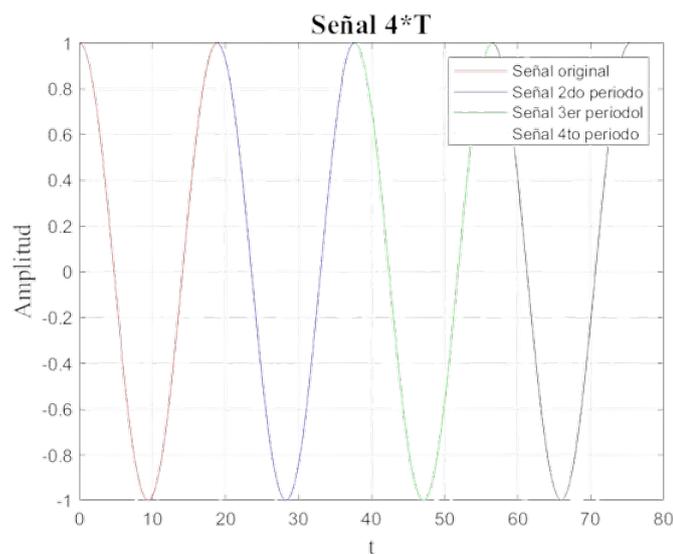


Figura 35: Ejemplo de una señal periódica.

3.1.7. Señales pares e impares

Una señal periódica puede clasificarse como una señal *par* o *impar*. Esta característica está relacionada directamente con la simetría que presentan las señales en función con la inversión de tiempo t .

■ Señales par.

Una señal periódica $x(t)$ se clasifica como una *señal par* si ésta es idéntica a su contraparte invertida en el tiempo t , es decir, de forma visual debe cumplir que su reflejo sea respecto del origen (Oppenheim et al., 1998). Gráficamente podemos observar esta definición en la **Figura 36**

$$x(t) = x(-t)$$

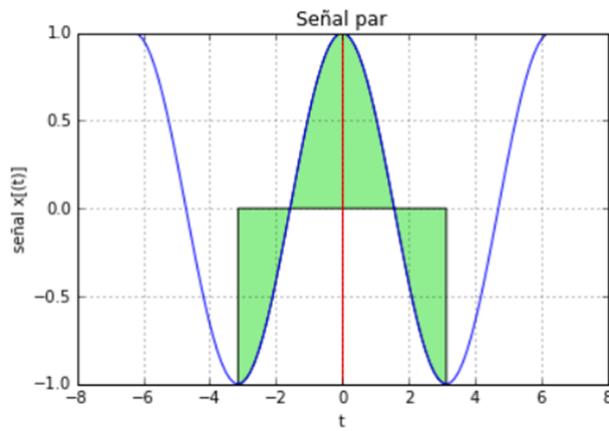


Figura 36: Señal par.

■ Señales impar.

Una señal periódica $x(t)$ se clasifica como una *señal impar* si al ser evaluada en $t = 0$ el valor de la función también es 0, también debe cumplir la condición $x(t) = -x(-t)$ para todos los valores de t (Oppenheim et al., 1998). Gráficamente podemos observar esta definición en la **Figura 37**

$$x(t) = -x(-t)$$

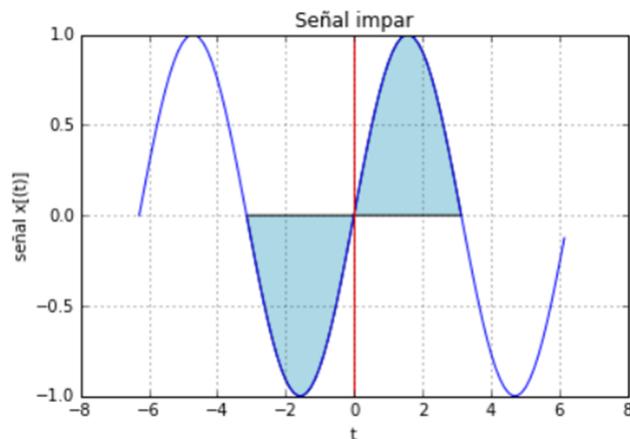


Figura 37: Señal impar.

Algo importante que se debe mencionar es que *cualquier señal* se puede descomponer en la suma de dos señales, una de estas señales será la que corresponde a una *señal par* y la otra la que corresponde a una *señal impar*.

Parte PAR

$$x(t)_{PAR} = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

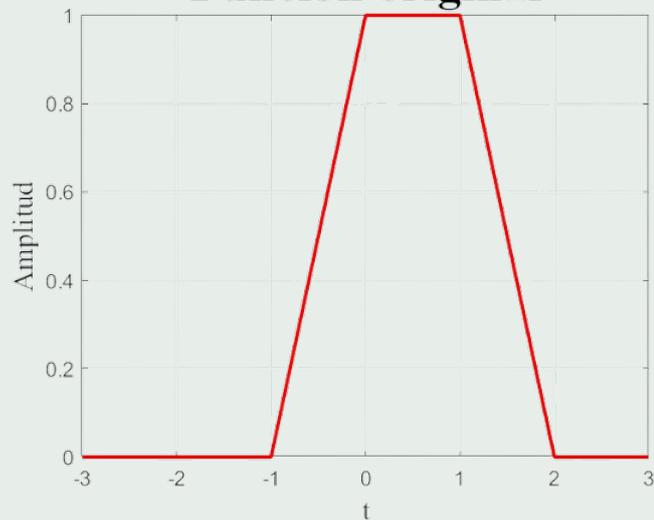
Parte IMPAR

$$x(t)_{IMPAR} = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

Ejemplo 3.13 Señales pares e impares

Consideremos una señal $x(t)$, de la cual se debe obtener su parte par y su parte impar. Posterior se debe realizar la comprobación mediante un código de que la suma de $x(t)_{PAR}$ y $x(t)_{IMPAR}$ resulta la señal original.

Función original



La señal $x(t)$ se genera con el siguiente **Código 5.14**:

Código 5.14.

```

1 function x = PAR(t)
2 n = length(t);
3 x = zeros(1,n);
4 i = find(t < -3);
5 x(i) = 0; %1
6 i = find(t > -3);
7 x(i) = 0; %2
8 i = find(t > -1);
9 x(i) = t(i)+1 ; %3
10 i = find(t > 0 );
11 x(i) = 1 ; %4
12 i = find(t > 1 );
13 x(i) = (-t(i)+2) ; %5
14 i = find(t > 2 );
15 x(i) = 0; %6
16 return ;

```

Código

Una vez que se genera la señal, se utiliza el siguiente **Código 5.15** para contestar el ejemplo.

Código 5.15.

```
1 %% Senales Pares e Impares
2 t=-3:0.1:3;
3 x=PAR(t);
4 subplot(2,3,1);
5 plot(t,x,'r','LineWidth',2);
6 xlabel('t','FontName','Times','FontSize',14);
7 ylabel('Amplitud','FontName','Times','FontSize',
8       14);
9 grid on;
10 hold on;
11 title('Func. original','FontName','Times','
12       FontSize',24);
13 xp1=0.5*PAR(t);
14 subplot(2,3,2);
15 plot(t,xp1,'c','LineWidth',1.5);
16 xlabel('t','FontName','Times','FontSize',14);
17 ylabel('Amplitud','FontName','Times','FontSize',
18       14);
19 grid on;
20 hold on;
21 title('Senal 0.5x(t)','FontName','Times','
22       FontSize',24);
23 tt=-t;
24 xp2=0.5*PAR(tt);
25 subplot(2,3,3);
26 plot(t,xp2,'g','LineWidth',1.5);
27 xlabel('t','FontName','Times','FontSize',14);
28 ylabel('Amplitud','FontName','Times','FontSize',
29       14);
30 grid on;
31 hold on;
32 title('Senal 0.5x(-t)','FontName','Times','
33       FontSize',24);
34 xp=xp1+xp2;
35 subplot(2,3,4);
36 plot(t,xp,'b','LineWidth',4);
37 xlabel('t','FontName','Times','FontSize',14);
38 ylabel('Amplitud','FontName','Times','FontSize',
39       14);
40 grid on;
41 hold on;
42 title('Senal Par','FontName','Times','FontSize',
43       24);
44 xi=xp1-xp2;
45 subplot(2,3,5);
46 plot(t,xi,'m','LineWidth',4);
47 xlabel('t','FontName','Times','FontSize',14);
48 ylabel('Amplitud','FontName','Times','FontSize',
49       14);
50 grid on;
51 hold on;
52 title('Senal Impar','FontName','Times','FontSize',
53       24);
54 %% Senal original
55 X_original=xp+xi;
56 subplot(2,3,6);
57 plot(t,X_original,'k','LineWidth',4);
58 xlabel('t','FontName','Times','FontSize',14);
59 ylabel('Amplitud','FontName','Times','FontSize',
60       14);
61 grid on;
62 hold on;
63 title('Func. original','FontName','Times','
64       FontSize',24);
```

Código

Las gráficas que se desprenden de correr el código anterior son las presentadas en la **Figura 38**. ■

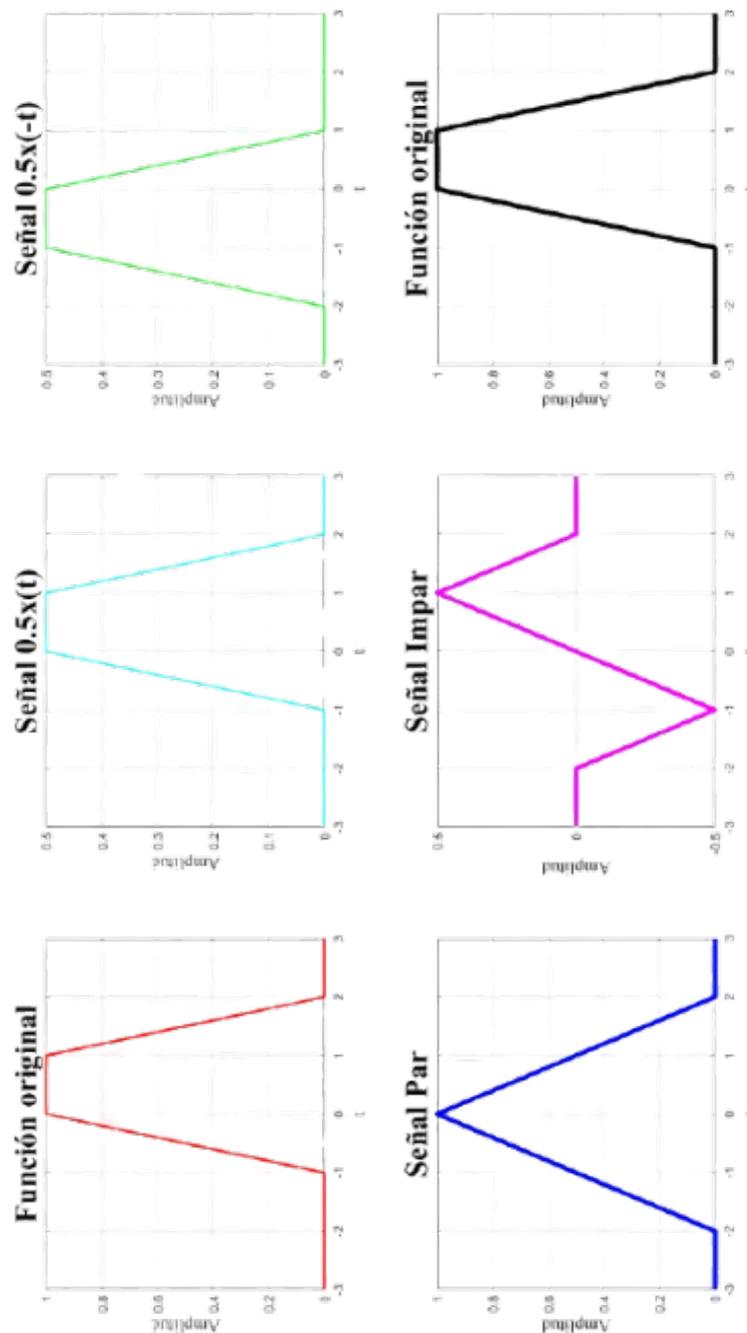


Figura 38: Parte par y parte impar de la señal $x(t)$, así como la comprobación de que la suma de $x(t)_{PAR}$ y $x(t)_{IMPAR}$ resulta la señal original.

3.2. Teorema de Muestreo

Uno de los procesos de digitalización de una señal es el muestreo, el *teorema de muestreo* de una señal establece que, una señal analógica que está limitada en su banda con una frecuencia fundamental f_0 , puede ser muestreada (discretizar la señal en tiempo) sin que exista pérdida de su información siempre y cuando la frecuencia para muestrear f_s sea superior que la relación de $2f_0$. Entonces, estas muestras determinan únicamente a la señal, y esta puede ser reconstruida sin distorsión y sin error a partir de dichas muestras, (Proakis, Salehi, Zhou, & Li, 1994).

Ejemplo 3.14 Diseño de una función de MATLAB que dibuje la señal analógica, el tren de impulso y la señal muestreada.

Existen varios tipos de muestreo, el más común es el *muestreo ideal*, el cual consiste en multiplicar la señal analógica por un tren de impulsos de amplitud unitaria, y período $t_s = 1/f_s$, es decir, tiempo de muestreo. Al realizar esta multiplicación obtenemos a la salida solo muestras de nuestra señal en cada t_s segundos, este proceso se muestra en la **Figura 39**.

Diseñar una función de MATLAB que dibuje la señal analógica, el tren de impulso y la señal muestreada, cumpliendo el teorema de muestreo.

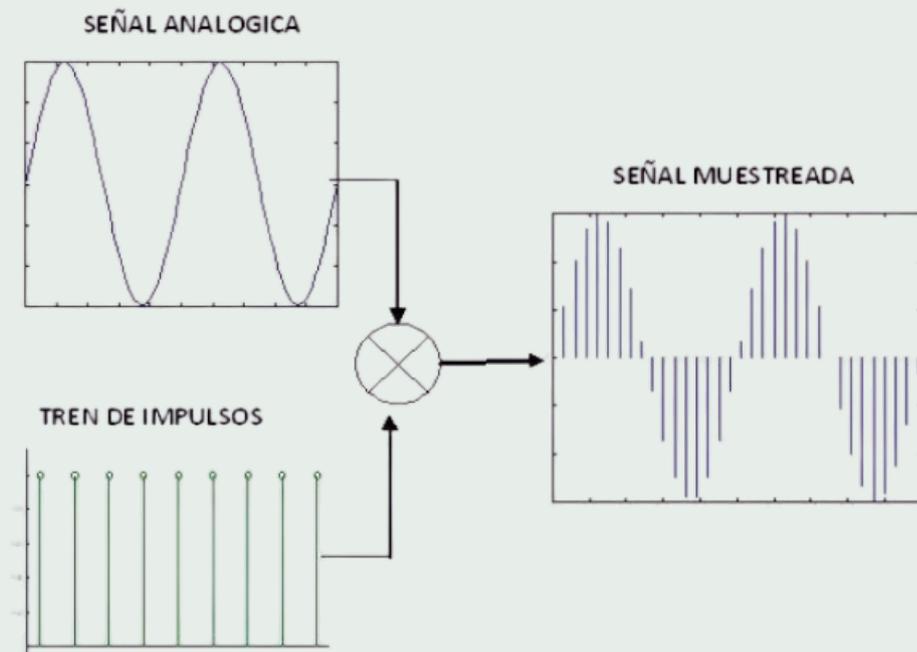


Figura 39: Muestreo Ideal.

Código 5.16.

```
1 fo=2;
2 fs=30;
3 A=3;
4 t=0:0.01:1;
5 y=A*sin(2*pi*fo*t);
6 plot(t,y)
7 xlabel('t')
8 ylabel('f(t)')
9 title('Senal Analogica')
10 grid on
11 figure(2)
12 for ts=0:(1/fs):1
13 aux1=[ts ts];
14 aux2=[0 1];
15 plot(aux1,aux2,'k')
16 hold on
17 end
18 xlabel('ts')
19 ylabel('Amplitud')
20 title('Tren de Impulsos')
21 grid on
22 axis([-0.2 1.2 -0.2 1.2])
23 figure(3)
24 for ts=0:(1/fs):1
25 aux3=[ts ts];
26 f=A*sin(2*pi*fo*ts);
27 aux4=[0 f];
28 plot(aux3,aux4,'k')
29 hold on
30 xlabel('ts')
31 ylabel('f(ts)')
32 title('Senal Muestreada')
33 grid on
34 xlabel('ts')
35 ylabel('f(ts)')
36 title('Señal Muestreada')
37 grid on
```

Código

El código 5.16 produce las gráficas de la **Figura 40**, **Figura 41** y **Figura 42**.

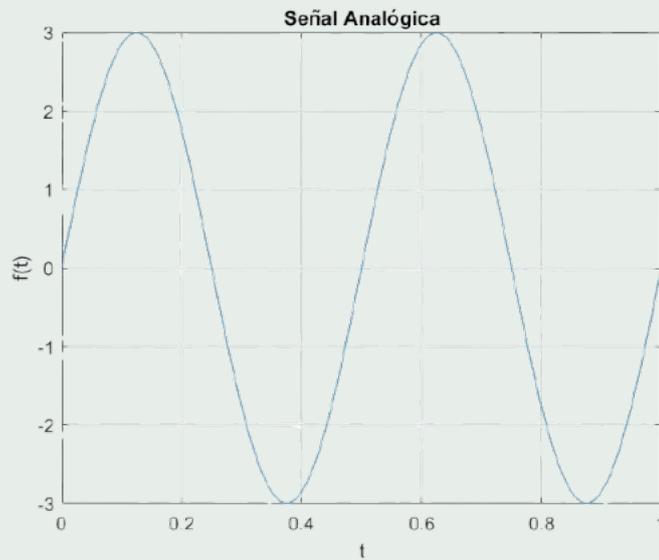


Figura 40: Señal analógica.

Se observa en el código que la señal muestreada solo tiene valores cada t_s segundos, también se observa que se utilizan variables auxiliares nombradas como *aux1*, *aux2*, *aux3* y *aux4*, las cuales se utilizan para la gráfica de los impulsos, esto se puede omitir utilizando el comando `stem` que nos sirve para la gráfica de secuencias discretas, dado que el muestreo es la discretización de la señal en el tiempo. Esto se muestra en el código 5.17, y el cual produce las gráficas de la Figura 43, 44 y 45.

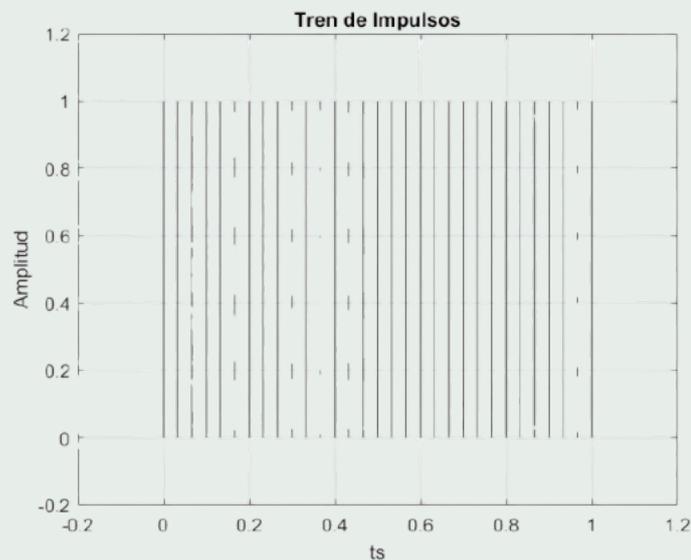


Figura 41: Tren de impulsos.

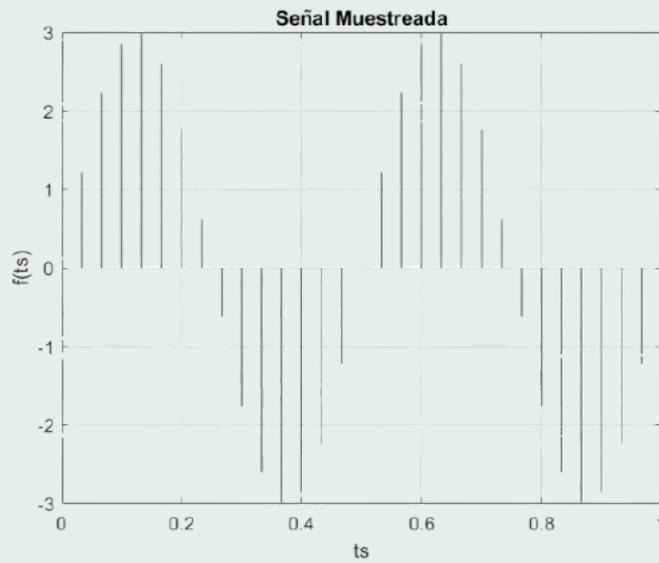


Figura 42: Señal muestreada.

Código 5.17

```

1 fo=2;
2 fs=30;
3 A=3;
4 t=0:0.01:1;
5 y=A*sin(2*pi*fo*t);
6 plot(t,y)
7 xlabel('t')
8 ylabel('f(t)')
9 title('Senal Analogica')
10 grid on
11 figure(2)
12 ts=0:(1/fs):1;
13 n=length(ts);
14 tren=ones(n);
15 stem(ts,tren,'k')
16 xlabel('ts')
17 ylabel('Amplitud')
18 title('Tren de Impulsos')
19 grid on
20 axis([-0.2 1.2 -0.2 1.2])
21 figure(3)
22 ts=0:(1/fs):1;
23 f=A*sin(2*pi*fo*ts);
24 stem(ts,f,'k')
25 xlabel('ts')
26 ylabel('f(ts)')
27 title('Senal Muestreada')
28 grid on
    
```

Código

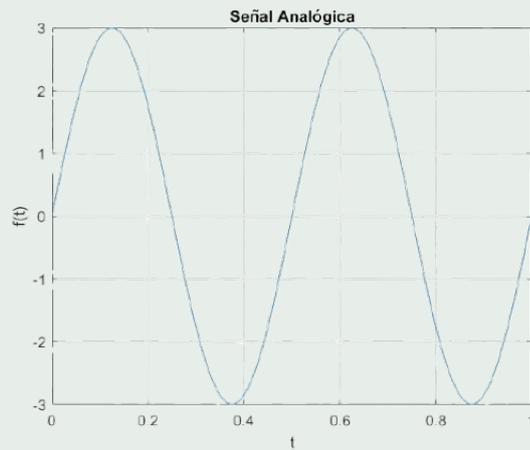


Figura 43: Señal Analógica.

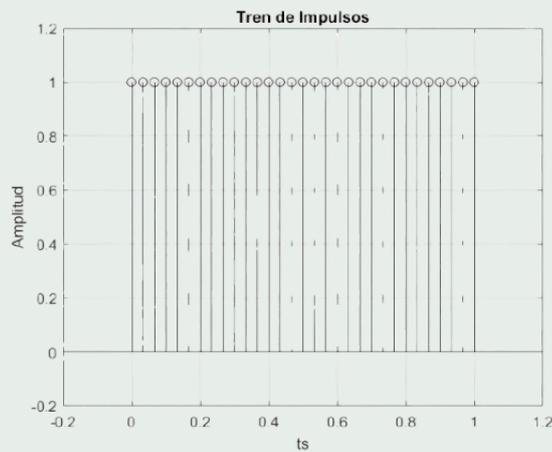


Figura 44: Tren de Impulsos.

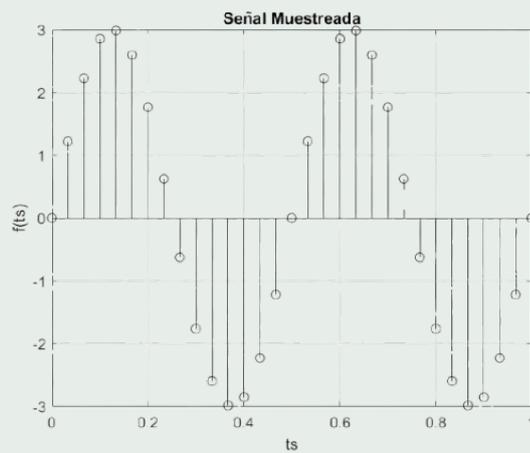


Figura 45: Señal Muestreada.



3.3. Cuantización

Una vez obtenida la señal muestreada, el siguiente proceso para digitalizar la señal es hacer que la señal tome valores de amplitudes de un conjunto finito de valores, a este proceso se le conoce como cuantización (Haykin, 2002.).

Ejemplo 3.15 Escribir un código que dibuje una señal cuantificada

Para este ejemplo, podemos utilizar la señal muestreada obtenida anteriormente, y utilizar el comando `stairs` para unir los puntos. El código 5.18 produce las gráficas de la Figura 46.

Código 5.18.

```
1 fo=2; % Frecuencia de la se al
2 fs=30; % Frecuencia de muestreo
3 A=3; % Amplitud de la se al
4 ts=0:(1/fs):1; % Tiempo de Muestreo
5 f=A*sin(2*pi*fo*ts);
6 stairs(ts,f)
7 xlabel('ts')
8 ylabel('f(ts)')
9 title('Se al Cuantificada')
10 grid on
```

Código

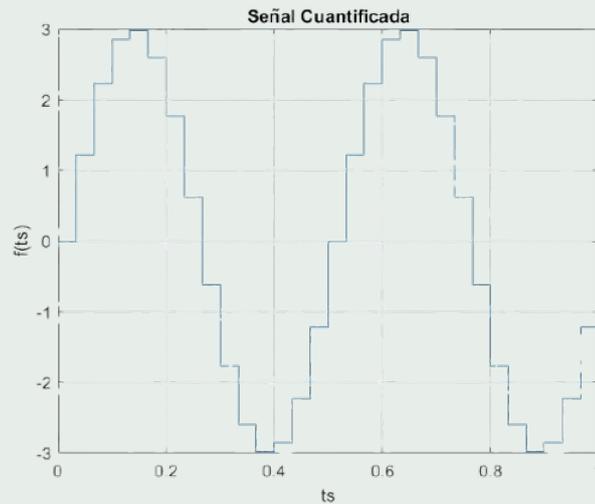


Figura 46: Cuantización.

3.4. Conversión Analógica a Digital (PCM)

El código 5.19 convierte una señal analógica de N componentes a una señal digital de B bits, es decir, muestrea, cuantiza (con L niveles de cuantización, con $L = 2^B$) y codifica la señal para producir una *señal PCM*. Al ingresar los parámetros de la Figura 47, el programa genera las gráficas de la Figura 48 y 49, así como los resultados presentados en la Figura 50.

```
Command Window
Ingrese la frecuencia de muestreo: 50
Ingrese el numero de componentes: 1
Ingrese el numero de bites: 4
Ingrese la frecuencia de la componente: 6
Ingrese la amplitud de la componente: 3
Ingrese el tipo de la componente, 1=coseno, 2=seno,: 2
```

Figura 47: Parámetros .

Código 5.19

```
1 fs=input('Ingrese la frecuencia de muestreo: ');
2 ts=1/fs;
3 N=input('Ingrese el numero de componentes: ');
4 t=ts/10:ts/10:1;
5 suma=0;
6 B=input('Ingrese el numero de bits de cada nivel: ');
7 for k=1:N
8     f=input('Ingrese la frecuencia de la componente: ');
9     ;
10    A=input('Ingrese la amplitud de la componente: ');
11    ti=input('Ingrese el tipo de la componente, 1=
12    coseno, 2=seno,: ');
13    if ti==1
14        y=A*cos(2*pi*f*t);
15    else
16        y=A*sin(2*pi*f*t);
17    end
18    suma=suma+y;
19 end
20 plot(t,suma,'k')
21 title('Senal Analogica')
22 maxsum=max(suma);
23 minsum=min(suma);
24 D=maxsum+(-1*(minsum));
25 L=2^B;
26 Delta=D/L;
27 Deltamed=[Delta/2];
28 Cuantificacion=[0];
29 Valor=[0];
30 b=1;
31 a=0;
32 figure(2)
33 for k2=ts/10:ts/10:N
34     if mod(k2,ts)==0
35         z(b)=suma(b);
36         a=a+1;
37         xy(a)=z(b);
38     else
39         z(b)=0;
40     end
41     aux1=[k2,k2];
42     aux2=[0,z(b)];
43     plot(aux1,aux2,'r')
44     hold on
45     b=b+1;
46 end
```

Código

Código

```

1 %% Cont...
2 cuant=[0];
3 aux=maxsum/(L/2);
4 for c=1:L
5     if c==1
6         cuant(c)=maxsum-(aux/2);
7     else
8         cuant(c)=cuant(c-1)-aux;
9     end
10 end
11 k3=L-1;
12 for k4=1:L/2
13     for k5=1:length(xy)
14         ls=cuant(k4)+aux/2;
15         li=cuant(k4)-aux/2;
16         if xy(k5)<=ls && xy(k5)>=li
17             Cuantificacion(k5,:)=[k3];
18         end
19     end
20     k3=k3-1;
21 end
22 k6=0;
23 for k7=L/2+1:L
24     for k8=1:length(xy)
25         ls=cuant(k7)+aux/2;
26         li=cuant(k7)-aux/2;
27         if xy(k8)<=ls && xy(k8)>=li
28             Cuantificacion(k8,:)=[k6];
29         end
30     end
31     k6=k6+1;
32 end
33 Muestreo=transpose(xy);
34 Niveles=transpose(Cuantificacion);
35 Codificacion=dec2bin(Niveles,B);
36 T = table(Muestreo,Cuantificacion,Codificacion)

```

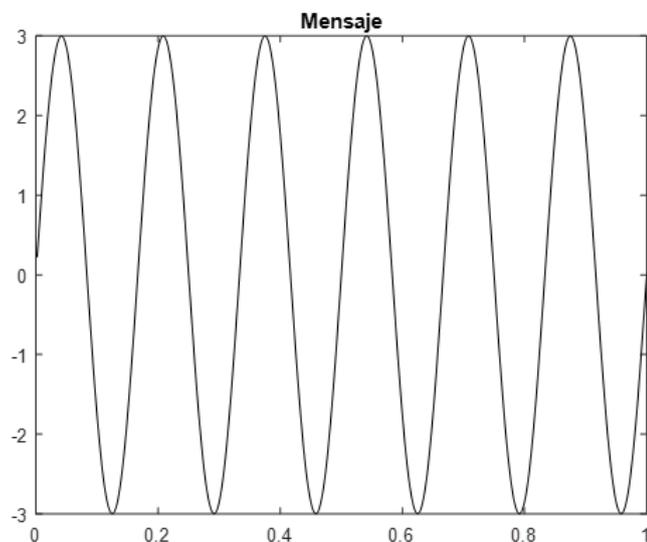


Figura 48: Señal analógica.

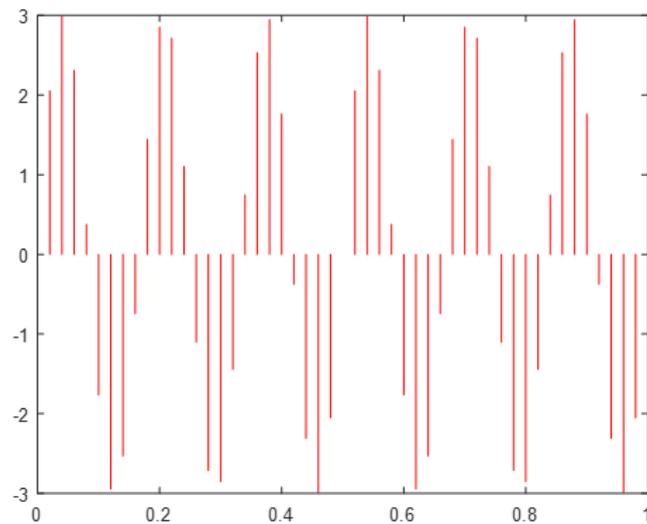


Figura 49: Señal muestreada.

Muestreo	Cuantificacion	Codificacion
2.0536	13	1101
2.9941	15	1111
2.3115	14	1110
0.376	9	1001
-1.7634	4	0100
-2.9469	7	0111
-2.533	6	0110
-0.74607	1	0001
1.4453	11	1011
2.8532	15	1111
2.7145	15	1111
1.1044	10	1010
-1.1044	2	0010
-2.7145	7	0111
-2.8532	7	0111
-1.4453	3	0011
0.74607	9	1001

Figura 50: Tabla de resultados.

3.5. Modulación AM y FM

La modulación es el proceso de modificar una o más propiedades de una señal llamada portadora, de mayor frecuencia que la señal de mensaje, para transmitir información. Básicamente, se trata de adaptar la señal de mensaje a la señal portadora, logrando una transmisión eficiente a través de un medio. Dos de las modulación analógicas mas utilizadas son:

Modulación por Amplitud (AM): La amplitud de la señal portadora cambia dependiendo de la señal de mensaje.

Modulación por Frecuencia (FM): La frecuencia de la señal portadora cambia según la señal de mensaje.

El siguiente **código 5.20** calcula y dibuja las señales moduladas en amplitud y en frecuencia, así como produce las gráficas de la **Figura 51, 52 y 53**.

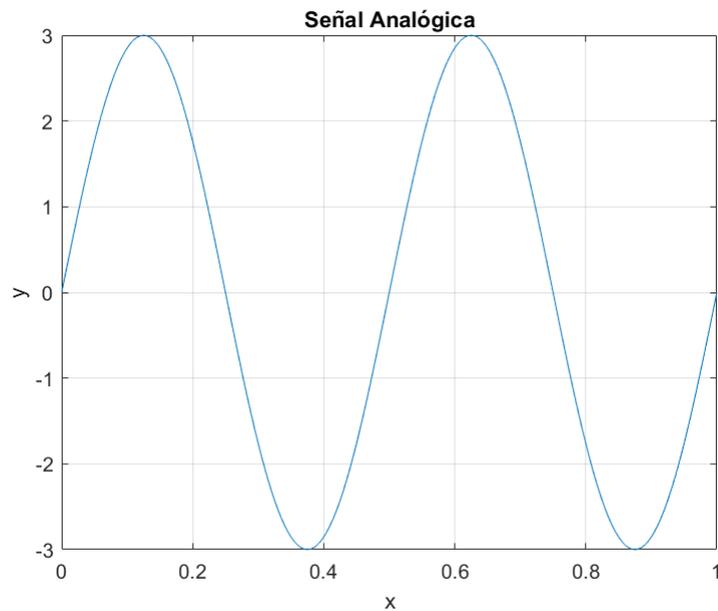
Código

Código 5.20

```

1 fo=2; A=3; t=0:0.005:1; f=A*sin(2*pi*fo*t);
2 am=ammod(f,fo,4); fm=fmmod(f,fo,50,1);
3 plot(t,f) grid on;
4 xlabel('x') ylabel('y')
5 title('Señal Analógica')
6 figure(2)
7 plot(t,am)
8 xlabel('x') ylabel('y') title('Señal AM')
9 figure(3)
10 plot(t,fm)
11 xlabel('x') ylabel('y') title('Señal FM')

```

**Figura 51:** Señal Analógica.

Se utiliza el comando `ammod`, el cual tiene como parámetros de entrada la señal, la frecuencia (f) de la señal y la frecuencia de la portadora. Si se desea saber más sobre este comando, en la ventana de comandos escriba `help ammod`, de la misma manera para `fmmod`.

3.6. Densidad Espectral de Potencia

El siguiente **código 5.21** muestra la densidad espectral de potencia para una señal modulada en amplitud (AM), haciendo uso de la transformada de Fourier. Se consideran varios esquemas de la modulación en amplitud:

- Modulación de Amplitud de Doble Banda Lateral con portadora Suprimida (AM-DSB-SC)
- Modulación de Amplitud de Doble Banda Lateral con portadora (AM-DSB-C)
- Modulación de Amplitud de Banda Lateral Única (AM-SSB)

Código 5.21

```

1 Am=input('Ingrese la amplitud del mensaje: ');
2 fm=input('Ingrese la frecuencia del mensaje: ');
3 Ac=input('Ingrese la amplitud de la portadora: ');
4 fc=input('Ingrese la frecuencia de la portadora:');
5 fs=input('Ingrese la frecuencia de muestreo: ');
6 m=input('Ingrese el indice de modulación: ');
7 t=0:1/fs:2;
8 x=Am*cos(2*pi*t*fm);
9 y=Ac*cos(2*pi*t*fc);
10 z=Ac*(1+m*x).*cos(2*pi*t*fc);
11 subplot(4,1,1)
12 plot(t,x)
13 grid on;
14 xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Amplitud'); title 'Mensaje
    ';
15 subplot(4,1,2)
16 plot(t,y)
17 grid on;
18 xlabel('Tiempo [s]');
19 ylabel('Amplitud');
20 title('Portadora');
21 subplot(4,1,3)
22 plot(t,z)
23 grid on;
24 xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Amplitud');
25 title('Modulacion AM de doble banda lateral con portadora
    ');
26 N = 10*length(t);
27 fnorm = fs.*(-N/2:(N/2)-1)/N;
28 subplot(4,1,4)
29 t_f=fft(z,N);
30 plot(fnorm,abs(t_f))
31 grid on;
32 xlabel('Frecuencia [Hz]'); ylabel('Amplitud');
33 title('Espectro AM doble banda lateral con portadora');
34 w=amdemod(z,fc,fs);
35 z2=x.*y;
36 figure(2)
37 subplot(4,1,1)
38 plot(t,x)
39 grid on;
40 xlabel('Tiempo [s]');
41 ylabel('Amplitud');
42 title 'Mensaje';
43 subplot(4,1,2)
44 plot(t,y)
45 grid on;
46 xlabel('Tiempo [s]');
47 ylabel('Amplitud');
48 title 'Portadora';
49 subplot(4,1,3)
50 plot(t,z2)
51 grid on;
52 xlabel('Tiempo [s]');
53 ylabel('Amplitud');
54 title('Modulacion AM de doble banda lateral con portadora
    suprimida');

```

Código

```

1  %% Cont...
2  subplot(4,1,4)
3  t_f=fft(z,N);
4  plot(fnorm,abs(t_f))
5  grid on;
6  xlabel ('Frecuencia [Hz]'); ylabel ('Amplitud');
7  title ('Espectro AM doble banda lateral con portadora');
8  w=amdemod(z,fc,fs);
9  z2=x.*y;
10 figure(2)
11 subplot(4,1,1)
12 plot(t,x)
13 grid on;
14 xlabel ('Tiempo [s]');
15 ylabel ('Amplitud');
16 title 'Mensaje';
17 subplot(4,1,2)
18 plot(t,y)
19 grid on;
20 xlabel ('Tiempo [s]');
21 ylabel ('Amplitud');
22 title 'Portadora';
23 subplot(4,1,3)
24 plot(t,z2)
25 grid on;
26 xlabel ('Tiempo [s]');
27 ylabel ('Amplitud');
28 title ('Modulacion AM de doble banda lateral con
        portadora suprimida');
29 subplot(4,1,4)
30 t_f2=fft(z2,N);
31 plot(fnorm,abs(t_f2))
32 grid on;
33 xlabel ('Frecuencia [Hz]');
34 ylabel ('Amplitud');
35 title ('Espectro AM doble banda lateral con portadora
        suprimida');
36 w2=amdemod(z2,fc,fs);
37 figure(3)
38 y3 = ssbmod(x,fc,fs);
39 x3 = ssbdemod(y3,fc,fs);
40 subplot(2,1,1);
41 plot(t,y3);
42 grid on;
43 xlabel ('Tiempo [s]');
44 ylabel ('Amplitud');
45 title ('Modulacion AM de banda lateral unica');
46 grid on;
47 xlabel ('Tiempo [s]');
48 ylabel ('Amplitud');
49 title ('Modulacion AM de banda lateral unica');
50 subplot(2,1,2)
51 t_f3=fft(y3,N);
52 plot(fnorm,abs(t_f3))
53 grid on;
54 xlabel ('Frecuencia [Hz]');
55 ylabel ('Amplitud');
56 title ('Espectro AM banda lateral unica');

```

Código

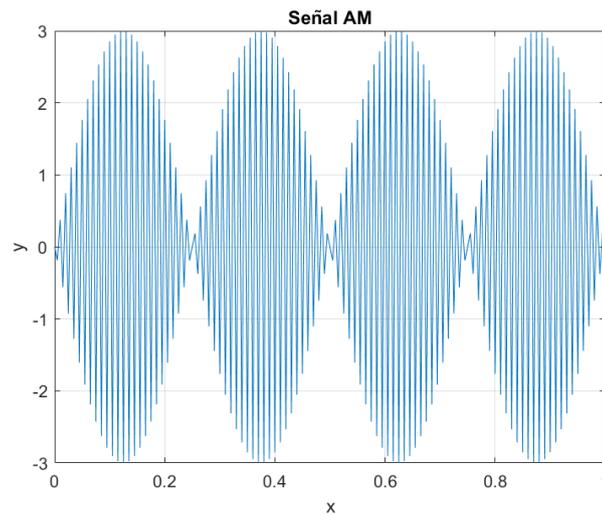


Figura 52: Modulación AM.

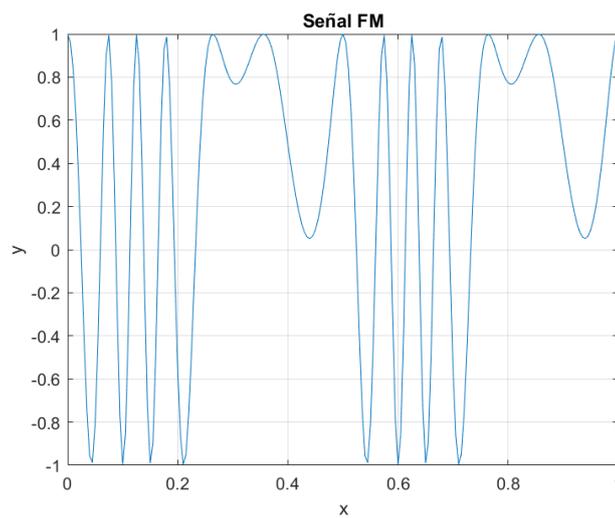


Figura 53: Modulación FM.

Utilizando los valores de entrada que se muestran en la **Figura 54**, el código produce las gráficas de la **Figura 55-57**.

```
Command Window
Ingrese la amplitud del mensaje: 5
Ingrese la frecuencia del mensaje: 8
Ingrese la amplitud de la portadora: 8
Ingrese la frecuencia de la portadora:70
Ingrese la frecuencia de muestreo: 1000
Ingrese el índice de modulación: 0.8
```

Figura 54: Valores de entrada del código 5.21.

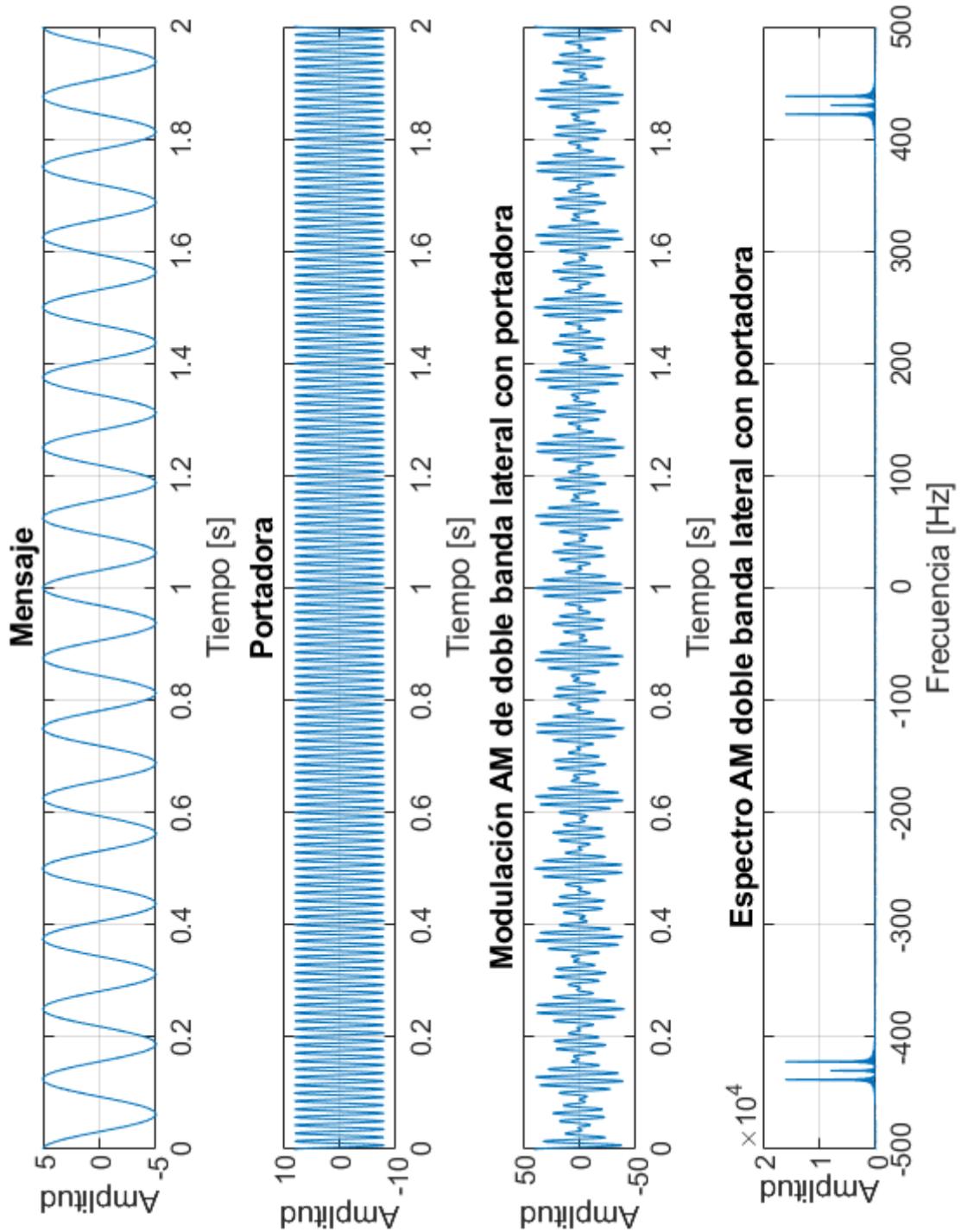


Figura 55: Modulación de Amplitud de Doble Banda Lateral con portadora.

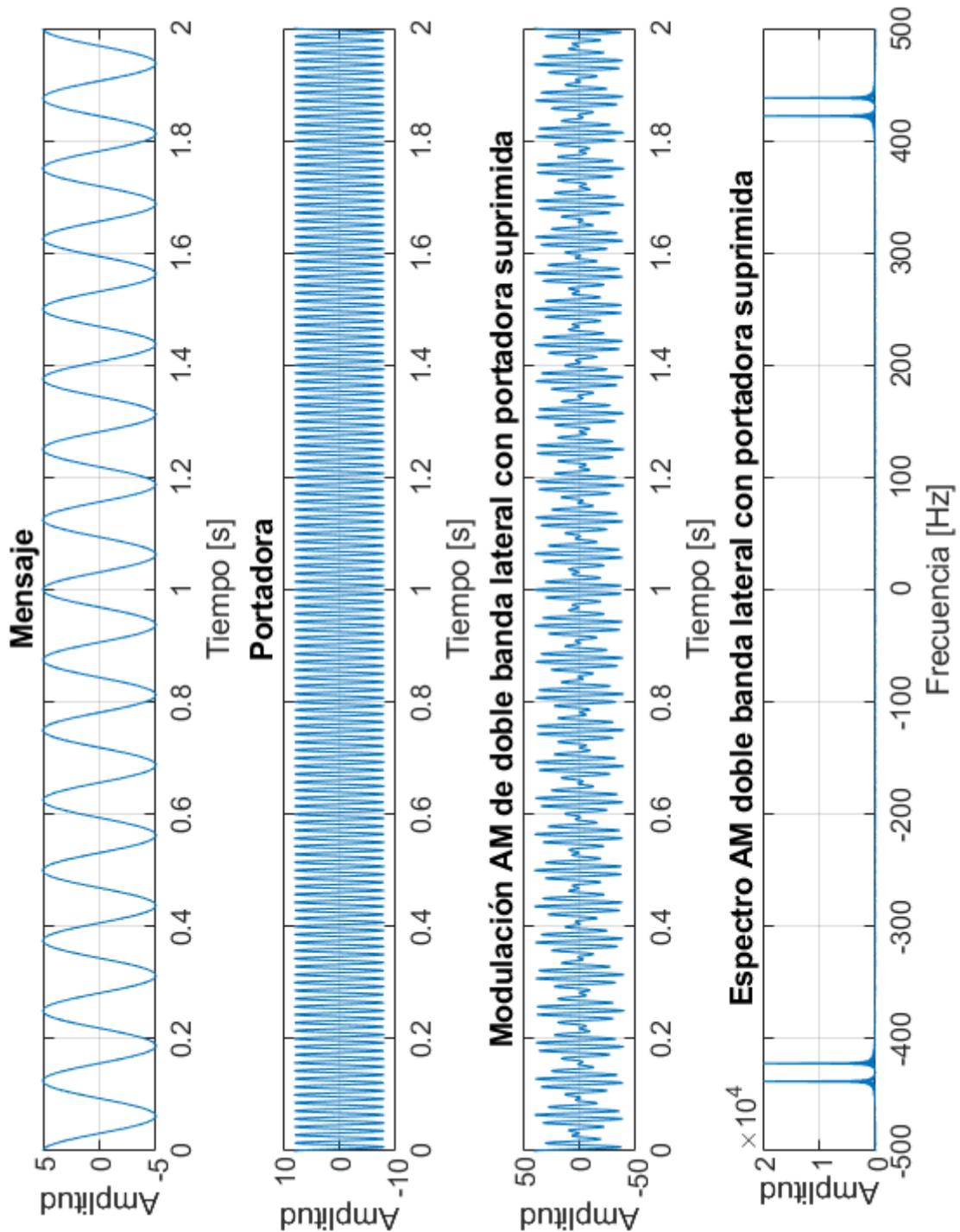


Figura 56: Modulación de Amplitud de Doble Banda Lateral con portadora Suprimida.

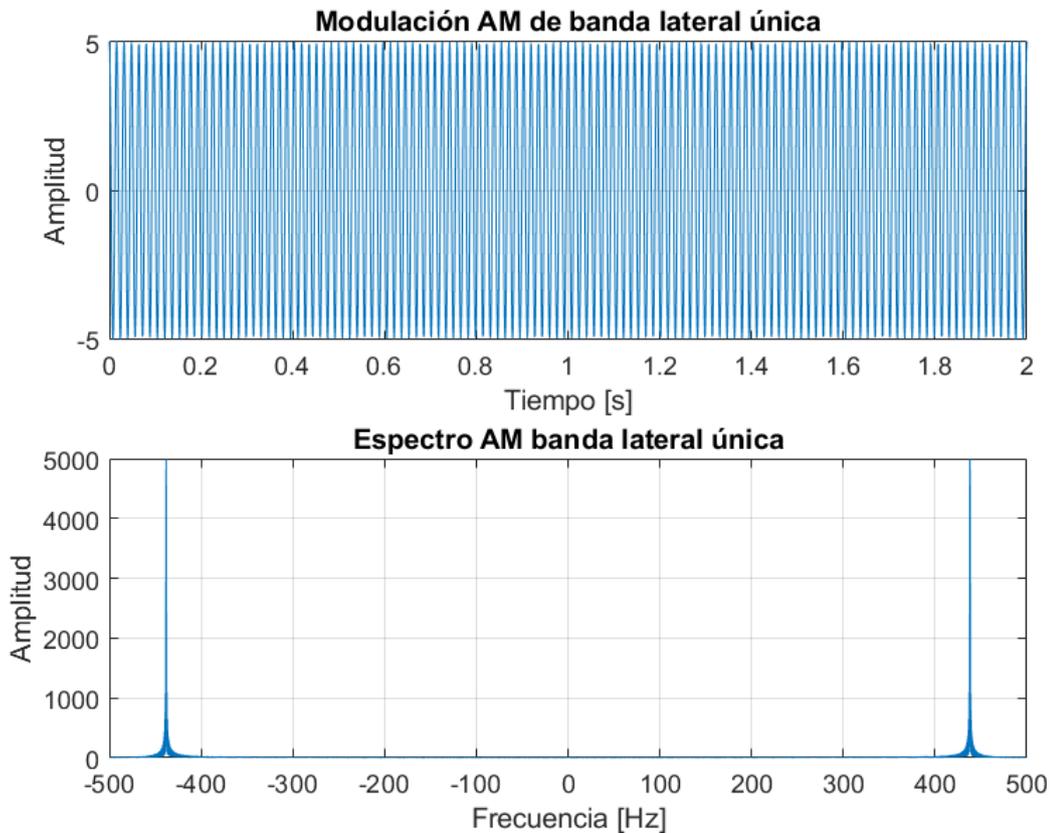


Figura 57: Modulación de Amplitud de Banda Lateral Única.

3.7. Código AMI

Las señales digitales son secuencias de pulsos de unos (1') y ceros (0'), aquí cada uno de los pulsos representa un elemento de la señal. Estos pulsos son representados por ceros (0') y unos (1'). Los *códigos de línea* surgen bajo la necesidad de tener que transmitir señales digitales a través de diversos medios de transmisión. En otras palabras, son una forma de representación de las secuencias de unos (1') y ceros (0') (Proakis et al., 1994).

El código de línea **AMI**, del acrónimo proveniente de *Alternate Mark Inversiones*, y que indica una inversión alternada, es decir, va alternando los valores en donde la secuencia vale 1, a un valor de amplitud positivo (+A) y un valor de amplitud negativo (-A), y los ceros quedan igual sin sufrir cambio alguno, esto se puede observar en la Figura 58.

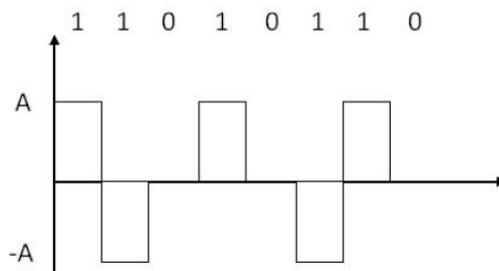


Figura 58: Código AMI.

El siguiente **código 5.22** convierte una secuencia a código AMI y produce la gráfica de la **Figura 59**, así como imprime las siguientes líneas:

La secuencia de entrada es:

1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1

La secuencia AMI es:

5 -5 0 0 5 0 -5 5 0 -5 5 0 0 -5

Código 5.22

```

1 else
2 aux(k)=0;
3 end
4 end
5 disp('La secuencia de entrada es: ')
6 disp(sec)
7 disp('La secuencia AMI es: ')
8 disp(aux)
9 t=0:n-1;
10 stairs(t,aux)
11 axis([-1 14 -6 6])
12 grid on
13 xlabel('Periodo') ylabel('Amplitud') title('Codigo AMI
    ')
14 A=5;
15 sec=[1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1];
16 b=0;
17 n=length(sec);
18 for k=1:n
19 if sec(k)==1
20 b=b+1;
21 if mod(b,2)==0
22 aux(k)=-A;
23 else
24 aux(k)=A;
25 end
    
```

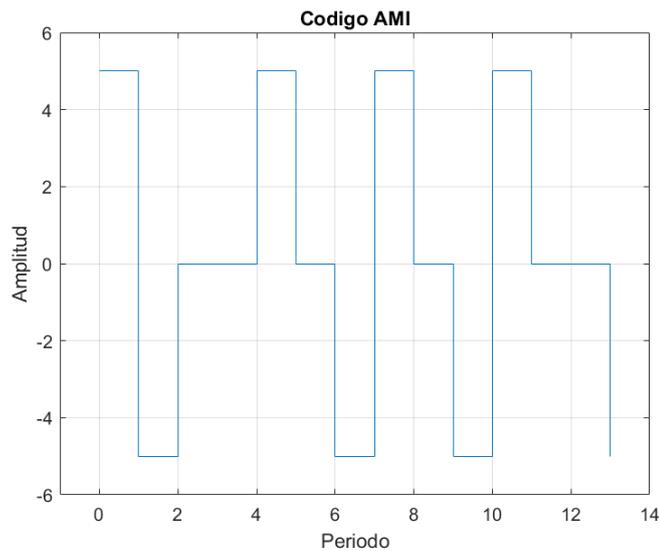


Figura 59: Código AMI.

4. Serie y Transformada de Fourier

4.1. Serie de Fourier

En la ingeniería, y en especial en las áreas de comunicaciones y electrónica, las *series de Fourier* se convierten en un tema relativamente importante y esencial, ya que son una herramienta matemática que nos ayudan en el análisis de señales periódicas. Como bien se dice, al ser una herramienta matemática, esta nos ayuda al análisis de diferentes señales a través de su descomposición en una suma infinita de funciones cosenoidales más simples. Antes de introducirnos directamente en el tema se recomienda que el alumnado estudie la representación de señales en términos de sus componentes de frecuencia.

4.1.1. Representación de señales en términos de sus componentes de frecuencia

Cuando comenzamos a trabajar con señales, uno de los conceptos fundamentales que se abordan es referente al *contenido de frecuencia* de una señal. La manera de generar el contenido de frecuencia para una gran cantidad de señales se puede lograr si dividimos la señal en sus componentes de frecuencia, las cuales están dadas por señales cosenoidales (**Oppenheim et al., 1998**).

Consideremos la siguiente señal $x(t)$, la cual es una señal continua en el tiempo (t) y definida por una suma finita de señales cosenoidales:

$$x(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t + \theta_n), \quad -\infty < t < \infty \quad (10)$$

De la **ecuación 10** definimos:

- N toma valores de enteros positivos.
- A_n representan las amplitudes de las funciones sinusoidales (las cuales asumimos como no negativas)
- ω_n representan las frecuencias (en rad/s) de las sinusoides
- θ_n representan las fases de las sinusoides.

Las frecuencias de la señal definida por la **ecuación 10** son ω_1 y sus componentes de frecuencia son las sinusoides $A_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$. La señal definida en la **ecuación 10** está caracterizada por tres parámetros principales, que son: las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$, las amplitudes A_1, A_2, \dots, A_N , y las fases $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$, (**Kamen & Heck, 2008**).

Como se mencionó anteriormente, la señal se puede caracterizar en función de los tres parámetros que la componen. Un caso particular, son las amplitudes A_1, A_2, \dots, A_N , definen los pesos relativos de cada componente en cada frecuencia de la señal. Estas amplitudes caracterizan la “*forma*” de la señal, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1 Suma de sinusoides

Considere la señal continua dada por

$$x(t) = A_1 \cos(t) + A_2 \cos(4t + \pi/3) + A_3 \cos(8t + \pi/2), \quad -\infty < t < \infty \quad (11)$$

Se puede observar que los parámetros de la señal son los siguientes; frecuencias de 1, 4, 8 rad/s, amplitudes A_1, A_2, A_3 , y fases $0, \pi/3, \pi/2$ rad. Queremos mostrar que la forma de la señal se define por las amplitudes A_1, A_2, A_3 .

Código 6.1.

```

1 t = 0:20/400:20;
2 w1 = 1; w2 = 4; w3 = 8;
3 A1 = input('Input the amplitude A1 for w1 = 1: ');
4 A2 = input('Input the amplitude A2 for w2 = 4: ');
5 A3 = input('Input the amplitude A3 for w3 = 8: ');
6 x = A1*cos(w1*t)+A2*cos(w2*t+pi/3)+A3*cos(w3*t+pi/2);

```



Para alcanzar el propósito antes descrito, utilizamos los comandos de **MATLAB** presentados en la página anterior para generar $x(t)$, para distintos valores de A_1, A_2 , y A_3 . Mediante los comandos generamos las gráficas **MATLAB** de $x(t)$ para los tres casos $A_1 = 0.5, A_2 = 1, A_3 = 0$; $A_1 = 1, A_2 = 0.5, A_3 = 0$; y $A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 0$. En la **Figura 60** se muestran los resultados. En los tres casos, sólo aparecen las componentes de frecuencia de 1 rad/s y 4 rad/s.

Primer caso: La componente de frecuencia 4 rad/s, se observa que sobresale en la **Figura 60(a)**, debido a que su amplitud es el doble en comparación con la componente de frecuencia 1 rad/s.

Segundo caso: caso contrario al caso 1, la componente dominante es la de frecuencia 1 rad/s, su amplitud es el doble en comparación con la componente de frecuencia 4 rad/s. Esto se muestra en la **Figura 60(b)**.

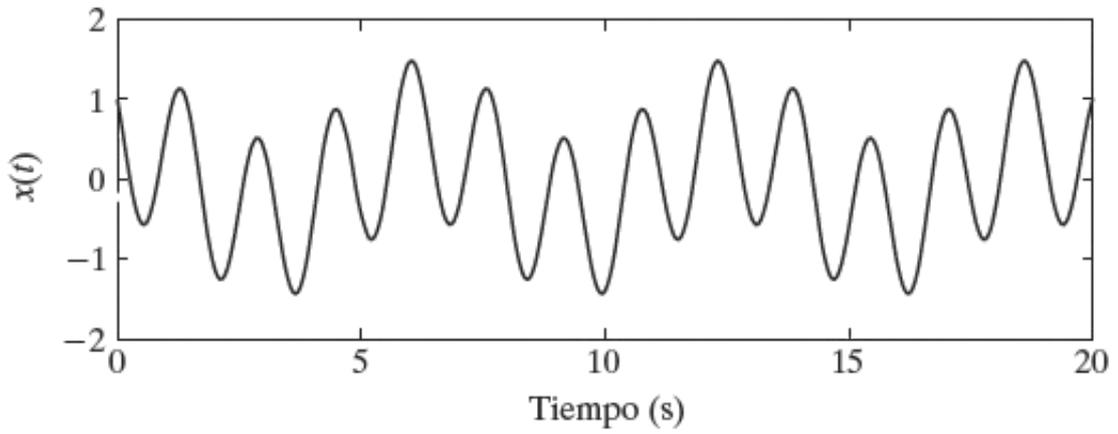
Tercer caso: No existe componente dominante, ambos tienen la misma amplitud, como se muestra en la **Figura 60(c)**.

Ejecutamos de nuevo el programa de **MATLAB** con los siguientes valores $A_1 = 0.5, A_2 = 1, A_3 = 0.5$; $A_1 = 1, A_2 = 0.5, A_3 = 0.5$; y $A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 1$. ■

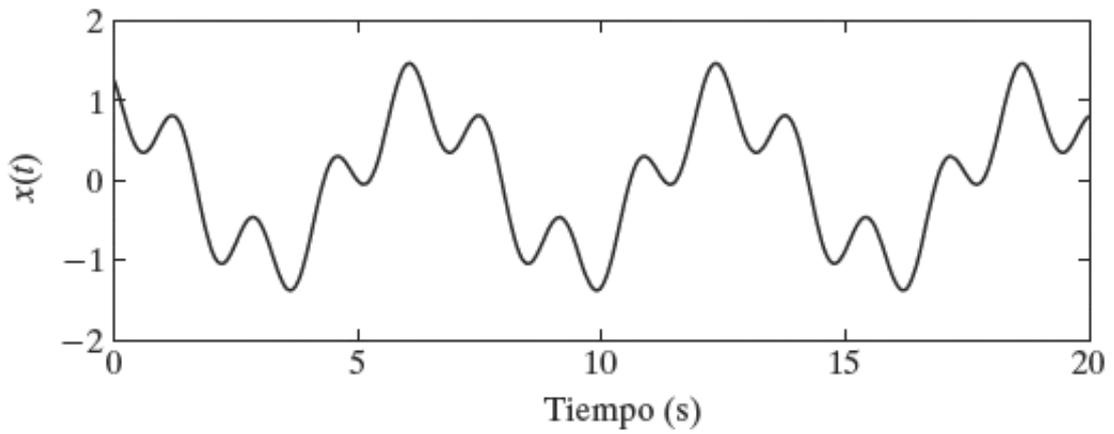
En los tres casos, están presentes todas las componentes. En el primer caso la componente dominante es la de 4 rad/s. En el segundo caso la componente dominante es la de 1 rad/s, y en el último caso todas las componentes tienen la misma amplitud. Estos casos se muestran en la **Figura 61**.

Considerando, nuevamente, la señal de la **ecuación 10**. Sea ω la *frecuencia variable*. Se puede graficar las amplitudes A_n vs ω . La señal $x(t)$ está definida para valores finitos de frecuencias, por lo tanto, la gráfica tendrá un número finito de valores en las frecuencias ω_n .

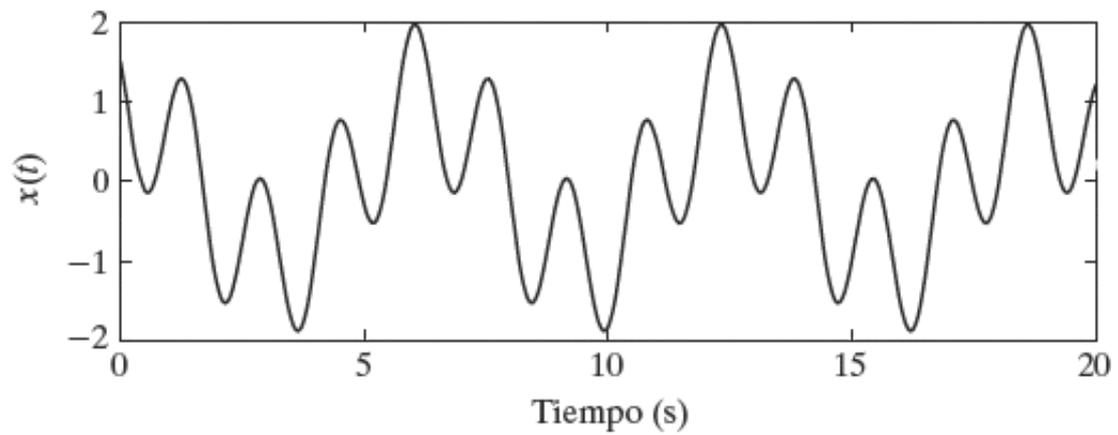
La gráfica que se muestra se conoce como *espectro de línea* o *espectro de amplitud* de la señal $x(t)$. El objetivo de este tipo de gráficas es mostrar las magnitudes relativas de todas las componentes de frecuencia que integran la señal. Como ejemplo, podemos considerar la señal del **ejemplo 4.1**.



(a)

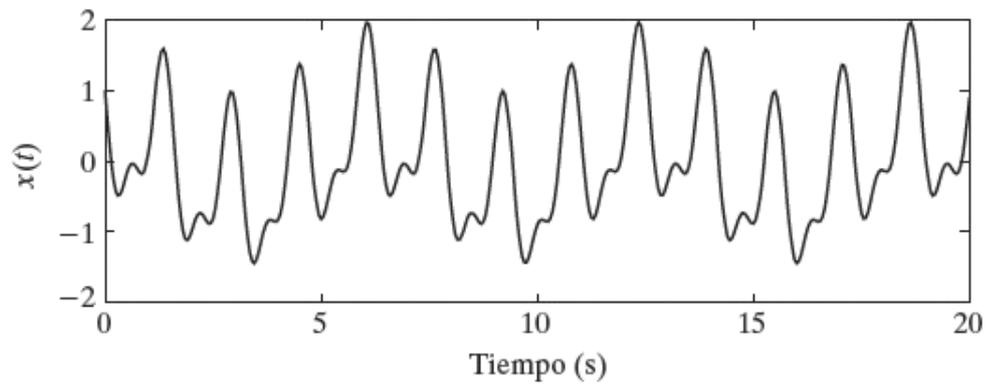


(b)

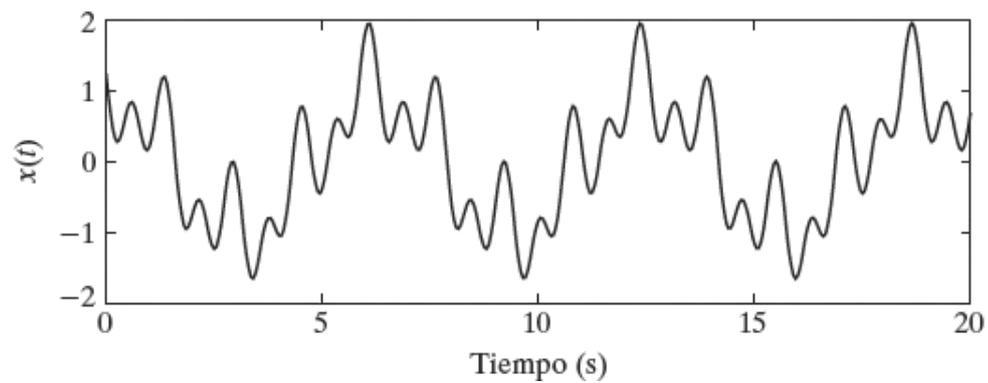


(c)

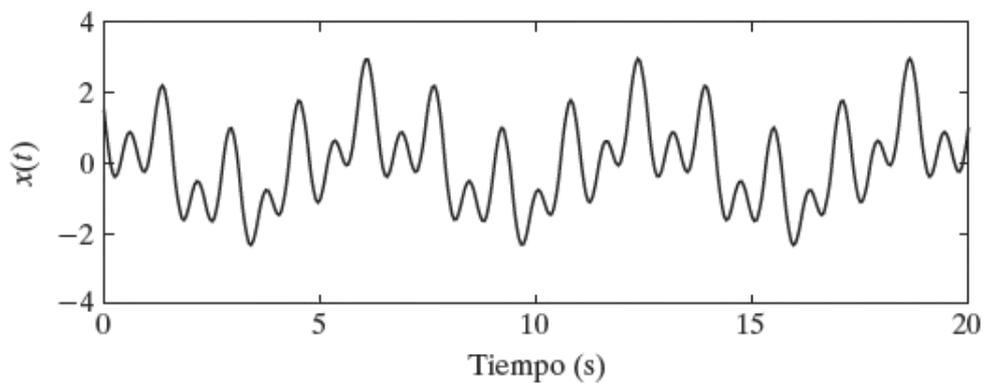
Figura 60: Gráficas de $x(t)$ para (a) $A_1 = 0.5$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0$; (b) $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $A_3 = 0$; y (c) $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0$.



(a)



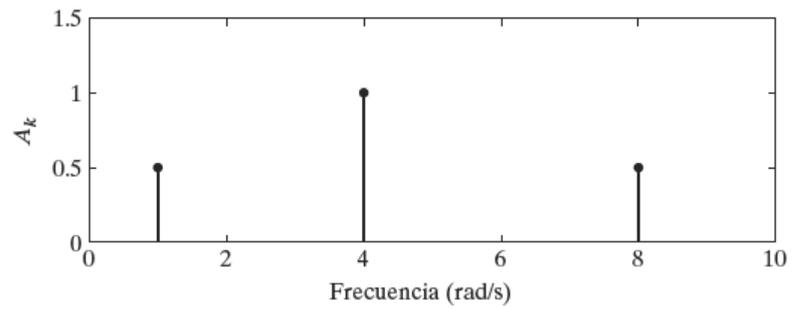
(b)



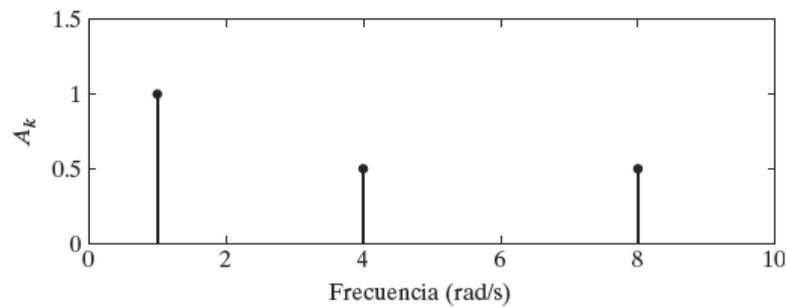
(c)

Figura 61: Gráficas de $x(t)$ para (a) $A_1 = 0.5$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0.5$; (b) $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $A_3 = 0.5$; y (c) $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 1$.

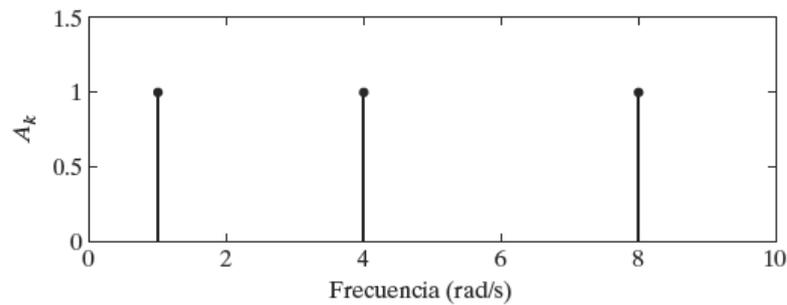
En la **Figura 62** se presenta el espectro de amplitud, de todas las versiones de la señal de la **Figura 61**. Existe una correspondencia entre la **Figura 62** y la **Figura 61**. La **ecuación 10** también contiene un *espectro de fase*, que consiste en graficar la fase θ_n vs la frecuencia ω . En la **Figura 63** se muestra un ejemplo de este tipo de espectro, para la **ecuación 11**.



(a)



(b)



(c)

Figura 62: Espectros de amplitud

4.1.2. Serie trigonométrica de Fourier

La serie de Fourier es una sucesión infinita que representa a una función o señal periódica, que también es continua por partes. Estas herramientas matemáticas, son la base fundamental para el análisis de Fourier, que sirven para estudiar las señales periódicas, mediante la desintegración de la señal en componentes de una suma infinita de funciones trigonométricas (senos y cosenos) (Oppenheim et al., 1998).

Una señal $x(t)$ es periódica si cumple con la ecuación **ecuación 12**. Donde T se conoce como periodo, y es número real positivo.

$$x(t + T) = x(t), \quad -\infty < t < \infty \tag{12}$$

El número más pequeño para el cual se cumple la **ecuación 12** se conoce como periodo funda-

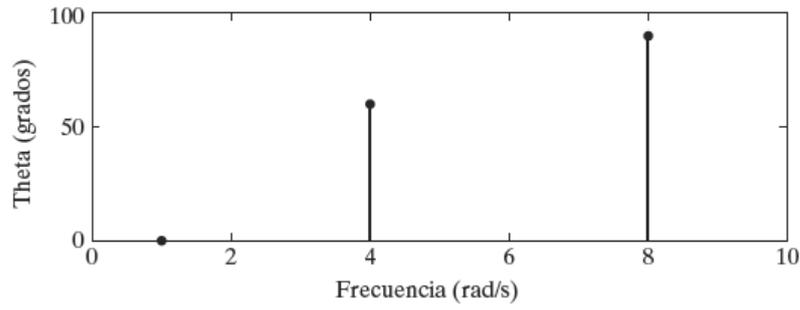


Figura 63: Espectro de fase de la señal $x(t)$ definida por ecuación 11.

mental T . En la **Figura 64** se muestra un ejemplo para $T = 2$, para un tren de pulsos.

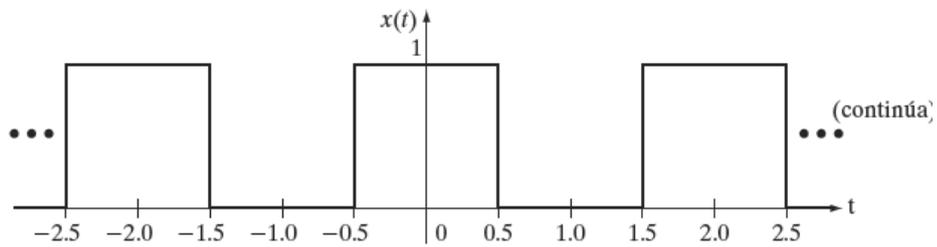


Figura 64: Señal periódica con periodo fundamental $T = 2$.

Si $x(t)$ es una señal periódica, se puede escribir como una suma de señales senoidales, como se muestra en la **ecuación 13**.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)], \quad -\infty < t < \infty \quad (13)$$

Donde a_0 , a_n y b_n se conocen como coeficientes, y ω_0 es la *frecuencia fundamental* (en rad/s) dada por $\omega_0 = 2\pi/T$.

Los coeficientes a_n y b_n se calculan como se muestran en las siguientes ecuaciones.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Los coeficientes a_n y b_n , se pueden integrar en cualquier periodo completo, como se muestra:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

El coeficiente a_0 representa la componente de cd de la señal, dada por:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (16)$$

La representación de la **ecuación 13** es conocida como *serie trigonométrica de Fourier*. Y a cada componente de la suma se conoce como armónicos. Observe que la frecuencia de cada componente de la suma son múltiplos de $n\omega_0$.

La serie trigonométrica de Fourier se puede mostrar como una *forma de cosenos con fase*

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \quad -\infty < t < \infty \quad (17)$$

donde

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

y

$$\theta_n = \begin{cases} \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right), & n = 1, 2, \dots, \text{cuando } a_n \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right), & n = 1, 2, \dots, \text{cuando } a_n < 0 \end{cases} \quad (19)$$

La **ecuación 17** puede ser un caso particular de la **ecuación 10**, considerando que la suma sea infinita ($N = \infty$) y agregando la componente cd de la señal, a_0 .

Es importante concluir que la serie de Fourier muestra que toda señal periódica, que cumple con las *condiciones de Dirichlet* (Moya, 2008), se puede escribir como una suma de señales sinusoides.

1. $x(t)$ es integrable en su totalidad en cualquier periodo; es decir,

$$\int_a^{a+T} |x(t)| dt < \infty \quad \text{para cualquier } a$$

2. En un periodo la señal $x(t)$, contiene un número finito de mínimos y máximos.
3. En un periodo la señal $x(t)$, sólo tiene un número finito de discontinuidades.

Ejemplo 4.2 Tren de pulsos rectangulares

Dada la señal mostrada en la **Figura 64**. Se observa que la señal es periódica con $T = 2$, en consecuencia, la frecuencia fundamental es $\omega_0 = 2\pi/2$ rad/s. Calculando los coeficientes de la serie:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{0.5} (1) dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 x(t) \cos(n\pi t) dt \\
 &= \int_0^{0.5} \cos(n\pi t) dt + \int_{1.5}^2 \cos(n\pi t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi n} \sin(n\pi t) \Big|_{t=0}^{t=0.5} + \frac{1}{\pi n} \sin(n\pi t) \Big|_{t=1.5}^{t=2} \\
 &= \frac{1}{\pi n} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi n} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2} + n\pi\right) \right] = \frac{1}{\pi n} \left[2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right], n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{2} \int_0^2 x(t) \sin(k\pi t) dt = \int_0^{0.5} \sin(k\pi t) dt + \int_{1.5}^2 \sin(k\pi t) dt \\
 &= -\frac{1}{\pi k} \cos(k\pi t) \Big|_{t=0}^{t=0.5} - \frac{1}{\pi k} \cos(k\pi t) \Big|_{t=1.5}^{t=2} = -\frac{1}{\pi k} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] = 0, k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Con estos resultados, se puede escribir la señal $x(t)$ mediante su representación en serie de Fourier, como sigue:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(k\pi t), \quad -\infty < t < \infty \quad (20)$$

El resultado anterior, se puede reescribir para casos impares, debido a que la componente $\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ es cero para valores pares, quedando como sigue:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k_{\text{impares}}}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(k\pi t), \quad -\infty < t < \infty \quad (21)$$

Simetría par o impar

Por definición, una señal $x(t)$ es una señal par si cumple con $x(t) = x(-t)$ para $-\infty < t < \infty$. Por otro lado, es una señal impar si cumple con $x(t) = -x(-t)$ para $-\infty < t < \infty$.

Sean $x(t)$ y $\nu(t)$ dos señales pares (o impares), se tiene que para cualquier constante $\eta > 0$, se cumple con:

$$\int_{-\eta}^{\eta} x(t)\nu(t)dt = 2 \int_0^{\eta} x(t)\nu(t)dt \quad (22)$$

Sea $x(t)$ una señal par y $\nu(t)$ una señal impar, se cumple con:

$$\int_{-\eta}^{\eta} x(t)\nu(t)dt = 0 \quad (23)$$

Por lo tanto, dado que $\cos(n\pi t)$ es par y $\sin(n\pi t)$ es impar, si la señal $x(t)$ es par, la **ecuación 14** y la **ecuación 15** se reducen a

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Por otro lado, si la señal $x(t)$ es impar, la **ecuación 14** y la **ecuación 15** se reducen a

$$a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Estas expresiones (**ecuación 24-27**), nos sirven para simplificar el cálculo de los coeficientes de las series de Fourier, según sea el caso, $x(t)$ par o impar. Para mostrar estas simplificaciones se muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3 Reducción por simetría

Considerando nuevamente la señal de la **Figura 64**. Se sabe que esta señal es par y, por lo que se pueden utilizar la **ecuación 24** y la **ecuación 25** para encontrar los coeficientes a_n y b_n de la serie de Fourier a_n y b_n .

- Primero, por simetría par de la señal $x(t)$, $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$
- Después, se calcula $a_n = 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{2} \int_0^1 x(t) \cos(n\pi t) dt = 2 \int_0^{0.5} \cos(n\pi t) dt \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi t) \Big|_{t=0}^{t=0.5} = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Los resultados coinciden con los encontrados en el ejemplo **4.2**, con esto se comprueba que usando la simetría se reduce el número de cálculos.

■

Ejemplo 4.4 Ejercicio de MATLAB de serie de Fourier

Consideremos la función:

$$f(t) = 1 - \frac{t}{2}; \text{ para } -2 \leq x \leq 2 \quad (28)$$

Resolviendo los coeficientes de Fourier, se tiene $b_n = 2/n\pi$, con $T = 4$. El **código 6.2** genera la gráfica para la suma de los primeros N componentes de la serie de Fourier.

Código 6.2.

```

1 x=-2:0.005:2;
2 suma=0;
3 N=50;
4 for n=1:N
5 b=2/(n*pi);
6 suma=suma+(b*sin(n*x*pi/2));
7 end
8 plot(x, suma)
9 grid on
10 xlabel('x')
11 ylabel('bn')
12 title('Serie de Fourier')
```

Código

La gráfica que produce el **código 6.2** se muestra en la **Figura 65**. ■

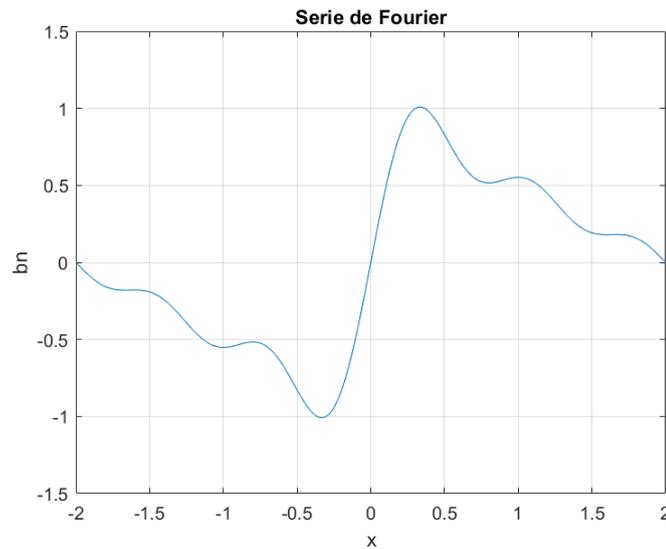


Figura 65: Serie de Fourier.

El fenómeno de Gibbs se genera por las discontinuidades que presenta la función, debido a que el resultado es una aproximación de la señal $x(t)$, dado que se toma para un valor finito de N . Gráficamente podemos observar este fenómeno en el **ejemplo 4.4**. Se presentan oscilaciones de la señal, el cual se puede reducir aumentando el número de elementos, por ejemplo para una valor de $N = 50$, se tiene el siguiente **código 6.3**, y el cual produce la gráfica de la **Figura 66**.

Ejemplo 4.5 Reducción de las oscilaciones en la señal del ejemplo 4.4

Código 6.3.

```

1 x=-2:0.005:2;
2 suma=0;
3 N=50;
4 for n=1:N
5 b=2/(n*pi);
6 suma=suma+(b*sin(n*x*pi/2));
7 end
8 plot(x, suma)
9 grid on
10 xlabel('x')
11 ylabel('bn')
12 title('Serie de Fourier')
    
```

Código

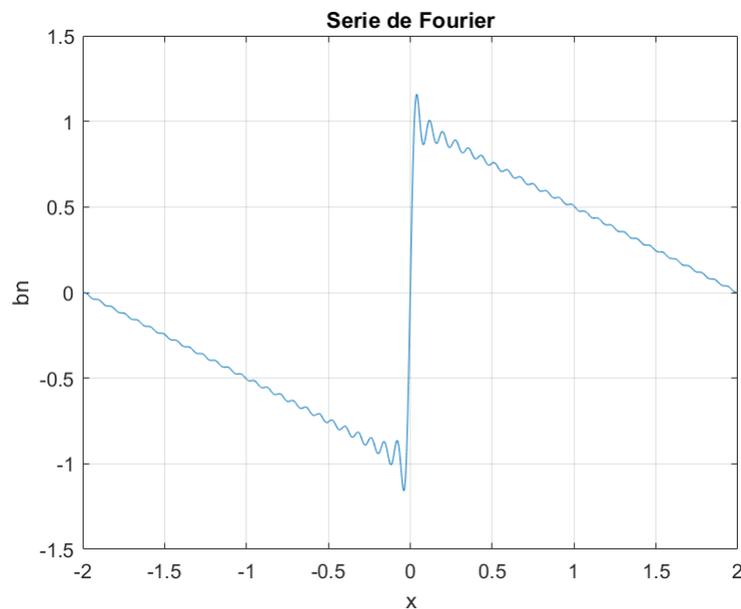


Figura 66: Gráfica de $x_N(t)$ cuando $N = 50$.

Veamos otro caso, tomando la señal $x(t)$ del ejemplo anterior del tren de pulsos, sea $x_N(t)$ la señal que define la suma finita, se tiene:

$$x_N(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k_{\text{impar}}}}^N \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(k\pi t), \quad -\infty < t < \infty$$

Por definición del teorema de Fourier (**ecuación 13**), $x_N(t)$ converge en $x(t)$ cuando $N \rightarrow \infty$. Por lo tanto, conforme N tiende a infinito, el error $|x_N(t) - x(t)|$ tiende a cero. El código siguiente, muestra estos resultados para distintos valores de N .

Código

```

1 t = 3 : 6/1000 : 3;
2 N = input('Number of harmonics = ');
3 a0 = 0.5;
4 w0 = pi;
5 xN = a0*ones(1, length(t));
6 for k = 1:2:N,
7 xN = xN + 2/k/pi*sin(k*pi/2)*cos(k*w0*t);
8 end
    
```

Dado que la señal es par, los coeficientes a_n se excluyen del ciclo para hacer el programa de MATLAB más eficiente.

Ahora, con $N = 3$, $x_N(t)$ se vuelve

$$x_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(\pi t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\pi t), \quad -\infty < t < \infty$$

Con $N = 3$, se obtiene la gráfica mostrada en la **Figura 67**.

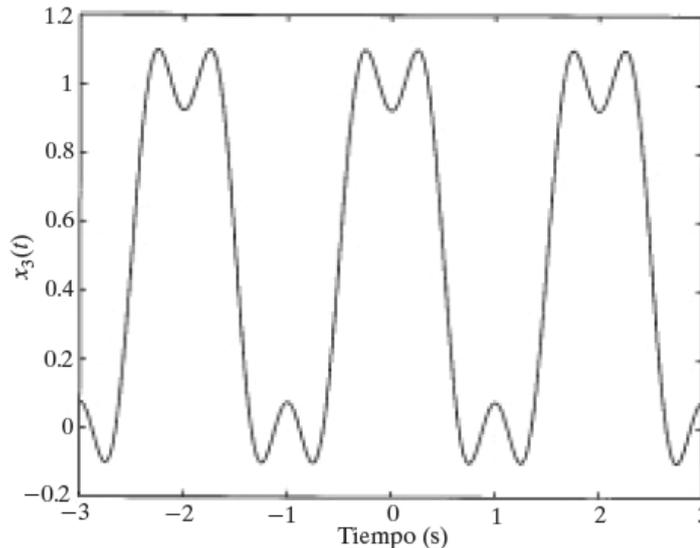


Figura 67: Gráfica de $x_N(t)$ cuando $N = 3$.

La **Figura 68** muestra los resultados para $N = 9$. Comparando la **Figura 67** y la **Figura 68** se observa que la aproximación para $N = 9$ presenta mejores resultados, dado que contiene más armónicos. Al incrementar el valor de N se puede obtener una mejor aproximación de la señal $x(t)$. Por ejemplo, para $N = 21$ se obtiene la gráfica de la **Figura 69**.

Para $N = 45$ se obtiene el resultado mostrado en la **Figura 70**. Se observa que los picos en las esquinas siguen apareciendo, aún cuando N tiende a ∞ los picos estarán presentes (aproximadamente el 9 por ciento). Este fenómeno fue descubierto por Josiah Willard Gibbs, por lo que llevan su nombre y se conoce como fenómeno de Gibbs. Por lo tanto, para una señal $x(t)$ periódica, la aproximación por serie de Fourier presenta errores en las discontinuidades de $x(t)$ de hasta aproximadamente 9%.

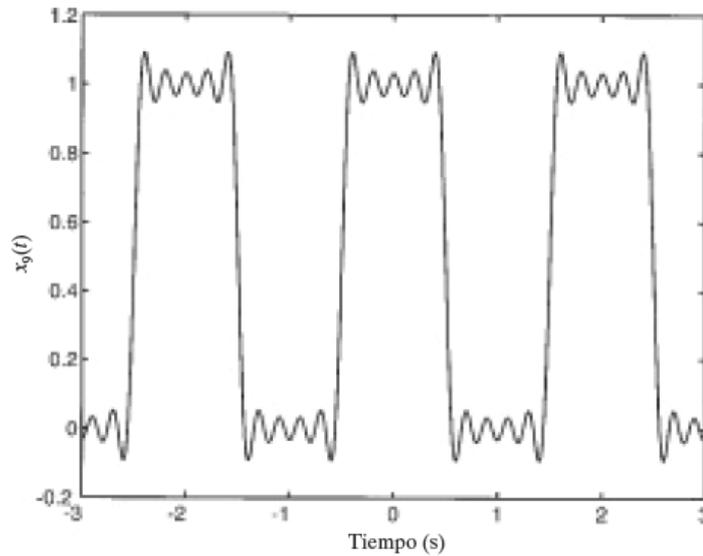


Figura 68: Aproximación $x_9(t)$.

4.1.3. Serie exponencial compleja

La serie trigonométrica de Fourier vista en la sección anterior (**ecuación 13**), se puede expresar de forma exponencial compleja, mediante:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad -\infty < t < \infty \quad (29)$$

En la representación la **ecuación 29**, el coeficiente c_0 es un número real y los coeficientes c_n ($n \neq 0$) son números complejos. ω_0 al igual que la sección anterior representa la frecuencia fundamental, $\omega_0 = 2\pi/T$, donde T es el periodo fundamental.

Existen ecuaciones de equivalencias que relacionan los coeficientes de la serie exponencial compleja con los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier. Estas relaciones se calculan mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Los coeficientes de la serie exponencial compleja, c_n , se pueden calcular utilizando la fórmula

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (31)$$

Al igual que los coeficientes de la serie trigonométrica, los coeficientes de la serie exponencial, c_n , se pueden calcular integrando sobre cualquier periodo completo. Por ejemplo,

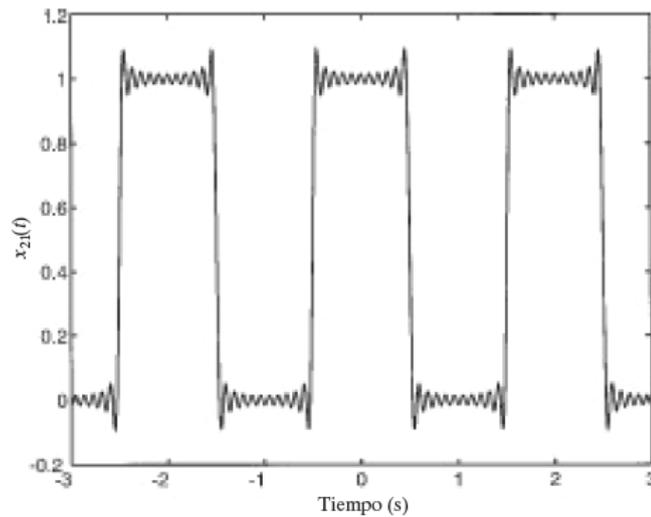


Figura 69: Aproximación $x_{21}(t)$.

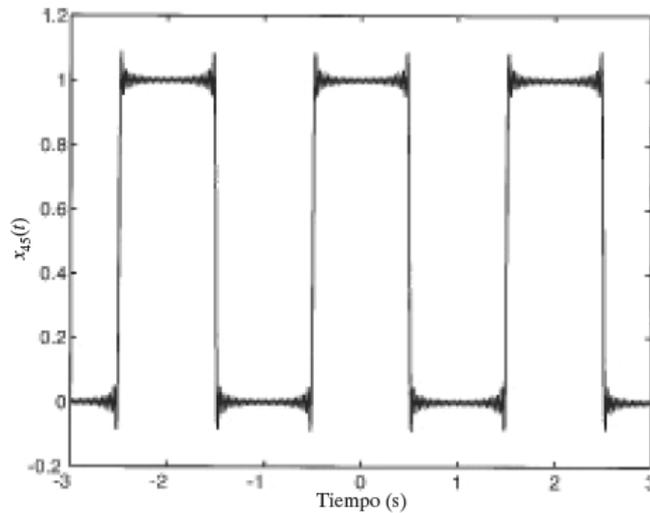


Figura 70: Aproximación $x_{45}(t)$.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Si $x(t)$ es una señal periódica y está expresada mediante la serie exponencial compleja, entonces, es posible pasarla en forma de serie trigonométrica de Fourier utilizando las siguientes relaciones para los coeficientes

$$a_0 = c_0$$

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ &= 2\Re(c_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= j(c_n - c_{-n}) \\ &= -2\Im(c_n), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

Las relaciones de la **ecuación 32** se deducen fácilmente de la **ecuación 30**. Cuando la señal $x(t)$ es par, los coeficientes de la serie exponencial son números reales y las ecuaciones se reducen a lo siguiente:

$$\begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 c_0 = a_0 & c_n = \frac{1}{2}a_n & c_{-n} = \frac{1}{2}a_n, n = 1, 2, \dots \\
 \hline
 \end{array} \quad (33)$$

Cuando la señal $x(t)$ es impar de t , los coeficientes de la forma exponencial son números imaginarios (excepto para c_0) y las ecuaciones se reducen a lo siguiente:

$$\begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 c_0 = a_0 & c_n = -j\frac{1}{2}b_n & c_{-n} = j\frac{1}{2}b_n, n = 1, 2, \dots \\
 \hline
 \end{array} \quad (34)$$

Ejemplo 4.6 Tren de pulsos rectangulares

Nuevamente, considerando la señal mostrada en la **Figura 64**. Con los resultados obtenidos en el ejemplo 4.2, podemos calcular los coeficientes de la serie compleja de Fourier como sigue:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{2} \\
 c_n &= \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), n = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, teniendo los coeficientes podemos expresar la serie exponencial compleja de Fourier de un tren de pulsos como sigue:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n_{\text{impar}}}}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{jn\pi t}, \quad -\infty < t < \infty \quad (35)$$

Existe una manera sencilla de resolver las ecuaciones para el cálculo de los coeficientes de Fourier utilizando la herramienta de simulación MATLAB, para esto se puede utilizar **Symbolic Math Toolbox**. Un ejemplo se muestra en el siguiente código para la señal tren de pulsos rectangulares.



```

1 k = 1:5;
2 syms ck t
3 ck = 0.5*int(exp(-j*k*pi*t), t, -0.5, 0.5)

```

La instrucción `syms cn t` genera objetos simbólicos `cn` y `t`. La instrucción `int` integra el primer argumento respecto al segundo argumento `t`, desde -0.5 hasta 0.5. El resultado es un vector de `cn`.



```

1 ck = [ 1/pi, 0, -1/3/pi, 0, 1/5/pi]

```

Serie de Fourier compleja y truncada

La señal $x_N(t)$ obtenida es una representación truncada de la serie trigonométrica de Fourier de la señal tren de pulsos rectangulares. Esta señal también se puede calcular truncando la forma de la serie exponencial de Fourier como sigue:

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Utilizando MATLAB se puede calcular lo expresado en la ecuación anterior, como sigue:

Código

```

1 t = -3:6/1000:3;
2 N = input('Number of harmonics = ');
3 c0 = 0.5;
4 w0 = pi;
5 xN = c0*ones(1, length(t));
6 for k = 1:N,
7 ck = 1/k/pi*sin(k*pi/2);
8 c_k = ck;
9 xN = xN + ck*exp(j*k*w0*t) + c_k*exp(-j*k*w0*t);
10 end

```

Utilizando el código anterior para los casos $N = 3, 9, 21$ y 45 , obtenemos los mismos resultados mostrados en la **Figura 67** a la **Figura 70**.

Ejemplo 4.7 Cálculo de la serie de Fourier de una señal acotada

Expandir en una serie de Fourier la siguiente señal $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < t < 0 \\ \pi - t & \text{para } 0 \leq t < \pi \end{cases} \quad (36)$$

El siguiente **código 6.4** calcula la serie de Fourier de la señal $f(t)$, y se genera la gráfica de la **Figura 71**.

Código 6.4.

```

1 syms n t
2 A=pi;
3 T=2*pi;
4 wo=2*pi/T;
5 funcion=-t+A;
6 a0=int(funcion,0,pi)/(T/2);
7 an=int(funcion*cos(n*wo*t),0,pi)/(T/2);
8 bn=int(funcion*sin(n*wo*t),0,pi)/(T/2);
9 sum=0;
10 for k=1:6
11 ank=subs(an,n,k);
12 bnk=subs(bn,n,k);
13 sum=sum+ank*cos(k*t)+bnk*sin(k*t);
14 end
15 suma=a0/2+sum;
16 xv=linspace(-pi,pi);
17 y=subs(suma,t,xv);
18 plot(xv,y,'*b','Linewidth',1)
19 grid on;
20 hold on;
21 t1=linspace(-(T/2),0);
22 t2=linspace(0,(T/2));
23 t=[t1,t2];
24 v=[(0*(-t1+A)) (-t2+A)];
25 plot(t,v,'r','Linewidth',3)

```

Código

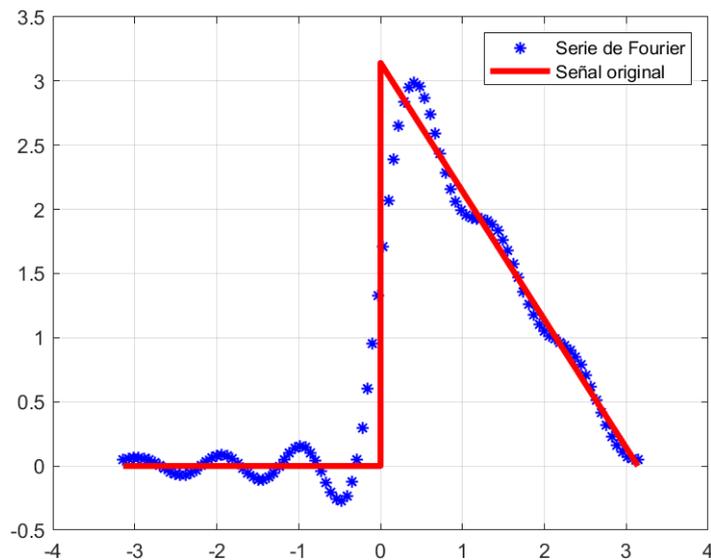


Figura 71: Cálculo de la serie de Fourier para la señal $f(t)$ del ejemplo 4.7.

Ejemplo 4.8 Cálculo de la serie de Fourier de una señal cuadrada

Calcular la serie de Fourier de la siguiente señal cuadrada $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < t < \pi \\ -1 & \text{para } \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \quad (37)$$

El siguiente código 6.5 calcula la serie de Fourier de la señal $f(t)$, y se genera la gráfica de la Figura 72.

Código 6.5.

```

1 T=2*pi;
2 f=1/T;
3 wo=(2*pi)/(T);
4 A=1;
5 n=1:50;
6 t=0:0.01:2*pi;
7 for n=1:2:6
8     for k=1:size(t,2)
9         s(n,k)=(((4*A)/(pi)))*((sin(n*wo*t(k)))/n);
10    end
11 end
12 for k=1:size(t,2)
13     st(k)=sum(s(:,k));
14 end
15 st(1)=st(1)+1;
16 plot(t,st,'*b','Linewidth',1);
17 grid on;
18 hold on;
19 f_cuadrada=square(2*pi*f*t,50);
20 plot(t,f_cuadrada,'Linewidth',3);
21 xlabel('tiempo');
22 ylabel('Amplitud');
```



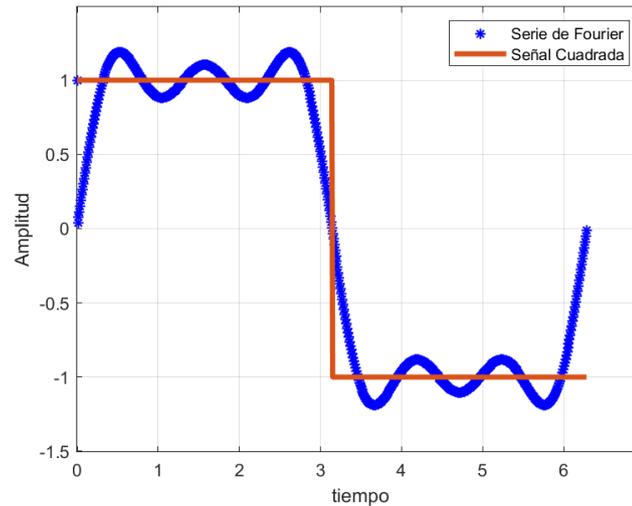


Figura 72: Cálculo de la serie de Fourier para la señal $f(t)$ del ejemplo 4.8.

Ejemplo 4.9 Cálculo de la serie de Fourier de una señal diente de sierra
 Expanda en una serie de Fourier la siguiente señal $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} At/\pi & \text{para } 0 < t < \pi \\ (At/\pi) - 2A & \text{para } \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \quad (38)$$

El siguiente código 6.6 calcula la serie de Fourier de la señal $f(t)$, y se genera la gráfica de la Figura 73.

Código 6.6.

```

1 syms n t
2 A=1;
3 T=2*pi;
4 wo=2*pi/T;
5 p=pi;
6 funcion1=(A*t)/pi;
7 funcion2=((A*t)/pi)-2*A;
8 a0=int(funcion1,0,pi)/(T/2)+int(funcion2,pi,2*pi)/(T/2);
9 an=int(funcion1*cos(n*wo*t),t,0,pi)/(T/2)+int(
    funcion2*cos(n*wo*t),t,pi,(2*pi))/(T/2);
10 bn=int(funcion1*sin(n*wo*t),t,0,pi)/(T/2)+int(
    funcion2*sin(n*wo*t),t,pi,(2*pi))/(T/2);
11 sum=0;
12 for k=1:40
13     ank=subs(an,n,k);
14     bnk=subs(bn,n,k);
15     sum=sum+ank*cos(k*t)+bnk*sin(k*t);
16 end
17 suma=a0/2+sum;
18 xv=linspace(0,2*pi);
19 y=subs(suma,t,xv);
20 plot(xv,y,'*b','Linewidth',1)
21 grid on;
22 hold on;
23 t1=linspace(0,pi);
24 t2=linspace(pi,2*pi);
25 t=[t1,t2];
26 v=[(((A*t1)/pi)) (((A*t2)/pi)-2*A)];
27 plot(t,v,'r','Linewidth',2)
    
```



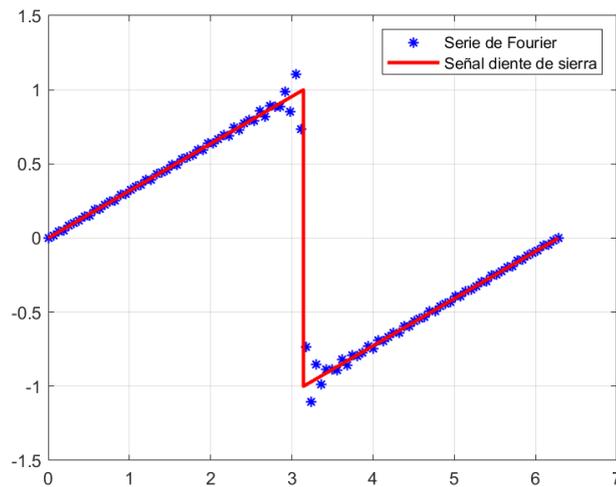


Figura 73: Cálculo de la serie de Fourier para la señal $f(t)$ del ejemplo 4.9.

4.2. Transformada de Fourier

Hemos visto que el análisis de una señal periódica se puede realizar mediante la serie de Fourier, esto permite representar a la señal en términos del contenido de frecuencia. Para las señales no periódicas existe una herramienta matemática que permite el análisis de las señales mediante sus componentes espectrales de frecuencia, esta herramienta es la transformada de Fourier.

Este análisis, mediante la transformada de Fourier, muestra que para las señales no periódicas las componentes existen o están definidas en todos los valores reales de la frecuencia ω , y no como en el caso de las señales periódicas que existe solo para valores discretos de ω , por lo tanto, para la transformada de Fourier no es un espectro de línea.

La transformada de Fourier de una señal $x(t)$ se denota por $X(\omega)$, se calcula como sigue:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad -\infty < t < \infty \quad (39)$$

donde ω es la variable que representa la frecuencia. Como se observa las señales se denotan con letras minúsculas y la transformada de Fourier con letras mayúsculas.

Por naturaleza de la **ecuación 39**, los valores de la transformada de Fourier pueden ser complejos. Por esta razón, los resultados se representan mediante la función magnitud $|X(\omega)|$ (espectro de magnitud) y la función ángulo $\angle X(\omega)$ (espectro de fase).

La transformada de Fourier $|X(\omega)|$ de una señal $x(t)$, existe si la señal $x(t)$ es completamente integrable, es decir, si la **ecuación 39** converge. Eso es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (40)$$

El siguiente ejemplo es para una señal que no cumple con la condición de existencia de la transformada de Fourier.

Ejemplo 4.10 Señal constante

Considere la señal de cd o constante

$$x(t) = 1, \quad -\infty < t < \infty$$

La señal constante es físicamente no realizable, es decir no es una señal real, ya que es una señal diferente de cero todo el tiempo. La transformada de Fourier de la señal es:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1)e^{-j\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{j\omega} \left[e^{-j\omega t} \right]_{t=-T/2}^{t=T/2} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{1}{j\omega} \left[e^{(-\frac{j\omega T}{2})} - e^{(\frac{j\omega T}{2})} \right] \end{aligned} \tag{41}$$

Pero $e^{(\frac{j\omega T}{2})}$ no tiene un límite cuando $T \rightarrow \infty$ y, por lo tanto, la integral de la **ecuación 41** no converge. Esto indica que la señal no tiene transformada de Fourier, ya que al integrar la señal el área bajo la curva es infinita. ■

Ejemplo 4.11 Señal exponencial

Ahora considere la señal

$$x(t) = e^{-bt}u(t)$$

donde b es una número constante real, y $u(t)$ es la señal escalón unitario. La señal $x(t)$ toma el valor de la señal $u(t)$ cuando el número constante $b = 0$. La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ está dada por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt}u(t)e^{-j\omega t} dt$$

y debido a que $u(t) = 0$ para $t < 0$, $u(t) = 1$ para $t \geq 1$,

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-bt}e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(b+j\omega)t} dt$$

Evaluando la integral:

$$X(\omega) = -\frac{1}{b + j\omega} \left[e^{-(b+j\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} \right]$$

Cuando $b \leq 0$ el límite superior $t = \infty$ no puede ser evaluado y, entonces, es este intervalo para b , no existe la transformada de Fourier de $x(t)$. Como se menciono anteriormente, $x(t) = u(t)$ cuando $b = 0$, lo que indica que la función escalón unitario no tiene transformada de Fourier. Cuando $b > 0$, $e^{-bt} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(b+j\omega)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-bt}e^{-j\omega t} = 0$$

La transformada de Fourier de $x(t)$ cuando $b > 0$ esta dad por

$$X(\omega) = -\frac{1}{b + j\omega} (0 - 1) = \frac{1}{b + j\omega}$$

y los espectros de amplitud y fase son

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega^2}}$$

$$\angle X(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{b}$$

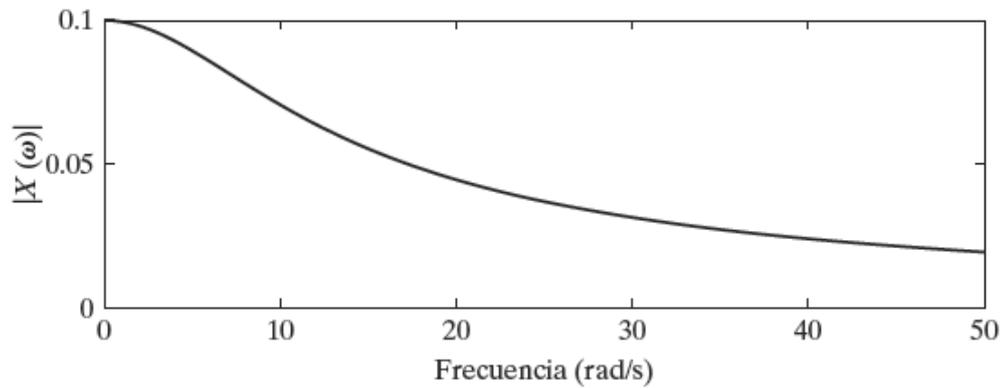
Como ejemplo, cuando $b = 10$, se generan los resultados para el espectro de amplitud $|X(\omega)|$ y de fase $\angle X(\omega)$ utilizando **MATLAB**, como se muestra en el código siguiente:

Código 6.7.

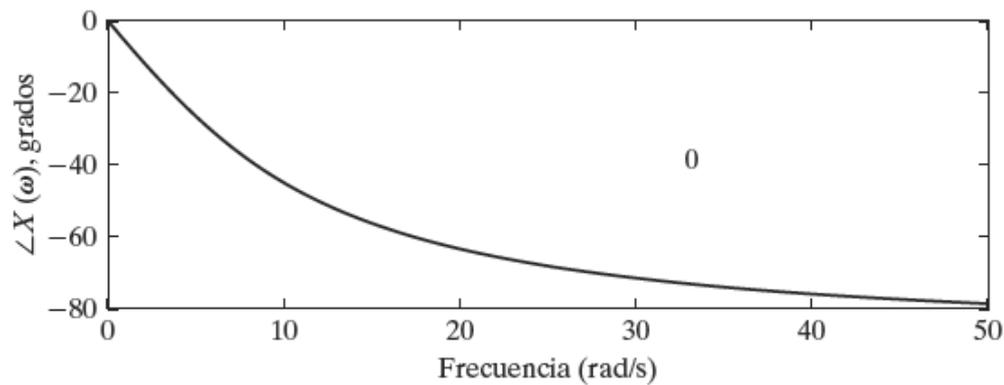
```
1 w = 0:0.2:50;
2 b = 10;
3 X = 1./(b+j*w);
4 subplot(211), plot(w, abs(X));
5 subplot(212), plot(w, angle(X));
```

Código

Las gráficas que se generan con el código se muestran en la **Figura 74**. ■



(a)



(b)

Figura 74: Gráficas de los espectros de (a) amplitud y (b) fase, de $x(t) = e^{-10t}u(t)$.

4.3. Transformada inversa de Fourier

Dada la transformada de Fourier $X(\omega)$ de la señal $x(t)$. Podemos obtener $x(t)$ a partir de $X(\omega)$ aplicando la transformada inversa de Fourier dada por

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (42)$$

Como notación se utilizará la siguiente para los pares de transformadas

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

Un ejemplo de pares de transformadas de Fourier es el siguiente

$$p_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \arcsin\left(\frac{\tau\omega}{2\pi}\right) \quad (43)$$

Por la propiedad de dualidad de Fourier, la transformada de Fourier de la señal rectangular en el tiempo corresponde a una función *senc* en frecuencia, e inversamente, una función *senc* en frecuencia corresponde a una función rectangular en el tiempo.

5. Aplicaciones en propagación y desvanecimientos

En este capítulo se analizarán los fenómenos que se presentan y afectan al momento de realizar una transmisión de información en el espacio libre.

5.1. Patrón de Radiación

Al momento de hacer referencia a una transmisión en el espacio libre, lo primero que resalta es el término de *espacio libre*, el cual lo identificamos como el medio por el cual se realizará la propagación de las ondas electromagnéticas, y para que esta actividad se dé, se requiere del uso de antenas. Las antenas se pueden definir como dispositivos que pueden transmitir y/o recibir ondas electromagnéticas (**OEM**). Una antena puede ser caracterizada a través de diversos parámetros, y uno de los más esenciales e incluso de los más relevantes, es el patrón de radiación. El patrón de radiación de una antena se puede entender como una gráfica de la energía radiada vista desde afuera. Si consideramos un dipolo por ejemplo, el campo generado por este sería como el que se muestra en la siguiente ecuación (**Aguilar et al., 2002**):

$$E = \frac{\cos\left(\beta \frac{l}{2} * \cos(\theta)\right) - \cos\left(\beta \frac{l}{2}\right)}{\sin(\theta)} \quad (44)$$

De la **ecuación 44** podemos describir los siguientes parámetros:

- β es la constante de fase ($2\pi/\lambda$).
- l es la longitud del dipolo.
- θ es el ángulo medido sobre el eje z .

El código 7.1 calcula y grafica el campo generado por un dipolo como se puede observar en la Figura 75.

Código

Código 7.1.

```

1 lambda=1;
2 beta=2*pi/lambda;
3 l=3*lambda/2; % longitud del dipolo
4 % angulos
5 fi=(0:.01:1)*2*pi;
6 teta=(0:.01:1)*pi;
7 E=abs((cos(beta.*l./2.*cos(teta))-cos(beta.*l./2))./sin
      (teta));
8 polar(teta,E)
    
```

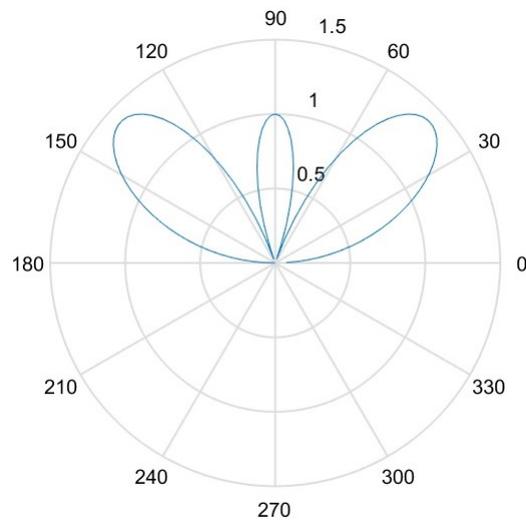


Figura 75: Patrón de radiación de un dipolo.

Se puede graficar este mismo campo en 3D, para realizar lo antes mencionado, se debe utilizar el siguiente código 7.2, el cual produce la gráfica de la Figura 76.

Código

Código 7.2.

```

1 lambda=1;
2 beta=2*pi/lambda;
3 l=3*lambda/2; % longitud del dipolo
4 % angulos.
5 fi=(0:.01:1)*2*pi;
6 teta=(0:.01:1)*pi;
7 E=abs((cos(beta.*l./2.*cos(teta))-cos(beta.*l./2))./sin
      (teta));
8 polar(teta,E)
9 [FI,TETA]=meshgrid(fi,teta); % vectores FI y TETA para
      graficar en 3D
10 % creacion del campo
11 E=abs((cos(beta.*l./2.*cos(TETA))-cos(beta.*l./2))./sin
      (TETA));
12 % cambio de coordenadas esfericas a rectangulares
13 X=E.*sin(TETA).*cos(FI);
14 Y=E.*sin(TETA).*sin(FI);
15 Z=E.*cos(TETA);
16 S=surface(X,Y,Z,(abs(E))); % Grafica de superficie
17 view(0,40) % Orientación de los ejes
    
```

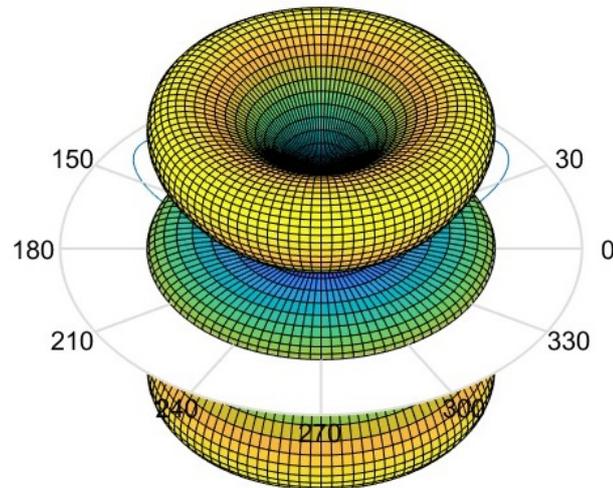


Figura 76: Campo del dipolo en 3D.

5.2. Desvanecimientos

Cuando el medio de transmisión es el canal inalámbrico se presentan diversos fenómenos que disminuyen la intensidad de la señal recibida, estos fenómenos son conocidos como desvanecimientos, los cuales se clasifican en *desvanecimientos lentos* y *desvanecimientos rápidos* (Stüber & Stüber, 2012).

Los *desvanecimientos rápidos* se dividen según el ambiente de propagación, es decir, el transmisor y receptor pueden tener o no línea de vista. Generalmente no se tiene línea de vista y cuando se tiene este ambiente de propagación la variable aleatoria que caracteriza estos desvanecimientos sigue una distribución de *Rayleigh*, es decir el canal de desvanecimiento es un *canal de Rayleigh*.

Cuando se tiene línea de vista, la variable aleatoria es una variable con *distribución Rice*. Los *desvanecimientos lentos* por lo general se modelan con una variable aleatoria con *distribución Log-normal* (Stüber & Stüber, 2012). El siguiente código 7.3 genera un *canal Rayleigh* (ver Figura 77) y un *canal Log-Normal* (ver Figura 78).

Código 7.3.

```
1 sigma=1; media=0; N=1000;
2 x1=randn(N,1)*sigma + media;
3 x2=randn(N,1)*sigma + media;
4 x3=randn(N,1)*sigma + media;
5 Z=sqrt(x1.^2 + x2.^2); % Calculo de V.A. Rayleigh
6 W=exp(x3); % Calculo de V.A. Log-Normal
7 plot(10*log10(Z)) % Grafica del canal Rayleigh en dB
8 xlabel('x') ylabel('Potencia (dB)')
9 grid on
10 figure(2)
11 plot(10*log10(W)) % Grafica del canal Log-Normal en dB
12 xlabel('x') ylabel('Potencia (dB)')
13 grid on
```

Código

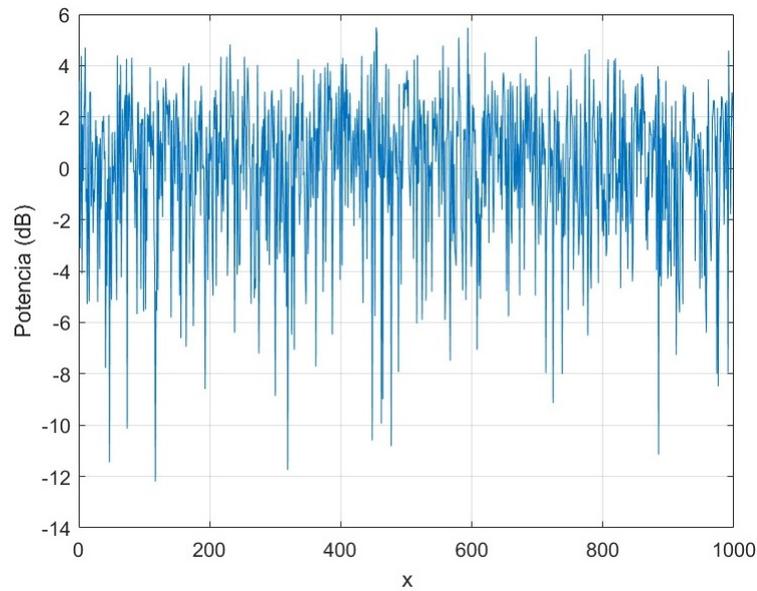


Figura 77: Canal Rayleigh.

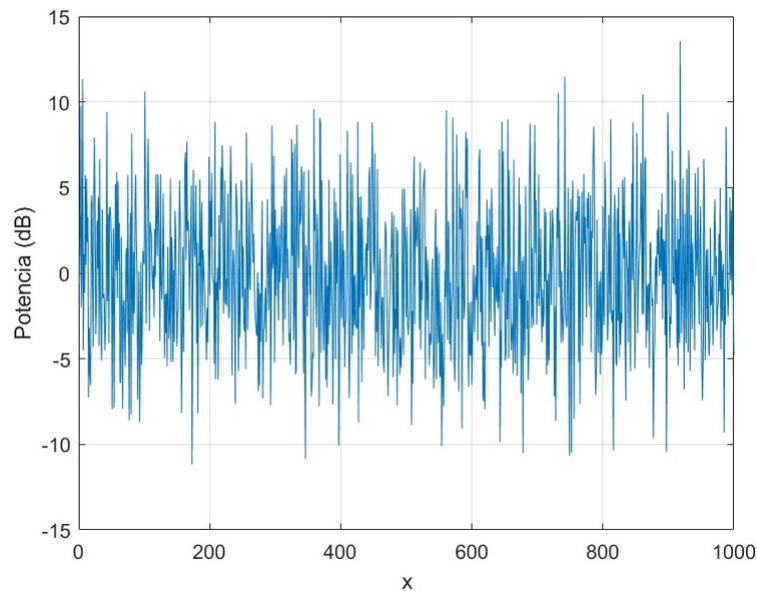


Figura 78: Canal Log-normal.

El cálculo de los canales con desvanecimientos puede servir para calcular la ganancia del canal, este análisis se utiliza en el Acceso Múltiple No Ortogonal (**NOMA**, por sus siglas en inglés) en el dominio de la potencia, que es una de las propuestas para las redes celulares 5G. Estos resultados sirven para poder mitigar la interferencia de los usuarios que comparten el mismo recurso, esto se logra utilizando la Cancelación de Interferencias Sucesivas (**SIC**, por sus siglas en inglés).

Una vez obtenidos los canales, lo que procede es generar la *función de densidad de probabilidad* (**PDF**) de las variables aleatorias y graficarlas sobrepuestas con las fórmulas teóricas para observar la aproximación.

La **PDF** de la variable aleatoria *Rayleigh* está dada por la **ecuación 45**, (Papoulis & Saunders, 2002).

$$f(r) = \frac{r}{2\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}; \quad r \geq 0; \quad (45)$$

La **PDF** de la variable aleatoria *Log-normal* está dada por la **ecuación 46**, (Papoulis & Saunders, 2002).

$$g(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (46)$$

Aquí, x representa una variable aleatoria normal. El siguiente **código 7.4** es una función “M”, la cual utilizaremos para generar y graficar la **PDF** para todo tipo de variable aleatoria.

Código 7.4.

Código

```
1 function []= pdfva(variable, bins, total) % parametros
   que recibe la funcion
2 [rr,u]=hist(variable,bins); % Calculo de histograma
3 delta=u(2)-u(1); % Calculo de intervalo
4 r2=rr/(total*delta); % Normalizar valor del eje Y
5 bar(u,r2); % Graficar la funcion
6 colormap([1 1 1]); % Colocar en blanco el fondo de cada
   barra
7 hold on
```

El siguiente **código 7.5** calcula y muestra la gráfica de la **PDF** de los desvanecimientos, tanto de manera teórica como de forma simulada. Este código produce las gráficas de la **Figura 79** y **80**.

Código 7.5.

Código

```
1 sigma=1;media=0;N=5000;
2 x1=randn(N,1)*sigma + media; % Creacion de N variables
   aleatorias normales con media cero y desviacion
   estandar 1
3 x2=randn(N,1)*sigma + media;
4 x3=randn(N,1)*sigma + media;
5 Z=sqrt(x1.^2 + x2.^2); % Calculo de V.A. Rayleigh
6 W=exp(x3); % Calculo de V.A. Log-Normal
7 y=length(Z); % Tama no de mi variable
8 bin=30;
9 pdfva(Z, bin, y) % Llamado de la funcion
10 u2=max(Z);u1=min(Z);
11 m=(u2-u1)/y; % Calculo de intervalo
12 j=u1:m:u2;
13 f=(j/sigma.^2).*exp(-j.^2/(2*sigma.^2));
14 plot(j,f, 'r'); % Grafica de funcion teorica
15 xlabel('x') ylabel('pdf (x)')
16 legend('EMPIRICO', 'TEORICO');
```

Código

```

1 %% Cont...
2 figure(2)
3 y2=length(W); % Tamaño de mi variable
4 pdfva(W, bin, y2) % Llamado de la función
5 u4=max(W);
6 u3=min(W);
7 m2=(u4-u3)/y;
8 k=u3:m2:u4;
9 f2=(k/sigma.^2).*exp(-k.^2/(2*sigma.^2));
10 plot(k,f2,'r'); % Gráfica de función teórica
11 xlabel('x')
12 ylabel('pdf (x)')
13 legend('EMPIRICO','TEORICO');
    
```

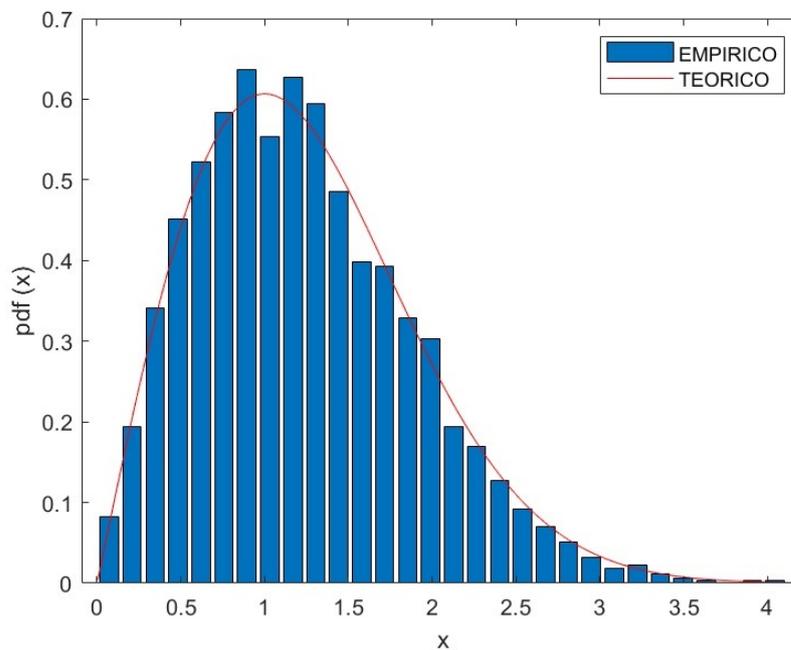


Figura 79: PDF Rayleigh.

5.3. Diseño de radioenlace

Un *radioenlace* se entiende como un enlace de ondas electromagnéticas en la banda de señales de radio. Este enlace se presenta como una conexión ya sea entre terminales fijas o móviles, donde el canal de comunicación es a través del espacio libre.

Cuando se habla de radiocomunicaciones, entendemos que los radioenlaces generalmente se diseñan sobre las bandas de frecuencia del orden de las *microondas*, es decir, a partir de los 300 MHz y hasta los 300 GHz. En esta banda de frecuencia, la longitud de onda (λ) es muy pequeña, y como consecuencia de ello, éstas son muy sensibles a los *fenómenos meteorológicos* como la lluvia y la nieve (Salema, 2002).

Existen condiciones que se deben cumplir para un radioenlace; en primer lugar, es vital que la ruta directa entre las dos antenas (la ruta de la línea de vista) esté libre de obstrucciones. Sin

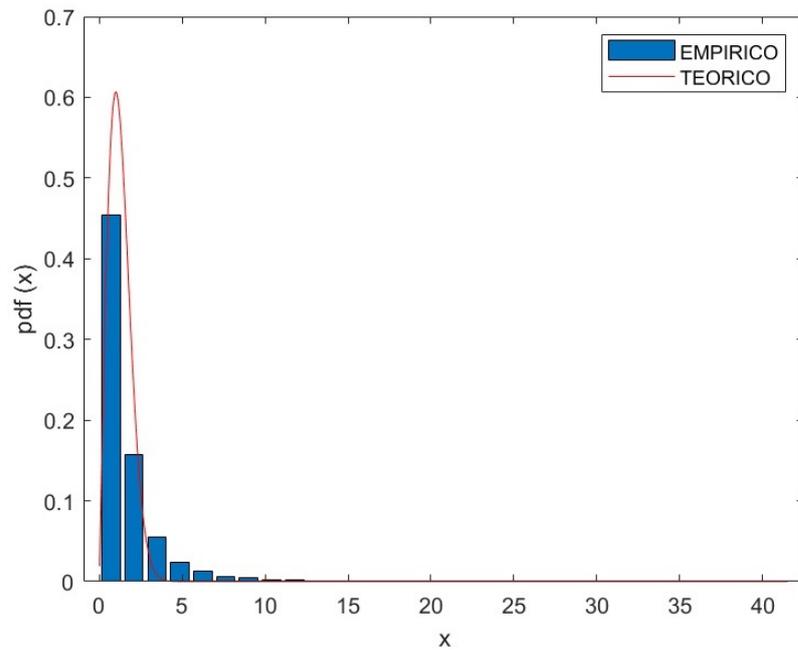


Figura 80: PDF Log-normal.

embargo, esto en sí mismo no es suficiente, sino que es muy conveniente que no haya obstáculos cerca de la ruta de la línea de visión, ya que podrían provocar reflexiones y pérdidas en la recepción. La **Figura 81** muestra un camino simple de un radioenlace, la elipse punteada define una región conocida como la 1ra. *zona de Fresnel* (Salema, 2002).

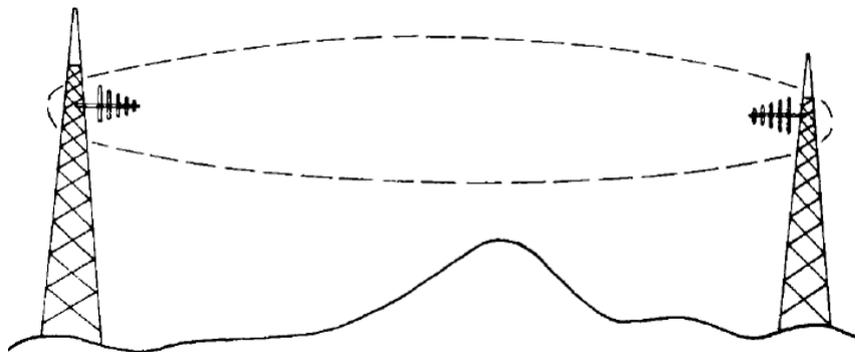


Figura 81: Radioenlace punto a punto.

Cuando se calculan las *pérdidas en la transmisión*, también se deben considerar los efectos como son la *pérdida en el espacio libre*, *atenuación* y *dispersión*. Resultado de este cúmulo de pérdidas, la potencia (P_R) de la señal se ve disminuida en el receptor, y coloquialmente se le conoce como *pérdidas en el espacio libre*. A manera de conclusión, este tipo de pérdidas se ocasionan porque la energía de la señal que se está radiando se expande en función de la distancia desde el transmisor (**Tx**), es decir, entre más alejado esté el **Tx** del receptor (**Rx**) más pequeña es la señal recibida.

En todo el trayecto del radioenlace, la potencia de radiofrecuencia que se le está suministrando al transmisor se dispersa, quiere decir que, una parte de la potencia de **RF** llega directamente a la antena receptora (**Rx**), como se muestra en el trayecto *A* de la **Figura 82**, mientras que otra se refleja en la tierra (trayecto *B* y *C*).

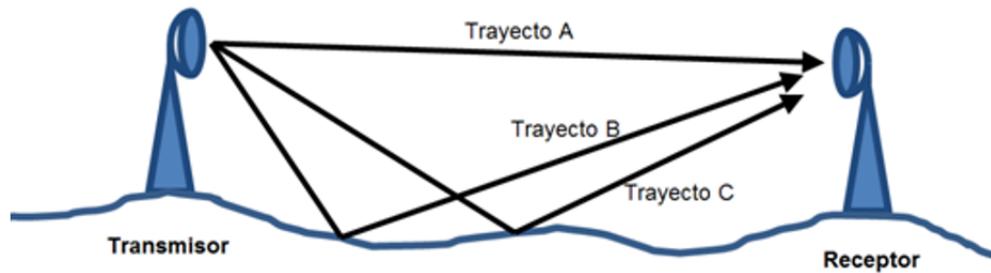


Figura 82: Efecto multitrayectoria.

Cuando en un radioenlace se calculan las pérdidas en el *espacio libre*, lo que se analiza también es una estimación aproximada de la viabilidad del enlace. En este sentido, se puede evaluar solamente las *pérdidas en el espacio libre*, pero si se requiere una evaluación exacta se deben considerar también las pérdidas que se generan en la atmósfera.

Al trabajar radioenlaces en la banda de las microondas se vuelve complejo, ya que a estas frecuencias, las ondas electromagnéticas pareciera que se van ensanchando a medida que se van propagando. Las ondas electromagnéticas en esta banda de frecuencia tienen longitudes de onda de pocos centímetros, por lo tanto, sus haces son anchos y necesitan más espacio. Para estos radioenlaces, la línea de vista necesaria para lograr una conexión óptima desde el punto *A* hasta el punto *B* de la **Figura 82**, es más que una simple línea delgada, en sí es un volumen en forma de elipsoide. El ancho de este volumen se puede calcular a través del concepto de *zonas de Fresnel*. La fórmula generalizada se presenta en la **ecuación 47**.

$$R_n = \sqrt{\frac{n\lambda d_1 d_2}{d_1 + d_2}} \quad (47)$$

5.3.1. Pérdida en el espacio libre

Para calcular las pérdidas por trayectoria, se deben tomar en cuenta los efectos ocasionados por la *pérdida en el espacio libre*, las diferentes *atenuaciones* y *dispersiones*. Dependiendo de la longitud de la trayectoria, se deben estudiar los efectos de propagación a través de la atmósfera y las características de elevación del terreno (**Salema, 2002**).

Como ya se ha mencionado, la potencia de la señal se ve disminuida a lo largo del trayecto por la dispersión del frente de onda ocasionada por la distancia, a este efecto se le conoce comúnmente como *pérdida en el espacio libre*. Se observa que entre más lejanos estén las dos terminales (T_x y R_x), menor será la potencia medida en el receptor. Esta “*pérdida*” (dispersión) ocurre debido a que la onda electromagnética radiada se expande en función de la distancia desde el transmisor (T_x).

La pérdida o atenuación de energía en la trayectoria entre el transmisor (T_x) y el receptor (R_x) es simplemente la relación de la potencia recibida y la potencia transmitida. La fórmula para calcular dicha pérdida se conoce como la *ecuación de Friis*, como se muestra en la **ecuación 48** (Salema, 2002).

$$L_{fs} = \frac{P_R}{P_T} = G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 \quad (48)$$

donde

- P_R Es la potencia recibida [W].
- P_T Es la potencia transmitida [W].
- G_T Es la ganancia de la antena Tx.
- G_R Es la ganancia de la antena Rx.
- λ Es la longitud de onda [m].
- $(4\pi r)^2$ Es el área de superficie de la esfera en el radio r [m^2].

La **ecuación 48** es comúnmente utilizada en decibelios que está dada por la siguiente **ecuación 49**.

$$L_{fs}(dB) = 32.44 - 10 \log G_T - 10 \log G_R + 20 \log f + 20 \log d \quad (49)$$

donde

- f Es la frecuencia de operación [MHz].
- d Es la distancia [km].

5.3.2. Cálculo de zonas de Fresnel

La trayectoria de un radioenlace puede que no sea una línea recta, sino que presente cambios en su ruta debido a la refracción bajo la presencia de obstáculos y de las condiciones atmosféricas del terreno, generándose multitrayectorias con interferencias *constructivas* y *destructivas*, es por ello que para evaluar la viabilidad de un radioenlace es necesario recurrir al concepto de las *zonas de Fresnel* (Salema, 2002).

La *zona de Fresnel* es aquella región del espacio en forma de elipsoide por la que viajan las ondas entre dos puntos, desde un transmisor hasta un receptor. La teoría de zona de Fresnel evalúa la ruta de propagación del enlace y al espacio (volumen) alrededor del eje directo del mismo, los puntos que en teoría no se encuentran en la línea directa de propagación también radian potencia y contribuyen a que la señal llegue hasta el receptor.

En la **Figura 83** se muestra que existe más de una zona de Fresnel alrededor de la línea directa entre un transmisor y un receptor. En la zona de Fresnel existen puntos donde se satisface la **ecuación 50**.

$$d_1 + d_2 + \frac{n\lambda}{2} = a + b \quad (50)$$

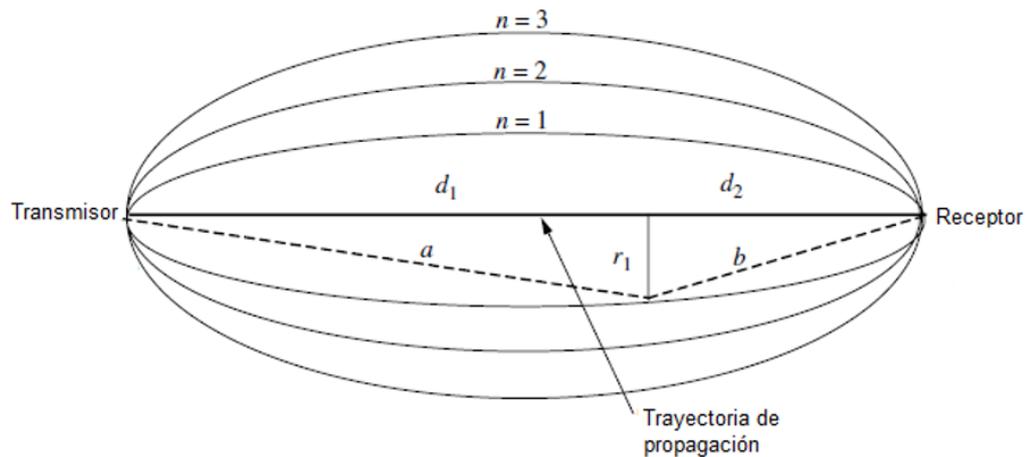


Figura 83: Zonas de Fresnel.

donde

n Es el número de la zona de Fresnel a calcular (número entero).

Si la longitud de la trayectoria es mayor que el radio del volumen de la zona de Fresnel r_n , éste puede aproximarse con la **ecuación 51** (Salema, 2002).

$$r_n = \sqrt{\frac{n\lambda d_1 d_2}{d_1 + d_2}} \quad (51)$$

Nota Los valores de r_n , d_1 y d_2 están dados en metros [m].

En los sistemas inalámbricos de banda ancha que operan a frecuencias de microondas, el radio del volumen de la zona de Fresnel se calcula mediante la **ecuación 52**, (Salema, 2002).

$$r_n = \sqrt{\frac{nd_1 d_2}{f * (d_1 + d_2)}} \quad (52)$$

donde

r_n Es el radio del volumen de la zona de Fresnel [m].

n Es la zona de Fresnel bajo cálculo.

f Es la frecuencia de operación [GHz].

d_1, d_2 Son las distancias entre los puntos del enlace [m].

La primera zona de Fresnel se conceptualiza como la región en la cual se transmite la potencia significativa, de esta manera si la primera zona de Fresnel se ve obstruida o bloqueada, la potencia que llegará al receptor estará disminuida.

5.3.3. Cálculo de la altura de las antenas en un radioenlace

En el diseño de sistemas de radioenlaces, mantener la zona de Fresnel despejada es un punto importante, puesto que para tener un trayecto libre de obstáculos, se debe considerar la ruta en todas sus direcciones, la mayoría de los casos, si no es que siempre, las obstrucciones se encuentran por debajo de la ruta del enlace, ocasionadas por objetos fijos propios del relieve, copas de los árboles, edificios, etc. La **Figura 84** muestra un enlace cuya zona de Fresnel está bloqueada parcialmente por la cima de un monte, aunque la línea de vista no se encuentra obstruida.

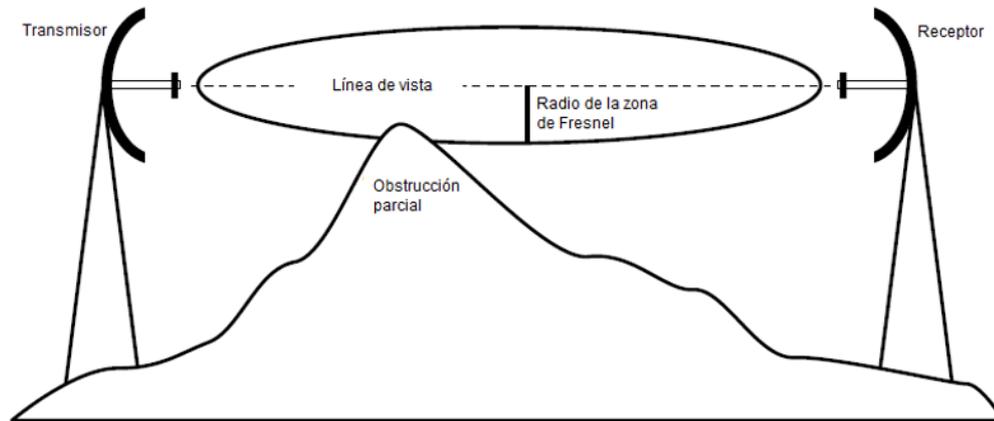


Figura 84: Zona de Fresnel parcialmente bloqueada.

Un criterio general para establecer radioenlaces efectivos es que la primera zona de Fresnel debe tener un radio del volumen de al menos el **60 %** libre de su magnitud total en el punto del obstáculo de mayor altura, para lograr esto, las torres de las antenas deben tener la altura necesaria que satisfaga esta consideración.

Para el cálculo de las alturas de las torres se pueden tomar varios puntos de partida, uno de ellos, es el siguiente:

- Se calcula con $n = 1$ la 1ra. zona de Fresnel entre los puntos donde se colocarán las torres mediante la **ecuación 52**.
- Se identifica la obstrucción más significativa del perfil del radioenlace, el radio del volumen de la zona de Fresnel en este punto corresponde a un valor r_n .
- Se determina la altura entre el punto más elevado de la obstrucción y el punto de la 1ra. zona de Fresnel. Este valor es la altura de las torres y obviamente es la elevación a la cual tienen que estar colocadas las antenas en las mismas para librar el **100 %** de la primera zona de Fresnel, sin embargo, como se mencionó anteriormente, basta que esta zona esté despejada en un **60 %** en relación a su radio ($0.6r_n$) por lo que la altura de las torres se puede estimar desde el punto $0.6r_n$ hasta el punto más alto del obstáculo.

La altura mínima de las torres de las antenas es de **15m** y una máxima de **120m**, si el valor calculado del tamaño de las torres excede este intervalo, se procede a la implementación de

antenas repetidoras.

5.3.4. Uso de antenas repetidoras

Las *antenas repetidoras* tienen la función de ser nodos configurados para transmitir el tráfico de las ondas destinadas a otro nodo, ya sea otra repetidora o al receptor de destino, y son utilizadas para evitar obstáculos a lo largo de la trayectoria de un enlace. La **Figura 85** muestra una antena repetidora que reenvía el tráfico de datos por el espacio libre a otras antenas, aquí se observa que las antenas donde se inicia la transmisión no tienen línea de vista con las antenas terminales.

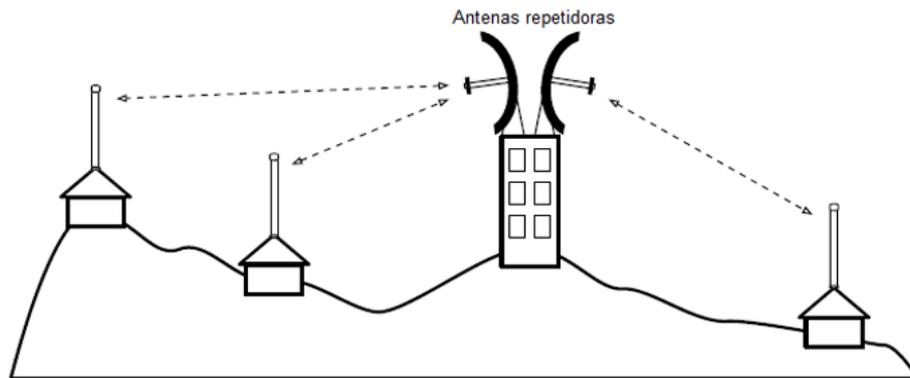


Figura 85: Antena repetidora.

Las antenas repetidoras se utilizan siempre y cuando la altura calculada de las torres sea mayor a $120m$, colocadas en el punto de mayor obstrucción garantizan un enlace de radio viable, así mismo, se recurre a ellas cuando la distancia total del enlace de radio supera los $64km$.

5.3.5. Método de diseño

Cuando se desea diseñar un enlace de radiocomunicaciones se requiere conocer la altura de la superficie terrestre (altitud), desde el transmisor, que sería el punto inicial ($Km\ 0$) hasta el receptor, que sería el punto final ($Km\ n$). Como se debe conocer las altitudes en cada cierta distancia, lo recomendable es utilizar un mapa topográfico.

Una vez que sabemos las ubicaciones del transmisor y receptor, trazamos el perfil, el cual se obtiene marcando sobre el mapa una línea recta entre punto y punto. La línea recta funge como línea de vista entre nuestro **Tx** y **Rx**, desde el punto inicial hasta el punto final del enlace. Sobre esta línea recta en el mapa se marcan todos los puntos discretos, los cuales son tomados a $\leq 250m$ entre punto y punto. En la **Figura 86** se representa una línea de vista trazada sobre un mapa topográfico (Salema, 2002).

Una vez que se hayan marcado ya todos los puntos sobre la línea de vista en el mapa, se continúa con obtener la altura superficial de cada uno de estas marcas. Conociendo ubicación y altura de cada marca, podemos ahora generar una gráfica que represente el relieve de toda la línea de vista. Como se observa en la **Figura 87**, los mapas topográficos cuentan con curvas de nivel las cuales están acotadas en metros y, además, se puede observar que las líneas *A* y *B* representan las curvas de nivel ordinarias y están acotadas cada $20m$.

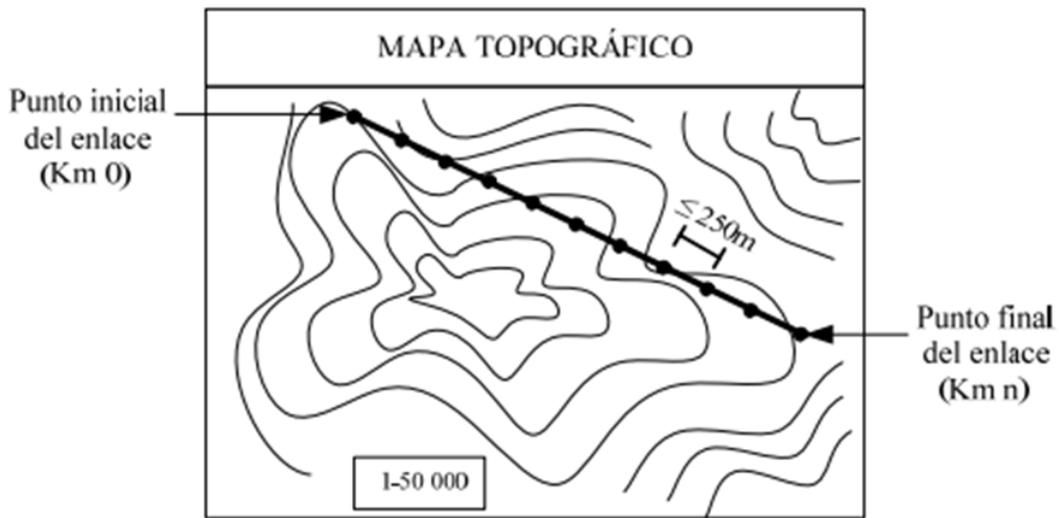


Figura 86: Perfil topográfico.

Cada una de estas curvas representan la altura del relieve sobre el nivel del mar, para este ejemplo, denotaremos como C_i a estas alturas. Entonces si el punto 1 cae sobre la curva de nivel A se le asignará una altura de $5000m$ ($C_i = 5000m$), si caen en la línea X_1 se le asignará una altura de $5020m$ ($C_i = 5020m$).

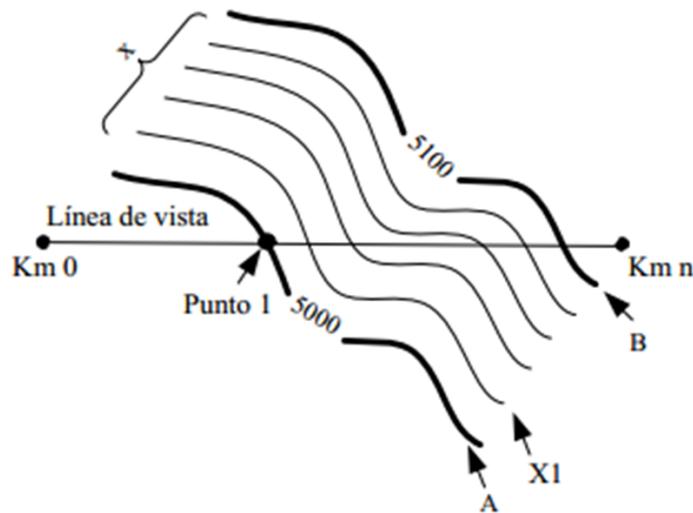


Figura 87: Ejemplo de curvas de nivel en un mapa topográfico.

Generando la base de datos con todas las alturas de los puntos marcados podemos realizar la gráfica C_i con respecto a la distancia X_1 , donde X_1 son los puntos de referencia, o bien la distancia que hay desde el $Km 0$ y el punto de referencia que se requiere graficar como se muestra en la Figura 88.

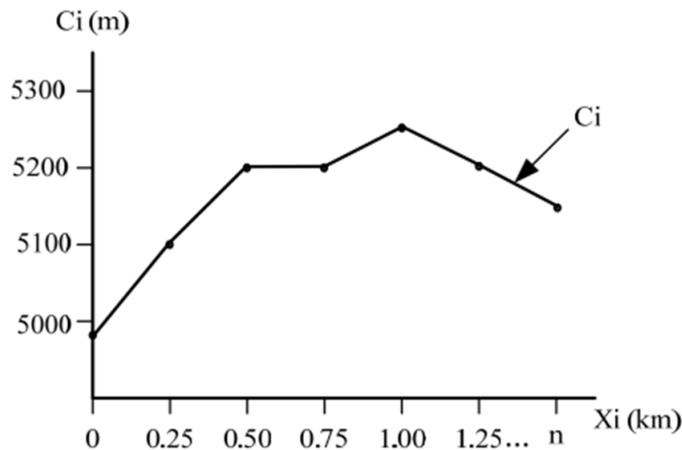


Figura 88: Gráfica de las alturas del relieve (C_i).

Se procede a calcular la curvatura de la tierra utilizando la **ecuación 53**.

$$f_i = \frac{X_i * (X_n - X_i)}{2KR_0} * 1000 \quad (53)$$

donde

- f_i Representa la curvatura de la Tierra en metros [m].
- X_i Es la distancia del punto inicial al punto final, es decir distancia desde el transmisor T_x hasta el receptor (R_x) en kilómetros [Km].
- X_n Es la distancia total del enlace.
- K Representa el factor de corrección de la Tierra.
- R_0 Es el radio de la Tierra dado en kilómetros [Km]. $R_0 = 6370Km$.

La curvatura de la Tierra representada por f_i se calcula para obtener la altura real de la superficie terrestre. Ya que se realiza este cálculo, asignaremos el nombre de Z_i , que en resumen sería la suma de C_i y f_i , resultando en $Z_i = C_i + f_i$.

Lo que prosigue es el cálculo de las zonas de Fresnel, y aquí, una vez que se ha graficado Z_i , identificamos el punto en dónde existe mayor obstrucción. Aquí podemos distinguir la altura que existe entre el punto de la obstrucción (Z_i) hasta la zona inferior del radio del volumen de la zona de Fresnel. Conociendo el valor de esta diferencia, entre la altura del relieve y el límite de la elipsoide de la zona de Fresnel, podemos identificar la altura que deberán cumplir las antenas, es decir, se deberá elevar a las antenas esta altura para que el límite inferior de la elipsoide quede completamente libre de la obstrucción.

Debemos considerar que la altura mínima que debe cumplir una torre de un radioenlace es de $15 m$, por lo que si la obstrucción que se distingue entre el relieve y la elipsoide inferior de Fresnel es menor a esta altura, la torre siempre será de $15 m$. El siguiente **código 7.6** calcula y genera las gráficas para un ejemplo de un radio enlace (ver **Figura 89-93**).

Código 7.6.

```

1  % Distancia del enlace
2  Xi=0:0.250:8.75;
3  % Altura del terreno
4  Ci=
      [2942,2940,2930,2930,2935,2945,2940,2920,2910...
5  2905,2890,2880,2880,2870,2865,2865,2865,2870,2880,2898...
6  2910,2920,2930,2930,2930,2922,2895,2865,2865,2865,2870...
7  2890,2900,2910,2900,2920];
8  x1=0;
9  Xn=8.75;
10 K=4/3;
11 Ro=6370;
12 % Curvatura de la tierra
13 fi=((Xi.*(Xn-Xi))/(2*K*Ro))*1000;
14 Zi=Ci+fi;
15 % Gráficas
16 plot (Xi,fi)
17 xlabel('Distancia X_i [Km]')
18 ylabel('Curvatura de la Tierra [m]')
19 grid on
20 figure (2)
21 plot(Xi,Ci,'-ro')
22 hold on
23 plot(Xi,Zi,'-k*')
24 grid on
25 xlabel('Distancia X_i [Km]') ylabel('Alturas [
      m]') legend ('Ci', 'Zi')
26 figure(3)
27 y1=2942; % Altura en el x1
28 y2=2920; % Altura en el Xn
29 y=((y2-y1)/(Xn-x1)).*(Xi))+y1;
30 plot(Xi,Zi,'-k*')
31 hold on
32 plot(Xi,y)
33 title('Línea de vista entre Tx y Rx') xlabel('
      X_i [Km]') ylabel('Z_i [m]')
34 grid on;
35 f=1.8*10^9; c=3*10^8; lamda=c/f;
36 R1=sqrt((lamda*(Xi*1000).*((Xn-Xi)*1000))/(Xn
      *1000)); % Rn de la elipsoide, para este
      caso especial n=1
37 elip_inf=y-R1;
38 elip_sup=y+R1;
39 figure (4)
40 plot(Xi,Zi,'-k*')
41 hold on
42 plot(Xi,y)
43 % Grafica de la elipsoide inferior
44 plot(Xi,elip_inf,'--*')
45 % Grafica de la elipsoide superior
46 plot(Xi,elip_sup,'--*')
47 title('Elipsoide de Fresnel') xlabel('X_i [Km]
      ') ylabel('Z_i [m]')
48 grid on

```

Código

Código

```

1 %% cont...
2 figure (5)
3 for k=1:length(y)
4     if (Zi(k)>y(k))
5         dif(k)=abs(Zi(k)-elip_inf(k));
6     else
7         dif(k)=0;
8     end
9 end
10 plot(Xi,Zi,'-k*')
11 hold on
12 plot(Xi,y+max(dif))
13 plot(Xi,elip_inf+max(dif),'--*')
14 plot(Xi,elip_sup+max(dif),'--*')
15 title('Elevación de la línea de vista')
16 xlabel('X_i [Km]')
17 ylabel('Z_i [m]')
18 grid on;

```

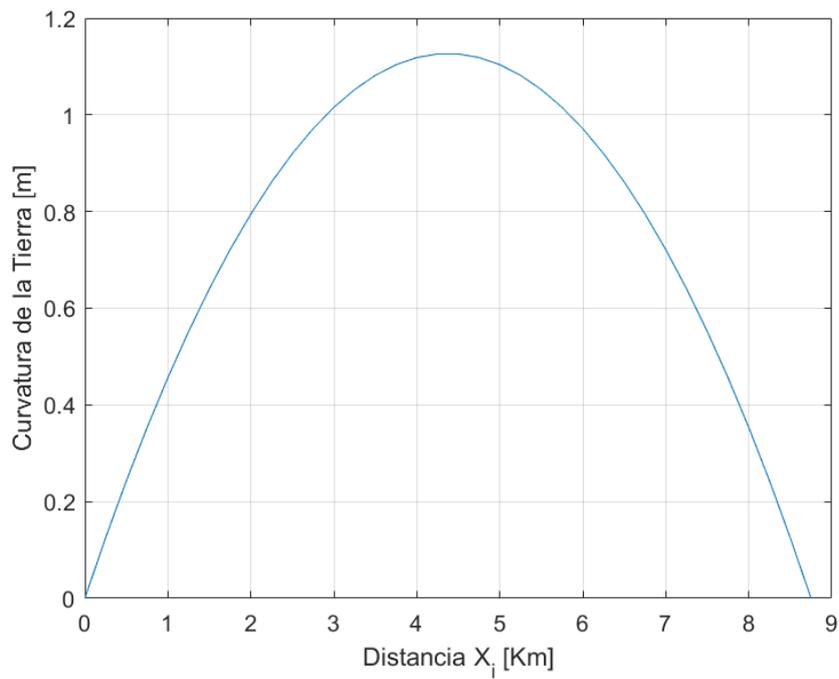


Figura 89: Curvatura de la Tierra.

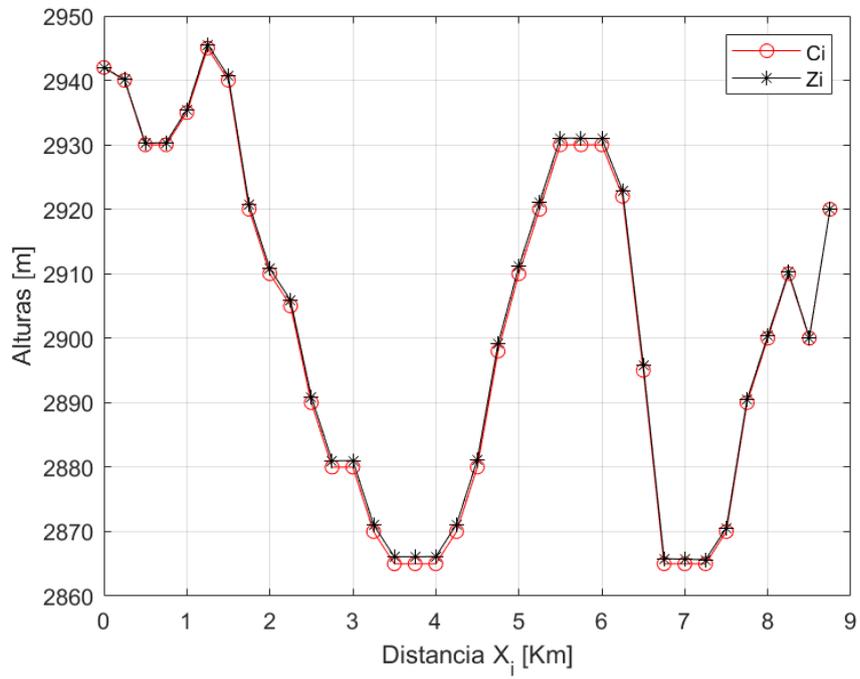


Figura 90: Gráfica de C_i y Z_i .

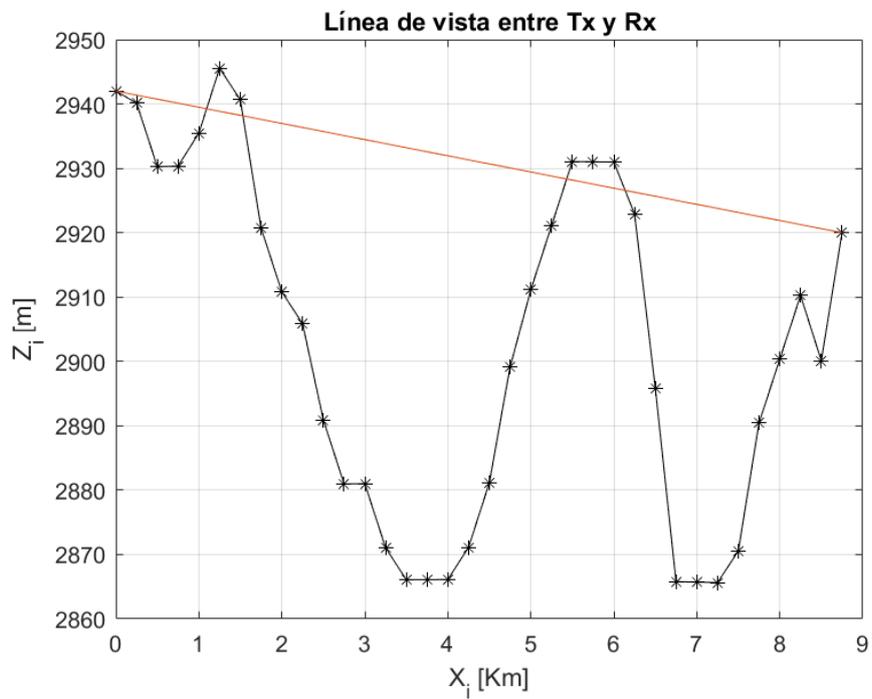


Figura 91: Línea de vista.

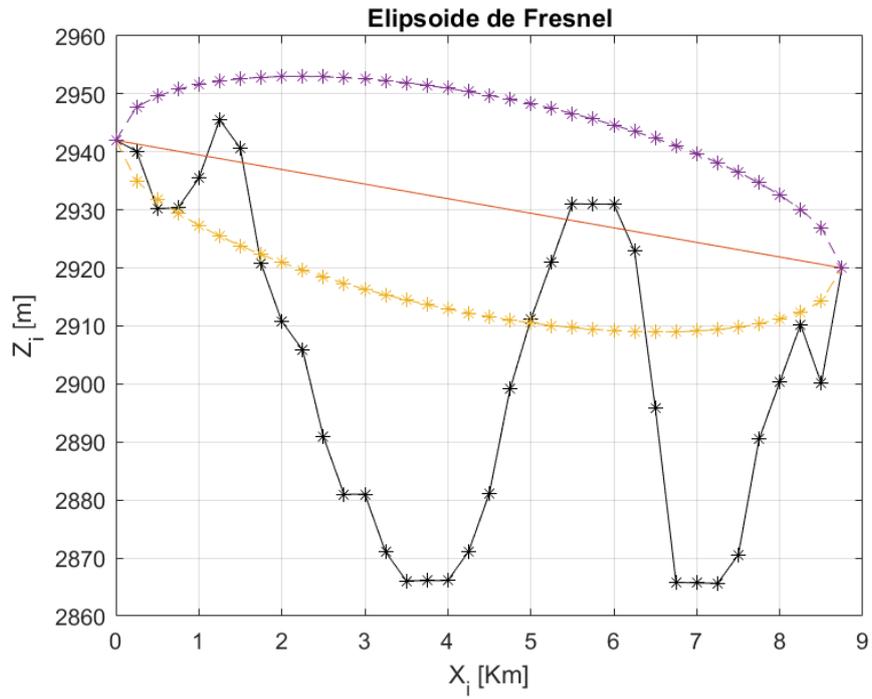


Figura 92: Zona de Fresnel.

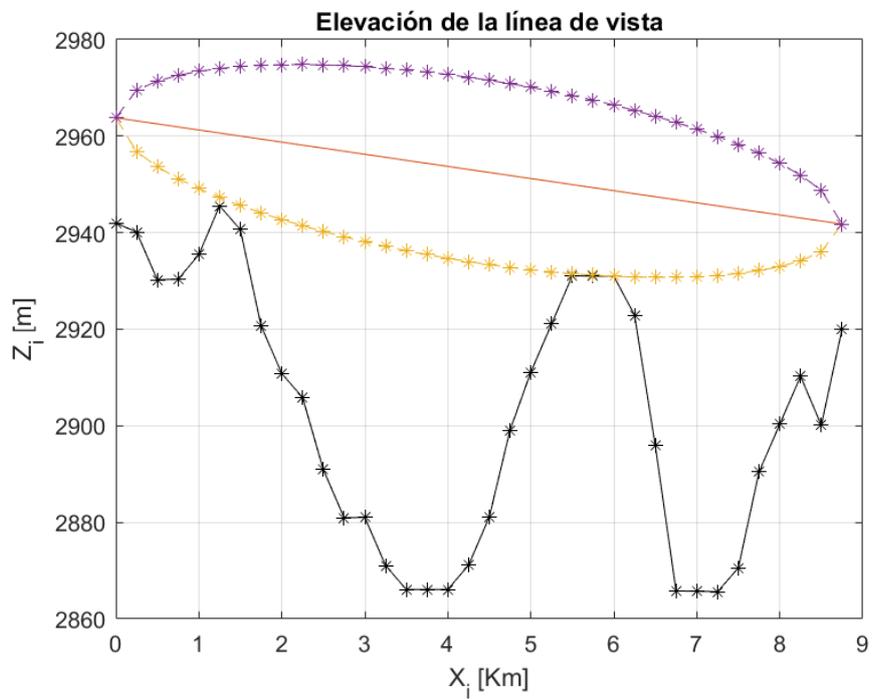


Figura 93: Radioenlace.

6. Aplicaciones en Modulación y Telefonía

En este capítulo se tratarán ejemplos sobre modulación *QAM* en donde se mostrará la constelación del modulador y se calculará la probabilidad de bit erróneo. También se realizará un ejemplo de redes jerárquicas, que son utilizadas en la telefonía, en donde se diseñará la red y se calculará la probabilidad de bloqueo en la red.

6.1. 4QAM

La *modulación* consiste en transportar la señal de información en una portadora de mayor frecuencia. Una de las modulaciones más utilizadas es la *modulación de amplitud en cuadratura* (QAM, por sus siglas en inglés), y esta puede realizar la modulación de la portadora tanto en amplitud como en fase. Por ejemplo, tenemos que la **Figura 94** muestra una constelación de una modulación *4QAM* (Haykin, 2002.).

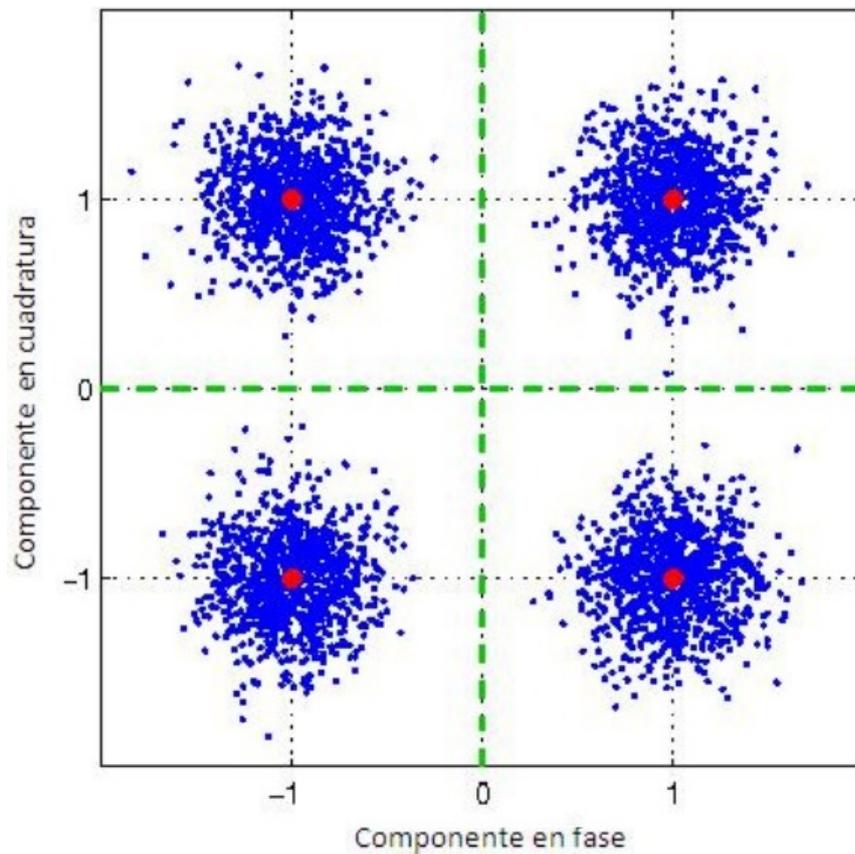


Figura 94: Constelación 4QAM.

El **código 8.1** produce gráfica de la constelación *4QAM* para un canal con ruido Gaussiano (ver **Figura 95**).

Código 8.1.

```

1 % Generación de componentes principales
2 N=1000;
3 x1=3+3*j;
4 x2=-3+3*j;
5 x3=-3-3*j;
6 x4=3-3*j;
7 % Grafica de componentes
8 plot(real(x1),imag(x1), 'kp')
9 hold on
10 plot(real(x2),imag(x2), 'kp')
11 plot(real(x3),imag(x3), 'kp')
12 plot(real(x4),imag(x4), 'kp')
13 axis([-6 6 -6 6]);
14 % Suma de ruido Gaussiano a las componentes
15 r1=x1+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
16 r2=x2+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
17 r3=x3+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
18 r4=x4+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
19 % Grafica de componente con canal Gaussiano
20 plot(real(r1),imag(r1), 'ro')
21 plot(real(r2),imag(r2), 'bo')
22 plot(real(r3),imag(r3), 'go')
23 plot(real(r4),imag(r4), 'yo')
24 xlabel('Componente en fase')
25 ylabel('Componente en cuadratura')
26 grid on
    
```

Código

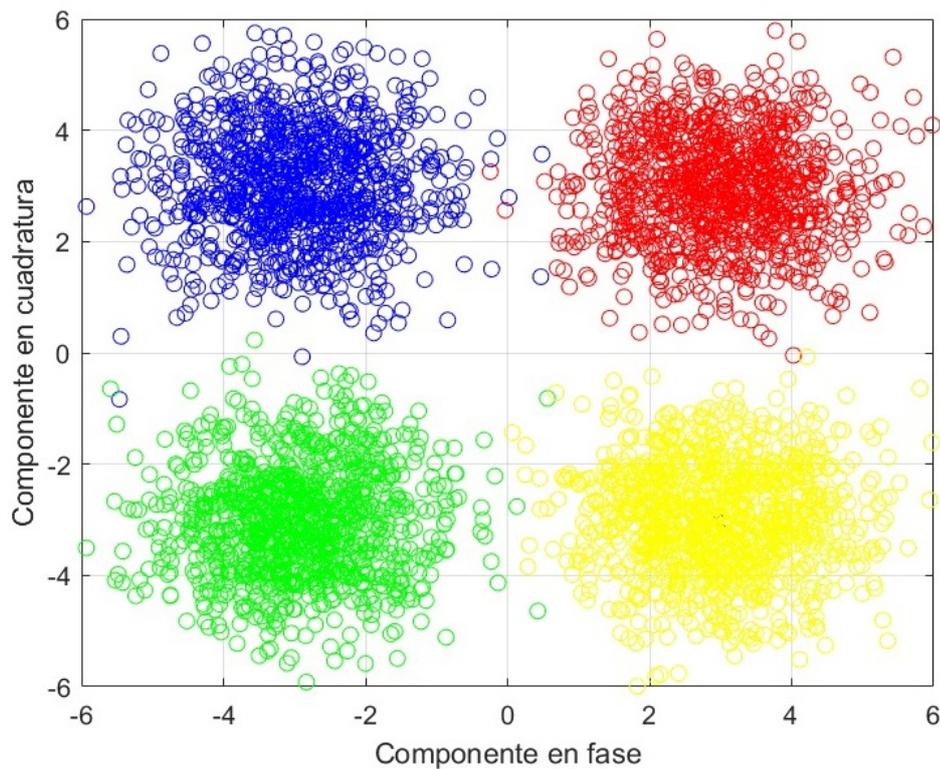


Figura 95: Constelación 4QAM.

Uno de los parámetros utilizados para la medición de la calidad de servicio (QoS, por sus siglas en inglés) es la probabilidad de bit erróneo (BER, por sus siglas en inglés), y el **código 8.2** calcula y muestra la gráfica de esta probabilidad (ver **Figura 96**).

Código 8.2.

```
1  clc
2  clear
3  b=1; % Bandera para contar elementos
4  N=5000; % Numero de V.A. Gaussianas
5  for sir=0.1:0.1:2
6  % Generacion de componentes principales
7  x1=sir+(sir)*j;
8  x2=-sir+(sir)*j;
9  x3=-sir-(sir)*j;
10 x4=sir-(sir)*j;
11 % Suma de ruido Gaussiano a las componentes
12 r1=x1+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
13 r2=x2+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
14 r3=x3+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
15 r4=x4+randn(1,N)+j.*randn(1,N);
16 conta=0; % Contador de bits erroneos
17 % Busqueda de bit erroneos
18 for k=1:N
19     % Primer Cuadrante
20     d1=sqrt((real(r1(1,k))-real(x1)).^2+((imag(r1(1,k))
21     -imag(x1))).^2);
22     d2=sqrt((real(r2(1,k))-real(x1)).^2+((imag(r2(1,k))
23     -imag(x1))).^2);
24     d3=sqrt((real(r3(1,k))-real(x1)).^2+((imag(r3(1,k))
25     -imag(x1))).^2);
26     d4=sqrt((real(r4(1,k))-real(x1)).^2+((imag(r4(1,k))
27     -imag(x1))).^2);
28     if (d2<d1 || d3<d1 || d4<d1)
29         conta=conta+1;
30     end
31     % Segundo Cuadrante
32     d1=sqrt((real(r1(1,k))-real(x2)).^2+((imag(r1(1,k))
33     -imag(x2))).^2);
34     d2=sqrt((real(r2(1,k))-real(x2)).^2+((imag(r2(1,k))
35     -imag(x2))).^2);
36     d3=sqrt((real(r3(1,k))-real(x2)).^2+((imag(r3(1,k))
37     -imag(x2))).^2);
38     d4=sqrt((real(r4(1,k))-real(x2)).^2+((imag(r4(1,k))
39     -imag(x2))).^2);
40     if (d1<d2 || d3<d2 || d4<d2)
41         conta=conta+1;
42     end
43 end
```

Código

Código

```

1 %% Cont...
2 % Tercer Cuadrante
3 d1=sqrt((real(r1(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r1(1,k))
  -imag(x3)).^2);
4 d2=sqrt((real(r2(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r2(1,k))
  -imag(x3)).^2);
5 d3=sqrt((real(r3(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r3(1,k))
  -imag(x3)).^2);
6 d4=sqrt((real(r4(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r4(1,k))
  -imag(x3)).^2);
7 if (d1<d3 || d2<d3 || d4<d3)
8     conta=conta+1;
9 end
10 % Cuarto Cuadrante
11 d1=sqrt((real(r1(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r1(1,k))
  -imag(x4)).^2);
12 d2=sqrt((real(r2(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r2(1,k))
  -imag(x4)).^2);
13 d3=sqrt((real(r3(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r3(1,k))
  -imag(x4)).^2);
14 d4=sqrt((real(r4(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r4(1,k))
  -imag(x4)).^2);
15 if (d1<d4 || d2<d4 || d3<d4)
16     conta=conta+1;
17 end
18 end
19 Pbe(b)=conta/(4*N); % Calculo de probabilidad de bit
  erroneo
20 b=b+1;
21 end
22 % Generar grafica
23 sir=0.1:0.1:2;
24 semilogy(sir,Pbe)
25 xlabel('Eb/N0')
26 ylabel('Probabilidad de bit erroneo')
27 grid on

```

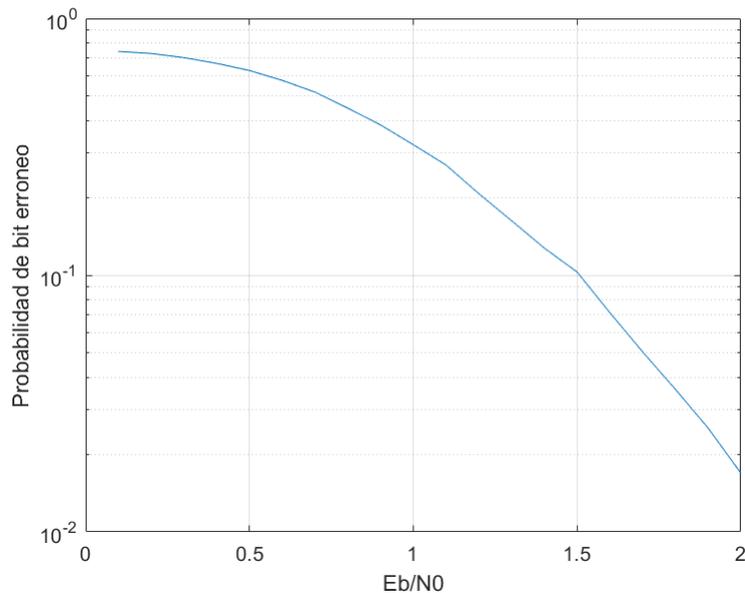


Figura 96: Probabilidad de error.

6.2. MPSK

Otra forma de calcular la probabilidad de bit erróneo es utilizando los comandos de MATLAB. El **código 8.3** calcula la razón de símbolo erróneo para un sistema *MPSK* con ruido Gaussiano (ver **Figura 97**).

Código 8.3.

```

1 %% Cont...
2 % Tercer Cuadrante
3 d1=sqrt((real(r1(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r1(1,k))
  -imag(x3))).^2);
4 d2=sqrt((real(r2(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r2(1,k))
  -imag(x3))).^2);
5 d3=sqrt((real(r3(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r3(1,k))
  -imag(x3))).^2);
6 d4=sqrt((real(r4(1,k))-real(x3)).^2+((imag(r4(1,k))
  -imag(x3))).^2);
7 if (d1<d3 || d2<d3 || d4<d3)
8     conta=conta+1;
9 end
10 % Cuarto Cuadrante
11 d1=sqrt((real(r1(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r1(1,k))
  -imag(x4))).^2);
12 d2=sqrt((real(r2(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r2(1,k))
  -imag(x4))).^2);
13 d3=sqrt((real(r3(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r3(1,k))
  -imag(x4))).^2);
14 d4=sqrt((real(r4(1,k))-real(x4)).^2+((imag(r4(1,k))
  -imag(x4))).^2);
15 if (d1<d4 || d2<d4 || d3<d4)
16     conta=conta+1;
17 end
18 end
19 Pbe(b)=conta/(4*N); % Calculo de probabilidad de bit
  erroneo
20 b=b+1;
21 end
22 % Generar grafica
23 sir=0.1:0.1:2;
24 semilogy(sir,Pbe)
25 xlabel('Eb/NO')
26 ylabel('Probabilidad de bit erroneo')
27 grid on

```



6.3. Telefonía

Una parte medular de las redes telefónicas es el enrutamiento, el cual consiste en asignar o buscar trayectorias entre el transmisor y el receptor. El Sector de Normalización de las Telecomunicaciones de la Unión Internacional de Telecomunicaciones (ITU-T, por sus siglas en inglés) define varios tipos de enrutamientos, de los cuales uno de los más utilizados es el enrutamiento jerárquico, en el cual a partir de reglas específicas permite escoger rutas alternativas de manera fija, es decir, hay niveles (jerarquías). El tráfico siempre se enruta hacia los niveles más bajos en la red (**Bellamy, 2000**).

En la **Figura 98** se muestra un ejemplo de una red, en donde P_1 y P_2 representan la probabilidad de ocupación de la ruta y $(1P_k)$ es la probabilidad de que la ruta esté libre. La probabilidad de bloqueo en la red está dada por la **ecuación 54**.

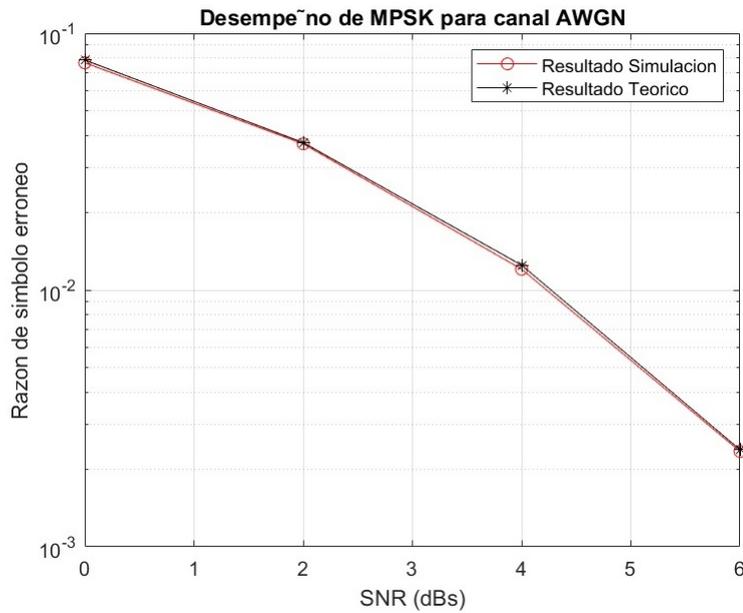


Figura 97: Sistema MPSK.

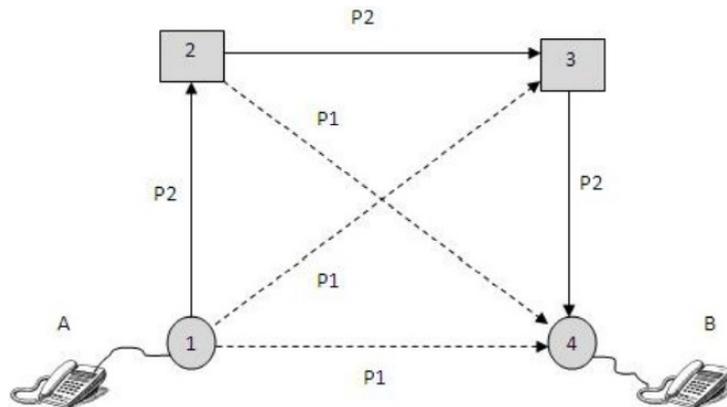


Figura 98: Redes jerárquicas.

$$PB = P_1^2 P_2 + P_1 P_2 (1 - P_1) + P_1^3 (1 - P_2) P_2 + P_1^3 (1 - P_2)^2 P_2 \quad (54)$$

Se observa en la **Figura 98** que no se pueden dar rutas hacia atrás, es decir siempre son de los niveles bajos hacia los niveles altos. El **código 8.4** calcula la probabilidad de bloqueo utilizando enrutamiento jerárquico, para el ejemplo de la **Figura 98**, cuando el *abonado A* desea comunicarse con el *abonado B*, para valores de $P_1 = 0.3$ y $P_2 = 0.005$, el programa solicita al usuario la probabilidad de ocupación de las rutas, si la ruta no existe la probabilidad es 1, también solicita como dato el nodo alternativo, por ejemplo de la **Figura 98** se observa que si la ruta que une el nodo 1 con el nodo 4 está bloqueado, entonces el nodo alternativo es el 3. El siguiente **código 8.4** genera un archivo de función “M”, para el cálculo de la probabilidad de bloqueo.

Código

Código 8.4.

```

1 % FUNCION QUE CALCULA LA PROBABILIDAD DE BLOQUEO,
  RECIBE COMO PARAMETROS LOS NODOS DE ORIGEN, DESTINO
2 % INDICES, LA MATRIX DE PROBABILIDAD Y LA MATRIX DE
  NODOS ALTERNOS
3 function [prob_bloqueo]=pb(i,d,a,b,prob,alter);
4 if(a==d) % CONDICION DE PARO
5 prob_bloqueo=0;
6 elseif(a~=d && b==0) % CONDICION DE PARO
7 prob_bloqueo=1;
8 else
9 % CALCULO DE PROBABILIDAD DE BLOQUEO CON USO RECURSIVO
  DE LA FUNCION
10 prob_bloqueo=(1-prob(a,b)).*pb(i,d,b,d,prob,alter)+ (
  prob(a,b).*pb(i,d,a,alter(a,b),prob,alter));
11 end

```

El código 8.5 produce los siguientes resultados:

Código

Código 8.5.

```

1 % CONDICIONES DEL CODIGO
2 disp('PROGRAMA QUE CALCULA LA PROBABILIDAD DE BLOQUEO
  DE EXTREMO A EXTREMO DE UNA RED DADA');
3 disp('SI NO EXISTE ENLACE LA PROBABILIDAD DEBE SER 1');
4 disp('SI NO EXISTE ENLACE ALTERNO, ENTONCES EL VALOR DE
  NODO ALTERNO DEBE SER 0');
5 % CONDICIONES INICIALES
6 x=4;
7 mat=zeros(x,x); % SE CREA MATRIX DE CEROS DE 4x4
8 traf=zeros(x,x); % SE CREA MATRIX DE CEROS DE 4x4
9 t=1; % VARIABLE PARA RECORDER LA MATRIX
10 for j=1:x-1
11 for i=x-1:-1:t
12 strcat('INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO ',
  num2str(j), 'Y', num2str(i+1))
13 % PEDIR PROBABILIDAD DE BLOQUEO PARA EL ENLACE
14 prob=input('PROBABILIDAD DE BLOQUEO= ');
15 alter=input('INGRESE NODO ALTERNO: ');
16 mat(j,i+1)=prob; % MATRIX DE PROBABILIDADES DE BLOQUEO
17 traf(j,i+1)=alter; % MATRIX DE NODOS ALTERNOS
18 end
19 t=t+1;
20 end
21 m=pb(1,x,1,x,mat,traf); % LLAMADO DE LA FUNCION PARA EL
  CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE BLOQUEO
22 disp('LA PROBABILIDAD DE BLOQUEO PARA ESTA RED ES: ')
23 disp(m)

```

```

PROGRAMA QUE CALCULA LA PROBABILIDAD DE BLOQUEO DE EXTREMO A EXTREMO DE UNA RED DADA
SI NO EXISTE ENLACE LA PROBABILIDAD DEBE SER 1
SI NO EXISTE ENLACE ALTERNO, ENTONCES EL VALOR DE NODO ALTERNO DEBE SER 0

ans =

    'INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO1Y4'

PROBABILIDAD DE BLOQUEO= 0.3
INGRESE NODO ALTERNO: 3

ans =

    'INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO1Y3'

PROBABILIDAD DE BLOQUEO= 0.3
INGRESE NODO ALTERNO: 2

ans =

    'INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO1Y2'

PROBABILIDAD DE BLOQUEO= 0.005
INGRESE NODO ALTERNO: 0

ans =

    'INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO2Y4'

PROBABILIDAD DE BLOQUEO= 0.3
INGRESE NODO ALTERNO: 3

ans =

    'INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO2Y3'

PROBABILIDAD DE BLOQUEO= 0.005
INGRESE NODO ALTERNO: 0

ans =

    'INGRESE PROBABILIDAD DE BLOQUEO ENTRE NODO3Y4'

PROBABILIDAD DE BLOQUEO= 0.005
INGRESE NODO ALTERNO: 0
LA PROBABILIDAD DE BLOQUEO PARA ESTA RED ES:
    0.0018
    
```

Figura 99: Resultados.

7. Aplicaciones en Sistemas Celulares

En esta unidad nos enfocaremos en mostrar el uso importante que tiene **MATLAB** en los sistemas celulares. Se mostrarán celdas celulares, usuarios en las celdas y se les dará movimiento a los usuarios, esto para mostrar una idea de lo que sucede en los sistemas reales de comunicación inalámbrica. Los códigos que se desarrollan en esta unidad se pueden utilizar para realizar un

análisis del comportamiento de los usuarios en una red celular 5G. Podemos simular la distribución de los usuarios en las celdas, calcular la interferencia que se presenta en cada banda y la velocidad de transmisión, esto se realiza para un esquema NOMA.

7.1. Celdas celulares

El área de cobertura de las celdas celulares en un principio se representaba mediante circunferencias, pero existen zonas de traslape y zonas que quedan sin cobertura es por esto que las celdas celulares típicamente se representan por hexágonos, para facilitar el análisis matemático.

El siguiente **código 9.1** genera la gráfica de una celda celular hexagonal, en este ejemplo la distancia desde el centro de la celda al vértice es de 10 como se puede observar en la **Figura 100**.

Código

Código 9.1.

```
1 i=-pi:pi/3:pi;  
2 x=10*cos(i);  
3 y=10*sin(i);  
4 plot(x,y)
```

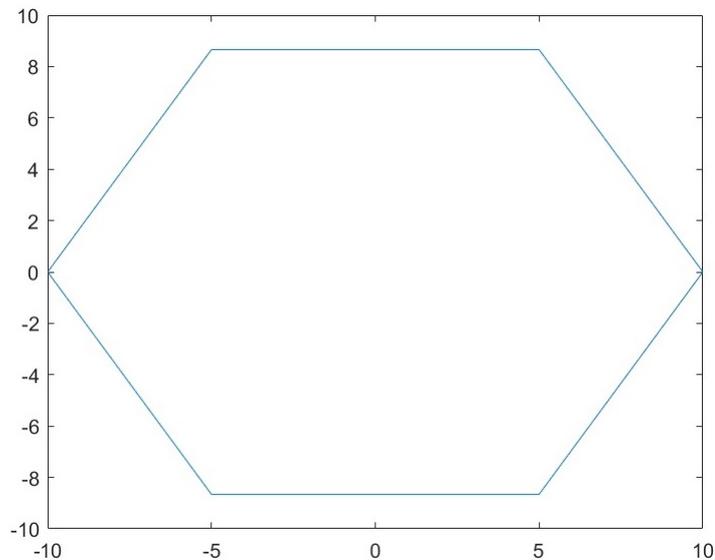


Figura 100: Celda celular.

Al analizar un sistema celular, se toma en cuenta una red de celdas, es decir, una interconexión de celdas adyacentes, esto para considerar la transferencia de llamadas, es decir el cambio de celdas. El **código 9.2** genera la gráfica de una red de 19 celdas conjuntas. Esto se reduce a un análisis geométrico (ver **Figura 101**).

Código 9.2.

```
1 i=-pi:pi/3:pi;
2 x0=10*cos(i); y0=10*sin(i);
3 x1=x0+15; y1=y0+8.6603;
4 x2=x0; y2=y1+8.6603;
5 x3=x1; y3=y0-8.6603;
6 x4=x0; y4=y3-8.6603;
7 x5=x0-15; y5=y1;
8 x6=x5; y6=y0-8.6603;
9 x7=x0; y7=y2+8.6603+8.6603;
10 x8=x1; y8=y2+8.6603;
11 x9=x8+15; y9=y2;
12 x10=x9; y10=y1-8.6603;
13 x11=x10; y11=y10-8.6603-8.6603;
14 x12=x1; y12=y11-8.6603;
15 x13=x0; y13=y12-8.6603;
16 x14=x5; y14=y12;
17 x15=x14-15; y15=y11;
18 x16=x15; y16=y10;
19 x17=x16; y17=y9;
20 x18=x5; y18=y8;
21 plot(x0,y0,'k') hold on;
22 plot(x1,y1,'k')
23 plot(x2,y2,'k')
24 plot(x3,y3,'k')
25 plot(x4,y4,'k')
26 plot(x5,y5,'k')
27 plot(x6,y6,'k')
28 plot(x7,y7,'k')
29 plot(x8,y8,'k')
30 plot(x9,y9,'k')
31 plot(x10,y10,'k')
32 plot(x11,y11,'k')
33 plot(x12,y12,'k')
34 plot(x13,y13,'k')
35 plot(x14,y14,'k')
36 plot(x15,y15,'k')
37 plot(x16,y16,'k')
38 plot(x17,y17,'k')
39 plot(x18,y18,'k')
```

Código

7.2. Usuarios en las celdas celulares

Una vez creadas las celdas celulares lo que resta para visualizar el sistema celular completo, es decir, generar usuarios dentro de la celda. El **código 9.3** genera usuarios aleatorios dentro de una celda, los grafica y genera el efecto de movimiento de los usuarios, los cuales tienen 4 grados de libertad, es decir se mueven hacia el norte, sur, este y oeste. Cada movimiento se realiza cada 0.7 segundos, esto para visualizarse.

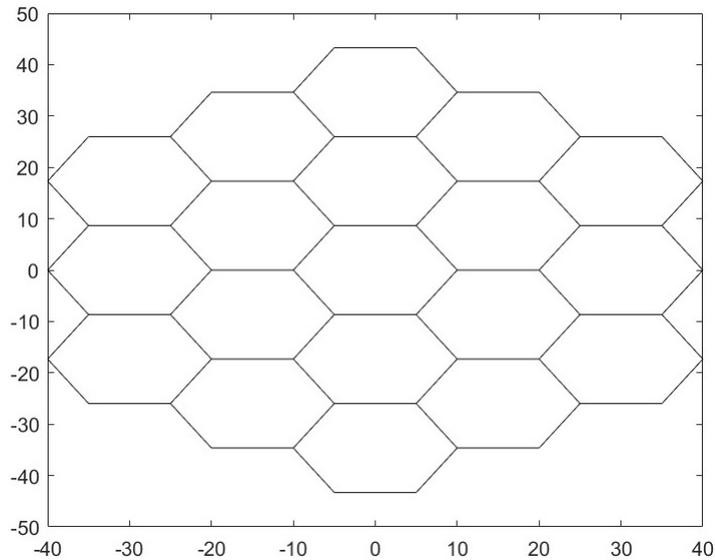


Figura 101: Red celular.

Código 9.3.

```

1 % Generar Celdas
2 i=-pi:pi/3:pi;
3 x=10*cos(i);
4 y=10*sin(i);
5 % Generar N usuarios
6 N=1000;
7 xv=10*randn(N,1);
8 yv=10*randn(N,1);
9 % Colocar los usuarios dentro de la celda
10 in=inpolygon(xv,yv,x,y);
11 m1=xv(in);
12 m2=yv(in);
13 % Generar movimientos de los usuarios cada 0.7 seg
14 for u=1:30
15     pause (0.7)
16     drawnow
17     clf
18     nuevo=rand(length(m1),1);
19     if (sum(nuevo)>length(m1)/2)
20         mnu=m1+nuevo;
21         mnu2=m2+nuevo;
22     else
23         mnu=m1-nuevo;
24         mnu2=m2-nuevo;
25     end

```

Código

Código

```

1 %% Cont...
2 % Limites de la celda, para asegurar que los usuarios
  queden dentro
3 for p=1:length(m1)
4 if (mnu(p)<=-10)
5 mnu(p)=mnu(p)+1;
6 elseif(mnu(p)>=10)
7 mnu(p)=mnu(p)-1
8 elseif(mnu2(p)<=-8.6603)
9 mnu2(p)=mnu2(p)+1;
10 elseif(mnu2(p)>=8.6603)
11 mnu2(p)=mnu2(p)-1;
12 end
13 if (atan(mnu(p)/mnu2(p))>=0.52 || atan(mnu(p)/mnu2(p))
  <=-0.52)
14 if (mnu(p)>=0 && mnu2(p)>=0)
15 mnu(p)=mnu(p)-1;
16 mnu2(p)=mnu2(p)-1;
17 elseif(mnu(p)>=0 && mnu2(p)<0)
18 mnu(p)=mnu(p)-1;
19 mnu2(p)=mnu2(p)+1;
20 elseif(mnu(p)<0 && mnu2(p)>=0)
21 mnu(p)=mnu(p)+1;
22 mnu2(p)=mnu2(p)-1;
23 elseif(mnu(p)<0 && mnu2(p)<0)
24 mnu(p)=mnu(p)+1;
25 mnu2(p)=mnu2(p)+1;
26 end
27 end
28 plot(x,y,mnu(p),mnu2(p),'.b')
29 hold on
30 end
31 end

```

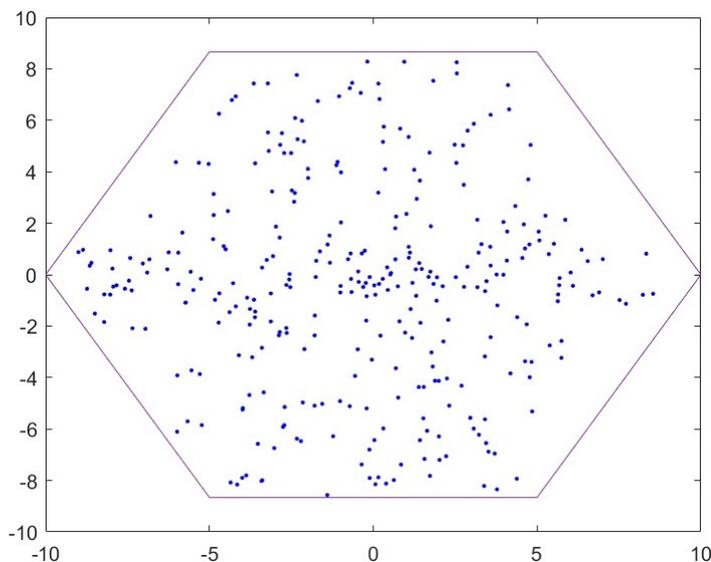


Figura 102: Usuarios en la celda.

Por último debemos distinguir a los usuarios, es decir, los usuarios cercanos a la estación base los consideramos con buena condición de canal (esto sin considerar los desvanecimientos) y los colocaremos en color ocre, los usuarios que se encuentren en condiciones aceptables lo colocaremos con color azul y los usuarios que se ubican en el borde de la celda, en malas condiciones de canal, los colocaremos en color rojo, esto se muestra en el **código 9.4**.

Código 9.4.

```
1 % Generar Celdas
2 i=-pi:pi/3:pi;
3 x=10*cos(i);
4 y=10*sin(i);
5 % Generar N usuarios
6 N=1000;
7 xv = 10*randn(N,1);
8 yv = 10*randn(N,1);
9 % Colocar los usuarios dentro de la celda
10 in = inpolygon(xv,yv,x,y);
11 m1=xv(in);
12 m2=yv(in);
13 % Generar movimientos de los usuarios cada 0.7 seg
14 for u=1:30
15     pause (0.7)
16     drawnow
17     clf
18     nuevo=rand(length(m1),1);
19     if sum(nuevo)>length(m1)/2
20         mnu=m1+nuevo;
21         mnu2=m2+nuevo;
22     else
23         mnu=m1-nuevo;
24         mnu2=m2-nuevo;
25     end
26 % Limites de la celda, para asegurar que los usuarios
    queden dentro
27 for p=1:length(m1)
28     if (mnu(p)<=-10)
29         mnu(p)=mnu(p)+1;
30     elseif(mnu(p)>=10)
31         mnu(p)=mnu(p)-1;
32     elseif(mnu2(p)<=-8.6603)
33         mnu2(p)=mnu2(p)+1;
34     elseif(mnu2(p)>=8.6603)
35         mnu2(p)=mnu2(p)-1;
36     end
37     if (atan(mnu(p)/mnu2(p))>=0.52 || atan(mnu(p)/mnu2(p))
        <=-0.52)
38         if (mnu(p)>=0 && mnu2(p)>=0)
39             mnu(p)=mnu(p)-1;
40             mnu2(p)=mnu2(p)-1;
41         elseif(mnu(p)>=0 && mnu2(p)<0)
42             mnu(p)=mnu(p)-1;
43             mnu2(p)=mnu2(p)+1;
44         elseif(mnu(p)<0 && mnu2(p)>=0)
45             mnu(p)=mnu(p)+1;
46             mnu2(p)=mnu2(p)-1;
47         elseif(mnu(p)<0 && mnu2(p)<0)
48             mnu(p)=mnu(p)+1;
49             mnu2(p)=mnu2(p)+1;
50         end
51     end
52 end
```

Código

Código

```

1 %% Cont...
2 % Asignar Colores
3 for o=1:length(m1)
4 if (sqrt(mnu(o)^2 + mnu2(o)^2) <= 5.9 && sqrt(mnu(o)^2+
      mnu2(o)^2) > 1.589)
5 col= 'bo';
6 elseif (sqrt(mnu(o)^2+mnu2(o)^2) <= 1.589 && sqrt(mnu(o)
      )^2+mnu2(o)^2) > 0.9)
7 col= 'g+';
8 elseif (sqrt(mnu(o)^2+ mnu2(o)^2) <= 0.9)
9 col= 'g+';
10 else
11 col= 'r*';
12 end
13 hold on
14 plot(x,y,mnu(o),mnu2(o),col)
15 end
16 end

```

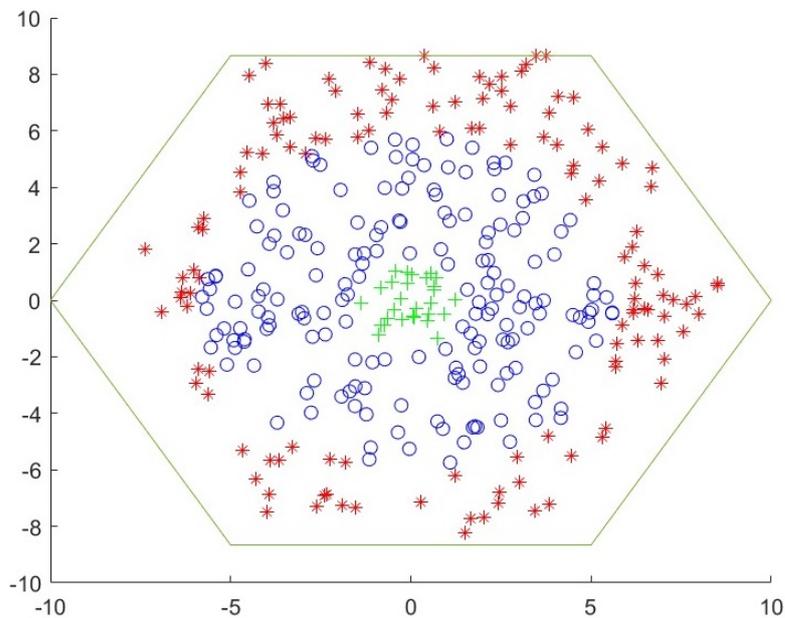


Figura 103: Usuarios en la celda.

7.3. Esquema NOMA para 5G

Hoy en día, las tecnologías de telecomunicaciones en general están tendiendo hacia la integración de todo tipo de clase de servicios, básicamente a través de una red global de comunicaciones. Adicional, se busca que dicha red tenga accesibilidad total, en otras palabras, que todo tipo de usuario pueda acceder a ésta desde cualquier parte, sin tener que estar en una red fija, simplemente mediante la utilización de un terminal móvil (Butt et al., 2017).

Un desafío importante para 5G será la mejora de la eficiencia espectral, ya que con esta se busca ofrecer altas velocidades de transferencia de datos a mayor número de teléfonos inteligentes. La eficiencia espectral se puede incrementar al aumentar el orden de modulación (se refiere a la cantidad de bits de información que se transmiten por símbolo en una señal modulada) y, además, se pueden emplear nuevos esquemas de acceso al medio para mejorar ésta. De los esquemas de acceso al medio podemos destacar el acceso múltiple no ortogonal (NOMA),

el cual garantiza que múltiples usuarios puedan compartir el mismo recurso (Butt et al., 2017).

Recientemente *NOMA* se ha destacado como una de las técnicas más prometedoras en cuanto al acceso múltiple para la tecnología 5G, lo anterior debido a que soluciona la problemática de acomodar a más usuarios en el mismo recurso haciendo la asignación de éste en dominios de potencia o código. Estos beneficios se observan comparando esta técnica con la del acceso múltiple ortogonal, (Vasquez-Toledo & Lara-Rodríguez, 2017).

En conclusión, *NOMA* radica en el uso sincrónico del mismo espectro de radioeléctrico para múltiples usuarios a expensas de mínimas interferencias entre ellos. Las redes que trabajan bajo el esquema de *NOMA* pueden contemplar a un mayor número de usuarios en las bandas de espectro radioeléctrico que esté disponible, y pueden ofrecer a los usuarios individuales con un mayor ancho de banda, (Vasquez-Toledo & Lara-Rodríguez, 2017).

A continuación, se mencionan las ventajas que se observan al emplear *NOMA* en comparación con el Acceso Múltiple Ortogonal (*OMA*, por sus siglas en inglés), (Vasquez-Toledo & Lara-Rodríguez, 2017):

- Una mejor eficiencia espectral.
- Existe una conectividad masiva.
- Presenta baja latencia de transmisión y el costo de señalización.

Para que el esquema *OMA* presente resultados exitosos, se deben formar grupos de usuarios y permitir que estos transmitan en el mismo recurso radioeléctrico con cierta potencia adecuada, así, posteriormente emplear técnicas de cancelación de interferencia sucesiva, mejor conocida como *SIC* en el/los receptor/es para finalmente decodificar la señal de mensaje de diferentes usuarios. En la **Figura 104** se presenta el esquema *NOMA* de manera básica a través de un multiplexado en el dominio de la potencia con un receptor *SIC*, (Vasquez-Toledo & Lara-Rodríguez, 2017).

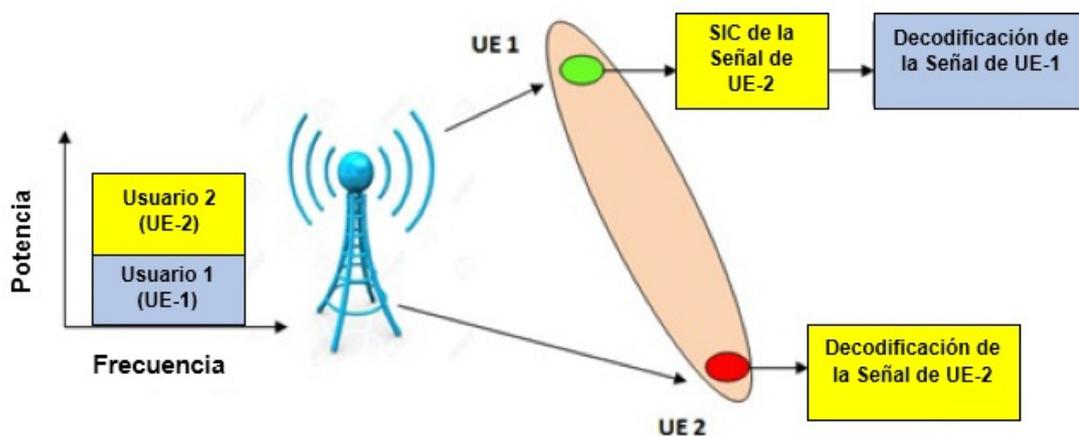


Figura 104: NOMA con SIC en el receptor.

Por sencillez se considera el empleo de una sola antena transmisora y una antena receptora. En el esquema se observa que la estación base transmite una señal (x_i) al usuario i (UE_i), con potencia P_i , (Vasquez-Toledo & Lara-Rodríguez, 2017).

En NOMA, el proceso de cancelar la interferencia sucesiva se realiza en el receptor del UE. El orden óptimo para la decodificación está en el orden decreciente de ganancia del canal normalizado por el ruido y la potencia de interferencia entre celdas (llamado simplemente ganancia del canal). En resumen, se supone que cualquier usuario puede decodificar correctamente las señales de otros usuarios cuyo orden de decodificación viene antes del usuario correspondiente. Por lo tanto, UE_i puede eliminar la interferencia del usuario j cuya ganancia de canal $|h_j|^2$ es menor a la del usuario i , $|h_i|^2 (j < i)$, es decir, las ganancias de los canales se ordenan de mayor a menor (Borja-Benítez, Vasquez-Toledo, Tirado-Méndez, Borja-Benítez, & Marcelin-Jiménez, 2020).

En la Figura 105, se puede observar que el usuario 2 ($UE - 2$) no realiza la cancelación de interferencia ya que este es el primero en el orden de decodificación. El $UE - 1$ primero decodifica la señal de $UE - 2$ y resta de su componente de señal recibida, y a continuación se decodifica la señal del $UE - 1$ sin interferencia de la señal del $UE - 2$ (Borja-Benítez et al., 2020).

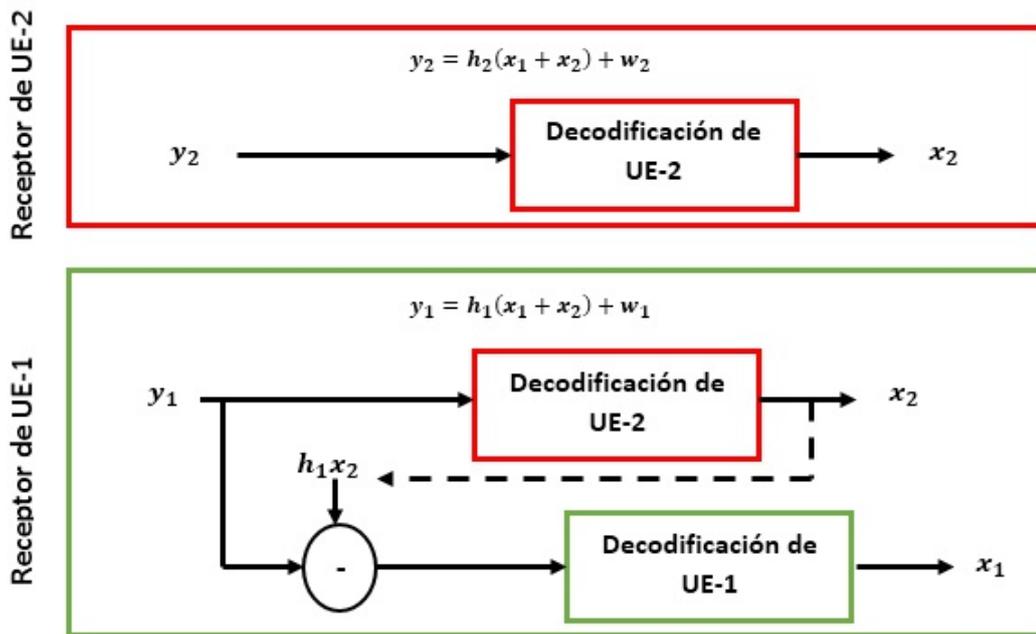


Figura 105: Proceso SIC.

La tasa de transmisión para cada usuario se calcula como sigue:

- Esquema NOMA

$$R_1 = \log_2 \left(1 + \frac{P_1 |h_1|^2}{N_{0,1}} \right)$$

$$R_2 = \log_2 \left(1 + \frac{P_2 |h_2|^2}{P_1 |h_2|^2 N_{0,2}} \right)$$

- Esquema OMA

$$R_1 = \alpha \log_2 \left(1 + \frac{P_1 |h_1|^2}{\alpha N_{0,1}} \right)$$

$$R_2 = (1 - \alpha) \log_2 \left(1 + \frac{P_2 |h_2|^2}{(1 - \alpha) N_{0,2}} \right)$$

donde

R_1	es la tasa de transmisión normalizado del usuario 1 (bps/Hz).
R_2	es la tasa de transmisión normalizado del usuario 2 (bps/Hz).
P_1	es el porcentaje de potencia asignado al usuario 1.
P_2	es el porcentaje de potencia asignado al usuario 2.
$(h_1 ^2)/N_{0,1}$	es la ganancia de canal del usuario 1.
$(h_2 ^2)/N_{0,2}$	es la ganancia de canal del usuario 2.
α	es el porcentaje de ancho de banda asignado al usuario 1.

El **código 9.5** simula el canal para dos usuarios que comparten el mismo recurso utilizando la tecnología *NOMA*. Calcula la ganancia del canal, utilizando un canal con desvanecimiento log-normal. Utiliza la función *Ganancia.m* (**código 9.6**) para calcular la ganancia de la antena que depende del ángulo de incidencia. Este código también calcula las tasas de transmisión para cada usuario en ambos esquemas (*OMA* y *NOMA*).

Código 9.5.

```

1 % Usuario 1
2 x1=0.2; % Coordenada X del usuario 1
3 y1=0.66603; % Coordenada Y del usuario 2
4 d1=sqrt(x1.^2+y1.^2); % Distancia del usuarios 1 a la
   Antena Servidor
5 ang1=atan(y1./x1)*180/pi; % Angulo
6 G1=Ganancia(ang1); % Ganancia
7 % Usuario 2
8 x2=1; % Coordenada X del usuario 2
9 y2=-0.86; % Coordenada Y del usuario 2
10 d2=sqrt(x2.^2+y2.^2); % Distancia del usuarios 2 a la
   Antena Servidor
11 ang2=atan(y2./x2)*180/pi; % Angulo
12 G2=Ganancia(ang2); % Ganancia
13 NGaussianas = 5000; % Numero de variables aleatorias
14 media = 4; % Valor de la media para ambiente de
   propagación urbano
15 sigma = 8; % Valor de la varianza para ambiente de
   propagación urbano
16 % Calculo de Parametros para el usuario 1
17 media1=10*log10((d1^-4)*G1); % Media
18 Gaussianas1 = randn(1,NGaussianas);
19 inter1 = sigma*Gaussianas1 + media1; % Canal Gaussiano
20 lognormal1= 10.^(inter1/10); % Canal Log-Normal
21 Gan_canal_1=10*log10(mean(abs(lognormal1))) % Valores
   en dB

```

Código

Código

```

1 %% cont...
2 % Calculo de Parametros para el usuario 2
3 media2=10*log10((d2^-4)*G2); % Media
4 Gaussianas2 = randn(1,NGaussianas);
5 inter2 = sigma*Gaussianas2 + media2; % Canal Gaussiano
6 lognormal2= 10.^(inter2/10); % Canalo Log-Normal
7 Gan_canal_2=10*log(mean(abs(lognormal2))) % Valores en
  dB
8 % Asignación de Potencias para cada usuario
9 P1=0.2;
10 P2=0.8;
11 % Tasas para NOMA
12 R1_NOMA=log2(1+P1*mean(abs(lognormal1)))
13 R2_NOMA=log2(1+P2*mean(abs(lognormal2))/(P1*mean(abs(
  lognormal2))+1))
14 % Tasas para OMA
15 alfa=0.5; % Porcentaje de ancho de banda asignado al
  usuario 1
16 R1_OMA=alfa*log2(1+(P1*mean(abs(lognormal1))/alfa))
17 R2_OMA=(1-alfa)*log2(1+(P2*mean(abs(lognormal2))/(1-
  alfa)))

```

Código 9.6.

```

1 %% Este programa sirve para obtener la ganancia de la
  antena
2 function [G] = Ganancia(ang)
3 ar = degtorad(ang);
4 q=-4; %nivel de ganancia de la antena
5 p=-15; %nivel promedio de ganancia normalizada para el
  l bulo lateral.
6 grado = 0;
7 raiz=sqrt((1-p)/(1-q))*(pi/3);
8 %ar=ang;
9 if(abs(ar)<=raiz)
10     grado=1-(((1-q)/((pi/3)^2))*(ar^2));
11 elseif (abs(ar)>raiz)
12     grado=p;
13 end
14 G=grado;
15 end

```

Código

El código 9.5 produce:



Figura 106: Ganancias de canal.

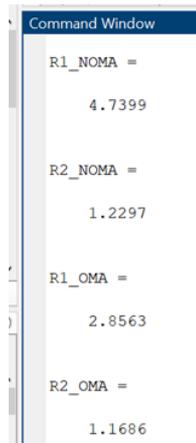


Figura 107: Tasas de transmisión.

Comparando los resultados en las tasas de transmisión para cada esquema se puede observar que *NOMA* tiene ganancia respecto a *OMA* para cada usuario. Para el usuario 1 se tiene una ganancia mayor al 60 %, y para el usuario 2 mayor del 6 %. Con esto se demuestra la ventaja de utilizar el esquema *NOMA*.

8. Introducción a SIMULINK

MATLAB nos ofrece una herramienta llamada **Simulink**, la cual es un entorno muy popular, ya que es un simulador multidominio y su diseño se basa en modelos de diagramas de bloques. Es compatible con:

- El sistema de nivel de diseño.
- Simulación.
- Generación automática de código.
- Prueba continua y verificación de sistemas embebidos.

Además, **Simulink** ofrece el servicio de editor gráfico, contiene bibliotecas de bloques que son personalizadas y, también soluciones para el modelado, así como la simulación de sistemas dinámicos. Este entorno está contenido en **MATLAB**, lo que es muy conveniente ya que podemos añadir códigos de **MATLAB** en los modelos y, además, exportar los resultados obtenidos de las simulaciones para **MATLAB**, lo anterior para realizar análisis posteriores (**Beucher & Weeks, 2008**).

8.1. Ingresar a SIMULINK

Para ingresar a **Simulink** inicialmente debemos ejecutar la herramienta desde la ventana de comando de **MATLAB**, escribiendo *simulink* en la línea de comandos o la otra opción es dando click en el icono como el mostrado a la derecha.



A continuación, se desplegará una nueva ventana como la mostrada en la **Figura 108**. En ésta, podremos observar todas las librerías de los bloques disponibles en **Simulink**. Del lado izquierdo podemos observar lo correspondiente a todas las librerías disponibles y del lado derecho todo el contenido de cada una de las librerías.

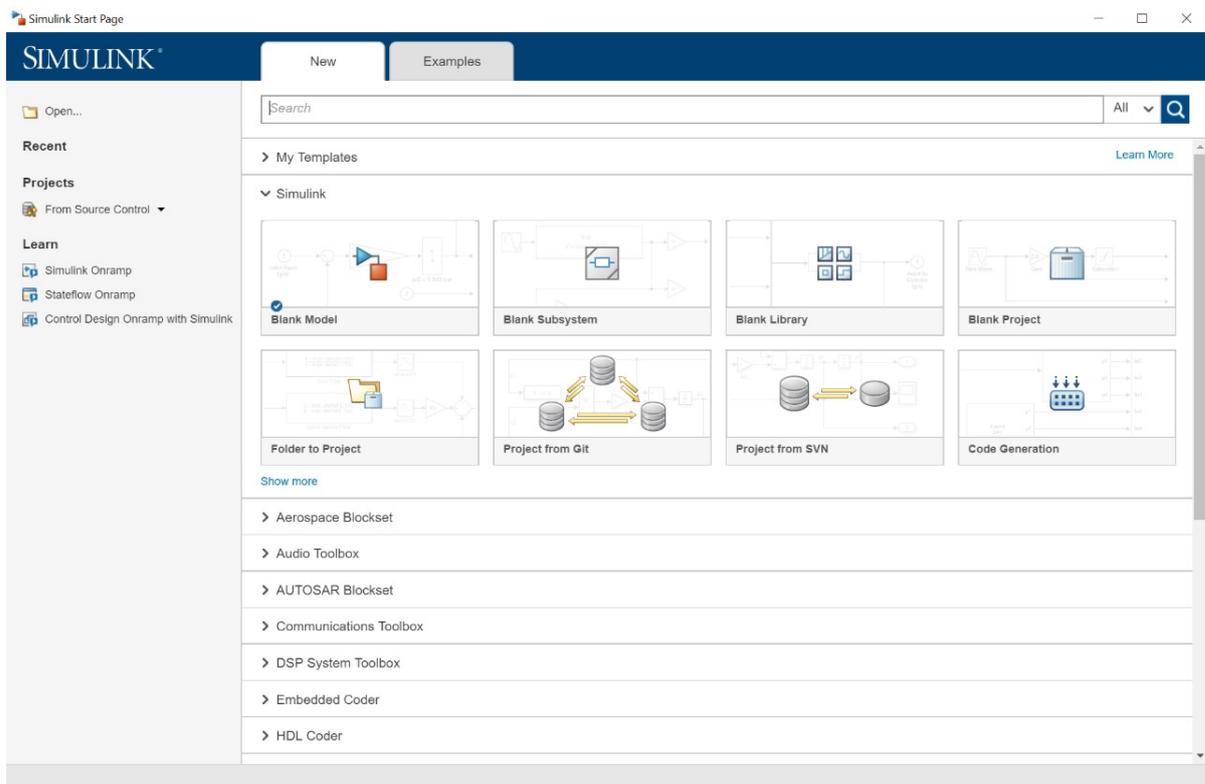


Figura 108: Librerías.

Finalmente, en la ventana de inicio de **Simulink**, en la parte superior, podemos observar diversas herramientas tales como la búsqueda de un bloque determinado a partir de su nombre.

8.2. Entorno de trabajo de SIMULINK

Para poder crear archivos necesitamos abrir un nuevo fichero, para esto, debemos elegir un nuevo fichero en el que se guardará el modelo, damos clic en el menú *NEW*, *Blank Model*, *Create Model*, como se muestra en la **Figura 109** (Beucher & Weeks, 2008).

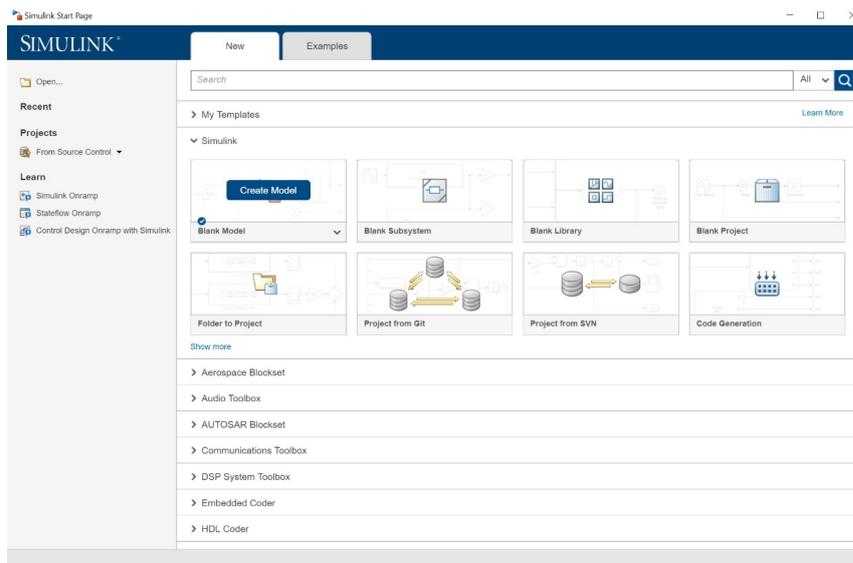


Figura 109: Nuevo fichero.

En esta nueva ventana crearemos el modelo (ver Figura 110), observemos que aún no se le ha asignado nombre.

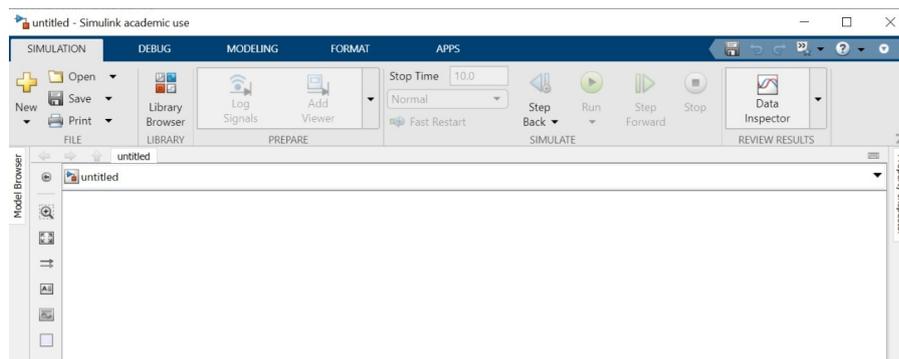


Figura 110: Nuevo fichero.

8.3. Muestreo y Cuantización

Recordando los ejemplos mostrados en el **Capítulo 3**, se trabajó con el teorema de muestreo y se desarrolló el código para el muestreo ideal. En esta sección se desarrollará este ejemplo mediante bloques.

En la ventana de librerías, en la opción **Simulink**, elegir la librería *Sources* y en esta buscar y elegir *Sine Wave*, arrastrar este bloque en la ventana del fichero, como se muestra en la **Figura 111**. En el bloque colocado en el fichero, hacer doble clic, se desplegará una ventana de configuración del bloque en la cual se eligen las características de la señal analógica que queremos generar, esto se observa en la **Figura 112**.

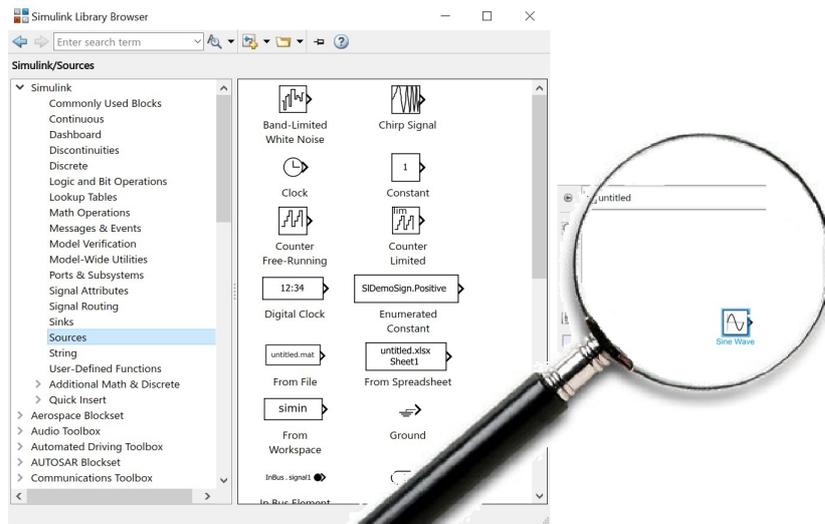


Figura 111: Selección de bloque.

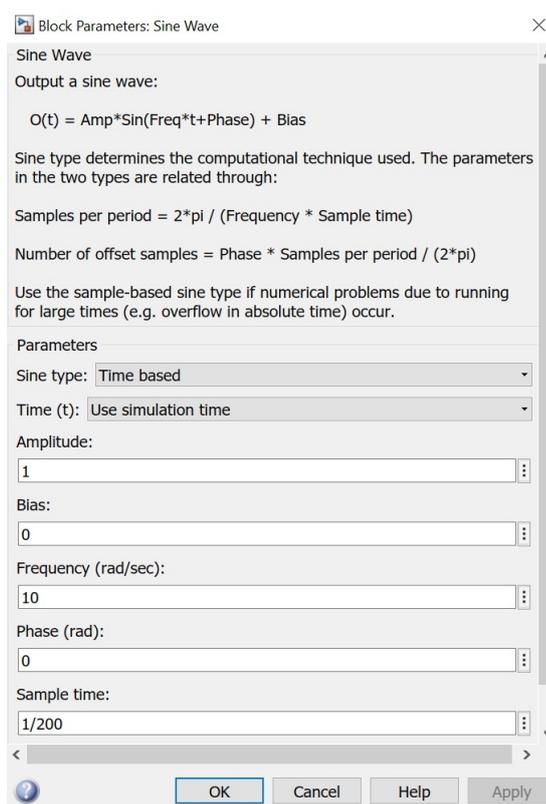


Figura 112: Configuración de características.

En la ventana de librerías, en la opción *SIMULINK*, elegir la librería *Sources* y en esta buscar y elegir *Pulse Generator*, y configurar las características para que la duración del pulso sea muy pequeña, como se muestra en la **Figura 113**.

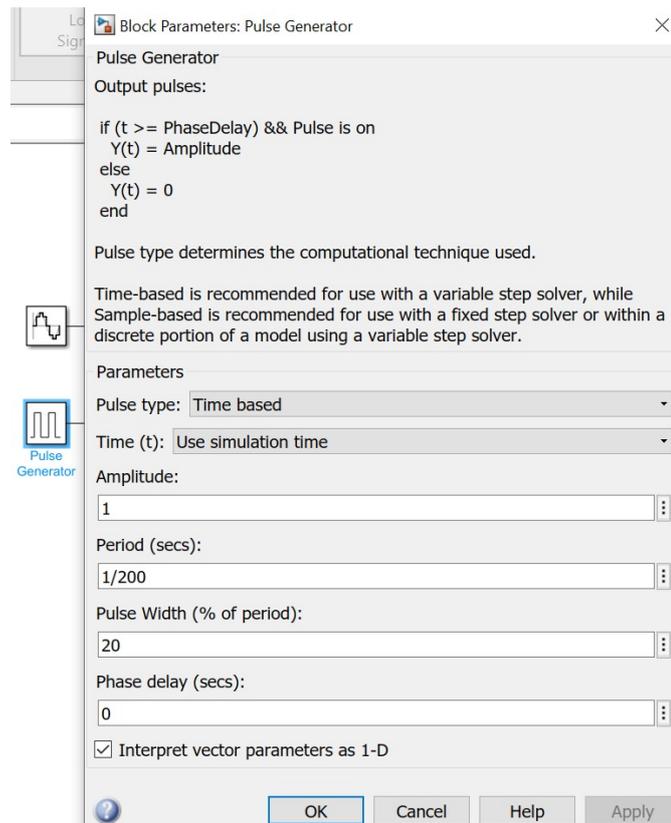


Figura 113: Configuración de características.

En la ventana de librerías, en la opción *SIMULINK*, elegir la librería *Math Operations* y en esta buscar y elegir *Product*, como se muestra en la Figura 114.

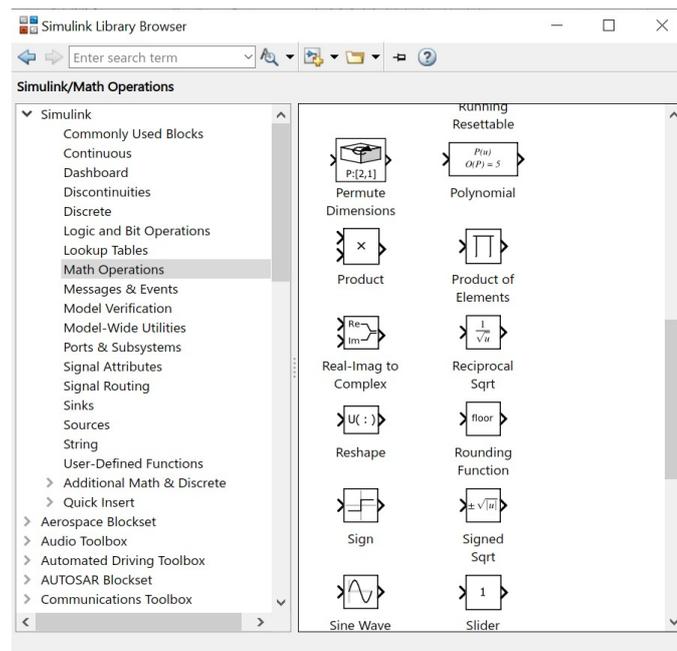


Figura 114: Selección de bloque.

Lo que resta es agregar un bloque para presentar los resultados, para esto, en la ventana de librerías, en la opción *SIMULINK*, elegir la librería *Sinks* y en esta buscar y elegir *Scope*, como se muestra en la **Figura 115**.

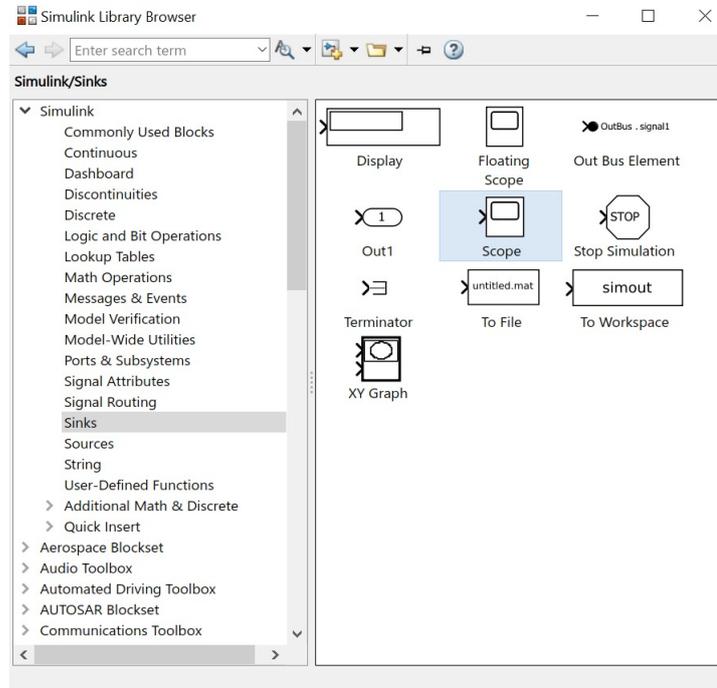


Figura 115: Selección de bloque.

Ya que tenemos estos bloques en el fichero, lo que sigue es la interconexión de estos bloques. Conectar estos bloques como se muestra en la **Figura 116**.

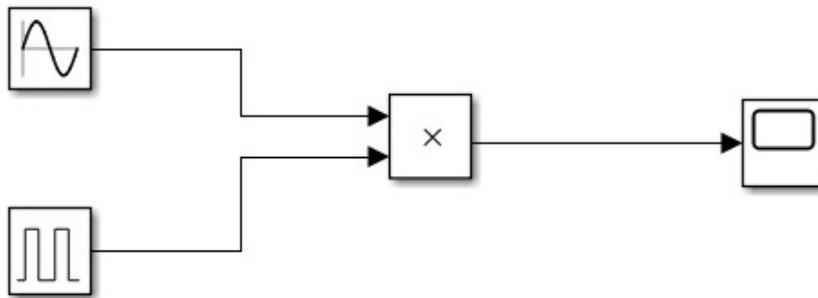


Figura 116: Conexión de bloques.

Teniendo conectado los bloques el siguiente paso es iniciar la simulación como se muestra en la **Figura 117**.

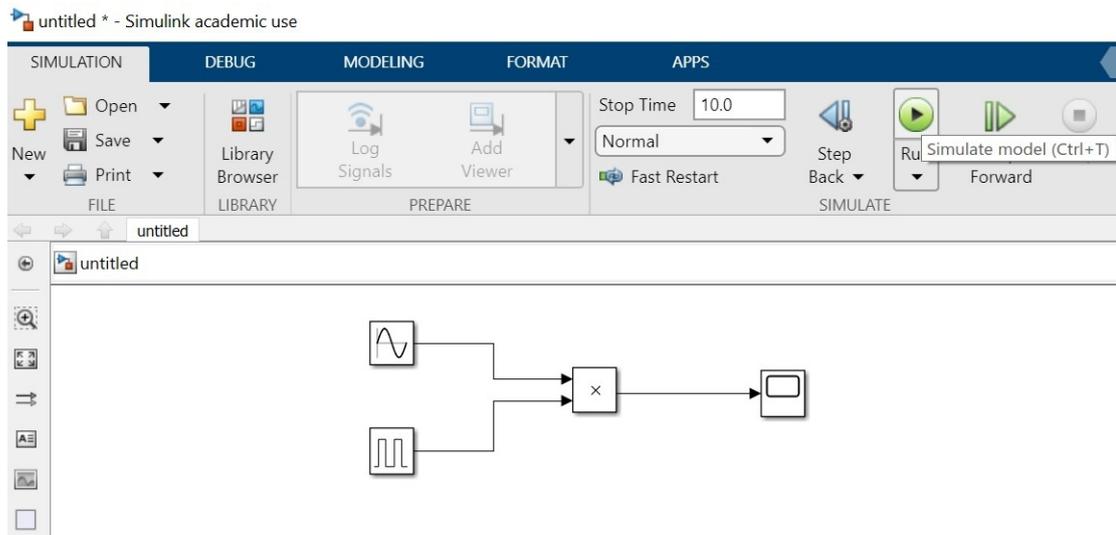


Figura 117: Simulación.

Para observar los resultados de la simulación, debemos hacer un doble clic sobre el bloque *Scope*, el cual arroja el resultado, como se observa en la **Figura 118**.

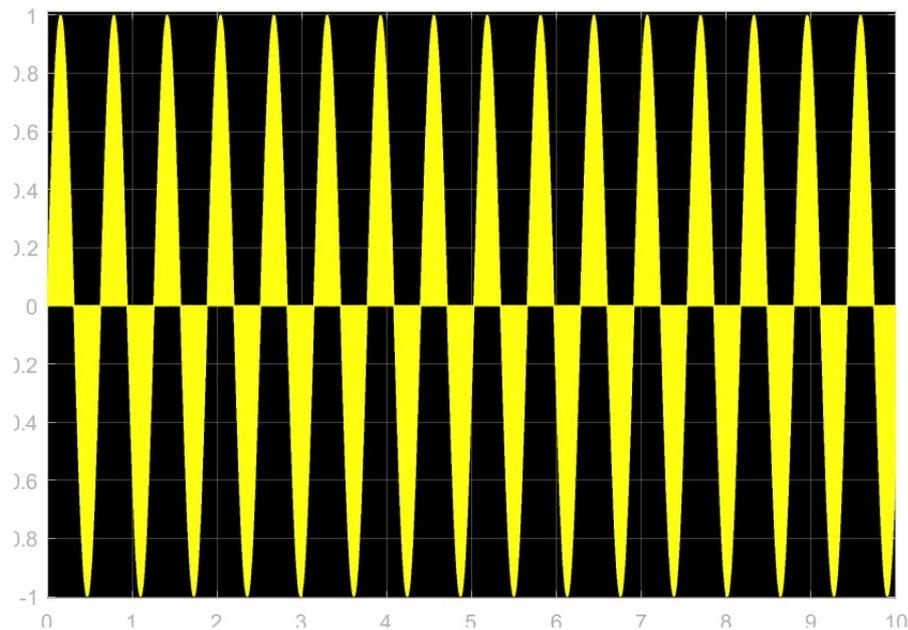


Figura 118: Resultado de simulación.

Se observa en la **Figura 118** el muestreo de la señal analógica. En la **Figura 118**, en donde se despliega el resultado, podemos encontrar *opciones de figura*, en las cuales podemos darle zoom a la figura tanto en el eje x como en el eje y . Utilizando estas opciones obtenemos la **Figura 119**.

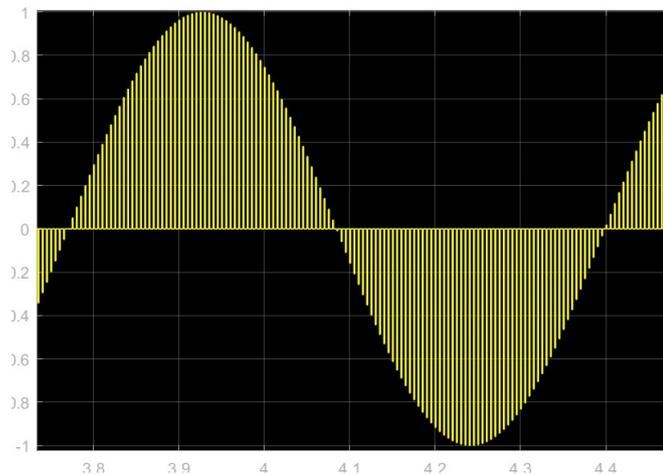


Figura 119: Resultado de simulación.

Para el ejemplo de cuantización, se siguen los mismos pasos, en la ventana de librerías elegir la *simulink*, dentro de la cual se busca *Discontinuities*, y elegir *Quantizers*, en la ventana derecha elegir y arrastra el bloque *Quantizer*, como se muestra en la **Figura 120**. Este bloque tiene como entrada el bloque que genera la señal analógica (*Sine Wave*) y como salida un bloque *Scope*.

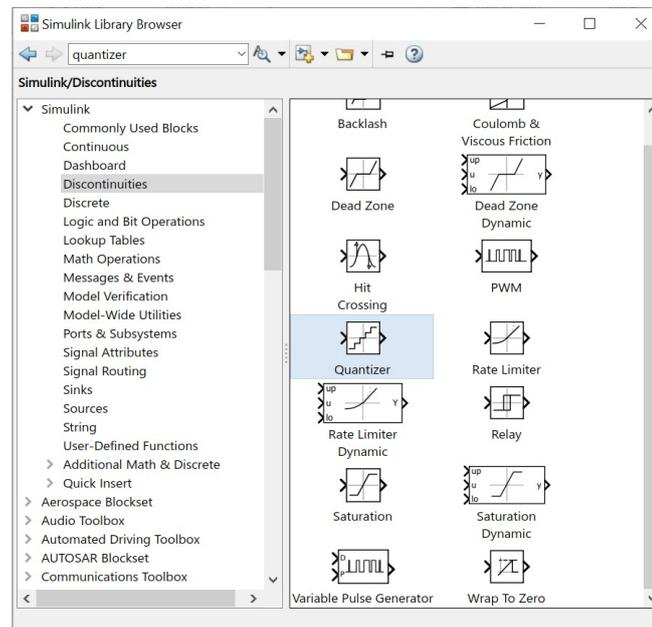


Figura 120: Selección de bloque.

Se siguen los mismos pasos explicado para el ejemplo anterior, para la simulación del fichero, y se obtiene el resultado mostrado en la **Figura 121**.

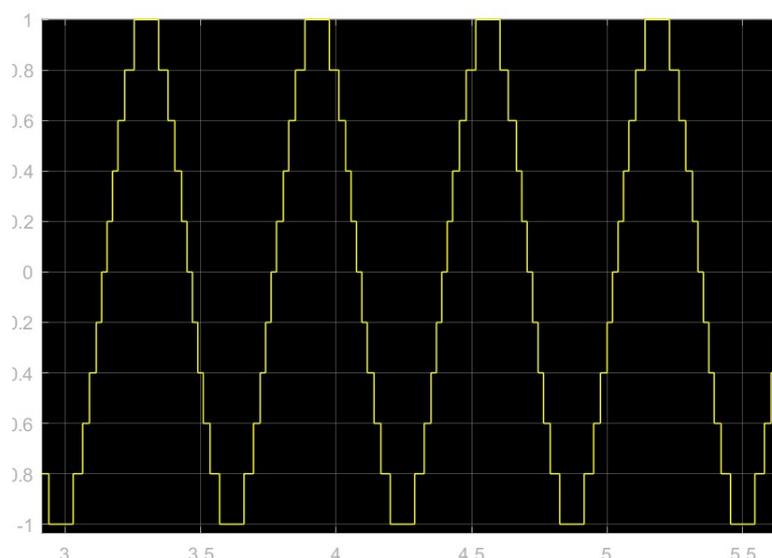


Figura 121: Cuantización.

Por último se guarda el archivo con la extensión *.mdl*, como se muestra en la **Figura 122**.

Nombre:	Nombre.mdl
Tipo:	Simulink Models (*.mdl)

Figura 122: Guardar archivo.

Referencias

- Aguilar, H. J., y cols. (2002). *Fundamentos de los sistemas modernos de comunicación* (Vol. 7). Alfaomega.
- Bellamy, J. C. (2000). *Digital telephony*.
- Beucher, O., & Weeks, M. (2008). *Introduction to matlab & simulink (a project approach)*. Laxmi Publications, Ltd.
- Borja-Benítez, M. A., Vasquez-Toledo, L. A., Tirado-Méndez, J. A., Borja-Benítez, B., & Marcelin-Jiménez, R. (2020). A novel mathematical teletraffic method to evaluate the interoperation of different standards with noma systems using order statistics. *International Journal of Communication Systems*, 33(11), 4406.
- Butt, M. M., Popovski, P., Shakir, M. Z., López-Pérez, D., Quek, T. Q., & Guizani, M. (2017). Ieee access special section editorial: physical and medium access control layer advances in 5g wireless networks. *IEEE Access*, 5, 27845–27849.
- Gilat, A. (2008). *Matlab: An introduction with applications* (Vol. 3). Wiley New York.
- Haykin, S. S. (2002.) *Sistemas de comunicaci.* Mco :: Limusa Wiley,. (Traducido de : Communication systems.)
- Kamen, E. W., & Heck, B. S. (2008). *Fundamentos de señales y sistemas usando la web y matlab*. Pearson Educación.
- Moya, P. A. (2008). *Señales y sistemas. fundamentos matemáticos*. Pablo Alvarado Moya.
- Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1998). *Señales y sistemas*. Pearson Educación.
- Papoulis, A., & Saunders, H. (2002). Probability, random variables and stochastic processes.
- Proakis, J. G., Salehi, M., Zhou, N., & Li, X. (1994). *Communication systems engineering* (Vol. 2). Prentice Hall New Jersey.
- Salema, C. (2002). *Microwave radio links: From theory to design*. John Wiley & Sons, Inc.
- Stüber, G. L., & Stüber, G. L. (2012). *Principles of mobile communication* (Vol. 2). Springer.
- Vasquez-Toledo, L. A., & Lara-Rodríguez, D. (2017). A coordinated operation access scheme for 5g cellular systems. En *2017 ninth international conference on ubiquitous and future networks (icufn)* (pp. 604–606).

Luis Alberto Vásquez Toledo

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Ingeniería Eléctrica.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1ª Sección,

Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9276-4988>

e-mail: lvasquez@xanum.uam.mx



TALLER DE OTOÑO METROPOLITANO DE MATEMÁTICAS DISCRETAS

A principios de 2017, un grupo de profesoras y profesores de la Universidad Autónoma Metropolitana, de las unidades Cuajimalpa e Iztapalapa, nos propusimos crear un evento dirigido a estudiantes de licenciatura que tuviese el fin de fomentar el interés por cultivar y desarrollar las Matemáticas Discretas. Así surge el Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas (TOMMAD).

Este es un taller de introducción a la investigación, que se realiza durante el periodo intertrimestral (para dar la oportunidad a los estudiantes de la UAM de asistir) y está dirigido a estudiantes de Matemáticas, Computación y disciplinas afines.

La primera edición del taller tuvo lugar en 2017, en la Casa de la Primera Imprenta en América. También se ha realizado en la Casa Rafael Galván y en Mineral del Chico, en Hidalgo. A lo largo de las cinco ediciones del TOMMAD, más de veinticinco profesores de distintas universidades del país han participado en él, impartiendo pláticas de investigación y divulgación, dirigiendo talleres de investigación y ofreciendo cursos en temas específicos.

La compilación de artículos que se presenta a continuación es el trabajo realizado durante los TOMMAD de 2024 y 2025, que se llevaron a cabo en Mineral del Chico, Hidalgo y en Ixtapan de la Sal, Estado de México, respectivamente, y son el fruto del trabajo colaborativo y del entusiasmo de nuestras y nuestros estudiantes y profesores participantes en este taller. Además de ser una fuente de conocimiento para estudiantes y académicos, esperamos que también inspire nuevas investigaciones y la participación y desarrollo de más talleres de investigación.

Agradecemos a todas las y todos los estudiantes y profesores que han participado en el TOMMAD y han contribuido a su desarrollo y a la realización de esta compilación. Su dedicación y entusiasmo son la base y motivación de este proyecto y estamos orgullosos de presentar los resultados en esta colección:

- *Coloraciones localizadoras*, de Narda Cordero-Michel y Diego González-Moreno.
- *Conjuntos de visibilidad mutua*, de Ilán A. Goldfeder, Nahid Yelene Javier Nol, Luis Josías López Barrios, Aldo Lozano Piña, Miryam Sophie Naomi Mielke Méndez y Raúl Vélez Limón.
- *Destruyendo gráficas*, de Juan Carlos García Altamirano.
- *Un modelo de propagación de VIH en una población*, Claudia Marlene de la Cruz, Julián Fresán-Figueroa, Bruno Graf-Romero, María Fernanda Pérez-Sánchez, Nancy Valeria Prado Martínez, Pablo César Sánchez-Silva.
- *Gráficas de re-coloración: ¿puedes transformar una coloración en otra sin romper las reglas?*, de Romina Barcena Morales, Emilio Yedidia Licea Mesino, David Dan López Contreras, Mika Olsen, Lizzeth Ariadna Sánchez Solis.

Comité organizador:

Julián Alberto Fresán Figueroa
e-mail: jfresan@cua.uam.mx

Ilán A. Goldfeder
e-mail: igoldfeder@izt.uam.mx

Diego Antonio González Moreno
e-mail: dgonzalez@cua.uam.mx

Nahid Yelene Javier Nol
e-mail: nahid@xanum.uam.mx

Mika Olsen
e-mail: olsen@cua.uam.mx



COLORACIONES LOCALIZADORAS EN GRÁFICAS

NARDA CORDERO-MICHEL, DIEGO GONZÁLEZ-MORENO

RESUMEN. Las coloraciones localizadoras surgen de la combinación de dos nociones muy estudiadas en teoría de las gráficas: las coloraciones propias y los conjuntos localizadores. En una coloración localizadora, además de requerirse que vértices adyacentes reciban colores distintos, se pide que cada vértice sea identificable de manera única a partir de su vector de distancias a las clases cromáticas. Este artículo presenta una introducción accesible a este concepto. Se discuten ejemplos, propiedades básicas y algunas cotas del número cromático localizador, con el objetivo de ilustrar el interés teórico de esta noción.

1. INTRODUCCIÓN

Este texto aborda el estudio de las **coloraciones localizadoras**, un concepto que combina dos nociones de la teoría de las gráficas. Por un lado, la **coloración propia** de vértices, en la que se asignan colores a los vértices de una gráfica de forma que vértices adyacentes reciban colores distintos. Por otro lado, los **conjuntos localizadores** (también conocidos como ‘resolving sets’), que permiten distinguir los vértices de una gráfica a partir de sus distancias a un subconjunto fijo de vértices.

La idea es la siguiente: se busca una manera de colorear propiamente los vértices de una gráfica, de modo que cada vértice tenga una “huella digital” única. Esta huella está determinada por sus distancias a cada clase de color y recibe el nombre de **código de color**. Si ningún par de vértices comparte el mismo código, entonces es posible identificar unívocamente cualquier vértice a partir de sus distancias a los distintos colores.

Esta forma de codificación basada en colores y distancias resulta útil en diversas aplicaciones. Por ejemplo:

- En el *diagnóstico de redes*, nos permite detectar la ubicación de una falla a partir de señales recolectadas en distintos puntos.
- En el *diseño de etiquetas* o sistemas de localización, facilita distinguir ubicaciones de manera eficiente.
- En contextos como la *robótica* o la *navegación autónoma*, ayuda a que un agente determine su posición sin GPS, solo midiendo distancias a ciertos puntos de referencia.

Considera una gráfica G . Una **k -coloración propia** de los vértices de G es una función $\Gamma : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que, si dos vértices u y v son adyacentes, es decir, $uv \in E(G)$, entonces $\Gamma(u) \neq \Gamma(v)$. En otras palabras, se asignan colores a los vértices de modo que los vértices adyacentes reciban colores distintos. Al mínimo número de colores para los cuales G admite una coloración propia, se le conoce como el **número cromático** de G y se denota por $\chi(G)$. En una coloración, a cada color $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ le corresponde una **clase cromática** $C_i = \Gamma^{-1}(i)$, que consiste en el conjunto de vértices que reciben el color i . Diremos que una clase cromática es **singular** si contiene exactamente un vértice.

Dada una coloración Γ , podemos medir qué tan cerca está un vértice $v \in V(G)$ de cada clase cromática. Para ello, definimos la **distancia** de un vértice v a un conjunto $S \subseteq V(G)$ como

$$d(v, S) = \min\{d(v, u) : u \in S\},$$

donde $d(v, u)$ denota la distancia entre vértices en la gráfica.

Si tomamos una ordenación de las clases cromáticas (C_1, C_2, \dots, C_k) , podemos asociar a cada vértice v un vector de distancias a dichas clases. A este vector lo llamamos el **código de**

color de v , y lo denotamos por

$$c_{\Gamma}(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)).$$

Diremos que Γ es una **coloración localizadora** de G si Γ es una coloración propia y, para todo par de vértices distintos $u, v \in V(G)$, se cumple que $c_{\Gamma}(u) \neq c_{\Gamma}(v)$.

Obsérvese que una coloración en la que cada vértice recibe un color distinto es una coloración localizadora, por lo cual siempre se puede dar una coloración localizadora a una gráfica, sin embargo, es de interés encontrar coloraciones localizadoras que utilicen un número menor de colores. El **número cromático localizador** de una gráfica G , denotado por $\chi_L(G)$, se define como el mínimo número de colores para los cuales se puede dar una coloración localizadora de G .

En la figura 1 se muestra una coloración localizadora del ciclo de longitud 6 que utiliza el menor número posible de colores.

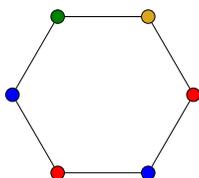


FIGURA 1. Una coloración localizadora de C_6 con 4 colores

Las coloraciones localizadoras fueron introducidas por Chartrand *et al.* [5] como una generalización del concepto de dimensión métrica en gráficas.

Este trabajo está organizado como sigue: en la sección 2 se presentarán las definiciones de las nociones y los conceptos que se abordarán en este texto, en la sección 3 se demostrarán algunos resultados generales sobre el número cromático localizador y, en la sección 4, se encontrará el número cromático localizador para dos familias de gráficas.

2. DEFINICIONES BÁSICAS

Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica simple, conexa y no dirigida, donde $V(G)$ denota el conjunto de vértices y $E(G)$ el conjunto de aristas, es decir, pares no ordenados de vértices adyacentes. El **orden** de G es el número de vértices que contiene, denotado por $|V(G)|$, mientras que el **tamaño** de G es el número de aristas, denotado por $|E(G)|$.

Una **subgráfica** de G es una gráfica $H = (V(H), E(H))$ tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si $E(H)$ contiene todas las aristas de G cuyos extremos están en $V(H)$, entonces H se llama una **subgráfica inducida** de G .

Una **trayectoria** de longitud r en G es una sucesión de vértices distintos (v_0, v_1, \dots, v_r) tal que $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $i = 1, \dots, r$. La **distancia** entre dos vértices u y v de G , denotada por $d(u, v)$, es la mínima de las longitudes de las trayectorias que los unen. A una trayectoria de u a v de longitud $d(u, v)$ se le llama **uv -geodésica**. El **diámetro** de una gráfica G , denotado por $\text{diám}(G)$, es la mayor distancia entre pares de vértices de G :

$$\text{diám}(G) = \max\{d(u, v) : u, v \in V(G)\}.$$

Dada una coloración $\Gamma : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ y una clase cromática $C_i = \Gamma^{-1}(i)$, definimos la **distancia de un vértice v al conjunto C_i** como

$$d(v, C_i) = \min\{d(v, u) : u \in C_i\}.$$

A cada vértice $v \in V(G)$ se le asocia el **código de color**

$$c_{\Gamma}(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)),$$

donde (C_1, C_2, \dots, C_k) es el orden fijado de las clases cromáticas.

Diremos que Γ es una **coloración localizadora** si $c_{\Gamma}(u) \neq c_{\Gamma}(v)$ para todo par de vértices distintos $u, v \in V(G)$.

El **número cromático localizador** de G , denotado por $\chi_L(G)$, es el mínimo número de colores que se requieren en una coloración localizadora de G . Dado que la coloración que asigna a cada vértice un color distinto es localizadora, es inmediato que $\chi_L(G) \leq |V(G)|$.

3. RESULTADOS

En esta sección se presentan algunas propiedades básicas del número cromático localizador, así como cotas generales y resultados que permiten acotarlo en distintas clases de gráficas. Encontrar el valor exacto de $\chi_L(G)$ puede ser muy difícil, por esto, resulta útil establecer cotas, ejemplos representativos y construcciones que nos permitan comprender mejor su comportamiento.

Como las coloraciones localizadoras son, en particular, coloraciones propias, se tiene que

$$\chi(G) \leq \chi_L(G),$$

para toda gráfica G .

También es posible establecer una cota superior en términos del orden y de una subgráfica inducida de G .

TEOREMA 1. *Sea G una gráfica de orden n y sea H una subgráfica inducida de G . Entonces*

$$\chi_L(G) \leq n - |V(H)| + \chi_L(H).$$

Demostración. Sea G una gráfica de orden n , y H una subgráfica inducida de G . Consideremos una coloración localizadora de H con $\chi_L(H)$ colores, a la cual denotaremos con φ . Ahora, definimos la coloración Γ de $V(G)$ como sigue:

$$\Gamma(v) = \begin{cases} \varphi(v) & \text{si } v \in V(H), \\ \text{un color nuevo y singular} & \text{si } v \in V(G) \setminus V(H). \end{cases}$$

Se puede ver que Γ utiliza $n - |V(H)| + \chi_L(H)$ colores. Veamos ahora que Γ es un coloración localizadora de $V(G)$.

Supongamos por contradicción que hay dos vértices u y v que tienen el mismo código de color, es decir,

$$c_\Gamma(v) = c_\Gamma(u).$$

Como los colores de los vértices en $G - H$ son singulares, entonces necesariamente $u, v \in H$. Pero la coloración de H es localizadora, por lo que $c_\varphi(u) \neq c_\varphi(v)$. Como Γ coincide con φ en H , se sigue que $c_\Gamma(u) \neq c_\Gamma(v)$, lo cual contradice la suposición. Por lo tanto, Γ es una coloración localizadora de $V(G)$. □

Otra cota superior para el número cromático localizador puede darse en términos del diámetro y el orden de la gráfica.

TEOREMA 2. *Sea G un gráfica de orden n y diámetro d , entonces*

$$\chi_L(G) \leq n - d + 2.$$

Demostración. Sea G una gráfica con n vértices y diámetro d . Sean $u, v \in V(G)$ tales que $d(u, v) = d$ y sea $T = (u = v_1, v_2, \dots, v_{d+1} = v)$ una uv -geodésica. Supongamos que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{d+1}, v_{d+2}, \dots, v_n\}$. Definimos la siguiente coloración Γ . Dado $v_i \in V(G)$,

$$\Gamma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i \text{ es par y } 2 \leq i \leq d + 1, \\ 3 & \text{si } i \text{ es impar y } 3 \leq i \leq d + 1, \\ i & \text{si } i \in \{d + 2, \dots, n\}. \end{cases}$$

Obsérvese que Γ es una coloración propia y localizadora. □

TEOREMA 3. *Sea G una gráfica conexa de orden n y diámetro d y $\chi_L(G) = 3$. Entonces,*

$$n \leq 6(d - 1) + 3.$$

Demostración. Sea G una gráfica como en la hipótesis. Sea Γ una coloración localizadora con 3 colores y sean C_1, C_2 y C_3 las clases cromáticas de Γ . Obsérvese que para todo $v \in V(G)$, el código de color de v tiene exactamente 3 entradas de las cuales exactamente una es 0, hay al menos un 1 y cada entrada vale a los más d .

Sea $C_\Gamma(v) = (x, y, z)$. Procedemos por casos:

Caso 1. Existen dos entradas con valor 1 en $C_\Gamma(v) = (x, y, z)$. Nótese que hay tres vectores que cumplen la condición.

Caso 2. Hay exactamente una entrada con valor 1. En este caso, la entrada restante x puede tomar los valores $\{2, \dots, d\}$. Por cada $x \in \{2, \dots, d\}$ hay $3! = 6$ vectores distintos. En total hay $6(d - 1)$ vectores con exactamente un 1.

Uniendo ambos casos, tenemos que en total hay $6(d - 1) + 3$ vectores diferentes. Por lo cual, hay a los más $6(d - 1) + 3$ vértices, lo cual concluye la prueba.

4. NÚMERO CROMÁTICO LOCALIZADOR DE DOS FAMILIAS DE GRÁFICAS

Como ya se mencionó, encontrar el número cromático localizador para una gráfica dada G es una tarea difícil. Sin embargo hay algunas familias de gráficas para las cuales es posible determinar este número. El procedimiento tiene dos etapas: la primera y más sencilla, es encontrar una coloración localizadora con el número propuesto de colores, digamos k colores, lo cual nos dice que k colores son suficientes para dar una coloración localizadora de G , es decir, obtenemos una cota superior para el número cromático localizador ($\chi_L(G) \leq k$); La segunda etapa y más laboriosa consiste en demostrar que ninguna coloración propia de G con $k - 1$ colores (o menos) es localizadora, es decir, obtenemos una cota inferior para el número cromático localizador ($\chi_L(G) \geq k$).

Empezaremos por encontrar el número cromático localizador de una gráfica particular, la gráfica de Petersen, y después veremos cómo es ese número para dos familias de gráficas: las trayectorias y los ciclos.

TEOREMA 4. Si P es la gráfica de Petersen, entonces

$$\chi_L(P) = 4.$$

Demostración. Primero veamos que $\chi_L(P) \leq 4$.

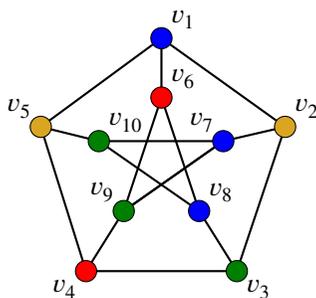


FIGURA 2. Una coloración localizadora de la gráfica de Petersen con 4 colores

Observa que, de acuerdo a la coloración Γ de P de la figura 2 y el orden de colores $(C_\bullet, C_\bullet, C_\bullet, C_\bullet)$, el código de color de cada vértice es diferente:

- Los vértices azules tienen los siguientes códigos de color:
 $c_\Gamma(v_1) = (0, 1, 2, 1)$, $c_\Gamma(v_7) = (0, 2, 1, 1)$ y $c_\Gamma(v_8) = (0, 1, 1, 2)$.
- Los vértices rojos tienen los siguientes códigos de color:
 $c_\Gamma(v_4) = (2, 0, 1, 1)$ y $c_\Gamma(v_6) = (1, 0, 1, 2)$.
- Los vértices verdes tienen los siguientes códigos de color:
 $c_\Gamma(v_3) = (1, 1, 0, 1)$, $c_\Gamma(v_9) = (1, 1, 0, 2)$ y $c_\Gamma(v_{10}) = (1, 2, 0, 1)$.
- Los vértices amarillos tienen los siguientes códigos de color:
 $c_\Gamma(v_2) = (1, 2, 1, 0)$ y $c_\Gamma(v_5) = (1, 1, 1, 0)$.

Todos los códigos de color son distintos, por lo cual $\chi_L(P) \leq 4$. Para ver que la gráfica de Petersen no se puede colorear con tres colores utilizamos el teorema 3. Como P tiene diámetro 2, si $\chi_L(P) = 3$, entonces $|V(P)| \leq 6(2 - 1) + 3 = 9$, lo cual es una contradicción. \square

TEOREMA 5. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$, entonces $\chi_L(T_n) = 3$.

Demostración. Sea $n \geq 3$ y consideremos la trayectoria $T_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Primero veamos que $\chi_L(T_n) \leq 3$, para ello consideremos la coloración localizadora con tres colores, $\Gamma: V(T_n) \rightarrow \{1, 2, 3\}$, dada por:

$$\Gamma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i \text{ es par,} \\ 3 & \text{si } i \text{ es impar e } i \geq 3. \end{cases}$$

La entrada correspondiente al color 1 de $c_\Gamma(v_i)$ es igual a $d(v_i, C_1) = d(v_i, v_1) = i - 1$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, la cual es diferente para cada vértice de la trayectoria. Por lo tanto, Γ es una coloración localizadora. De donde, $\chi_L(G) \leq 3$.

Ahora probemos que $\chi_L(T_n) \geq 3$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una coloración localizadora φ con dos colores, digamos rojo y azul. Como φ es propia, entonces si v_1 tiene color rojo, se sigue que $\varphi(v_i)$ es rojo si y sólo si i es impar y $\varphi(v_i)$ es azul si y sólo si i es par. Entonces, obsérvese que $c_\varphi(v_i) = (1, 0)$ para todo i par y $c_\varphi(v_i) = (0, 1)$ para todo i impar. En ese caso, T_n tiene a lo más dos vértices, lo cual contradice la hipótesis $n \geq 3$. Por lo tanto, $\chi_L G \geq 3$ y, así, $\chi_L(G) = 3$. \square

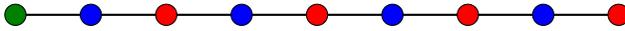


FIGURA 3. Una coloración localizadora de T_9 con 3 colores

TEOREMA 6. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$, entonces

$$\chi_L(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 4 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Sea $n \geq 3$ un número natural. Supongamos que $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$. Procedemos por casos.

Caso 1. Si n es impar, tomemos la siguiente coloración Γ (figura 4 (a)):

$$\Gamma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i \text{ es par,} \\ 3 & \text{si } i \text{ es impar e } i \geq 3. \end{cases}$$

Consideremos el orden de colores $(C_1, C_2, C_3) = (C_{\bullet}, C_{\bullet}, C_{\bullet})$.

El único vértice cuya primera entrada es cero es el vértice v_1 . Para el resto de los vectores, la primera entrada es $d(v_i, C_1) = i - 1$ para $2 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ y $d(v_i, C_1) = n + 1 - i$ para $\frac{n+1}{2} \leq i \leq n$. Por lo cual, dos vértices que tengan el mismo color tienen código de color diferentes pues difieren en la primera entrada.

Además, si los códigos de color de dos vértices distintos tienen su primera entrada igual, digamos los correspondientes a v_i y v_j , con $2 \leq i < j \leq n$, entonces $d(v_i, C_1) = d(v_j, C_1)$. De donde se tiene que $2 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ y $\frac{n+1}{2} \leq j \leq n$, por lo cual $i - 1 = d(v_i, C_1) = d(v_j, C_1) = n + 1 - j$. De este modo, $n + 2 = i + j$, por lo cual i y j tienen distinta paridad ya que $n + 2$ es impar. Así, v_i y v_j tienen colores distintos, por lo que sus códigos de color difieren.

Por lo tanto, Γ es una coloración localizadora y, así, $\chi_L(C_n) \leq 3$ si n es impar. Notemos, además, que como $\chi_L(C_n) \geq \chi(C_n)$ y $\chi(C_n) = 3$ cuando n es impar, se tiene que $\chi_L(C_n) = 3$ cuando n es impar.

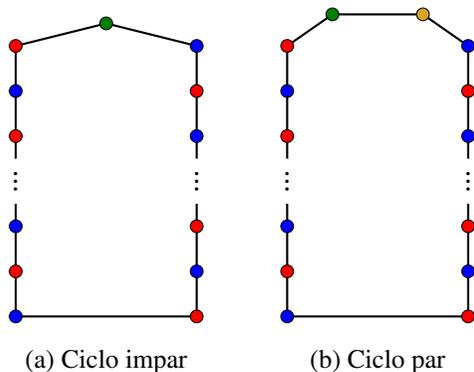


FIGURA 4. Coloración distinguida de un ciclo

Caso 2. Si n es par. Tomemos la siguiente coloración Γ (figura 4 (b)):

$$\Gamma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i = 2, \\ 3 & \text{si } i \text{ es impar e } i \geq 3, \\ 4 & \text{si } i \text{ es par e } i \geq 4. \end{cases}$$

Consideremos el orden de colores $(C_1, C_2, C_3, C_4) = (C_{\bullet}, C_{\bullet}, C_{\bullet}, C_{\bullet})$.

El único vértice cuya primera entrada es cero es el vértice v_1 y el único vértice cuya segunda entrada es cero es el vértice v_2 . Para el resto de los vectores, la primera entrada es $d(v_i, C_1) = i - 1$ para $3 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1$ y $d(v_i, C_1) = n + 1 - i$ para $\frac{n}{2} + 2 \leq i \leq n$, y la segunda entrada es $d(v_i, C_2) = i - 2$ para $3 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1$ y $d(v_i, C_2) = n + 2 - i$ para $\frac{n}{2} + 2 \leq i \leq n$.

De lo anterior, si los códigos de color de dos vértices distintos son iguales, digamos los correspondientes a v_i y v_j con $3 \leq i < j \leq n$, entonces $d(v_i, C_1) = d(v_j, C_1)$ y $d(v_i, C_2) = d(v_j, C_2)$. Así, $3 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1$ y $\frac{n}{2} + 2 \leq j \leq n$, por lo cual $i - 1 = d(v_i, C_1) = d(v_j, C_1) = n + 1 - j$ e $i - 2 = d(v_i, C_2) = d(v_j, C_2) = n + 2 - j$. De este modo, se tiene que $n + 2 = i + j$ y $n + 4 = i + j$, lo cual es imposible. Es decir, no hay dos vértices que tengan el mismo código de color. Por lo tanto, Γ es una coloración localizadora y $\chi_L(C_n) \leq 4$ si n es par.

Veamos ahora que $\chi_L(C_n) \geq 4$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una coloración localizadora $\Gamma: V(C_n) \rightarrow \{1, 2, 3\}$. Por el principio del palomar, existe una clase cromática C_i con al menos $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ vértices. Supongamos sin perder generalidad que $n_1 = |C_1| \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Consideremos $C_1 = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{n_1}}\}$ donde $i_j < i_{j+1}$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\}$ y sean T_j la trayectoria contenida en C_n que inicia en v_{i_j} y termina en $v_{i_{j+1}}$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\}$, y T_{n_1} trayectoria contenida en C_n que inicia en $v_{i_{n_1}}$ y termina en v_{i_1} . Tenemos entonces que $l(T_j) \geq 2$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ pues no hay dos vértices consecutivos en C_n que tengan el mismo color. Además, sólo los vértices extremos de T_j tienen color 1, por lo que los vértices interiores deben estar coloreados con los colores 2 y 3, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n_1\}$.

Si para algún $j \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, la trayectoria T_j tiene longitud mayor que 2, entonces el código de color del segundo vértice de T_j es $(1, 0, 1)$ si dicho vértice es de color 2 o $(1, 1, 0)$ si es de color 3. De igual manera, el código de color del penúltimo vértice de T_j es $(1, 0, 1)$ si dicho vértice es de color 2 o $(1, 1, 0)$ si es de color 3. Dado que Γ es localizadora, tendríamos que uno de esos vértices es de color 2 y el otro de color 3, y que T_j tiene longitud impar. Además, ninguna otra trayectoria T_l puede tener longitud $l(T_l) \geq 3$ pues, con el mismo razonamiento, habría otro vértice con el código de color $(1, 0, 1)$ o el código de color $(1, 1, 0)$, lo cual contradice que Γ sea localizadora.

Así, $l(T_l) = 2$ para todo $l \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ con $l \neq j$. Como C_n es un ciclo par y $l(C_n) = \sum_{l=1}^{n_1} l(T_l) = 2(n_1 - 1) + l(T_j)$, se sigue que $l(T_j)$ debe de ser par, de donde, $l(T_j)$ no puede ser mayor que 2, es decir $l(T_j) = 2$.

Dado que $l(T_l) = 2$ para todo $l \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, tenemos que $|C_1| = \frac{n}{2}$ y $C_1 = \{v_i : i \text{ es par}\}$ o $C_1 = \{v_i : i \text{ es impar}\}$. Supongamos sin perder generalidad que $C_1 = \{v_i : i \text{ es par}\}$. Lo cual significa que $C_2 \cup C_3 = \{v_i : i \text{ es impar}\}$. Por el principio del palomar, existe una clase cromática $C_i, i \in \{2, 3\}$, con al menos $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ vértices. Supongamos sin perder generalidad que $n_2 = |C_2| \geq \lceil \frac{n}{4} \rceil$.

Como la distancia entre cualesquiera dos vértices en C_n es a lo más $\frac{n}{2}$, cualquier vértice en C_2 es adyacente a un vértice en C_1 y la distancia entre dos vértices con índice impar es par, se tiene que, para cada $v \in C_2, c_\Gamma(v) = (1, 0, a)$ donde a es un número par y $2 \leq a \leq \frac{n}{2}$. Hay a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ de este estilo, por lo cual $|C_2| \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$. Dado que $\lceil \frac{n}{4} \rceil \leq |C_2| \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, se sigue que n es un múltiplo de 4, $|C_2| = \frac{n}{4}$ y, también, $|C_3| = \frac{n}{4}$.

Observemos que los códigos de color de los vértices en C_2 son todos los vectores de la forma $(1, 0, a)$ donde a es par y $2 \leq a \leq \frac{n}{2}$, los códigos de color de los vértices en C_3 son todos los vectores de la forma $(1, b, 0)$ donde b es par y $2 \leq b \leq \frac{n}{2}$. De modo que hay un vértice de color 2 y un vértice de color 3 que están a distancia 2, digamos $\alpha(v_1) = 2$ y $\alpha(v_3) = 3$. Entonces $\alpha(v_5) = 3$ pues si $\alpha(v_5) = 2$, entonces su código de color es $c_\Gamma(v_5) = (1, 0, 2) = c_\Gamma(v_1)$, lo cual es imposible. Siguiendo este razonamiento $\alpha(v_i) = 3$ para cada i impar con $3 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1$, que son $\frac{n}{4} = |C_3|$ vértices. Necesariamente, $\alpha(v_{\frac{n}{2}+3}) = 2$ lo cual implica que $c_\Gamma(v_{\frac{n}{2}+3}) = (1, 0, 2) = c_\Gamma(v_1)$. Lo que contradice la hipótesis de que Γ sea una coloración localizadora. Por lo tanto, $\chi_L(C_n) \geq 4$ cuando n es par, lo cual concluye la prueba. □

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a todas las instituciones que apoyaron la organización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas (TOMMAD) 2025. Particularmente a la Sociedad Matemática Mexicana, a la UAM-Cuajimalpa y a la UAM-Iztapalapa. También agradecemos a Haniel Lamas, Brisa Guerrero Rosales, Raúl Arturo Gaytán Ruiz y Luis Macip Hernández, participantes del taller, con quienes se trabajaron los resultados aquí plasmados.

REFERENCIAS

[1] Albertson, M. O., K.L. Collins, K. L. *Symmetry Breaking in Graphs*, Electronic Journal of Combinatorics, vol. 3, no. 1, R18, 1996. doi:10.37236/1242.

[2] Chan, M. *The distinguishing number of the augmented cube and hypercube powers*, Discrete Mathematics, vol. 308, no. 11, pp. 2330-2336, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.09.056>

[3] Chartrand, G., L. Lesniak, L., Zhang, P. *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall/CRC, 6th ed., Boca Raton, FL, 2016.

[4] Rubin, F. Problem 729: The Blind Man’s Keys, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 11, p. 128, 1979. Solution in vol. 12, 1980. As cited by Albertson & Collins (1996).

[5] Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., Zhang, P. *The locating-chromatic number of a graph*. Bull. Inst. Comb. Appl. 2002, 36, 89–101.

Narda Cordero-Michel

Universidad Autónoma Metropolitana,
 Unidad Cuajimalpa,
 División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
 Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
 Av. Vasco de Quiroga 4871,
 Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
 e-mail: narda@ciencias.unam.mx, narda.cordero@cua.uam.mx

Diego González-Moreno
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871,
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: dgonzalez@cua.uam.mx



CONJUNTOS DE VISIBILIDAD MUTUA

ILÁN A. GOLDFEDER, NAHID YELENE JAVIER NOL, LUIS JOSÍAS LÓPEZ BARRIOS,
ALDO LOZANO PIÑA, MIRYAM SOPHIE NAOMI MIELKE MÉNDEZ, RAÚL VÉLEZ LIMÓN

RESUMEN. Dada una gráfica G , un subconjunto S de sus vértices es de visibilidad mutua si entre cualquier par de vértices del conjuntos S existe una trayectoria de longitud mínima que no contiene vértices de S , salvo por sus extremos. El número de visibilidad mutua es la cardinalidad de un conjunto de visibilidad máximo. En este trabajo mostramos resultados al respecto en algunas familias de gráficas como son las trayectorias, árboles, ciclos, ruedas, k -partitas, rejillas y cilindros.

1. INTRODUCCIÓN

Consideremos un conjunto de posiciones en las que podemos colocar dispositivos y en las que, entre algunas de ellas, existe una vía de comunicación directa. Un ejemplo de ello es la configuración de la figura 1. ¿Cuál es el número máximo de dispositivos que se pueden colocar de forma tal que, entre cualesquiera dos de ellos, exista una ruta mínima que les permita comunicarse? En particular, los puntos rojos de dicha figura representan el número máximo de dispositivos que se podrían ubicar en esta configuración cumpliendo la propiedad solicitada.

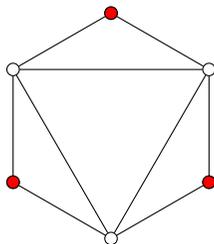


FIGURA 1. Configuración de posibles posiciones para dispositivos

Otro ejemplo relacionado es el siguiente. Consideremos un conjunto de localidades, como pueden ser ciudades y pueblos, algunas de ellas conectadas por carreteras. En ciertas locaciones se pueden colocar casetas de cobro de peaje; sin embargo, interesa evitar un número excesivo de ellas. ¿Cuál es el número máximo de casetas que se pueden colocar de forma tal que, entre cualesquiera dos locaciones, exista una ruta mínima que pase por *a lo más* dos casetas?

Los ejemplos anteriores constituyen problemas que se modelan en teoría de gráficas mediante los *conjuntos de visibilidad mutua*. A continuación, daremos las nociones básicas y presentaremos algunos resultados.

2. DEFINICIONES BÁSICAS

Una *gráfica* es un par ordenado $G = (V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito y no vacío cuyos elementos son los *vértices* de la gráfica, y $A(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices, que llamamos *aristas*. El *orden* de G es el número de vértices y el *tamaño* es el número de aristas.

2010 *Mathematics Subject Classification*. 05C69, 05C12, 05C76, 05C38.

Palabras clave. Gráficas, rejillas, visibilidad mutua.

Dados dos vértices $x, y \in V(G)$, diremos que x e y son *adyacentes* (o *vecinos*) si $\{x, y\} \in A(G)$. La *vecindad* de x se define como

$$N(x) = \{y \in V(G) : \{x, y\} \in A(G)\}.$$

El *grado* de x , denotado $\deg_G(x)$, es $|N(x)|$; el *grado mínimo* de G , $\delta(G) = \min_{z \in V(G)} \deg_G(z)$, y el *grado máximo*, $\Delta(G) = \max_{z \in V(G)} \deg_G(z)$. Si $|N(x)| = 1$, decimos que x es un *vértice hoja*.

Dados $x, y \in V(G)$, una *trayectoria* o (x, y) -trayectoria es una sucesión de vértices distintos

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_l),$$

donde $x_1 = x$, $x_l = y$ y cada par de vértices consecutivos es adyacente. La *longitud* de P , denotada $l(P)$, es el número de aristas que contiene ($l(P) = l - 1$). Si P tiene orden n , escribiremos P_n . La *distancia* entre dos vértices x, y , denotada $d_G(x, y)$ o simplemente $d(x, y)$, es la longitud de una trayectoria de longitud mínima entre ellos. Un *ciclo* es una trayectoria (x_1, \dots, x_l) con $l \geq 3$ junto con la arista $\{x_l, x_1\}$. Una gráfica es *conexa* si entre cualquier de vértices x, y existe una (x, y) -trayectoria. Una *árbol* es una gráfica conexa y sin ciclos.

Dado $S \subseteq V(G)$, la *subgráfica inducida* $G[S]$ tiene como conjunto de vértices S y, para $x, y \in S$, $\{x, y\} \in A(G[S])$ si y sólo si $\{x, y\} \in A(G)$.

Una gráfica de orden n es *completa* si cualquier par de vértices es adyacente; la denotamos K_n . Decimos que G es *k-partita* si $V(G)$ se puede partir en conjuntos V_1, \dots, V_k tales que, para cada i , no hay aristas entre vértices de V_i . A cada uno de tales conjuntos se le llama una *parte* de la partición. Si $k = 2$, G es *bipartita*. Si además cada vértice de V_i es adyacente a todos los de V_j con $i \neq j$, decimos que es *k-partita completa*. Una gráfica se llama *multipartita* si es *k-partita* para algún $k \geq 2$.

El *producto cartesiano* $G \square H$ de dos gráficas G y H es la gráfica con conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ y en la que dos vértices (g_1, h_1) y (g_2, h_2) son adyacentes si $g_1 = g_2$ y $\{h_1, h_2\} \in A(H)$ o si $h_1 = h_2$ y $\{g_1, g_2\} \in A(G)$. Cuando no se preste a confusión al vértice (g_i, h_i) lo denotaremos como $g_i h_i$. A la gráfica $P_m \square P_n$ se le conoce como *malla* o *rejilla de m por n* y a la gráfica $C_m \square P_n$ se le conoce como *cilindro de m por n*.

Para ilustrar la definición de producto cartesiano de gráficas, mostramos los siguientes ejemplos. Consideremos $G_1 = P_1$ y $H_1 = P_4$ (véase la figura 2 (a)), y $G_2 = P_2$ y $H_2 = P_4$ (véase la figura 2 (b)). Obsérvese que $P_1 \square P_4$ coincide con P_4 y, en general, $P_1 \square P_m$ coincide con P_m . Consideremos $G_3 = C_3$ y $H_3 = P_6$ (véase la figura 2 (c)); en este caso, es el cilindro 3 por 6.

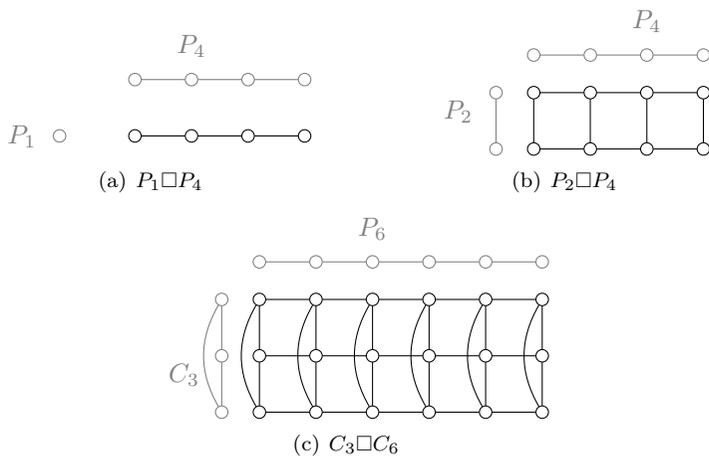


FIGURA 2. Producto cartesiano de $P_1 \square P_4$, $P_2 \square P_4$ y $C_3 \square C_6$

Sean $G = (V(G), A(G))$ una gráfica y $S \subseteq V(G)$ un subconjunto de vértices de G . Diremos que dos vértices $x, y \in S$ son *mutuamente visibles* si existe una (x, y) -trayectoria de longitud mínima P tal que $V(P) \cap S = \{x, y\}$, cuando esto pasa diremos que los vértices x y y pueden *verse* entre sí. Diremos que S es un *conjunto de visibilidad mutua* si cada par de vértices en S es mutuamente visible. El *número de visibilidad mutua* de G , denotado $\mu(G)$, es la cardinalidad de un conjunto de visibilidad mutua de orden máximo.

Para esclarecer las definiciones anteriores, considere la gráfica G que aparece en la figura 3 (a) y un subconjunto $S_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$. Los vértices v_1, v_3 y v_5 (véase la figura 3 (b)) son mutuamente visibles entre sí porque las trayectorias

$$(v_1, v_2, v_3), (v_1, v_0, v_3) \text{ y } (v_3, v_4, v_5)$$

son de longitud mínima y se tiene que $S_1 \cap \{v_1, v_2, v_3\} = \{v_1, v_3\}$, $S_1 \cap \{v_1, v_0, v_3\} = \{v_1, v_3\}$ y $S_1 \cap \{v_3, v_4, v_5\} = \{v_3, v_5\}$. Por tanto, S_1 es un conjunto de visibilidad mutua. ¿Será S_1 el conjunto de visibilidad mutua de mayor cardinalidad?

Ahora considere un conjunto $S_2 = \{v_0, v_2, v_4, v_6\}$. Los vértices v_0, v_2, v_4 y v_6 (véase la figura 3 (c)) son mutuamente visibles entre sí porque que las trayectorias

$$(v_0, v_1, v_2), (v_0, v_6), (v_0, v_5, v_4), (v_2, v_3, v_4), (v_2, v_6) \text{ y } (v_4, v_5, v_6)$$

son de longitud mínima y se tiene que $S_2 \cap \{v_0, v_1, v_2\} = \{v_0, v_2\}$, $S_2 \cap \{v_0, v_6\} = \{v_0, v_6\}$, $S_2 \cap \{v_0, v_5, v_4\} = \{v_0, v_4\}$, $S_2 \cap \{v_2, v_3, v_4\} = \{v_2, v_4\}$, $S_2 \cap \{v_2, v_6\} = \{v_2, v_6\}$ y $S_2 \cap \{v_4, v_5, v_6\} = \{v_4, v_6\}$. Por tanto, S_2 es un conjunto de visibilidad mutua de orden cuatro. Además, se puede probar que ningún conjunto con cinco o más vértices puede ser de visibilidad mutua. Por lo que, el número de visibilidad mutua de G es 4, es decir, $\mu(G) = 4$.

En nuestro ejemplo de las localidades y las casetas, podemos construir una gráfica en la que cada localidad sea un vértice y entre dos vértices hay una arista siempre que las localidades correspondientes haya una carretera (que no pasa por ninguna otra localidad). Observemos que si tenemos un conjunto de visibilidad mutua S en una gráfica G , entre cualesquiera dos vértices de la gráfica hay una trayectoria de longitud mínima que contiene a lo más dos vértices de S (pues si tuviese tres, los vértices de S más alejados en la trayectoria no serían de visibilidad mutua, véase el teorema 4). Por lo tanto, al poner casetas de cobro en un conjunto de visibilidad mutua de la gráfica de localidades y carreteras, entre cualesquiera dos localidades hay una trayectoria de longitud mínima que pasa por a lo más dos casetas de cobro.

3. PRIMEROS RESULTADOS

TEOREMA 1. *Sea G una gráfica con grado máximo $\Delta(G)$. Se satisface que $\mu(G) \geq \Delta(G)$.*

Demostración. Sea v un vértice de G tal que $\deg_G(v) = \Delta(G)$ y tómesese el conjunto de vértices $S = N(v)$. Para cualquier par de vértices $x, y \in S$, ocurre que o bien son adyacentes o bien están a lo más a distancia dos mediante el camino $P = (x, v, y)$. Como v no está en S , en ambos casos los vértices x, y son mutuamente visibles; por lo tanto, S es un conjunto de visibilidad mutua. Así, $\mu(G) \geq \deg_G(v) = \Delta(G)$. \square

Una consecuencia de este teorema es el caso de las ruedas (véase la figura 4), en las cuales el conjunto de visibilidad mutua máximo es el conjunto de todos sus vértices excepto el vértice central. Basta con fijarse en la prueba del teorema 1, y en una rueda tomar como conjunto de visibilidad mutua a la vecindad del vértice central, la cual tiene cardinalidad igual al grado máximo de la gráfica. Además, dicho conjunto es máximo, porque todos sus vértices están al menos a distancia dos de cualquier otro vértice, pasando por el vértice central.

COROLARIO 2. *El número de visibilidad mutua de la rueda W_n , para $n \geq 4$, es $\mu(W_n) = \Delta(W_n)$.*

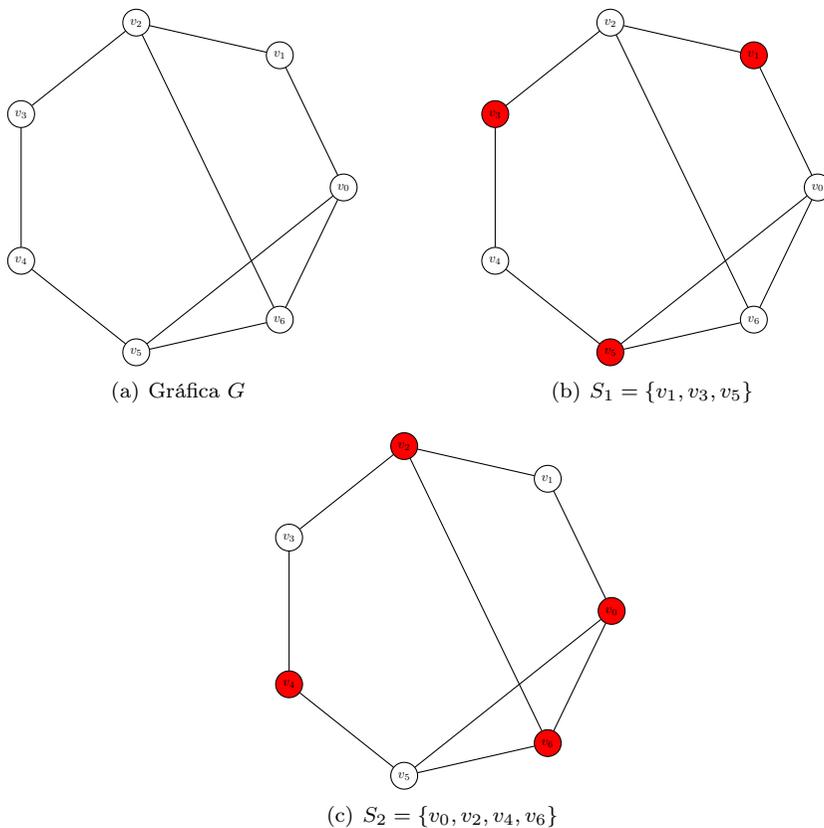


FIGURA 3. Gráfica G y dos conjuntos de visibilidad mutua S_1 y S_2 , $\mu(G) = 4$

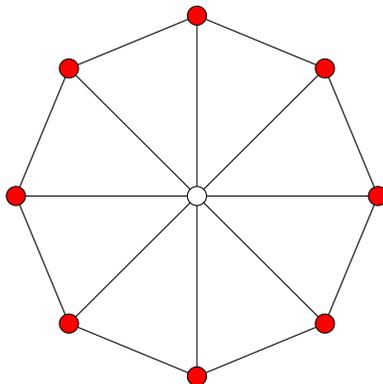


FIGURA 4. Conjunto máximo de visibilidad mutua en W_9

TEOREMA 3. Sea $G = (V(G), A(G))$ una gráfica conexa tal que $|V(G)| = n$. Entonces, $\mu(G) = n$ si y sólo si $G = K_n$, donde K_n es la gráfica completa de n vértices.

Demostración. Primero probaremos la condición necesaria. Supongamos que $\mu(G) = n$. Por contradicción, supongamos que $G \neq K_n$, es decir, existen $u, v \in V(G)$ tales que $\{u, v\} \notin A(G)$. Esto implica que toda (u, v) -trayectoria de longitud mínima P tiene orden al menos tres. Sea $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$, con $v_1 = u$ y $v_k = v$, una trayectoria de longitud mínima. Como $\mu(G) = n$, el conjunto $V(G)$ es el conjunto de visibilidad

mutua de G . Luego $|V(P) \cap V(G)| \geq 3$ lo cual contradice la definición de que $V(G)$ sea un conjunto de visibilidad mutua, pues P es cualquier trayectoria de longitud mínima. Por lo que $G = K_n$.

Ahora probaremos la condición suficiente. Supongamos que G es la gráfica completa de n vértices. Entonces, todos sus vértices son adyacentes entre sí, y la trayectoria de mínima longitud entre cualquier par es de longitud uno. Por lo tanto, todos los vértices de G son mutuamente visibles, y $\mu(G) = n$. \square

TEOREMA 4. *El número de visibilidad mutua de la trayectoria P_n , $n \geq 2$, es $\mu(P_n) = 2$.*

Demostración. Sea $P_n = (x_1, \dots, x_n)$ una (x, y) -trayectoria, donde $x_1 = x$ y $x_n = y$. Claramente, $S = \{x, y\}$ es un conjunto de visibilidad mutua. Para demostrar que es máximo, procederemos por contradicción, supongamos que existen al menos tres vértices x_i, x_j, x_k en P_n que son mutuamente visibles. Sin pérdida de generalidad, sea $i < j < k$. Entonces, x_j se encuentra en la trayectoria mínima entre x_i y x_k , por lo que $V(P) \cap \{x_i, x_j, x_k\} = \{x_i, x_j, x_k\}$, y no cumple la condición de visibilidad mutua. Esto prueba que no puede haber más de dos vértices mutuamente visibles en la trayectoria. Por lo tanto, $\mu(P_n) = 2$. \square



FIGURA 5. Conjunto máximo de visibilidad mutua en P_n

TEOREMA 5. *El número de visibilidad mutua del ciclo C_n , con $n \geq 3$, es $\mu(C_n) = 3$.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que $\mu(C_n) > 3$. Se sigue que un conjunto máximo de visibilidad mutua S de C_n tiene al menos cuatro vértices, digamos v_1, v_2, v_3, v_4 y supongamos, sin pérdida de generalidad, que aparecen en ese orden en el ciclo. Observemos que entre v_1 y v_3 hay exactamente dos trayectorias, una pasa por v_2 y la otra pasa por v_4 . Así, no pueden ser vértices mutuamente visibles. Por lo tanto, $\mu(C_n) \leq 3$.

Para probar que $\mu(C_n) = 3$, basta con tomar los vértices $v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}, v_{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1}, v_{n-1}$ como el conjunto de vértices de visibilidad mutua (véase la figura 6). \square

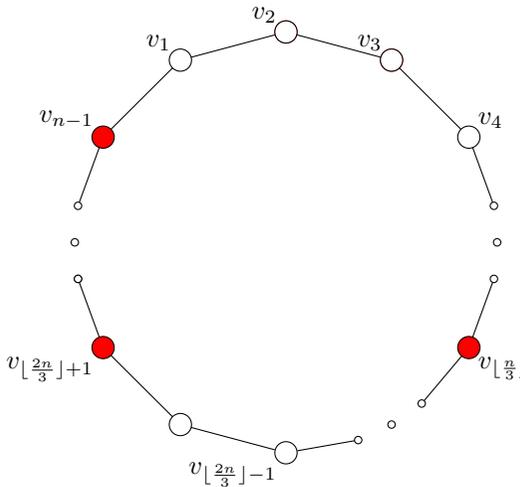


FIGURA 6. Conjunto máximo de visibilidad mutua en C_n

TEOREMA 6. *Sea G la gráfica bipartita completa $K_{i,n}$, con $n \geq 3$ e $i \in \{1, 2\}$. El número de visibilidad mutua de G es $\mu(G) = n + i - 1$.*

Demostración. Sea G una gráfica como en las hipótesis. Primero notemos que $|V(G)| = n + i$, con $i \in \{1, 2\}$.

Primero supongamos que $i = 1$, por el teorema 3 se tiene que $\mu(G) \leq n + i - 1$ y por el teorema 1 se tiene que $\mu(G) \geq \Delta(G) = n + i - 1$. Por lo tanto, $\mu(G) = n + i - 1$.

Ahora supongamos que $i = 2$. Al igual que en el caso previo, tenemos por el teorema 3 que $\mu(G) \leq n + i - 1$. Sea $V_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ y $V_2 = \{u, v\}$ la partición de la gráfica. Demostraremos que $S = V_1 \cup \{u\}$, que tiene cardinalidad $n + i - 1$, es un conjunto de visibilidad mutua. Para cualesquiera dos vértices w_i y w_j en V_1 , se tiene que w_i, v, w_j es una trayectoria de longitud mínima tal que $S \cap \{w_i, v, w_j\} = \{w_i, w_j\}$ y para cualquier vértice w_i y u , se tiene $S \cap \{w_i, u\} = \{w_i, u\}$. Se sigue que S es un conjunto de visibilidad y, así, $\mu(G) \geq n + i - 1$. Por lo tanto, $\mu(G) = n + i - 1$.

Por lo que, el número de visibilidad mutua de la gráfica bipartita $K_{i,n}$, con $i \in \{1, 2\}$, es $\mu(G) = n + i - 1$. □

El siguiente corolario es consecuencia del teorema 6, se sigue de que $S_{n+1} = K_{1,n}$ (véase la figura 7).

COROLARIO 7. *El número de visibilidad mutua de la estrella S_n , $n \geq 4$, es $\mu(S_n) = n - 1$.*

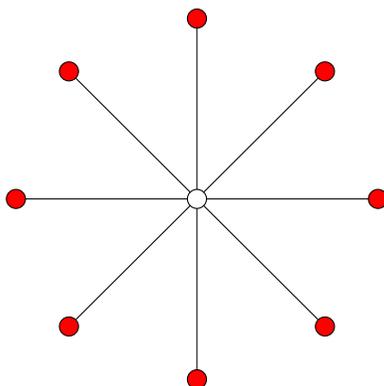


FIGURA 7. Conjunto máximo de visibilidad mutua en S_9

PROPOSICIÓN 8. *Cualquier trayectoria de una gráfica G está contenida en una trayectoria maximal.*

Demostración. Sean $P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ una trayectoria en G . Si $\deg_G(v_0) = 1 = \deg_G(v_k)$, entonces P es maximal

En otro caso, tendríamos que $\deg_G(v_0) \geq 2$ o $\deg_G(v_k) \geq 2$; sin pérdida de generalidad, supongamos que $\deg_G(v_k) \geq 2$. Así, existe un vértice $v_q \in N(v_k) \setminus \{v_{k-1}\}$, por lo que $P^q = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_q)$ es una trayectoria estrictamente más larga que contiene a P como subtrayectoria.

Repetiendo este procedimiento, y como la gráfica es finita, se obtiene una trayectoria P' que contiene a P como subtrayectoria y que es maximal. □

El siguiente es un resultado conocido sobre árboles.

PROPOSICIÓN 9 ([1]). *En un árbol T , para todo par de vértices $v_i, v_k \in V(T)$ existe una única trayectoria $P = (v_i, \dots, v_k)$.*

COROLARIO 10. *Sea T un árbol. Dada una trayectoria $P = (v_x, \dots, v_y)$ en T con v_x y v_y hojas de T , todo vértice de P distinto de v_x y v_y no es hoja.*

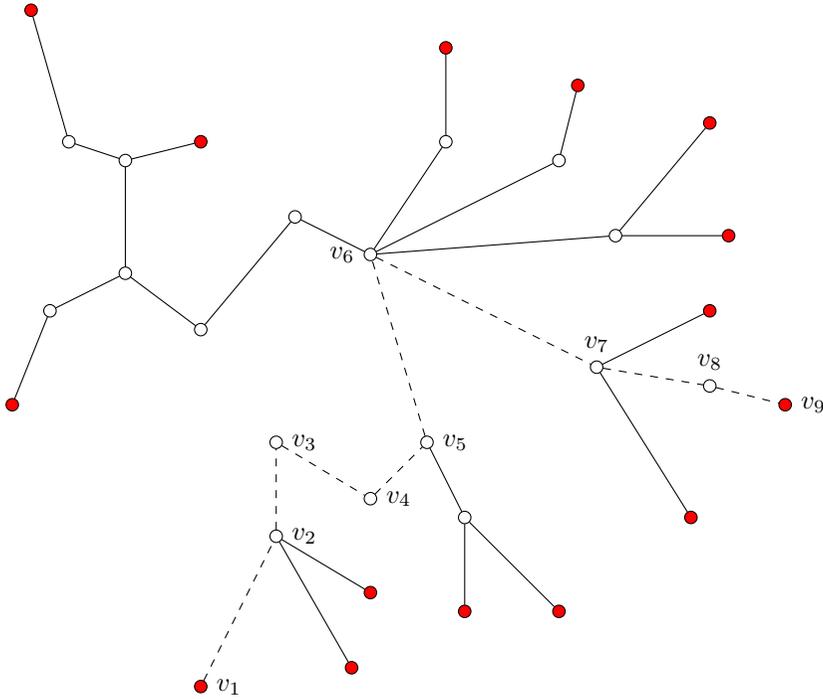


FIGURA 8. La trayectoria $P = (v_1, v_2, \dots, v_9)$ que tiene como extremos las hojas v_1, v_9 es única y cualquier vértice interno no es una hoja

TEOREMA 11. *El número de visibilidad mutua de un árbol T es igual a su número total de hojas; es decir, $\mu(T) = |L(T)|$, donde $L(T)$ es el conjunto de hojas del árbol T .*

Demostración. Primero demostraremos que $\mu(T) \leq |L(T)|$. Por contradicción, supongamos que $\mu(T) > |L(T)|$. Entonces, existe un vértice $v_a \in V(T)$ que no es hoja y que está en el conjunto de vértices de visibilidad mutua. Tomemos una trayectoria $P = (v_1, v_2, \dots, v_a)$ donde $v_1 \in L(T)$. Por la proposición 8, se tiene que P está contenida en una trayectoria $P^z = (v_1, v_2, \dots, v_a, \dots, v_z)$, donde $v_1, v_z \in L(T)$. Pero como la trayectoria entre v_1 y v_z es única, tendríamos que $V(P) \cap L(T) = \{v_1, v_a, v_z\}$ lo cual es una contradicción, pues toda trayectoria contiene a dos vértices de visibilidad mutua. Por lo tanto, $\mu(T) \leq |L(T)|$.

Ahora demostraremos que $|L(T)| \leq \mu(T)$. Sean cualesquiera $v_x, v_y \in L(T)$ con $v_x \neq v_y$. Por la proposición 9, tomamos la trayectoria $P^* = (v_x, \dots, v_y)$. Además, por el corolario 10, para todo $v_k \in V(P^*) \setminus \{v_x, v_y\}$, se tiene que v_k no pertenece al conjunto de visibilidad mutua de T . Así, toda trayectoria mínima entre hojas está libre de intersección con otras hojas, por lo que $L(T)$ es un conjunto de visibilidad mutua. Por la maximalidad, $|L(T)| \leq \mu(T)$. Por lo tanto, $|L(T)| = \mu(T)$. \square

Para ejemplificar el teorema 11, véase la figura 8.

TEOREMA 12. *Sea G la gráfica bipartita completa $K_{m,n}$, tal que $m, n \geq 3$. Entonces, el número de visibilidad mutua de G es $\mu(G) = m + n - 2$.*

Demostración. Primero, nótese que no todos los vértices pueden ser de visibilidad mutua. Esto se sigue del teorema 3, por lo que $\mu(G) \leq m + n - 1$.

Luego, supongamos que existe un único vértice v en G que no es de visibilidad mutua. Sin pérdida de generalidad, supongamos que v está en S_1 , donde S_1, S_2 son los subconjuntos de vértices de $V(G)$ de cardinalidad m y n , respectivamente, y que S_2 es un conjunto de visibilidad mutua. Por hipótesis $m \geq 3$, entonces existen al menos otros

dos vértices $x, y \in S_1$ tales que no son adyacentes entre sí. Obsérvese que la trayectoria de longitud mínima entre x y y es $P = (x, w, y)$, donde w es cualquier vértice en S_2 . Pero por hipótesis, w es un vértice de visibilidad mutua, lo cual contradice la definición, ya que w está en la trayectoria mínima entre x y y . El caso es análogo si v está en S_2 .

Por lo tanto, debe haber al menos dos vértices que no sean de visibilidad mutua, uno en S_1 y otro en S_2 ; esto es, $\mu(G) \leq n + m - 2$.

Para probar la desigualdad inversa, basta con tomar dos vértices que no sean de visibilidad mutua, uno en cada subconjunto S_1 y S_2 . Véase la figura 9. \square

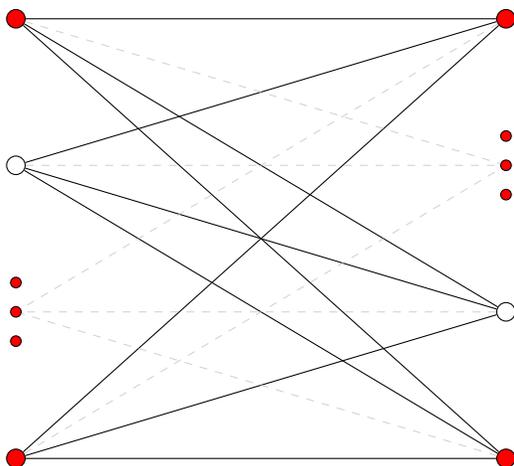


FIGURA 9. Conjunto máximo de visibilidad mutua en $K_{m,n}$

El teorema 13 es la generalización de los teoremas 6 y 12.

TEOREMA 13. *Sea G la gráfica k -partita completa K_{S_1, S_2, \dots, S_k} . Se cumple que:*

1. Si $|S_i| \geq 3$, para toda $1 \leq i \leq k$, entonces $\mu(G) = |V(G)| - 2$.
2. Si existe un $j \in [1, k]$ tal que $|S_j| \leq 2$, entonces $\mu(G) = |V(G)| - 1$.

La demostración del teorema 13 es análoga a las demostraciones de los teoremas 6 y 12, respectivamente, basta con excluir del conjunto de visibilidad mutua a un vértice de cada conjunto de la partición (ver figura 10).

En rejillas $P_m \square P_n$, donde $m \leq 3$, nos encontramos con algunos casos particulares. Estos son:

1. $\mu(P_1 \square P_n) = 2$, con $n \geq 2$, pues en este caso la rejilla es una trayectoria, véase la figura 11.
2. Cuando $\min\{m, n\} = 2$, tenemos dos casos:
 - a) $P_2 \square P_2$ es el ciclo C_4 ; por el teorema 5 se tiene que $\mu(P_2 \square P_2) = 3$, véase la figura 12 (a).
 - b) $\mu(P_2 \square P_n) = 4$ con $n \geq 3$, véanse las figuras 12 (b) y (c).
3. Cuando $\min\{m, n\} = 3$, obtenemos dos casos, véase la figura 13:
 - a) $\mu(P_3 \square P_3) = 5$, véase la figura 13 (a).
 - b) $\mu(P_3 \square P_n) = 6$ con $n \geq 4$, véanse las figuras 13 (b) y (c).

Y para $m, n \geq 4$, podemos enunciar un caso general, véase figura 14.

TEOREMA 14. *Si $P_m \square P_n$ es una rejilla tal que $m > 3$ y $n > 3$ entonces*

$$\mu(P_m \square P_n) = 2 \cdot \min\{m, n\}.$$

Demostración. Consideremos las trayectorias $P_m = (u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$ y $P_n = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$. Tomemos una trayectoria de la forma $(u_i v_0, u_i v_1, \dots, u_i v_{n-1})$ en $P_m \square P_n$. Así, para cada $0 \leq i \leq m - 1$, tenemos que dicha trayectoria puede incluir a lo más dos vértices a cualquier conjunto de visibilidad mutua; por lo

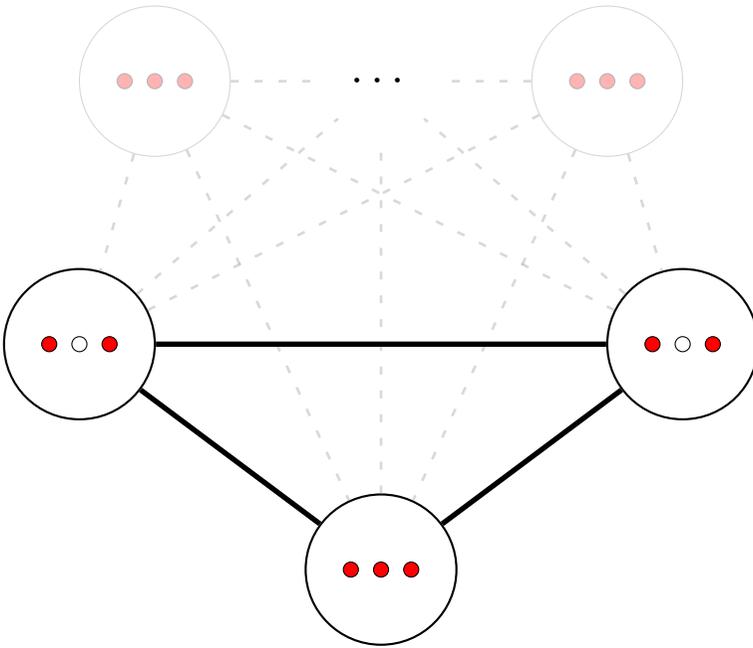


FIGURA 10. Conjunto máximo de visibilidad mutua en la gráfica k -partita completa



FIGURA 11. $\mu(P_1 \square P_2) = 2$ y $\mu(P_1 \square P_3) = 2$

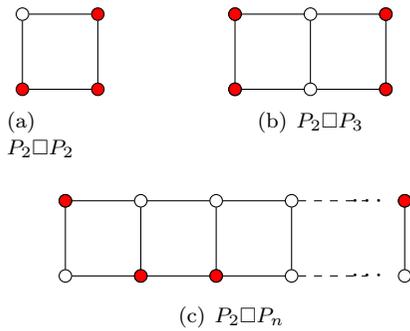


FIGURA 12. $P_2 \square P_2$, $P_2 \square P_3$ y $P_2 \square P_n$ y sus vértices de visibilidad mutua, los vértices en color rojo

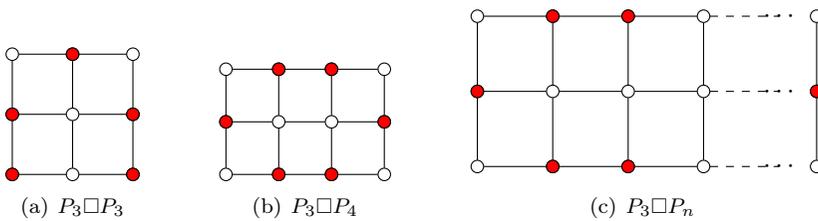


FIGURA 13. $P_3 \square P_3$, $P_3 \square P_4$ y $P_3 \square P_n$

que $\mu(P_m \square P_n) \leq 2m$. De igual manera, cada una de las trayectorias de la forma

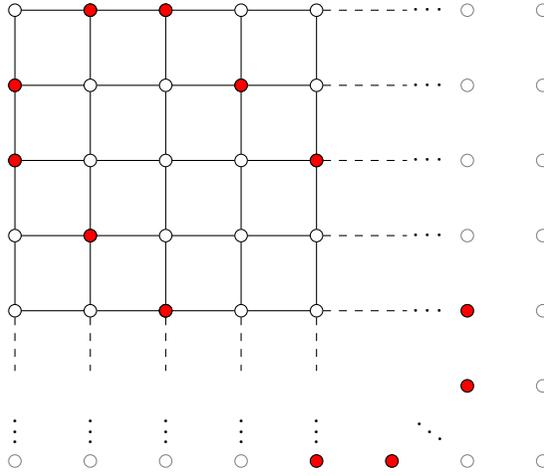


FIGURA 14. $P_m \square P_n$

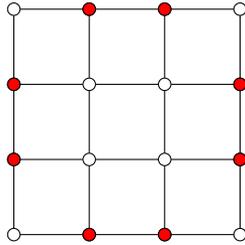


FIGURA 15. $P_4 \square P_4$

$(u_0v_j, u_1v_j, \dots, u_{m-1}v_j)$, con $0 \leq j \leq n - 1$, puede incluir a los más dos vértices a cualquier conjunto de visibilidad mutua, así $\mu(P_m \square P_n) \leq 2n$.

Ahora, demostraremos que $\mu(P_m \square P_n) = 2 \min\{m, n\}$. Tomemos $k = \min\{m, n\}$. Para $k = 4$, se puede considerar una subgráfica de la forma $P_4 \square P_4$, donde el único conjunto de visibilidad mutua máximo es:

$$\{u_0v_1, u_0v_2, u_1v_3, u_2v_3, u_3v_2, u_3v_1, u_2v_0, u_1v_0\}$$

(véase la figura 15). Así, $\mu(P_4 \square P_4) = 8$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m = 4$. Ya que hay dos vértices del conjunto de visibilidad mutua por cada trayectoria vertical u horizontal entonces $\mu(P_4 \square P_n) = 8 = 2 \min\{4, n\}$.

Sea $k \geq 5$; consideremos la gráfica $P_k \square P_k$ y el conjunto de vértices

$\{u_1v_0, u_2v_0, u_0v_1, u_3v_1, u_{j-2}v_j, u_{j+2}v_j\} \cup \{u_{k-4}v_{k-2}, u_{k-1}v_{k-2}, u_{k-3}v_{k-1}, u_{k-2}v_{k-1}\}$, para $j \in \{2, \dots, k - 3\}$. Éste es conjunto de visibilidad mutua que tiene a lo más dos vértices de cada trayectoria, por lo que $\mu(P_m \square P_n) \geq 2 \min\{m, n\}$. Así, $\mu(P_m \square P_n) = 2 \min\{m, n\}$. \square

Para el caso de los cilindros debemos considerar otros aspectos. Cada trayectoria vertical contiene a lo más dos vértices de un conjunto de visibilidad mutua y cada ciclo horizontal contiene a lo más tres vértices de un conjunto de visibilidad mutua. Obsérvese que el conjunto de visibilidad mutua de la figura 16 no parece tener simetrías evidentes, por lo que resulta más difícil demostrar que ese conjunto es máximo en el caso de los cilindros.

Por los teoremas 4 y 5 se tiene $\mu(P_s) = 2$ y $\mu(C_t) = 3$, para todo $t > s \geq 2$. Entonces:

TEOREMA 15. Si $s \geq 2$ y $t \geq 3$ entonces $\mu(P_s \square C_t) \leq \min\{3s, 2t\}$.

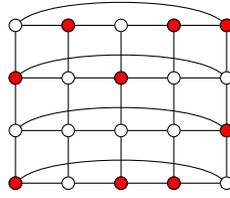


FIGURA 16. $P_4 \square C_5$

Demostración. Sea $(u_0v_i, u_1v_i, \dots, u_{s-1}v_i)$ una trayectoria vertical contenida en el cilindro, con $0 \leq i \leq t - 1$, entonces tiene a los más dos vértices del conjunto de visibilidad mutua. Como hay t trayectorias verticales en $P_s \square C_t$, se sigue que $\mu(P_s \square C_t) \leq 2t$.

Ahora sea $(u_jv_0, u_jv_1, \dots, u_jv_{t-1}, u_jv_0)$ un ciclo horizontal con $0 \leq j \leq s - 1$, cada uno con a lo más tres vértices en el conjunto de visibilidad mutua. Ya que tenemos s ciclos, se sigue que $\mu(P_s \square C_t) \leq 3s$. Así, $\mu(P_s \square C_t) \leq \min\{2t, 3s\}$. \square

TEOREMA 16. Sean t, s y k enteros no negativos con $s > k$. Si M es un conjunto de visibilidad mutua de $P_k \square C_t$, entonces M también es un conjunto de visibilidad mutua de $P_s \square C_t$.

Demostración. Sea M el conjunto de visibilidad mutua de $P_k \square C_t$ y supongamos que M no lo es en $P_s \square C_t$. Así, existen dos vértices $u, v \in M$ tales que toda trayectoria mínima entre ellos contiene al menos otro vértice de M . Pero como $s > k$, se tiene que $P_k \square C_t$ es una subgráfica de $P_s \square C_t$, por lo que $P_k \square C_t$ contiene tanto a u, v , y al menos otro vértice en M . Esto contradice que M sea un conjunto de visibilidad mutua en $P_k \square C_t$. Por lo tanto M no es conjunto de visibilidad mutua de $P_k \square C_t$. \square

AGRADECIMIENTOS. Las y los autores agradecen al Séptimo Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas, llevado a cabo en mayo de 2025, por abrir los espacios que permitieron este trabajo de colaboración, en el que también participó el estudiante Raúl Arturo Gaytán Ruiz de la Unidad Cuajimalpa de la Universidad Autónoma Metropolitana.

La organización del Séptimo Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas fue posible gracias a los recursos aportados por las unidades Cuajimalpa e Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana.

REFERENCIAS

[1] Chartrand, G., Zhang, P., *A First Course in Graph Theory*, Dover Publications, 2012.
 [2] Korže, D., Vesel, A., *Mutual-visibility sets in Cartesian products of paths and cycles*, University of Maribor, Slovenia, 2023.

Ilán A. Goldfeder
 Universidad Autónoma Metropolitana,
 Unidad Iztapalapa,
 División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
 Departamento de Matemáticas.
 Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1^a sección
 Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México
 e-mail: igoldfeder@izt.uam.mx

Nahid Yelene Javier Nol

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1^a sección
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: nahid@xanum.uam.mx

Aldo Lozano Piña

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1^a sección
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2252800438@xanum.uam.mx

Luis Josías López Barrios

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1^a sección
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2203009967@izt.uam.mx

Raúl Vélez Limón

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1^a sección
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2223045914@izt.uam.mx

Miryam S. N. Mielke Méndez

Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1^a sección
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2193053291@izt.uam.mx



DESTRUYENDO GRÁFICAS

JUAN CARLOS GARCÍA ALTAMIRANO

RESUMEN. En este artículo, se expone un juego que se puede implementar sobre cualquier gráfica. Es un juego por parejas en donde ambos jugadores tienen una copia de la misma gráfica en donde imaginamos que cada vértice es una *bomba explosiva* con cierto valor de peso asignado y el objetivo es destruir a la gráfica del oponente en el menor número de tiradas, bajo ciertas reglas que estimulan el razonamiento matemático y son acompañadas, en buena medida, por el azar, encarnado por un dado que dicta el *valor de ataque*.

Si bien la intención principal es proponer un juego didáctico y divertido, nacido en las entrañas de la teoría de gráficas, su implementación sugiere algunas preguntas teóricas interesantes, que incitan a realizar una investigación un poco más rigurosa.

INTRODUCCIÓN

La teoría de gráficas tiene innumerables aplicaciones en diversas áreas del conocimiento y problemas de la vida cotidiana [1] y, a pesar de ser una disciplina relativamente reciente, posee un amplio acervo teórico. Por ello, es pertinente hacer divulgación científica matemática en donde se aborden temas correspondientes a esta asignatura para alentar a las nuevas generaciones de científicos a comprender y realizar investigaciones al respecto o incluso al público en general para que tenga una mejor noción de los temas que ahí se abordan.

La manera más didáctica y divertida de introducir a alguien al mundo de la teoría de gráficas es por medio de juegos en donde no sea absolutamente necesario conocer los conceptos fundamentales y jugar con ellos sin darse cuenta: jugar con *vértices y aristas* a través de “bolitas y palitos”.

En este artículo se establecen las bases para implementar un juego sobre cualquier gráfica y se da un ejemplo concreto de cómo aplicarlo en la gráfica más famosa que existe: la gráfica de Petersen. El juego de “Destruyendo la gráfica de Petersen”, descrito en la sección 4, es un juego por parejas; aunque con unas pequeñas modificaciones, se puede jugar con más integrantes o de manera individual. Es una herramienta eficiente para ser presentada en talleres de divulgación matemática, ya que, implícitamente, en él se trabajan conceptos como “gráficas”, “digráficas”, “algoritmos”, “isomorfismos”, “combinaciones”, “probabilidad”, entre otros. Además de ejercitar la toma de decisiones basadas en el análisis matemático, aunque estas dependan del azar.

En pocas palabras, el juego de “Destruyendo gráficas” consiste en lo siguiente: ambos jugadores tienen una copia de la misma gráfica en donde imaginamos que cada vértice es una *bomba explosiva* con cierto valor de peso asignado y el objetivo es destruir a la gráfica del oponente, con valores de ataque determinados por un dado, en la menor cantidad de tiradas. Los detalles del juego se exponen en la sección 2.

Si quitamos al azar de la ecuación, una pregunta teórica natural es: dada una gráfica con una asignación de pesos a sus vértices establecida, ¿cuál es la menor cantidad de tiradas para destruir a esta gráfica si nosotros podemos decidir el valor de ataque en cada tirada? En su versión más sencilla, cuando los pesos son iguales a 1 para

todos los vértices y el valor de ataque es $d = 2$, contestar esta pregunta es equivalente a encontrar un conjunto dominante independiente de orden mínimo [2, 3]; mientras que si el valor de ataque es una constante $d \geq 2$, el problema consiste en obtener un d -conjunto dominante en distancia formado por vértices independientes de orden mínimo [4]; los cuales son problemas del tipo NP-completo [5], es decir, no se conoce ningún algoritmo que encuentre una solución en *tiempo polinomial*. El problema de dominación es uno de los temas más estudiados en teoría de gráficas por su interés teórico, así como por sus diversas aplicaciones en temas como redes de comunicación, logística y transporte, optimización de recursos, redes neuronales, entre muchos otros [6].

Este trabajo se divide en 5 secciones. Si el lector ya conoce los conceptos básicos de teoría de gráficas, bien puede omitir la sección 1. Por el contrario, si el lector quiere profundizar en algún concepto de los que están expuestos en dicha sección, puede consultar el siguiente libro [7], que es muy accesible. A alguien que solamente le interese saber cómo se juega y ver al juego en acción, se le invita a ver la subsección 2.1 y la sección 4 que son en donde se exponen las reglas del juego y se ve un ejemplo concreto, respectivamente. Aunque es recomendable revisar toda la sección 2, ya que ahí se encuentran los resultados principales de este artículo y el análisis de las posibles *estrategias ganadoras* que ahí se realiza, es lo que permite comprender la complejidad de este juego. Es importante mencionar que el ejemplo de la sección 4 fue desarrollado en el sexto Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas (TOMMAD24), en colaboración con alumnos de la UAM-Cuajimalpa y UAM-Iztapalapa. En la sección 3, tomando en cuenta el análisis realizado en la sección 2, se sugieren las familias de gráficas más adecuadas para implementar el juego y, finalmente, en las conclusiones se plantean algunas posibles líneas de investigación.

1. PRELIMINARES

Una **gráfica** G es un par ordenado $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto de elementos llamados **vértices** y $E(G)$ un conjunto de elementos llamados **aristas** que consiste de parejas *no ordenadas* de vértices. Una **gráfica simple** es una gráfica en la que pedimos que los vértices de una arista sean diferentes y que $E(G)$ no tenga aristas repetidas. La cantidad de vértices de una gráfica G es el **orden** de G y se denota por n . La cantidad de aristas de G se llama **tamaño** de G y se denota por m . Una gráfica es **nula** si su conjunto de vértices es vacío (por ende, también su conjunto de aristas). Una gráfica es **vacía** si $m = 0$ y es **trivial** si $n = 1$. Una gráfica simple es **finita** si su conjunto de vértices es finito. En este artículo, consideraremos únicamente gráficas simples finitas, así que para nosotros el término “gráfica” siempre significará gráfica simple y finita.

Cada arista $\{u, v\}$ de $E(G)$ es regularmente denotada como uv o vu . Si $e = uv$ es una arista, decimos que e une a u y v ; en el mismo contexto, los vértices u y v son llamados **extremos** de la arista e . A los extremos de una arista se dice que son **incidentes** con la arista y viceversa. Dos vértices incidentes con la misma arista decimos que son **adyacentes** y dos vértices que son adyacentes son **vecinos**.

El **grado** de un vértice v en una gráfica G es el número de aristas incidentes con v , es decir, en gráficas simples, el grado de v es el número de vecinos de v en G . Un vértice de grado cero es llamado **vértice aislado**. El máximo entre todos los grados de los vértices de G es llamado **grado máximo** de G . Análogamente, se define el **grado mínimo** de G . Si todos los vértices de una gráfica G tienen el mismo grado, entonces G es una **gráfica regular**. Si cada vértice de G tiene grado k , entonces G es **k -regular**.

Una gráfica $H(V(H), E(H))$ es llamada **subgráfica** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. En tal caso, decimos que G **contiene** a H o H está **contenida** en G . Cuando

$H \subseteq G$ pero $H \neq G$, llamamos a H **subgráfica propia** de G . Si v es un vértice de una gráfica $G = (V(G), E(G))$, podemos obtener una subgráfica de G con $|V(G)| - 1$ vértices eliminando a v de G y a todas las aristas que inciden en v ; el resultado lo denotamos por $G - v$. Una subgráfica obtenida a partir de la eliminación de vértices es llamada **subgráfica inducida**. Si X es el conjunto de vértices eliminados, la subgráfica resultante es denotada por $G - X$.

Dos gráficas $G = (V(G), E(G))$ y $H = (V(H), E(H))$ son **isomorfas**, escrito $G \cong H$, si existe una biyección $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$, tal que, para $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$ si y sólo si $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$; tal función es llamada **isomorfismo** entre G y H . Cuando $H = G$, decimos que φ es un **automorfismo** de G .

Una subgráfica P de una gráfica G es una **trayectoria** en G si los vértices de P pueden ser etiquetados en una sucesión lineal (sin repetir vértices) de tal manera que cada par de vértices consecutivos en la sucesión son adyacentes, y son no adyacentes en otro caso. Para dos vértices distintos u y v en una gráfica G , una $u - v$ trayectoria es una trayectoria con vértice inicial u y vértice terminal v . De manera similar, una subgráfica C de G es un **ciclo** en G , si tiene tres o más vértices, los cuales pueden ser etiquetados en una sucesión cíclica (sin repetir vértices) de tal forma que cada par de vértices consecutivos en la sucesión son adyacentes, y son no adyacentes en otro caso. El número de aristas contenidas en una trayectoria o en un ciclo es su **longitud**. Un ciclo de longitud $k \geq 3$ es llamado **k -ciclo**. El **cuello** de una gráfica G es la longitud más pequeña entre todos sus ciclos.

Decimos que un conjunto de vértices de una gráfica G es **independiente** si ninguna pareja de vértices en el conjunto es adyacente. Dos vértices u y v están **conectados** si G contiene una $u - v$ trayectoria. Una gráfica G es **conexa** si cualquier par de vértices está conectado. Una gráfica que no es conexa es una **gráfica inconexa**. Una subgráfica conexa H de una gráfica G es un **componente conexa**, o simplemente un **componente** de G , si esta no es una subgráfica propia de una subgráfica conexa de G .

Sean u y v vértices en una gráfica conexa G . La **distancia** entre u y v es la mínima de las longitudes entre todas las $u - v$ trayectorias en G . Un subconjunto de vértices S de una gráfica G es **dominante** si todo vértice de G está a distancia a lo más uno de algún vértice del conjunto S . Un conjunto dominante es de **cardinalidad mínima** si tiene la menor cardinalidad de entre todos los conjuntos dominantes de G (más información en [2]). En general, un subconjunto de vértices S de una gráfica G es **d -dominante en distancia** si todo vértice de G está a distancia a lo más d de algún vértice del conjunto S (para más detalles, consultar [3, 4, 5, 8, 9]).

Una **digráfica** D es un conjunto finito de vértices $V(D)$ y un conjunto de pares de vértices **ordenados** $A(D)$, llamados **arcos**. Si $(u, v) \in A(D)$, lo denotamos como uv . En este caso, dado que son parejas ordenadas, $uv \neq vu$. Decimos que $uv \in A(D)$ es un **arco simétrico** si también $vu \in A(D)$. Una digráfica es **acíclica** si no tiene ciclos dirigidos.

Ahora, ya contamos con todas las herramientas para describir y analizar nuestro juego.

2. JUEGO: DESTRUYENDO GRÁFICAS

Pasemos directamente a la descripción de las reglas del juego; luego vemos un ejemplo y después analizamos cada uno de sus detalles.

2.1. Reglas del juego. Consideremos una gráfica G y sea w una función de asignación de peso a los vértices de G , con $w : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$.

Digamos, en virtud del juego, que cada vértice $v \in V(G)$ es una **bomba explosiva**, y que $w(v)$ determina su **resistencia** a explotar.

Es un juego por parejas en donde ambos jugadores tienen una copia de la misma gráfica con la misma asignación de peso a los vértices. El objetivo es destruir la gráfica del oponente en la menor cantidad de **tiradas** bajo las siguientes condiciones:

1. Un jugador **tira**: lanza un dado y al valor d que le salga, le llamaremos **valor de ataque** en ese turno. Escoge algún vértice v_0 de la gráfica de su oponente para ser **detonado** o **atacado**. La **detonación** o **ataque** se realiza por medio de una sucesión de **pasos** descritos en el siguiente

Algoritmo:

Paso 1: Sea $t : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$, con $t(v) = 0$ para todo $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$ y $t(v_0) = d$. Definimos $r_0 = w(v_0) - t(v_0)$:

- Si $r_0 > 0$, entonces actualizamos el peso de v_0 por r_0 y es el turno del otro jugador.
- Si $r_0 = 0$, entonces decimos que v_0 **explota** y es el turno del otro jugador.
- Si $r_0 < 0$, entonces v_0 **explota**. Si u es vecino de v_0 , entonces a $t(u)$ le sumamos $-r_0$. En este caso, decimos que $-r_0$ es el **potencial transferido** de v_0 a u .

Si $r_0 < 0$, existe un

Paso 2: Para cada vecino u de v_0 , sea $r_u = w(u) - t(u)$:

- Si $r_u > 0$, entonces actualizamos el peso de u por r_u y nuevamente $t(u) = 0$.
- Si $r_u = 0$, entonces u **explota**.
- Si $r_u < 0$, entonces u **explota**. Si v es vecino de u , con $v \neq v_0$ y v no explota en este paso, entonces a $t(v)$ le sumamos $-r_u$. Decimos que $-r_u$ es el potencial transferido de u a v .

En general: Si en el **paso n**, con $n \geq 2$, $r_u < 0$ para algún vértice u explotado en este paso, donde $r_u = w(u) - t(u)$; existe un

Paso n+1: Para cada uno de los vértices v a los que les transfirieron potencial en el paso anterior, sea $r_v = w(v) - t(v)$:

- Si $r_v > 0$, entonces actualizamos el peso de v por r_v y nuevamente $t(v) = 0$.
- Si $r_v = 0$, entonces v **explota**.
- Si $r_v < 0$, entonces v **explota**. Si z es vecino de v y z no explota en este paso ni ha explotado en ningún paso anterior, entonces a $t(z)$ le sumamos $-r_v$ y decimos que $-r_v$ es el potencial transferido de v a z .

2. En el siguiente turno de este mismo jugador, atacará a la gráfica inducida que resulta de eliminar a los vértices explotados y con la asignación de pesos actualizados de los vértices que aún no explotan.
3. El juego concluye cuando ambos jugadores realizan la misma cantidad de tiradas y al menos una gráfica ha sido **destruida**, es decir, todos los vértices de la gráfica han explotado. Gana el jugador que haya destruido la gráfica de su contrincante y aún conserve algún vértice sin explotar; en su defecto, se declara empate.

Veamos un ejemplo concreto de cómo se realiza una tirada. Consideremos a la gráfica G correspondiente a la figura 1(a) con vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ y pesos 6, 1, 3, 4, 7, 3, 2, respectivamente. Supongamos que el valor de ataque es $d = 6$:

- Si en el paso 1 atacamos al vértice v_5 ; el peso de v_5 se actualiza a 1 y es el turno del otro jugador.
- Si en el paso 1 atacamos al vértice v_1 ; v_1 explota y es el turno del otro jugador.
- Si en el paso 1 atacamos al vértice v_2 ; v_2 explota y le transfiere a sus vecinos (v_1, v_3, v_5 y v_7) un potencial de 5; ver figura 1(b). Hay un segundo paso.
- En el segundo paso: el peso de v_1 se actualiza a 1; el peso de v_5 se actualiza a 2; v_3 y v_7 explotan; v_3 le transfiere un potencial de 2 a v_4 y v_6 ; v_7 le transfiere un potencial de 3 a v_6 ; v_3 y v_7 no se transfieren potencial, a pesar de ser vecinos, ya que ambos explotan en el mismo paso; ver figura 1(c). Hay un tercer paso.
- En el tercer paso: v_6 explota; v_6 le transfiere un potencial de 2 a v_1 y v_5 ; v_6 no le transfiere potencial a v_3 y v_7 porque ya explotaron en un paso anterior; ver figura 1(d). Hay un cuarto paso.
- En el cuarto paso: v_1 y v_5 explotan; v_1 le transfiere un potencial de 1 a v_4 ; v_5 ya no transfiere ningún potencial a v_4 ; ver figura 1(e). Hay un quinto paso.
- En el quinto paso: el peso de v_4 se actualiza a 1 y es el turno del otro jugador, ver figura 1(f).
- La gráfica resultante es únicamente el vértice v_4 con peso 1.

2.2. Análisis del juego. Olvidémonos por un momento de que es un juego de parejas. Supongamos que es un juego individual para analizar sus principales características y comprender su complejidad.

Sea G una gráfica con función w de asignación de peso a los vértices de G . Sea d un valor de ataque y sea $v \in V(G)$. Definimos a la **digráfica de transferencia** con valor de ataque d desde v , $D_G(d, v)$, como la digráfica que tiene el mismo conjunto de vértices de G y ab es un arco de $D_G(d, v)$ si a le transfirió algún potencial a b al momento de atacar a v con el valor de ataque d ; etiquetamos a cada arco de $D_G(d, v)$ con el respectivo potencial transferido. En este contexto, definimos a la **gráfica resultante** como la gráfica que se obtiene desde G al remover a los vértices explotados, con la función de asignación de peso actualizada. Por ejemplo, sea G la gráfica de la figura 2(a) con vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ y pesos 1, 1, 2, 3, 2, 1, respectivamente. En la figura 2(b) podemos apreciar a $D_G(4, v_1)$ y en la figura 2(c) la gráfica resultante (con los pesos actualizados).

Notemos que la digráfica de transferencia está bien definida, ya que, en cada paso, los vértices que explotan no se transfieren potencial entre ellos y únicamente le transfieren potencial a vértices que aún no han explotado. Es decir, es una digráfica sin ciclos dirigidos, en particular, sin arcos simétricos. Si $D_G(d, v)$ es una digráfica de transferencia, definimos su **potencia** como la suma de las etiquetas de todos sus arcos y la denotamos por $\mathcal{P}[D_G(d, v)]$. Por ejemplo, la digráfica de transferencia de la figura 2(b) tiene potencia igual a 9. Más aún, si para destruir a una gráfica G fue suficiente con detonar, sucesivamente, a los vértices v_1, v_2, \dots, v_k con los valores de ataque d_1, d_2, \dots, d_k , respectivamente; denotamos a esta **sucesión de detonaciones** como $[v_1^{d_1}, v_2^{d_2}, \dots, v_k^{d_k}]$ y decimos que su **carga explosiva** es la suma de todos sus valores de ataque; cuando el valor de ataque es constante, a la sucesión de detonaciones la denotamos por $[v_1, v_2, \dots, v_k]$. Definimos a la **digráfica de transferencia total**, correspondiente a esta sucesión, como la digráfica $D_G[v_1^{d_1}, v_2^{d_2}, \dots, v_k^{d_k}]$ que se obtiene de unir a todas las digráficas $D_G(d_i, v_i)$ con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$; dicha digráfica es acíclica.

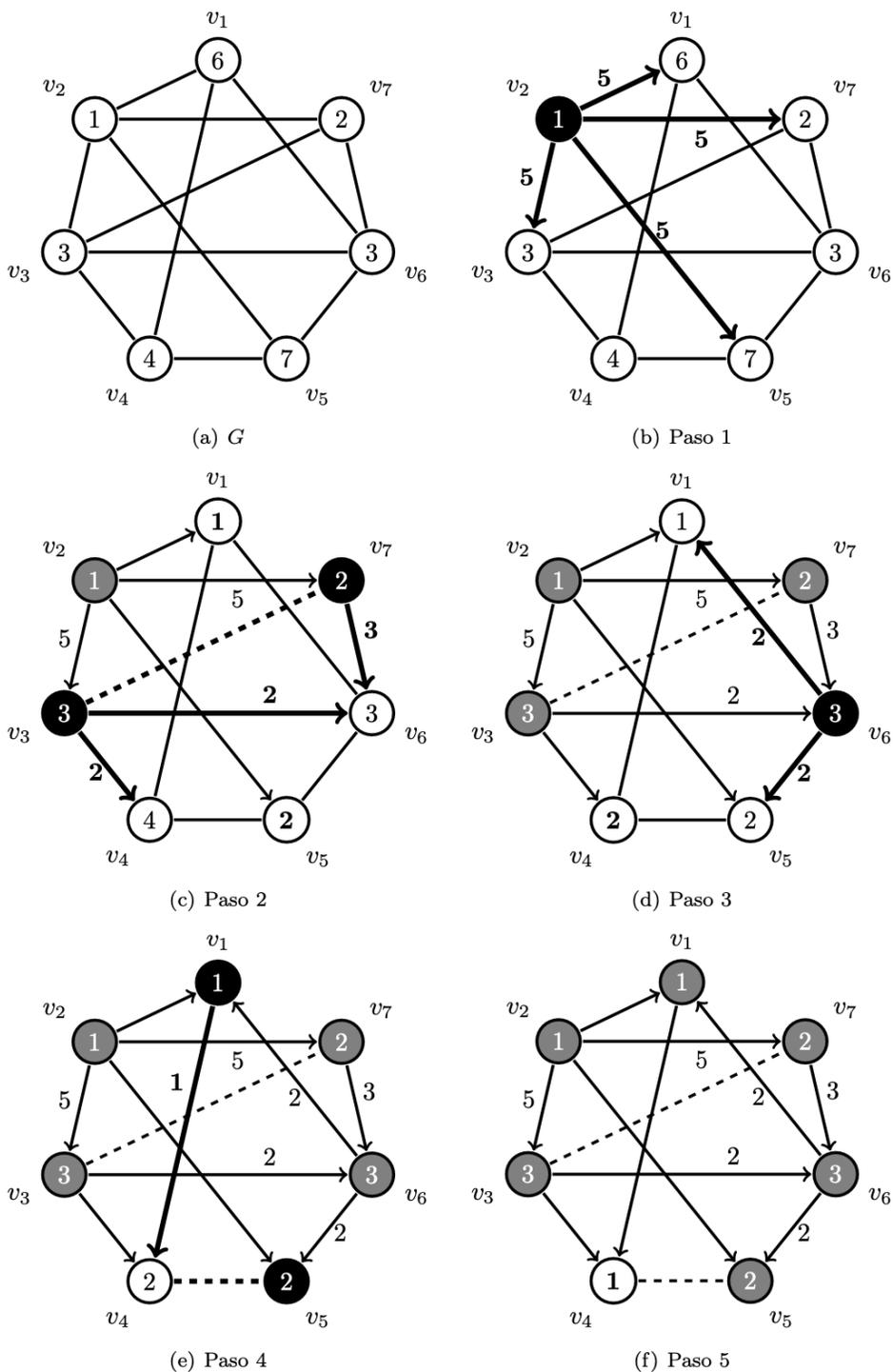


FIGURA 1. En color negro, los vértices que explotan en el respectivo paso, y en color gris, los vértices explotados en pasos anteriores. Las flechas con etiquetas son auxiliares para indicar los potenciales transferidos

Llamamos **potencia destructiva** de $D_G[v_1^{d_1}, v_2^{d_2}, \dots, v_k^{d_k}]$ como la suma de potencias de $D_G(d_i, v_i)$ con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, es decir, la suma de las etiquetas de todos sus arcos.

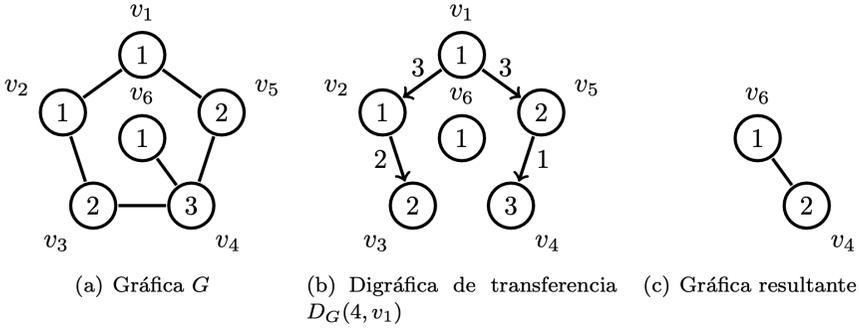


FIGURA 2

Cabe mencionar que si el valor de ataque fuera una constante d y todos los vértices tuvieran peso igual a 1, este problema sería equivalente a obtener un d -conjunto dominante en distancia formado por vértices independientes mínimo [2, 3]. Como no es el caso, el éxito en este juego depende del azar y de la habilidad del jugador para desarrollar una estrategia ganadora.

2.3. “Estrategias”. Intuitivamente, buscamos al mejor vértice para ser atacado en cada turno, dependiendo de alguna particularidad de este. Veamos algunas de estas posibles características y mostremos que, a veces, la intuición puede fallar.

2.3.1. Grado máximo. Se podría considerar que, si tenemos dos vértices con el mismo peso, convendría atacar al de mayor grado. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 2(a), si en la primera y segunda tirada tenemos los valores de ataque $d_1 = 5$ y $d_2 = 1$, respectivamente. Si atacamos a v_1 (de grado 2) y después a v_6 , destruimos a la gráfica. Por otro lado, si comenzamos atacando a v_6 (de grado 1), necesitamos al menos 3 tiradas para destruir a G . Sin embargo, considerando la gráfica H de la figura 3, si en todas las tiradas los valores son iguales a 4, si comenzamos atacando a v_2 (de grado 4), destruimos la gráfica en 5 tiradas ($[v_2, v_1, v_4, v_6, v_3]$). Mientras que, si comenzamos por v_1 (de grado 1), la destruimos en 3 tiradas ($[v_1, v_2, v_3]$). Así que el grado de los vértices no es determinante para destruir una gráfica en el menor número de tiradas, aun cuando estos tienen el mismo peso asignado.

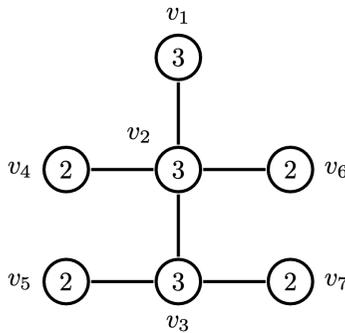


FIGURA 3. Gráfica H

2.3.2. Potencia máxima. De manera parecida al caso anterior, podríamos suponer que, entre dos vértices, conviene atacar al vértice cuya digráfica de transferencia tenga mayor potencia. Como sucede en la gráfica G de la figura 2(a), donde $\mathcal{P}[D_G(4, v_1)] = 9$ y $\mathcal{P}[D_G(4, v_6)] = 3$. De manera contraria, en la gráfica H de la figura 3, $\mathcal{P}[D_H(4, v_2)] = 4$ mientras que $\mathcal{P}[D_H(4, v_1)] = 1$. Por lo que esta tampoco es una peculiaridad

determinante. De hecho, podríamos profundizar un poco más y darnos cuenta de que tampoco depende de la potencia destructiva de las digráficas correspondientes a dos sucesiones de vértices que destruyen la gráfica (ver sección 4).

2.3.3. Valor de ataque máximo. Algo que sin duda es importante para explotar un vértice es el valor de ataque con el que lo detonemos. Pensaríamos que “a mayor carga explosiva, mayor destrucción”. En la gráfica H de la figura 3, si el valor de ataque es constante, igual a 6, destruiríamos la gráfica en al menos 3 tiradas; por ejemplo, $[v_1, v_2, v_3, v_6]$, $[v_2, v_5, v_7]$, $[v_3, v_1, v_4, v_6]$, $[v_4, v_1, v_3, v_6]$ o $[v_5, v_2, v_7]$. Por otro lado, si el valor de ataque es constante e igual a 5, lo podemos hacer en 2 tiradas, atacando a v_3 seguido de v_2 . Esto sí es algo verdaderamente sorprendente.

2.3.4. El orden de las detonaciones. A la gráfica H , de la figura 3, la podemos destruir si el valor de ataque sobre v_3 es 5 y después el valor de ataque sobre v_2 es 4. No obstante, si primero atacamos a v_2 con un valor de ataque igual a 4 (o incluso 5), ya no destruimos la gráfica aplicándole un valor de ataque de 5 a v_3 . Esto es: “A pesar de que ya sepamos qué vértices hay que detonar, importa el orden en el que lo hagamos”.

2.3.5. Toma de decisiones “a ciegas”. Supongamos que en la gráfica H de la figura 3 el peso de v_3 es 4. Si en la primera tirada el valor de ataque sale 1 y, por alguna razón, sabemos que en la tercera tirada caerá 4 o más. Entonces, ¿a quién conviene atacar en la primera tirada? Si atacamos a v_3 y en la segunda tirada sale 6, como vimos en el punto 2.3.3, necesitaríamos al menos 3 tiradas más para destruir la gráfica, por lo que convendría atacar a cualquier vértice distinto de v_3 y v_2 . Ahora bien, si en la segunda tirada sale 5, para terminar el juego en la tercera tirada, en la primera sí se debió atacar a v_3 . Por lo tanto, dado que no sabemos qué saldrá en las tiradas posteriores, no tenemos certeza de cuál es la mejor tirada en cada turno, aunque bien podemos recurrir a la probabilidad.

El problema principal, en todos los casos anteriores, es que se generan nuevas componentes, lo que, en principio, aumenta la cantidad de tiradas.

2.3.6. Menor número de componentes. Si el valor de ataque es constante, igual a 5. En la gráfica F de la figura 4, los únicos vértices que no aumentan la cantidad de componentes son v_1 y v_{11} que, por simetría, son equivalentes. Si detonamos a v_1 , la gráfica resultante se destruye con al menos 3 detonaciones extra ($[v_9, v_6, v_{11}]$ por ejemplo). En cambio, si detonamos a v_6 , obtenemos 2 componentes que se destruyen con una tirada cada una. Por lo que mantener el mínimo número de componentes tampoco es una estrategia ganadora en este juego.

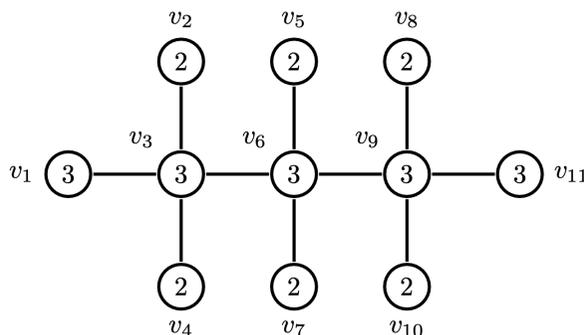


FIGURA 4. Gráfica F

Luego de este análisis, ya podemos dimensionar un poco más la complejidad de este juego. También podemos notar que el azar (del dado) juega un papel muy importante.

3. GRÁFICAS PARA JUGAR

En principio, este juego se puede implementar en cualquier gráfica, pero para que el juego sea interesante, debemos hacer algunas consideraciones:

Gráfica regular: Pedimos regularidad, para que, desde el principio, no haya preferencia por algún vértice debido a su grado.

Función balanceada de asignación de peso: De manera similar a la petición anterior, sería conveniente que la cantidad de valores distintos que toma la función de asignación de peso a los vértices dividiera (en la medida de lo posible) a la cantidad de vértices.

Cuello adecuado: Tomando en cuenta la obtención de las digráficas de transferencia, para que dos o más vértices no le transfieran *mucho* potencial a un solo vértice en el mismo paso y el juego termine muy rápido, requerimos que la gráfica tenga un cuello de longitud impar lo suficientemente holgado.

Dado acotado: Relacionado con el punto anterior, los valores del dado no deberían ser demasiado grandes. Como recomendación, si se complica mucho conseguir un dado de cierta cantidad de valores posibles, también se puede usar una pirinola con la cantidad de caras deseadas.

Con estas condiciones, podríamos pensar en las gráficas asociadas a los polígonos platónicos, gráficas circulantes o en *jaulas*.

Una (k, g) -*jaula* es una gráfica k -regular de cuello g de orden mínimo. Si se desea introducirse un poco más en el tema de jaulas, es recomendable ver [10]. Si se desea conocer algunos de los resultados más recientes, ver [11].

Veamos cómo implementar nuestro juego en la única $(3, 5)$ -jaula [11], conocida como la **gráfica de Petersen**; ver figura 5.

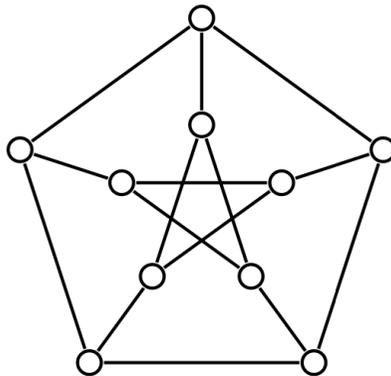


FIGURA 5. Gráfica de Petersen

4. DESTRUYENDO LA GRÁFICA DE PETERSEN

Tomando en cuenta las consideraciones de la sección anterior, dado que la gráfica de Petersen es de orden $n = 10$ y cuello $g = 5$, la función que le asigna peso a los vértices debe tomar valores entre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y cada valor se repite una vez. Por ejemplo, un *tablero* de juego podría ser la gráfica de Petersen con la función de asignación de pesos como se muestra en la figura 6, que denotaremos por P_0 .

Para que el juego sea más dinámico, usamos un dado común de 6 caras, que toma valores entre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Aprovechando que tenemos este ejemplo específico, tenemos la oportunidad de hacer algunas observaciones interesantes:

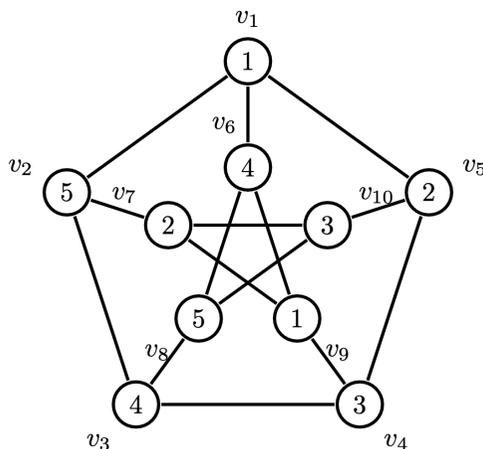


FIGURA 6. Gráfica de Petersen con pesos asignados P_0

Supongamos que en todas las tiradas obtenemos 6.

- Si comenzamos detonando al vértice v_1 , de peso 1, destruimos a la gráfica en 4 tiradas, $[v_1, v_3, v_7, v_8]$, ver figura 7. Por otro lado, si comenzamos detonando al vértice v_9 , de peso 1, destruimos a la gráfica en 2 tiradas, $[v_9, v_3]$, ver figura 8.
- Si nuestra sucesión de detonaciones es $[v_8, v_9, v_2]$, destruimos a la gráfica en 3 tiradas y obtenemos una potencia destructiva de 36 (ver figura 9). Mientras que si la sucesión de detonaciones es $[v_9, v_3]$, destruimos a la gráfica en 2 tiradas a pesar de que obtengamos una potencia destructiva de 35 (ver figura 8). En otras palabras, confirmando lo que se mencionó en el punto 2.3.2, la potencia destructiva de una digráfica no determina la menor cantidad de detonaciones para destruir una gráfica.

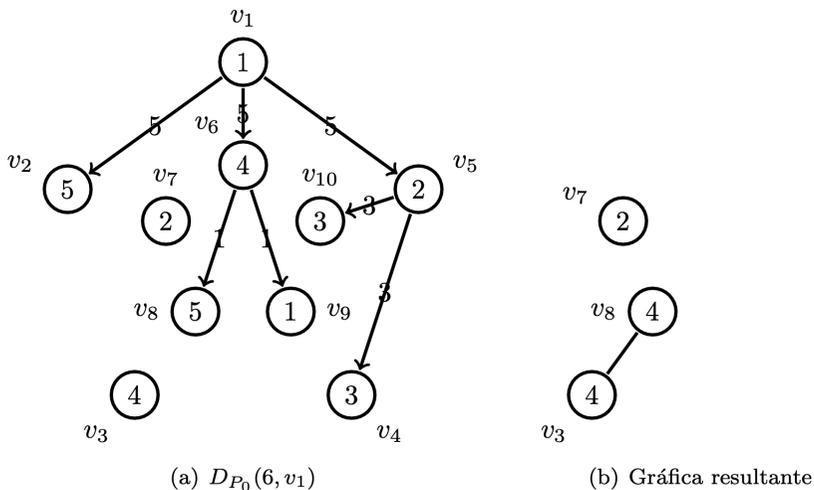


FIGURA 7

Si dos personas juegan a destruir la gráfica de Petersen bajo estas condiciones, entre ambas podrían colocar los pesos sobre los vértices de manera aleatoria, pero ¿de cuántas maneras distintas se puede hacer esto?

4.1. Cantidad de tableros distintos. Digamos que cada asignación de peso a los vértices de la gráfica de Petersen, que toma valores entre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y cada valor

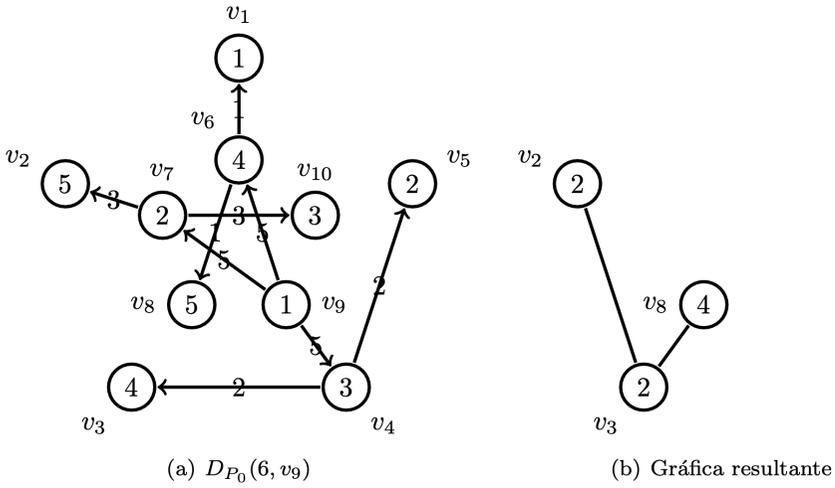


FIGURA 8

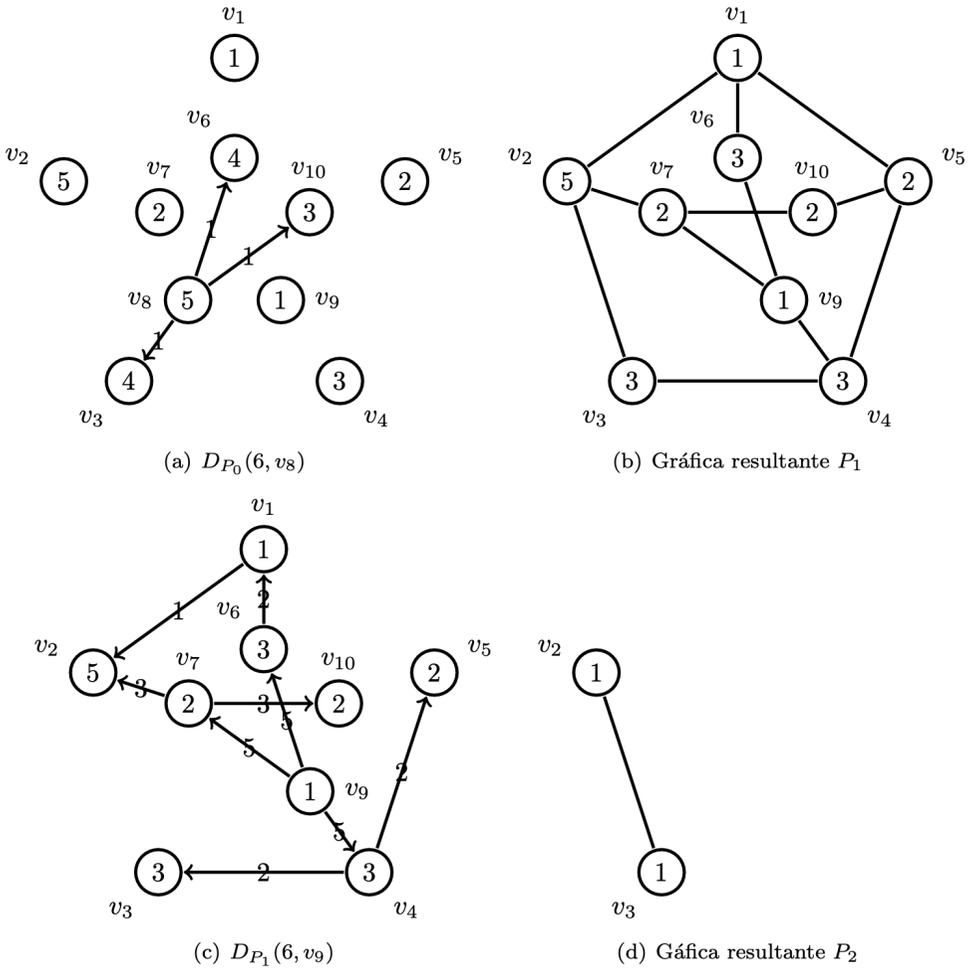


FIGURA 9

se repite una vez; es un **tablero de Petersen** en donde podemos jugar. Dado que el grupo de automorfismos de la gráfica de Petersen es isomorfo al *grupo simétrico*

$Sym(5)$ [11], y este tiene $5! = 120$ elementos, entonces la gráfica de Petersen tiene 120 automorfismos, es decir, 120 maneras de permutar sus vértices de tal manera que veamos el mismo dibujo que la representa. Por lo que la estructura de cada tablero representa a 120 de entre todos los posibles tableros. Ahora bien, para contar a todos los posibles tableros, debemos considerar todas las combinaciones de que a 2 de los 10 vértices se les asigne el peso 1; luego, que 2 de los 8 vértices restantes tengan peso 2; 2 de los 6 vértices restantes tengan peso 3; 2 de los 4 vértices restantes tengan peso 4; y por último, los 2 vértices que tengan peso 5. Es decir,

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 113,400.$$

Por lo tanto, existen $\frac{113,400}{120} = 945$ tableros de Petersen distintos *bajo isomorfismo*. Muchos como para memorizarse una estrategia ganadora para cada uno, sin contar con la capacidad de reconocer qué estructura *representante* es si esta está bajo un automorfismo.

5. CONCLUSIONES

Sería deseable ampliar la lista de ejemplos concretos de gráficas en las cuales implementar nuestro juego, especificando la imagen de función de asignación de peso a los vértices, la cantidad de vértices en cada conjunto que tendrán el mismo valor y los posibles valores del dado. Sin dejar de lado que el juego tiene que ser ágil y divertido.

En cualquier tablero de Petersen (3-regular, sin 3 y 4-ciclos), dado que tenemos dos 5 y dos 4, ninguno de ellos puede destruirse en una tirada. Vimos que el tablero de la figura 6 sí es posible destruirlo en 2 tiradas. Una pregunta teórica interesante es, de entre todos los tableros de Petersen que se pueden destruir en dos tiradas, ¿cuál es la menor carga explosiva necesaria?

En general, para una gráfica G con una asignación de peso a sus vértices *fija*:

- 1: ¿Cuál es la menor cantidad de tiradas que necesitamos para destruir a G ?
- 2: De entre las sucesiones de detonaciones que destruyen a G en la menor cantidad de tiradas, ¿cuál es la carga explosiva mínima?

Ahora bien, para una gráfica G , ¿cuáles son los valores menores de las preguntas 1 y 2 de entre todas las funciones balanceadas de asignación de peso a sus vértices que toman valores de un conjunto W y un rango de valores de ataque dentro de un conjunto D ? Una línea de investigación sería responder la interrogante anterior para gráficas concretas con conjuntos W y D determinados.

Decimos que una sucesión de detonaciones que destruye a G es **mínima** si no se puede destruir a G con la misma sucesión de vértices detonados, pero con una carga explosiva menor. Sería interesante saber si, entre dos sucesiones de detonaciones mínimas (no necesariamente de la misma longitud) que destruyen a G , ¿la carga explosiva menor implica una mayor potencia destructiva de la respectiva digráfica de transferencia total? Nótese que el ejemplo de la figura 9 visto en la sección 4 no es contraejemplo, ya que la gráfica de la figura 9(d) se puede destruir con un valor de ataque igual a 2. Más aún, entre dos sucesiones de detonaciones que destruyen a G , ¿la carga explosiva mayor implica una menor o igual cantidad de detonaciones para destruir a la gráfica?

AGRADECIMIENTOS. El autor expresa su gratitud a la Universidad Autónoma Metropolitana por los recursos aportados para la realización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas 2024; en particular a la UAM-Cuajimalpa y a la UAM-Iztapalapa. En especial, agradezco a los organizadores que me recibieron como profesor invitado y a los alumnos que participaron en el taller.

REFERENCIAS

- [1] Majeed, Abdul, and Ibtisam Rauf. *Graph theory: A comprehensive survey about graph theory applications in computer science and social networks*. Inventions, 5.1 (2020): 10.
- [2] Allan, R. B., & Laskar, R. *On domination and independent domination numbers of a graph*. Discrete mathematics, 23(2) (1978), 73-76.
- [3] Gimbel, J., & Henning, M. A. *Bounds on an independent distance domination parameter*. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 20 (1996), 193-205.
- [4] Meir, A., & Moon, J. *Relations between packing and covering numbers of a tree*. Pacific Journal of Mathematics, 61(1) (1975), 225-233.
- [5] Fricke, G. H., Hedetniemi, S. T., & Henning, M. A. *Distance independent domination in graphs*. Ars Combinatoria, 41(3995) (1995), 33-44.
- [6] Dreyer Jr, P. A. *Applications and variations of domination in graphs*. Rutgers The State University of New Jersey, School of Graduate Studies, 2000.
- [7] Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. *Graph theory*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.
- [8] Beineke, L. W., & Henning, M. A. *Some extremal results on independent distance domination in graphs*. Ars Combinatoria, 37 (1994), 223-233.
- [9] Henning, M. A. *Distance domination in graphs*. Topics in Domination in Graphs, (2020), 205-250.
- [10] Wong, P. K. *Cages—a survey*. Journal of Graph Theory, 6(1) (1982), 1-22.
- [11] Exoo, G., & Jajcay, R. *Dynamic cage survey*. The electronic journal of combinatorics, DS16-Jul (2012).

Juan Carlos García Altamirano

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,

División de Ciencias Naturales e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.

Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa,

Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348, Ciudad de México, México.

e-mail: carlosg@cua.uam.mx



UN MODELO DE PROPAGACIÓN DE VIH EN UNA POBLACIÓN

CLAUDIA MARLENE DE LA CRUZ, JULIÁN FRESÁN-FIGUEROA, BRUNO GRAF-ROMERO, MARÍA FERNANDA PÉREZ-SÁNCHEZ, NANCY VALERIA PRADO MARTÍNEZ, PABLO CÉSAR SÁNCHEZ-SILVA

RESUMEN. En este artículo trabajamos en un modelo dinámico, propuesto por Simon Mukwemi, para la propagación del VIH en una población discreta y finita de tamaño n , representada mediante una gráfica, donde los vértices son individuos y las aristas indican relaciones sexuales entre los individuos; a esta representación la llamamos gráfica sexual. El modelo toma en cuenta la estructura de dicha gráfica, la densidad de población infectada entre las parejas sexuales de cada individuo, y una cantidad razonable de la influencia que pueden tener los individuos VIH positivos no infecciosos sobre sus parejas sexuales que sí son infecciosas. Exploramos distintas posibles redes sexuales y los comportamientos dinámicos del modelo, como la estabilización, propagación sostenida o extinción del virus, en función de la estructura de la gráfica.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los desafíos más urgentes en salud pública, en México y en muchos lugares del mundo, sigue siendo, en ausencia de una cura definitiva, diseñar estrategias efectivas para frenar la propagación del VIH (Virus de Inmunodeficiencia Humana). Aunque el acceso a tratamiento antirretroviral ha mejorado significativamente en los últimos años, los nuevos casos no han dejado de aparecer. Según datos de CENSIDA [1], en México más de 160,000 personas han sido diagnosticadas con VIH en los últimos 10 años, cada año se suman en más de 10,000 nuevos diagnósticos, y más del 70% de los diagnósticos se dan entre los 20 y 40 años.

Para entender cómo se propaga el virus y diseñar políticas públicas eficaces, los modelos matemáticos se han vuelto herramientas de gran utilidad. Estos modelos permiten hacer simulaciones y predicciones que ayudan a explicar el comportamiento de enfermedades infecciosas. Durante décadas, los más usados han sido los llamados modelos compartimentales, que dividen a la población en grupos como “susceptibles”, “infectados” y “tratados”, y usan ecuaciones diferenciales para representar cómo las personas cambian de un grupo a otro con el tiempo.

aunque estos modelos han sido útiles, tienen limitaciones cuando se trata de enfermedades como el VIH, que se transmite mayormente por contacto sexual. Su principal problema es que suponen que todas las personas tienen la misma probabilidad de tener relaciones sexuales entre sí, y que hay muchas interacciones. Pero en la realidad, y particularmente en México, las relaciones sexuales no son aleatorias ni ocurren de manera homogénea. Factores como la edad, el género, la orientación sexual, la clase social y los estigmas culturales influyen en con quién, cuándo y qué tanto se tiene sexo.

En México, el VIH afecta de forma desigual a ciertos grupos: hombres que tienen sexo con hombres, mujeres trans, trabajadores sexuales y personas que se inyectan drogas. En estos grupos, el número de parejas sexuales puede variar mucho, desde relaciones monógamas hasta redes sexuales muy densas. Algunos individuos tienen un número muy elevado de parejas, lo que los convierte en superpropagadores capaces de generar brotes, mientras que otros pueden no contagiar a nadie. Suponer que todos se comportan igual es una simplificación que puede llevar a errores importantes.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C05, 05C07.

Palabras clave. VIH, gráfica, propagación.

Además, algunos estudios han mostrado que aunque el número de reproducción básica (R_0) sea mayor a 1 (lo que normalmente indicaría una epidemia), no siempre ocurre un brote. Esto se debe a que lo más importante no es sólo cuántas personas están involucradas, sino cómo están conectadas entre sí.

Frente a estas limitaciones, ha surgido una nueva generación de modelos llamados modelos de redes. En estos modelos, cada persona es representada como un vértice en una gráfica, y las relaciones sexuales como conexiones (aristas) entre estos vértices. Así se puede representar mejor cómo ocurren los contactos en la vida real. Para construir estos modelos, se han usado herramientas de análisis de redes que también se aplican en sociología o antropología.

Sin embargo, muchos de estos modelos se basan en redes estáticas o con estructuras muy específicas (como las redes de Erdős–Rényi o Barabási–Albert), que no reflejan bien cómo cambian las relaciones sexuales en la vida diaria. Por ejemplo, en la Ciudad de México, el uso de aplicaciones de citas, la movilidad social y la desigualdad económica cambian constantemente las redes sexuales. También se han usado simulaciones por computadora para representar redes más complejas y dinámicas. Estas simulaciones permiten incluir muchos comportamientos distintos, pero a veces son difíciles de interpretar porque usan muchos parámetros, lo que complica identificar qué aspectos del modelo son responsables de ciertos resultados. En otras palabras, al haber tantas variables involucradas, es difícil aislar el efecto de una sola decisión o suposición sobre la propagación del virus.

En este trabajo presentamos un modelo más general y dinámico, propuesto por Mukwembi [2] que evita esas limitaciones. No asumimos que la red de contactos sea igual para todos ni que esté fija. Representamos a las personas y sus relaciones sexuales mediante una gráfica general, y estudiamos cómo se propaga el virus a lo largo del tiempo. Los resultados se basan en pruebas matemáticas claras, no en simulaciones, lo que ayuda a entender mejor los mecanismos de contagio.

Este tipo de modelo podrían ayudarnos a responder preguntas importantes para México: ¿Qué hace que algunas redes sexuales sean más susceptibles a los contagios? ¿Cómo influye la desigualdad de género o el acceso desigual a los servicios de salud? ¿Qué tipo de acciones pueden cortar más eficazmente las cadenas de contagio? Entender cómo son realmente las relaciones entre personas, sin suposiciones simplistas, es clave para diseñar políticas públicas que sí funcionen. Porque para combatir el VIH, lo primero es dejar de pensar que el sexo es aleatorio y homogéneo.

2. EL MODELO

Similar a los modelos SIR en epidemiología matemática, para el caso del VIH se dividirá la población en 3 clases: los individuos *susceptibles* que son individuos que son VIH negativos; los individuos *infecciosos*, que son individuos que portan el virus y pueden contagiarlo, estos individuos incluyen, por ejemplo, a las personas que aún no cuentan con un diagnóstico o a las personas que aún no son indetectables; y por último los individuos *no infecciosos* que son los individuos portadores del virus, pero que no pueden contagiarlo. En esta última clase se incluyen, por ejemplo, los individuos con carga viral indetectable. La propagación entre individuos se dará, en tiempos discretos, de acuerdo a las siguientes reglas de transición:

Regla 1: Un individuo susceptible se infecta en el siguiente paso de tiempo si la densidad de sus parejas sexuales VIH positivas infecciosas entre todas sus parejas sexuales supera una fracción α ; de lo contrario, el individuo permanece susceptible. Llamaremos a α el parámetro de infectividad.

Regla 2: Un individuo infeccioso v se vuelve no infeccioso si al menos la mitad de sus parejas son no infecciosas; de lo contrario, permanece infeccioso.

Regla 3: Los actores no infecciosos permanecen no infecciosos.

Para más información sobre la justificación de estos supuestos se puede revisar [2]. Modelamos la situación anterior, es decir, la comunidad y sus relaciones sexuales,

mediante una gráfica G de la siguiente manera. El conjunto de vértices de G , denotado por $V(G)$ representa a las personas, y dos vértices están conectados por una arista si y sólo si los individuos correspondientes tienen una relación sexual. Así, por ejemplo, el número de vecinos de un vértice es simplemente el número de parejas sexuales que tiene el individuo correspondiente en un cierto intervalo de tiempo.

En cada paso de tiempo, de acuerdo con reglas mencionadas anteriormente, colorearemos los vértices de G utilizando los colores 0, 1 y 2, a los que nos referiremos como color azul, rojo y negro. Estos colores representan, respectivamente, a individuos susceptibles, un individuos infecciosos y un individuos no infecciosos. La dinámica del modelo está definida de la siguiente manera. Sea $N_{t,k}(v)$ el conjunto de vecinos de color k en el tiempo t del vértice v y sea $d_{t,k}(v) = |N_{t,k}(v)|$, entonces:

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_{t,\alpha}(v) = 0 \text{ y } \frac{d_{t,1}(v)}{d(v)} < \alpha; \\ 1 & \text{si } f_{t,\alpha}(v) = 0 \text{ y } \frac{d_{t,1}(v)}{d(v)} \geq \alpha, \text{ o;} \\ & f_{t,\alpha}(v) = 1 \text{ y } \frac{d_{t,2}(v)}{d(v)} < \frac{1}{2}; \\ 2 & \text{si } f_{t,\alpha}(v) = 1 \text{ y } \frac{d_{t,2}(v)}{d(v)} \geq \frac{1}{2}, \text{ o;} \\ & f_{t,\alpha}(v) = 2. \end{cases}$$

El modelo de Mukwembi determina una sucesión de funciones que dependen de α , digamos $P_{f_0,\alpha}(G) = (f_{0,\alpha}, f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots)$.

3. RESULTADOS

Diremos que dos valores del parámetro de infectividad α_1 y α_2 tienen la *misma dinámica* si para todo estado inicial f_0 , $P_{f_0,\alpha_1}(G) = P_{f_0,\alpha_2}(G)$. Sea $\sigma(G) = \{k \mid k = d(v) \text{ para algún } v \in V(G)\}$. Sea $A = \left\{ \frac{p}{q} \mid q \in \sigma(G) \text{ y } 0 \leq p \leq q \right\}$.

TEOREMA 1. *Sea $\lambda = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ tal que $a_i \in A$ para $i = 1, 2, \dots, r$ y $a_i < a_j$ si $i < j$. Si $a_i < \alpha < a_{i+1}$, entonces α tiene la misma dinámica que a_i o que a_{i+1} .*

Demostración. Sea $\alpha \notin A$, tal que $a_i < \alpha < a_{i+1}$ y supongamos por contradicción que existe un estado inicial f_0 tal que $P_{f_0,\alpha}(G) \neq P_{f_0,a_{i+1}}(G)$. Sea t_0 el primer tiempo en el que $f_{t_0,\alpha}(G) \neq f_{t_0,a_{i+1}}(G)$, entonces existe al menos un vértice $w \in V(G)$ tal que $f_{t_0,\alpha}(w) \neq f_{t_0,a_{i+1}}(w)$. Observemos que $d_{t_0-1,\alpha}(w) = d_{t_0-1,a_{i+1}}(w)$ pues $f_{t_0-1,\alpha} = f_{t_0-1,a_{i+1}}$. Entonces $f_{t_0,\alpha}(w) \neq 2 \neq f_{t_0,a_{i+1}}(w)$, por lo que existe $w \in V(G)$ tal que $f_{t_0-1,\alpha}(w) = f_{t_0-1,a_{i+1}}(w) = 0$ y:

1. $f_{t_0,\alpha}(w) = 1$ y $f_{t_0,a_{i+1}}(w) = 0$ o
2. $f_{t_0,\alpha}(w) = 0$ y $f_{t_0,a_{i+1}}(w) = 1$

En el primer caso, como $f_{t_0-1,\alpha}(w) = 0$ y $f_{t_0,\alpha}(w) = 1$ se cumple que $\frac{d_{t_0-1,1}(w)}{d(w)} < \alpha$. Por otro lado dado que $f_{t_0-1,a_{i+1}}(w) = 0$ y $f_{t_0,a_{i+1}}(w) = 1$, entonces tenemos que $\frac{d_{t_0-1,1}(w)}{d(w)} \geq a_{i+1}$, lo cual contradiría que $a_{i+1} > \alpha$.

Para el segundo caso, $f_{t_0-1,\alpha}(w) = 0$ y $f_{t_0,\alpha}(w) = 1$ y se cumple que $\frac{d_{t_0-1,1}(w)}{d(w)} \geq \alpha$. Por otro lado dado que $f_{t_0-1,a_{i+1}}(w) = 0$ y $f_{t_0,a_{i+1}}(w) = 0$, entonces tenemos que $\frac{d_{t_0-1,1}(w)}{d(w)} < a_{i+1}$, de donde $a_{i+1} > \frac{d_{t_0-1,1}(w)}{d(w)} > \alpha$. Sin embargo, $d(w) \in \sigma(G)$ y $0 \leq d_{t_0-1,1}(w) < d(w)$, por lo que $\frac{d_{t_0-1,1}(w)}{d(w)} \in A$. Eso implicaría que existe un a_j tal que $a_i < a_j < a_{i+1}$ lo que contradice la construcción de λ . □

Usualmente en los modelos en ecuaciones diferenciales, usados para estudiar la propagación de enfermedades, se utiliza el supuesto de mezcla homogénea. Este supuesto implica que cualquier persona puede contagiarse de cualquier otra, y que el contagio ocurre con la misma probabilidad. Intentando trasladar este supuesto a nuestro modelo, como una persona está infecciosa, puede contagiar directamente a cualquiera de

las otras personas, entonces necesitaríamos que todas las aristas entre los vértices correspondientes a personas existieran por lo que la gráfica que usaríamos para modelar con este supuesto sería una gráfica completa K_n con n individuos. Por ello estudiamos la dinámica del contagio en las gráficas completas en el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Sea $G = K_n$ la gráfica completa de n vértices, sea $\alpha = \frac{i}{n-1}$ un umbral de contagio, con $i \geq 1$. En el tiempo t , sea S, I y N la partición de $V(G)$ en vértices en estado 0, 1 y 2, respectivamente:*

$$f_{t,\alpha}(S) = 0, \quad f_{t,\alpha}(I) = 1, \quad f_{t,\alpha}(N) = 2.$$

Entonces, la evolución del sistema en los siguientes pasos de tiempo cae en exactamente uno de los siguientes cuatro casos:

(A₁) Estabilidad sin contagio: *Si $|I| < i$ y $|N| < \frac{n-1}{2}$, entonces ningún cambio ocurre en el siguiente paso:*

$$f_{t+1,\alpha}(v) = f_{t,\alpha}(v) \quad \text{para todo } v \in V(G).$$

(A₂) Transición a no infecciosos sin contagio: *Si $|I| < i$ y $|N| \geq \frac{n-1}{2}$, entonces los vértices susceptibles permanecen igual, pero los infectados cambian de estado a no infecciosos:*

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in S, \\ 2 & \text{si } v \in I \cup N. \end{cases}$$

(A₃) Contagio sin transición a estado no infeccioso: *Si $|I| \geq i$ y $|N| < \frac{n-1}{2}$, entonces todos los susceptibles se infectan, pero los infectados no cambian a estado no infeccioso:*

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S \cup I, \\ 2 & \text{si } v \in N. \end{cases}$$

(A₄) Contagio total seguido de transición a no infecciosos: *Si $|I| \geq i$ y $|N| \geq \frac{n-1}{2}$, entonces en el tiempo $t + 1$ todos los susceptibles se infectan, y en $t + 2$ toda la población pasa al estado no infeccioso:*

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S, \\ 2 & \text{si } v \in I \cup N, \end{cases} \quad \text{y } f_{t+2,\alpha}(v) = 2 \quad \text{para todo } v \in V(G).$$

Demostración. Dado que $G = K_n$, todos los vértices son adyacentes entre sí. Por lo tanto, cada vértice tiene exactamente $n - 1$ vecinos. Así, cada vértice susceptible en el tiempo t tiene exactamente $|I|$ vecinos infecciosos.

La regla de contagio establece que un vértice susceptible cambia a estado 1 (infeccioso) en el siguiente paso si al menos una fracción $\alpha = \frac{i}{n-1}$ de sus vecinos están en estado 1. Es decir, si $|I| \geq i$.

Por otro lado, se considera que un vértice infeccioso cambia a estado 2 (no infeccioso) si al menos una fracción $\frac{1}{2}$ de sus vecinos están en estado 2. Es decir, si $|N| \geq \frac{n-1}{2}$.

Analizamos cada caso del teorema por separado:

(A₁) Supongamos que $|I| < i$ y $|N| < \frac{n-1}{2}$. Entonces, ningún vértice susceptible se infecta, ya que no se alcanza el umbral de contagio. Además, ningún vértice infeccioso cambia a estado no infeccioso, ya que tampoco se alcanza el umbral de transición. Por lo tanto:

$$f_{t+1,\alpha}(v) = f_{t,\alpha}(v) \quad \text{para todo } v \in V(G).$$

(A₂) Supongamos que $|I| < i$ y $|N| \geq \frac{n-1}{2}$. No hay contagio, porque $|I| < i$, pero el número de vértices en estado 2 es suficiente para provocar que todos los vértices en estado 1 cambien a estado 2. Entonces:

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in S, \\ 2 & \text{si } v \in I \cup N. \end{cases}$$

(A₃) Supongamos que $|I| \geq i$ y $|N| < \frac{n-1}{2}$. En este caso, todos los vértices susceptibles se infectan, ya que el número de infecciosos alcanza el umbral. Sin embargo, no hay suficientes vértices en estado 2 para que los vértices en estado 1 cambien a estado 2. Por lo tanto:

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S \cup I, \\ 2 & \text{si } v \in N. \end{cases}$$

(A₄) Supongamos que $|I| \geq i$ y $|N| \geq \frac{n-1}{2}$. Aquí, todos los vértices susceptibles se infectan en el tiempo $t+1$ porque $|I| \geq i$, y el número de vértices en estado 2 es suficiente para que todos los vértices en estado 1 (tanto los anteriores como los recién infectados) cambien a estado 2 en el tiempo $t+2$. Es decir:

$$f_{t+1,\alpha}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S, \\ 2 & \text{si } v \in I \cup N, \end{cases} \quad \text{y} \quad f_{t+2,\alpha}(v) = 2 \quad \text{para todo } v \in V(G).$$

Finalmente, los cuatro casos son disjuntos y cubren todas las posibilidades para los valores de $|I|$ y $|N|$, ya que $|S| + |I| + |N| = n$. \square

Como podemos ver, la dinámica de contagio en K_n depende sólo de cuántos individuos infecciosos, no infecciosos y susceptibles hay en la configuración inicial, y no de quién está conectado con quién.

Debido a que las vías de transmisión no necesariamente son masivas, otra gráfica en la que se podría aplicar el modelo es una trayectoria. Estudiar las trayectorias es similar a lo que en epidemiología se hace al rastrear el camino que sigue el virus de una persona a otra a lo largo del tiempo. Con estos estudios, denominados de *trayectorias de contagio*, se pretende no sólo contar cuántas personas están infectadas, sino de entender cómo se produjo cada transmisión e incluso pensar en escenarios como ¿qué habría pasado si una persona hubiese iniciado el tratamiento antes?

Como mencionamos antes, utilizaremos los colores 0, 1 y 2, y nos referimos a ellos como color azul, rojo y negro, para representar en la gráfica a los individuos susceptibles, infecciosos y no infecciosos, respectivamente. Obtuvimos resultados del tiempo que tarda una trayectoria en colorearse totalmente de negro, lo que en el modelo significaría que todos los individuos son no infecciosos. Estos resultados se obtuvieron considerando $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Observemos que para que una trayectoria cambie en cada tiempo, son necesarios un vértice negro y otro rojo, si sólo hay vértices azules entre dos vértices de color negro, o una cadena de vértices azules en un extremos adyacente a uno negro, entonces esta parte de la trayectoria no cambia.

TEOREMA 3. *Sea P una trayectoria con sólo dos vértices negros en los extremos y vértices rojos y azules entre ellos (al menos uno rojo). Entonces toda la trayectoria se torna totalmente de color negro en $\lceil i/2 \rceil + s_1 + s_2$ tiempos, donde i es la mayor de las distancias entre los vértices rojos más uno, s_1 es el orden de la cadena de vértices azules (si existe) adyacente a un vértice negro y s_2 es el orden de la cadena de vértices azules (si existe) adyacente al otro vértice negro.*

Demostración. Sea P una trayectoria como se menciona en el teorema. Vamos a dividir la demostración en tres casos de acuerdo al número de cadenas de vértices azules adyacentes a los vértices negros.

Caso 0) Cero cadenas de vértices azules adyacentes a algún vértice negro, es decir $s_1 = s_2 = 0$. Entonces los dos vértices negros de los extremos son adyacentes a un vértice rojo cada uno (si P es de orden 3, un sólo vértice rojo es adyacente a ambos vértices negros). En cada tiempo los vértices rojos adyacentes a los vértices negros se convertirán en negros y estos nuevos vértices negros tendrán un vértice rojo adyacente a ellos (si no sucede de esta manera es porque ya no hay vértices rojos en P , sólo vértices negros), pues si en el tiempo anterior, el vértice era azul, al ser adyacente a un rojo, este se convertirá en rojo, de manera que el orden de las cadenas de vértices

negros aumenta en cada tiempo, por lo tanto, la trayectoria se tornará totalmente de color negro en $\lceil i/2 \rceil = \lceil i/2 \rceil + s_1 + s_2$ tiempos.

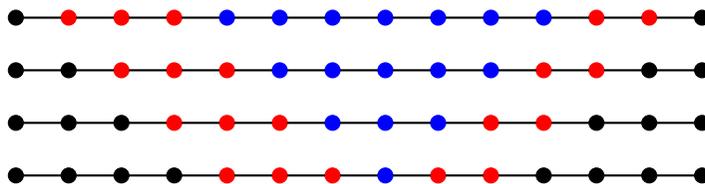


FIGURA 1. Trayectoria con $i = 12$ y $s_1 = s_2 = 0$.

Caso 1) Una sola cadena de vértices azules adyacente a un vértice negro de orden s_1 , entonces $s_2 = 0$ y el otro vértice negro es adyacente a un vértice rojo. En s_1 tiempos la mayor de las distancias entre los vértices rojos más uno seguirá siendo i , además los vértices que tengan esta distancia serán adyacentes a un vértice negro cada uno, esto sucede pues en cada tiempo un vértice rojo adyacente al negro se transforma en negro, y un vértice azul adyacente a un rojo se transforma en rojo. En este momento podemos aplicar el caso anterior, pues los vértices negros son sólo adyacentes a otros vértices negros o a un rojo. Por lo que la trayectoria se vuelve totalmente negra en $\lceil i/2 \rceil + s_1 = \lceil i/2 \rceil + s_1 + s_2$ tiempos.

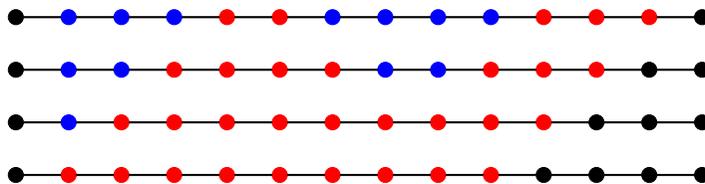


FIGURA 2. Trayectoria con $i = 9$, $s_1 = 4$ y $s_2 = 0$.

Caso 2) Dos cadenas de vértices azules cada una adyacente a un vértice negro. Supongamos que la longitud de una cadena es s_1 y la longitud de la otra cadena es s_2 , supongamos también, sin pérdida de generalidad, que $s_1 \geq s_2$. Entonces, en s_2 tiempos habrá un vértice rojo adyacente a un vértice negro de un extremo, además, la longitud de la mayor de las distancias entre los vértices rojos será $i + 2s_2$, pues en cada tiempo un vértice azul adyacente a uno rojo, se convierte en rojo. Y en este momento podemos aplicar el resultado del caso 1, pues también sólo hay una cadena de vértices azules de longitud $s_1 - s_2$ adyacente a un vértice negro, por lo que en $\lceil (i + 2s_2)/2 \rceil + (s_1 - s_2) + s_2 = \lceil i/2 \rceil + s_1 + s_2$ tiempos todos los vértices de la cadena serán de color negro.

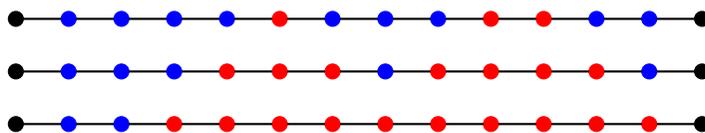


FIGURA 3. Trayectoria con $i = 6$, $s_1 = 4$ y $s_2 = 2$.

Por lo tanto, en cualquier trayectoria con dos vértices negros en los extremos y vértices rojos y azules entre ellos, se tornará totalmente de color negro en $\lceil i/2 \rceil + s_1 + s_2$ tiempos. □

La trayectoria del teorema anterior es muy específica, pero este resultado se usa para cualquier otra trayectoria, como mostramos a continuación.

COROLARIO 4. *Sea P una trayectoria con un sólo vértice negro en un extremos y al menos un vértice rojo, entonces P se torna totalmente de color negro en $i + 2s$ tiempos, donde i es uno más la distancia entre el vértice rojo más cercano al vértice negro y el vértice del extremo de la trayectoria que no es de color negro, y s es el orden de la cadena de vértices azules (si existe) adyacente al vértice negro.*

Demostración. Sea P una trayectoria como se menciona en el teorema. Unimos una trayectoria idéntica a ella, de manera que resulte una trayectoria simétrica con vértices extremos de color negro, aplicamos el teorema 3. Entonces esta trayectoria se tornará totalmente de color negro en $\lceil (2i)/2 \rceil + s + s = i + 2s$ tiempos, por lo tanto, la trayectoria P se tornará totalmente de color negro en ese mismo tiempo. □

Con los resultados anteriores, podemos saber si cualquier trayectoria se tornará totalmente de color negro y en cuánto tiempo, basta con tomar el tiempo de cada subgráfica de la trayectoria que sea como una de las trayectorias antes analizadas, y el tiempo de la trayectoria total será el mayor de los tiempos de las subgráficas.

En el caso de los ciclos, basta con tener al menos un vértice negro y otro rojo para que el ciclo se torne totalmente de color negro, y el tiempo que tarde también es fácil calcular, se considera una trayectoria con la misma sucesión de vértices, iniciando en un vértice negro, y si la trayectoria no termina en un vértice negro, automáticamente se agrega al extremo de la trayectoria, y entonces se calcula el tiempo de la trayectoria resultante, que será el mismo para el ciclo.

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a la Universidad Autónoma Metropolitana por los recursos aportados para la realización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas 2025.

REFERENCIAS

- [1] Centro Nacional para la Prevención y el Control del VIH y el Sida (CENSIDA). (2025, 13 de mayo). Informe histórico Día Mundial del VIH-2024. Secretaría de Salud. <https://www.gob.mx/salud/documentos/informe-historico-dia-mundial-vih-2024>
- [2] Mukwambi, S. (2011). Effects of density of infected population to the spreading of HIV epidemic in communities. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 390(21-22), 3915-3921.

Claudia Marlene de la Cruz Torres

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Doctorado en Matemáticas
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
e-mail: clau_mar@ciencias.unam.mx

Julián Alberto Fresán Figueroa

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 CDMX, México
e-mail: jfresan@cua.uam.mx

Bruno Graf Romero

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 CDMX, México
e-mail: bruno.graf@cua.uam.mx

María Fernanda Pérez Sánchez

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Licenciatura en Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
e-mail: perezmariafernanda29@gmail.com

Nancy Valeria Prado Martínez

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Licenciatura en Matemáticas,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,l Aplicadas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 CDMX, México
e-mail: nancy.prado@cua.uam.mx

César Sánchez Silva

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Licenciatura en Matemáticas.
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340 CDMX, México
e-mail: sanchezsilvapablocesar@gmail.com



GRÁFICAS DE RE-COLORACIÓN: ¿PUEDES TRANSFORMAR UNA COLORACIÓN EN OTRA SIN ROMPER LAS REGLAS?

ROMINA BARCENA MORALES, EMILIO YEDIDIA LICEA MESINO, DAVID DAN LÓPEZ CONTRERAS, MIKA OLSEN, LIZZETH ARIADNA SÁNCHEZ SOLIS

RESUMEN. Los problemas de configuraciones, como el del cubo Rubik, inspiran preguntas matemáticas sobre cómo transformar una solución en otra paso a paso. Un ejemplo de ello es la gráfica de re-coloración, en donde cada vértice representa una coloración propia de una gráfica, y hay una arista si las coloraciones correspondientes difieren en un solo vértice. Analizamos propiedades como la conexidad, el grado mínimo y el grado máximo y el diámetro de estas gráficas para tres familias: completas, trayectorias y ciclos.

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de configuración son clásicos en matemáticas. Un ejemplo muy conocido es el cubo Rubik, y aunque no todos sepamos resolverlo, comprendemos su objetivo: llegar a la configuración solución desde cualquier otra mediante movimientos válidos. Una de las primeras preguntas que se resolvieron sobre el cubo fue precisamente esta: ¿es posible alcanzar la solución desde cualquier configuración haciendo solo un cambio a la vez? En teoría de gráficas, surgen problemas análogos [3]. Uno de ellos es el de la gráfica de re-coloración, que aparece al estudiar las distintas maneras de colorear los vértices de una gráfica utilizando a lo más k colores. En este contexto, se construye una nueva gráfica cuya estructura refleja el espacio de todas las coloraciones propias: cada vértice representa una coloración válida, y se conectan dos vértices si las coloraciones correspondientes difieren únicamente en el color asignado a un solo vértice. La pregunta natural es entonces: ¿es posible transformar una coloración en otra mediante una secuencia de cambios válidos que modifiquen el color de un solo vértice a la vez? Este tipo de preguntas explora si cambios locales permiten alcanzar una transformación global, una idea fundamental en diversas áreas de las matemáticas.

El problema de colorear vértices es uno de los más estudiados en teoría de gráficas. Su formulación es sencilla, pero su resolución suele requerir creatividad, técnicas computacionales y análisis combinatorio. Este problema ha atraído tanto a matemáticos teóricos como a investigadores en ciencias de la computación, debido a su riqueza estructural y a sus numerosas aplicaciones en campos como redes, optimización, programación de tareas e informática. Más allá de encontrar una coloración óptima, en años recientes ha surgido un enfoque complementario: comprender la estructura del espacio de todas las coloraciones propias. Un aspecto central de este enfoque consiste en medir qué tan cercanas están dos coloraciones, es decir, si es posible pasar de una a otra mediante una secuencia de cambios pequeños, sin violar en ningún momento la condición de coloración propia. Esta dinámica está modelada por la gráfica de re-coloración, definida por L. Cereceda *et al.* en [1], y constituye el objeto central de estudio en este trabajo. Nos enfocamos en las coloraciones propias, es decir, asignaciones de colores a los vértices de una gráfica en las que vértices adyacentes reciben colores distintos. Además, se busca minimizar el número de colores utilizados;

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C76, 05C12, 05C38, 05C69.

Palabras clave. Coloraciones propias, gráfica de re-coloración, problemas de configuraciones.

este valor mínimo se conoce como el número cromático. Determinarlo no es sencillo: en general, se trata de un problema \mathcal{NP} -completo¹, si quieres saber más acerca de problemas \mathcal{NP} -completos puedes consultar [2]. Ante esta dificultad, se han propuesto numerosas heurísticas computacionales, como algoritmos greedy y técnicas de aproximación.

En este trabajo se presentan algunas propiedades básicas de la gráfica de re-coloración para tres familias fundamentales de gráficas: completas, trayectorias y ciclos, considerando distintos valores del parámetro k , que representa el número máximo de colores permitidos.

2. DEFINICIONES Y OBSERVACIONES

Una gráfica $G = (V(G), A(G))$ consta de un conjunto de vértices $V(G)$ y un conjunto de aristas $A(G)$, donde cada arista es un subconjunto de dos vértices distintos. En este trabajo sólo consideramos gráficas simples: no permitimos aristas que conecten un vértice consigo mismo (lazos), ni más de una arista entre dos vértices (aristas múltiples). Decimos que dos vértices $u, v \in V(G)$ son **adyacentes** si están conectados por una arista, es decir, si $\{u, v\} \in A(G)$. En caso contrario, decimos que son **independientes**. La **vecindad** de un vértice v se define como el conjunto de todos los vértices que son adyacentes a él: $N(v) = \{u \in V(G) \mid \{u, v\} \in A(G)\}$. El **grado** de un vértice v , denotado $d(v)$, es simplemente el número de vértices en su vecindad: $d(v) = |N(v)|$. Una gráfica es **r-regular** si todos los vértices de la gráfica tienen grado igual a r . Un **camino** en una gráfica es una sucesión de vértices $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ tal que cada par consecutivo está conectado por una arista: $\{v_i, v_{i+1}\} \in A(G)$ para $0 \leq i < k$. Si ningún vértice se repite, el camino se llama una **trayectoria**; denotamos por P_k a la trayectoria con k vértices. Un **ciclo** es una trayectoria al que le agregas una arista entre el primer vértice y el último vértice. El ciclo con k vértices se denota por C_k . La **longitud** de un camino es el número de aristas que contiene; por lo tanto, una trayectoria P_k tiene longitud $k - 1$, y un ciclo C_k tiene longitud k . Si hay una trayectoria entre cualquier par de vértices, decimos que la gráfica es **conexa**. La **distancia** entre dos vértices u y w es la longitud de la trayectoria más corta que los conecta, y el **diámetro** de una gráfica conexa es la mayor de todas las distancias posibles entre pares de vértices: $\text{diam}(G) = \max\{\text{dist}(u, w) \mid u, w \in V(G)\}$. Si una gráfica G no es conexa, diremos que una subgráfica de G es una componente conexa si al agregar cualquier otro vértice o arista deja de ser una subgráfica conexa (una subgráfica conexa maximal). Una **coloración propia** de los vértices de una gráfica G es una función $\varphi : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ tal que vértices adyacentes reciben colores distintos. Siempre es posible encontrar una coloración propia usando $|V(G)|$ colores, simplemente asignando un color diferente a cada vértice. Si una coloración usa a lo más k colores, la llamamos **k-coloración**. Dadas dos k -coloraciones φ_1 y φ_2 de una gráfica G , diremos que son distintas si existe al menos un vértice v tal que $\varphi_1(v) \neq \varphi_2(v)$. Una herramienta útil para estudiar coloraciones es el **polinomio cromático**, que cuenta cuántas coloraciones propias, con a lo más k colores, existen de una gráfica G y es denotado por $\mathcal{P}(G; k)$. Para poder construir el polinomio cromático, necesitamos definir dos operaciones llamadas borrar y contraer. Dado una gráfica G y una arista $a \in A(G)$, la operación **borrar** la arista a , denotado $G - a$, consiste en eliminar la arista a del conjunto de aristas de G , mientras que el resultado de la operación **contraer** la arista $a = \{u, v\}$, denotado $G/\{u, v\}$ es la gráfica que se obtiene al reemplazar vértices u y v por un vértice nuevo w , y conectar w con todos los vecinos de u y v : $N(w) = N(u) \cup N(v) \setminus \{u, v\}$. Utilizando esta operación y la eliminación de aristas, se obtiene la siguiente versión del teorema del polinomio cromático, conocido como “**borrar y contraer**”.

¹Un problema es \mathcal{NP} -completo si su solución puede verificarse eficientemente, y si todos los problemas en \mathcal{NP} pueden reducirse a él. Resolver uno de estos problemas eficientemente implicaría resolver todos los demás de forma eficiente.

La idea intuitiva de la prueba del siguiente teorema es que cuando eliminas la arista $\{u, v\}$ permites que los vértices u y v tengan el mismo color, por lo que debes restar el número de coloraciones en donde u y v comparten el mismo color, y eso lo puedes hacer identificando los dos vértices y así obligándolos a tener el mismo color.

TEOREMA 1. *Sea G una gráfica, $a = \{u, v\}$ una arista de G y k un entero positivo. Entonces el número de k -coloraciones de G es:*

$$\mathcal{P}(G; k) = \mathcal{P}(G - a; k) - \mathcal{P}(G/a; k).$$

Demostración. Sea $G = (V, A)$, $a = \{u, v\} \in A$, y k un entero positivo. Observa que en $G - a$, los vértices u y v ya no están conectados, por lo tanto, pueden tener el mismo color. Así, $\mathcal{P}(G - a; k)$ cuenta todas las coloraciones propias de G tanto las coloraciones donde u y v tienen colores distintos como aquellas en que tienen el mismo color.

Ahora bien, si forzamos que u y v tengan el mismo color, podemos representarlo mediante la contracción G/a . El número de esas coloraciones es $\mathcal{P}(G/a; k)$. Restando estas de las de $G - a$, obtenemos exactamente las coloraciones en donde u y v tienen colores distintos, que son justo las coloraciones propias de G :

$$\mathcal{P}(G; k) = \mathcal{P}(G - a; k) - \mathcal{P}(G/a; k).$$

□

Dada una gráfica H y un número de colores k , la **gráfica de re-coloración** de una gráfica H , denotada $G^k(H)$, es la gráfica cuyos vértices son todas las k -coloraciones propias de H . Por lo tanto, su número de vértices es exactamente $\mathcal{P}(H; k)$. Sean u_1 y u_2 vértices de $G^k(H)$ y sean φ_1 y φ_2 las coloraciones correspondientes de H . Los vértices u_1 y u_2 son adyacentes si las coloraciones φ_1 y φ_2 difieren en exactamente un vértice de la gráfica H . Dos coloraciones están conectadas por una arista en $G^k(H)$ si difieren en el color de un solo vértice. Para visualizar este concepto, en la figura 1 mostramos cuatro coloraciones distintas de la trayectoria P_5 . Las primeras dos coloraciones, φ_1 y φ_2 , usan sólo dos colores. La segunda coloración no es adyacente a ninguna de las otras tres coloraciones, mientras que la coloración φ_3 es adyacente tanto a φ_1 (difieren en el color de v_3) como a φ_4 (difieren en v_5).

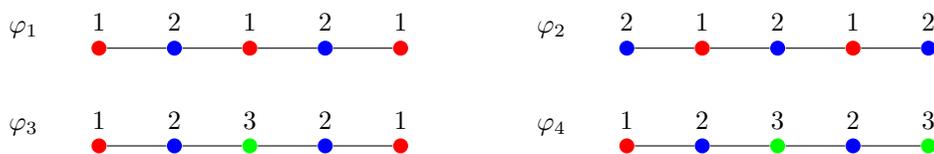


FIGURA 1. Coloraciones de una trayectoria con 2 o 3 colores

Si usamos tres colores, entonces en las coloraciones φ_1 y φ_2 de la figura 1, cada vértice puede cambiar su color al color 3 (verde) sin violar las condiciones de una coloración propia, mientras que en la coloración φ_3 de la figura 1, los dos vértices que tienen el color 2 (azul) no permiten ningún cambio válido de color, ya que son adyacentes tanto a un vértice de color 1 (rojo) como un vértice de color 2 (azul). De manera general, es fácil ver que podemos cambiar el color de un vértice $v \in V(H)$ si el número total de colores k es mayor que el número de colores distintos usados en v y sus vecinos. En particular, podemos asegurar que el color de un vértice v puede cambiar si $k > d(v) + 1$. Definimos el conjunto de colores bloqueados de un vértice v , denotado $B(v)$, como el conjunto de colores que aparecen en v y en sus vecinos. Con esta definición, podemos establecer dos observaciones sencillas pero útiles.

Observación 1. Sea $v \in V(H)$. El vértice v permite exactamente $k - |B(v)|$ posibles cambios de color.

Dado que $|B(v)| \leq d(v)+1$, obtenemos la siguiente cota inferior, más simple de calcular pero menos precisa: el vértice v permite al menos $k - (d(v) + 1)$ cambios de color. Como en la gráfica de re-coloración dos vértices están conectados si las coloraciones que representan difieren en exactamente un vértice, la vecindad de un vértice en esta gráfica corresponde a todas las coloraciones que se pueden obtener cambiando el color de un solo vértice. Esto nos da la siguiente observación:

Observación 2. El grado de un vértice w en la gráfica de re-coloración es igual al número de cambios posibles en la coloración asociada a ese vértice.

$$d(w) = \sum_{v \in V(H)} k - |B(v)|.$$

3. LA GRÁFICA DE RE-COLORACIÓN DE UNA GRÁFICA VACÍA O COMPLETA

Comenzamos con las dos estructuras más simples en teoría de gráficas: las gráficas vacías y las gráficas completas. Una gráfica con n vértices es una **gráfica vacía** si no tiene ninguna arista y la denotamos \overline{K}_n . Como la gráfica no tiene aristas, cualquier coloración de los vértices es una coloración propia, por lo que $\mathcal{P}(\overline{K}_n) = k^n$, además, podemos cambiar el color de un vértice a cualquier otro color sin violar la condición de coloración propia. Por la observación 2, cualquier vértice $w \in V(G^k(\overline{K}_n))$ tiene grado $n(k - 1)$. Como el color de un vértice puede ser cambiado por cualquier otro, la distancia más grande entre vértices de la gráfica $G^k(\overline{K}_n)$ es igual a n y se alcanza justo entre dos coloraciones φ y φ' donde ningún vértice conserva su color, es decir, para todo $w \in V(\overline{K}_n)$, $\varphi(w) \neq \varphi'(w)$. En resumen, tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2. *La gráfica de re-coloración $G^k(\overline{K}_n)$ es una gráfica $n(k - 1)$ -regular con k^n vértices y diámetro n .*

Una gráfica con n vértices es una **gráfica completa** si todo par de vértices está conectado por una arista, y la denotamos K_n . En una coloración propia de K_n , es necesario usar un color distinto para cada vértice, ya que cualquier par de vértices son adyacentes. Por lo tanto, si $k \geq n$, el número de coloraciones propias posibles de K_n con a lo más k colores es igual al número de formas de ordenar n colores tomados sin repetición de un conjunto de k colores, y la gráfica de re-coloración $G^k(K_n)$ tiene $\frac{k!}{(k - n)!}$ vértices.

Queremos demostrar que la gráfica de re-coloración de una gráfica completa es una gráfica regular. Recordemos, por la observación 2, que el grado de un vértice en la gráfica de re-coloración coincide con el número de cambios de color válidos que pueden hacerse en su coloración correspondiente.

PROPOSICIÓN 3. *Sea $k \geq n$. La gráfica de re-coloración $G^k(K_n)$ tiene $\frac{k!}{(k - n)!}$ vértices y es $n(k - n)$ -regular.*

Demostración. Para probar que la gráfica es $n(k - n)$ -regular, basta probar que $\delta(G^k(K_n)) = \Delta(G^k(K_n)) = n(k - n)$. Una coloración propia arbitraria de la gráfica K_n corresponde a un vértice arbitrario en $G^k(K_n)$. Como en toda coloración propia de K_n se usan n colores distintos, y hay k colores disponibles, entonces para cada uno de los n vértices hay $k - n$ colores disponibles para cambiar el color actual (evitando repetir alguno ya usado por los otros $n - 1$ vértices). Como tenemos n vértices y para

cada uno hay $k - n$ opciones válidas de re-coloración, por la observación 2, el número total de coloraciones adyacentes, es decir, el grado de cualquier vértice, es $n(k - n)$. \square

Si coloreamos K_n usando exactamente n colores, entonces, por la observación 1, no es posible cambiar el color de ningún vértice sin violar la condición de coloración propia, por lo que la gráfica de re-coloración $G^n(K_n)$ es la gráfica vacía con $n!$ vértices.

4. LA GRÁFICA DE RE-COLORACIÓN DE UNA TRAYECTORIA

En esta sección analizamos la gráfica de re-coloración de una trayectoria. En la sección 2 se mostraron algunos ejemplos de coloraciones propias de la trayectoria con 5 vértices y se mencionaron algunas de sus adyacencias. Comenzamos considerando el caso en que la trayectoria se colorea con sólo dos colores.

PROPOSICIÓN 4. Sea $n \geq 2$. La gráfica de re-coloración de P_n con dos colores es una gráfica con dos vértices no adyacentes, es decir,

$$G^2(P_n) \cong \overline{K}_2.$$

Demostración. Si coloreamos los vértices de la trayectoria P_n con únicamente dos colores, entonces existen exactamente dos coloraciones propias (véase φ_1 y φ_2 en la figura 1):

$$\varphi_1(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2m + 1; \\ 2 & \text{si } i = 2m, \end{cases} \quad \text{y} \quad \varphi_2(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = 2m + 1; \\ 1 & \text{si } i = 2m. \end{cases}$$

En ambas coloraciones, cada vértice es adyacente a al menos un vértice del color opuesto, por lo que no es posible modificar el color de ningún vértice sin violar la condición de coloración propia. Así, la gráfica de re-coloración consta de dos vértices no adyacentes. \square

El caso de colorear con sólo dos colores tiene un comportamiento atípico. A partir de aquí, asumimos que se dispone de al menos tres colores.

Para comprender mejor el caso general, consideramos primero la trayectoria P_3 con tres colores.

Ejemplo 1. Una coloración de P_3 con tres colores puede representarse como una terna (a, b, c) sin repeticiones consecutivas. En la figura 2, cada sucesión de números representa una coloración usando los colores $\{0, 1, 2\}$, donde la posición indica el vértice correspondiente.

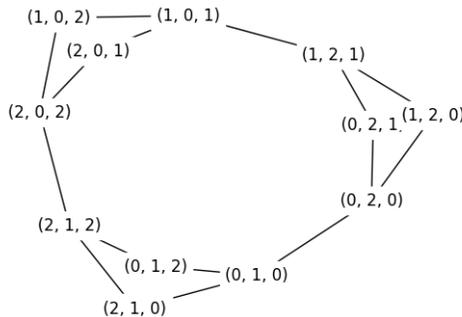


FIGURA 2. La gráfica de re-coloración de P_3 con $k = 3$

Antes de analizar la estructura de la gráfica de re-coloración, determinamos el número de vértices, así como su grado mínimo y máximo. Posteriormente, probamos que la gráfica es conexa si $k \geq 3$, y calculamos su diámetro.

El siguiente resultado nos ayuda a determinar el número exacto de vértices de la gráfica de re-coloración de una trayectoria.

PROPOSICIÓN 5. *El número de coloraciones propias de P_n con k colores es $k(k-1)^{n-1}$.*

Demostración. El primer vértice puede recibir cualquiera de los k colores. Cada vértice posterior sólo tiene un vecino previamente coloreado, por lo que hay $k - 1$ opciones para cada uno. El resultado se obtiene multiplicando: $k(k - 1)^{n-1}$. \square

Para facilitar la comprensión del teorema 6, que establece el **grado mínimo** δ y el **grado máximo** Δ de la gráfica de re-coloración de una trayectoria, probamos primero el caso particular en que $k = 3$. La gráfica $G^3(P_3)$ de la figura 2 puede servir como apoyo para visualizar los argumentos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. El grado mínimo y el grado máximo de la gráfica de re-coloración de P_n con tres colores es 2 y n respectivamente:

$$\delta(G^3(P_n)) = 2 \quad y \quad \Delta(G^3(P_n)) = n.$$

Sea $P_n = (v_1, \dots, v_n)$ la trayectoria con n vértices y considera una coloración propia de los vértices con colores del conjunto $\{1, 2, 3\}$. Por la observación 2, el grado de un vértice en $G^3(P_n)$ es la suma del número de cambios de color válidos de sus vértices.

Caso 1: Sea v un vértice de grado 1, entonces v tiene un solo vecino. Supongamos que su color es a y el del vecino es $b \neq a$. El único color posible para el cambio es $c \in \{1, 2, 3\} \setminus \{a, b\}$. Observa que siempre es posible cambiar el color del vértice v del color a al color c .

Caso 2: Sea v un vértice de grado 2 en P_n , entonces v tiene exactamente dos vecinos. Sea $a \in \{1, 2, 3\}$ el color de v y sean $x, y \in \{1, 2, 3\}$ los colores de los vecinos de v , como φ es una coloración propia, $a \neq x, y$. Si $x \neq y$, entonces no hay ningún color disponible para cambio de color de v . Si los vecinos tienen el mismo color, entonces hay exactamente un color disponible distinto de a y distinto del color $x = y$.

En el primer caso, el vértice de P_n siempre permite un cambio de color y en el segundo caso el vértice de P_n permite a lo más un cambio de color. Como la trayectoria tiene dos vértices de grado 1, el grado de un vértice (una coloración) en $G^3(P_n)$ es al menos 2 y a lo más n . El vértice correspondiente a la coloración $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$ tiene grado 2, mientras que el vértice correspondiente a la coloración $(1, 2, 1, 2, \dots)$ tiene grado n y el resultado se sigue.

Ahora generalizamos el resultado del ejemplo 2 a cualquier $k \geq 3$:

TEOREMA 6. *Para P_n con $k \geq 3$, se cumple que*

$$\delta(G^k(P_n)) = n(k - 3) + 2 \quad y \quad \Delta(G^k(P_n)) = n(k - 2).$$

Demostración. Los vértices de grado 1 tienen $k - 2$ opciones de cambio de color, mientras que los vértices de grado 2 tienen $k - 3$ o $k - 2$ opciones de cambio de color. Así, el número mínimo de cambios es: $2(k - 2) + (n - 2)(k - 3) = kn - 3n + 2$ y el máximo número de cambios es $n(k - 2)$ y se alcanza cuando todos los vértices admiten $k - 2$ cambios.

Vamos a mostrar dos coloraciones en donde estos valores se alcanzan. En la coloración $(i, j, k, i, j, k, \dots)$ donde i, j y k son colores distintos del conjunto de k colores, nos

aseguramos que cada vértice tenga su número mínimo de cambios: $kn - 3n + 2$, mientras que la coloración (i, j, i, j, \dots) , donde i y j son elementos distintos del conjunto de k colores, nos aseguramos que cada vértice tenga su número máximo de cambios: $(k - 2)$. Por lo que $\delta(G^k(P_n)) = n(k - 3) + 2$ y $\Delta(G^k(P_n)) = n(k - 2)$. \square

Finalmente, establecemos una cota inferior para el diámetro de la gráfica de re-coloración, encontrando dos coloraciones que requieren un gran número de pasos para transformar una coloración en la otra.

TEOREMA 7. *Si $k \geq 3$, entonces*

$$\text{diam}(G^k(P_n)) \geq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Demostración. Como el diámetro corresponde a la máxima distancia entre pares de vértices en la gráfica, para establecer una cota inferior, basta con exhibir dos coloraciones φ y φ' en $G^k(P_n)$ tales que $\text{dist}(\varphi, \varphi') = n + \lfloor n/2 \rfloor$. A continuación definimos ambas coloraciones y explicamos por qué se requieren exactamente $n + \lfloor n/2 \rfloor$ pasos para transformar una en la otra.

Sea t el índice del paso en la secuencia de re-coloraciones y sea φ_t la coloración en el paso t ; así φ_0 corresponde a la coloración inicial. Consideramos la trayectoria $P_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ y definimos las siguientes coloraciones:

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 2 & \text{si } i \text{ es par,} \end{cases} \quad \text{y} \quad \varphi'(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 1 & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Observamos que no es posible cambiar directamente el color de un vértice v_{impar} de 1 a 2 (pues sus vecinos tienen color 2), ni el de un vértice v_{par} de 2 a 1 (pues sus vecinos tienen color 1), es necesario introducir un color temporal, el color 3. Como no podemos cambiar directamente el color de la coloración φ al color de la coloración φ' en ninguno de los vértices de la trayectoria P_n , entonces hace falta cambiar el color en a coloración φ al color temporal (color 3) en al menos la mitad de los vértices de la trayectoria. Observamos que después de cambiar el color de un vértice al color 3, todavía falta cambiarle el color al color de φ' ; por lo tanto, en $G^3(P_n)$ se cumple

$$\text{dist}(\varphi, \varphi') \geq n + \lfloor n/2 \rfloor.$$

Queremos probar que en $G^3(P_n)$ se cumple $\text{dist}(\varphi, \varphi') = n + \lfloor n/2 \rfloor$. Como el número de vértices de índice par es a lo más igual al número de vértices de índice impar, para minimizar el número de pasos, colocamos el color temporal en los vértices pares. Sea $\varphi_0 = \varphi$. En el paso $t = \lfloor n/2 \rfloor$ obtenemos:

$$\varphi_{\lfloor n/2 \rfloor}(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 3 & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Luego, cambiamos los vértices de índice impar del color 1 al color 2. Así, en el paso $t = n$, tenemos la coloración

$$\varphi_n(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 3 & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Finalmente, en los pasos restantes, volvemos a colorear los vértices pares, ahora del color 3 al color 1, y en el paso $t = n + \lfloor n/2 \rfloor$ obtenemos la coloración

$$\varphi_{n+\lfloor n/2 \rfloor}(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 1 & \text{si } i \text{ es par,} \end{cases}$$

que coincide con la coloración φ' .

Por lo tanto, transformar φ en φ' requiere exactamente $n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pasos, y como $\text{dist}(\varphi, \varphi') = n + \lfloor n/2 \rfloor$, concluimos que $\text{diam}(\varphi, \varphi') \geq n + \lfloor n/2 \rfloor$. \square

Este proceso ilustra cómo ciertos cambios globales requieren introducir colores temporales. Esta técnica se usará también para analizar ciclos y otras familias de gráficas.

5. LA GRÁFICA DE RE-COLORACIÓN DE UN CICLO

Si el ciclo tiene longitud par, puede colorearse con dos colores. En este caso, se cumple el siguiente resultado. Omitimos su prueba ya que es análoga a la prueba de la proposición 4.

PROPOSICIÓN 8. *La gráfica de re-coloración de C_{2n} con dos colores es una gráfica con dos vértices independientes,*

$$G^2(C_{2n}) \cong \overline{K_2}.$$

Para determinar el número de vértices de la gráfica de re-coloración de un ciclo, calculamos su polinomio cromático.

PROPOSICIÓN 9. *El número de coloraciones propias de un ciclo C_n con k colores es*

$$\mathcal{P}(C_n; k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre el número de vértices del ciclo.

Caso base: Para $n = 3$ tenemos que $C_3 \cong K_3$. Por la proposición 3, se tiene que $\mathcal{P}(C_3; k) = k(k-1)(k-2)$, y como $(k-1)^3 + (-1)^3(k-1) = (k-1)((k-1)^2 - 1) = (k-1)k(k-2)$, el caso base satisface la propiedad.

Hipótesis inductiva: Supongamos que, para algún $n \geq 3$, se cumple que

$$\mathcal{P}(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

Paso inductivo: Verificamos que la fórmula también se cumple para $n+1$. Aplicamos la regla de contracción-borrado del teorema 1, la cual establece:

$$\mathcal{P}(C_{n+1}, k) = \mathcal{P}(C_{n+1} - a, k) - \mathcal{P}(C_{n+1}/a, k),$$

donde a es una arista de C_{n+1} . Notamos que $C_{n+1} - a = P_{n+1}$ y $C_{n+1}/a = C_n$, por lo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(C_{n+1}, k) &= \mathcal{P}(P_{n+1}, k) - \mathcal{P}(C_n, k) \\ &= k(k-1)^n - ((k-1)^n + (-1)^n(k-1)) \\ &= (k-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(k-1). \end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática, el resultado se sigue. \square

Ya establecido el número de vértices de $G^k(C_n)$ procedemos a determinar el grado mínimo y máximo según el valor de k y la paridad del ciclo.

PROPOSICIÓN 10. *Sea $G^k(C_n)$ la gráfica de re-coloración del ciclo C_n con k colores. Si $k \geq 4$, entonces el grado mínimo es $\delta(G^k(C_n)) = n(k-3)$. Además, para $m \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$\delta(G^3(C_n)) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 3m; \\ 1, & \text{si } n = 3m + 1; \\ 2, & \text{si } n = 3m + 2. \end{cases}$$

Demostración. Como cada vértice de C_n tiene grado 2, el vértice y sus vecinos usan a lo más 3 colores. Por la observación 1, cada vértice permite al menos $k - 3$ cambios de color, y por la observación 2, el grado mínimo es al menos $n(k - 3)$.

Caso 1: Sea $k \geq 4$. Si $n = 3m$, la coloración $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3)$ tiene grado $n(k - 3)$, ya que cada vértice permite exactamente $k - 3$ cambios. Si $n = 3m + 1$, la coloración $(4, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3)$ cumple lo mismo. Si $n = 3m + 2$, la coloración $(4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$ también tiene grado $n(k - 3)$.

Caso 2: Sea $k = 3$. Si $n = 3m$, la coloración $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$ tiene grado 0, pues ningún vértice admite cambios. Si $n = 3m + 1$, la coloración $(2, 1, 2, 3, \dots)$ tiene grado 1, ya que sólo el segundo vértice permite un cambio. Si $n = 3m + 2$, la coloración $(1, 2, 1, 2, 3, \dots)$ tiene grado 2, con cambios posibles sólo en el segundo y en el tercer vértices. \square

PROPOSICIÓN 11. Sea $G^k(C_n)$ la gráfica de re-coloración del ciclo C_n con $k \geq 3$ colores. Entonces:

$$\Delta(G^k(C_n)) = \begin{cases} n(k - 2) & \text{si } n \text{ es par;} \\ (n - 3)(k - 2) + 3(k - 3) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Dado que cada vértice tiene grado 2, el número de colores usados por él y sus vecinos es al menos 2 y a lo más 3, por lo tanto, cada vértice admite a lo más $k - 2$ cambios de color. Por la observación 2, el grado máximo de un vértice en $G^k(C_n)$ es a lo más $n(k - 2)$.

Caso 1: Si n es par, la coloración $(1, 2, 1, 2, \dots)$ alcanza el grado máximo $n(k - 2)$, pues cada uno de los n vértices del ciclo permite $k - 2$ cambios.

Caso 2: Si n es impar, toda coloración propia requiere al menos tres colores. Tomemos una coloración donde sólo tres vértices consecutivos usan tres colores distintos, y el resto alterna dos colores $(3, 1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2)$. En esta coloración, los vértices que tienen vecinos del mismo color admiten $k - 2$ cambios, y los que tienen vecinos de colores distintos admiten $k - 3$. Hay al menos tres vértices en esta situación (el de color diferente y sus dos vecinos), es decir, 3 de los n vértices permiten sólo $k - 3$ cambios y el resto permiten $k - 2$ cambios. Por la observación 2, tenemos que:

$$\Delta(G^k(C_n)) = (n - 3)(k - 2) + 3(k - 3).$$

\square

De forma análoga al caso de las trayectorias (teorema 7), para establecer una cota inferior para el diámetro, basta encontrar dos coloraciones que están a distancia grande.

TEOREMA 12. Sea C_n un ciclo. Si $k \geq 3$ cuando n es par, y $k \geq 4$ cuando n es impar, entonces

$$\text{diam}(G^k(C_n)) \geq \begin{cases} n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, & \text{si } n \text{ es par;} \\ n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Sea C_n un ciclo y k el número de colores, con $k \geq 3$ si n es par y $k \geq 4$ si n es impar. Basta encontrar dos coloraciones φ, φ' tales que

$$\text{dist}(\varphi, \varphi') = \begin{cases} n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, & \text{si } n \text{ es par;} \\ n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Caso 1: Si n es par, el ciclo puede colorearse alternando dos colores. Sea

$$\varphi_1(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ impar;} \\ 2 & \text{si } i \text{ par,} \end{cases} \quad \varphi_2(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ impar;} \\ 1 & \text{si } i \text{ par.} \end{cases}$$

Siguiendo el procedimiento análogo al de la trayectoria, llegamos a que requerimos cambiar el color en a coloración φ al color temporal en al menos la mitad de los vértices y siguiendo el proceso de re-coloración para la trayectoria podemos concluir que se requieren exactamente $n + \lfloor n/2 \rfloor$ pasos para transformar φ en φ' .

Caso 2: Si n es impar, se requiere al menos un vértice de un tercer color. Considere las coloraciones:

$$\varphi = (1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2, 3), \quad \varphi' = (3, 1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2).$$

Los colores 3 de φ y φ' están asignados a vértices adyacentes. Además, todos los vértices con color 1 son adyacentes a vértices de color 2 y viceversa, por lo que inicialmente no se puede hacer ningún cambio directo. Aplicando un procedimiento similar al de la trayectoria (usando el color 3 como color temporal), se requieren exactamente $n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ pasos para transformar φ en φ' , como se deseaba. \square

5.1. Coloreando ciclos con tres colores. La gráfica de re-coloración de un ciclo con tres colores resulta ser desconexa. Primero observemos que, si la longitud del ciclo es múltiplo de 3, entonces, por la observación 1, en las siguientes coloraciones no es posible realizar ningún cambio de color en ninguno de los vértices:

$$(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3), \quad (3, 1, 2, 3, 1, 2, \dots, 3, 1, 2), \quad (2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots, 2, 3, 1),$$

$$(1, 3, 2, 1, 3, 2, \dots, 1, 3, 2), \quad (2, 1, 3, 2, 1, 3, \dots, 2, 1, 3), \quad (3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, 3, 2, 1).$$

Por la proposición 9, el número de vértices de la gráfica de re-coloración crece rápidamente con n . A continuación, analizamos el caso del ciclo de longitud 5, y posteriormente presentamos una conjetura basada en los resultados de un análisis computacional para encontrar el número de componentes de la gráfica $G^3(C_n)$.

Ejemplo 3. Consideremos el ciclo C_5 , es decir, un ciclo con 5 vértices. Por la proposición 9, el número de coloraciones propias es $2^5 - 2 = 30$; por lo tanto, la gráfica de re-coloración $G^3(C_5)$ tiene 30 vértices. De acuerdo con las proposiciones 10 y 11, la gráfica $G^3(C_5)$ es 2-regular, y por tanto consiste en una o varias componentes cíclicas.

Consideremos la coloración $\varphi_1 = (1, 2, 1, 2, 3)$. La subgráfica inducida por los cambios de color válidos desde φ_1 forma un ciclo de longitud 15. Las siguientes coloraciones son justo los vértices del ciclo de longitud 15, en cada coloración, el color en negritas indica el vértice cuyo color será modificado:

$$(1, 2, \mathbf{1}, 2, 3), \quad (1, 2, 3, \mathbf{2}, 3), \quad (1, 2, 3, 1, \mathbf{3}), \quad (1, 2, 3, 1, 2), \quad (3, \mathbf{2}, 3, 1, 2),$$

$$(3, 1, \mathbf{3}, 1, 2), \quad (3, 1, 2, \mathbf{1}, 2), \quad (3, 1, 2, 3, \mathbf{2}), \quad (\mathbf{3}, 1, 2, 3, 1), \quad (2, \mathbf{1}, 2, 3, 1),$$

$$(2, 3, \mathbf{2}, 3, 1), \quad (2, 3, 1, \mathbf{3}, 1), \quad (2, 3, 1, 2, \mathbf{1}), \quad (\mathbf{2}, 3, 1, 2, 3), \quad (1, \mathbf{3}, 1, 2, 3).$$

Observamos que la coloración $\varphi_2 = (2, 1, 2, 1, 3)$ no aparece en este ciclo. Los cambios de color válidos desde φ_2 generan, de manera análoga, otro ciclo disjunto de longitud 15. Por lo tanto, $G^3(C_5)$ está compuesto por dos ciclos disjuntos de longitud 15.

Se realizó una exploración asistida por computadora para determinar el número de componentes conexas de la gráfica de re-coloración $G^3(C_n)$. Con base en los resultados observados, se propone la siguiente conjetura:

CONJETURA 13. *El número de componentes de $G^3(C_n)$ es:*

$$\# \text{Componentes de } G^3(C_n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor, & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{3}; \\ \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + 6, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

6. DISCUSIÓN

Las trayectorias y los ciclos pares son ejemplos de gráficas bipartitas. Una gráfica es bipartita si y sólo si tiene número cromático igual a dos, los árboles son otra clase interesante de gráficas bipartitas. De la misma manera en que probamos que la gráfica de re-coloración de la trayectoria es \overline{K}_2 , podemos probar el siguiente resultado general.

TEOREMA 14. *Sea H una gráfica bipartita conexa. Entonces $G^2(H) \cong \overline{K}_2$.*

Para el caso en que el número cromático de una gráfica sea igual a 3, determinamos que la gráfica de re-coloración de un ciclo con 3 colores es disconexa: es una gráfica vacía (sin aristas) en el caso del triángulo C_3 , tiene vértices aislados si el número de vértices del ciclo es múltiplo de 3, sin importar si es un ciclo de longitud par o impar; y el número de componentes conexas de gráfica de re-coloración crece conforme va creciendo el número de vértices. Observemos que la gráfica de re-coloración de los ciclos de longitud $6n$ es disconexa tanto si usamos 2 como si usamos 3 colores, mientras que la gráfica de re-coloración de cualquier ciclo es conexa si usamos al menos 4 colores.

AGRADECIMIENTOS. Los autores expresan su gratitud a las Unidades de Cuajimalpa e Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana por los recursos aportados para la realización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas 2025 así como al árbitro anónimo.

REFERENCIAS

- [1] L. Cereceda, J. van den Heuvel, M. Johnson, Connectedness of the graph of vertex-colourings, *Discrete Mathematics* 308 (2008) 913–919.
- [2] M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, 1979.
- [3] J. van den Heuvel, The Complexity of Change, *Surveys in combinatorics* 409 (2013), 127–160.

Romina Barcena Morales

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348, México, Ciudad de México.
e-mail: romina.barcena@cua.uam.mx

Emilio Yedidia Licea Mesino

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1^a sección
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2213009504@izt.uam.mx

David Dan López Contreras

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1^a sección
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México
e-mail: cbi2182018437@izt.uam.mx

Mika Olsen

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348, México, Ciudad de México.
e-mail: olsen@cua.uam.mx

Lizzeth Ariadna Sánchez Solís

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348, México, Ciudad de México.
e-mail: lizzeth.sanchez@cua.uam.mx

Presentación de las notas del 7mo Coloquio del Departamento de Matemáticas, UAM-I.

Del 27 al 31 de enero del 2025 se llevó a cabo el 7mo Coloquio del Departamento de Matemáticas. Para conseguir recursos económicos para el evento tuvimos que concursar en el Programa Especial de Apoyo a Proyectos de Docencia e Investigación de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la UAM-I. Ganamos una de las asignaciones monetarias y por eso pudimos llevar a cabo el evento. Los primeros 6 Coloquios se realizaron en algún centro vacacional del IMSSS o en Ixtapa-Zihuatanejo o algún hotel del puerto de Veracruz. En esta ocasión, se llevó a cabo en las instalaciones de la UAM-I, y el saldo es a nuestro favor: un éxito. Tuvimos 60 jóvenes invitados, 40 de ellos de universidades foráneas y 20 UAM. Impartimos 8 talleres de investigación, los profesores escribieron notas y de acuerdo a la encuesta que levantamos al final del evento, el resultado es satisfacción de nuestros jóvenes invitados y de nosotros los organizadores. En este número de Mixba'al ofrecemos las notas.

Este es el espacio para agradecer a nuestras autoridades por la confianza, a las secretarías y a los jóvenes que nos apoyaron en la logística, pero sobre todo a nuestros jóvenes invitados por ceder una semana de su vida y dedicarlo a aprender temas nuevos de matemáticas. Los talleres de inducción a la investigación fueron los siguientes.

- *Análisis de datos con un enfoque bayesiano*
Asael Fabian Martínez Martínez
- *Un breve recorrido por la teoría de prerradicales y sus retículas*
Rogelio Fernández-Alonso González, Silvia Claudia Gavito Ticozzi, Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda
- *Resultados relevantes del álgebra lineal en modelos y aplicaciones*
Lorenzo Héctor Juárez Valencia
- *Análisis geométrico de superficies: una introducción elemental*
Josué Mléndez Sánchez, Eduardo Rodríguez Romero
- *Una breve introducción a los torneos y sus generalizaciones*
Ilán A. Goldfeder, Nahid Y. Javier Nol
- *Del cero al quantum: un viaje al mundo de los códigos*
Jorge R. Bolaños Servín, Yuriko Pitones Amaro, Josué I. Ríos Cangas
- *Introducción a la teoría de juegos epistémica*
Rubén Becerril Borja

- *Cómo contar más allá del infinito y para qué sirve. Inducción transfinita y algunas aplicaciones*
Jesús Rodrigo Hernández Gutiérrez

Participantes:

- *Leslie Karen Castillo Alvarado*, UAM Iztapalapa
- *Hugo Estrada Rodríguez*, UAM Iztapalapa
- *Miryam Sophie Naomi Mielke Mendez*, UAM Iztapalapa
- *Grecia Lezama Herrera*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *Cecilia Gálvez Cervantes*, Universidad Autónoma de Tlaxcala
- *Gabriela Lissette Villagrán Casados*, Universidad Veracruzana
- *Luis Daniel Flores Paredes*, UAM Iztapalapa
- *Sherlin Josefina Jaime López*, Universidad Autónoma de Tlaxcala
- *Karem Elizabeth Lobato Perea*, Universidad Veracruzana
- *Citlali Amairani Herrera Ramírez*, Universidad Veracruzana
- *Nayeli Nava Cuamatzi*, Universidad Autónoma de Tlaxcala
- *Jesus Andrik Bello Dolores*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *José Ángel Jacobo Cruz*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *Paola Denisse García Arriaga*, Universidad Autónoma de San Luis Potosí
- *Myriam Lobato Perea*, Universidad Veracruzana
- *Karla Castillo Sandova*, ENES Juriquilla
- *Jaime Rico Leon*, Universidad Nacional Autónoma de México
- *Jorge Antonio Montes Rios*, ENES Juriquilla
- *Jassiel Eduardo Coronado Piña*, Universidad Autónoma de Nuevo León
- *Marco Antonio Vázquez Miranda*, UAM Iztapalapa
- *Omar Alejandro Ochoa Romero*, Universidad de Sonora
- *David Cruz Gonzalez*, UAM Iztapalapa
- *Héctor Arroyo Méndez*, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
- *Daniela Reyes Monroy*, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
- *Eduardo Alanís García*, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
- *David López Contreras*, UAM Iztapalapa
- *Pablo César Sánchez Silva*, UAM Iztapalapa
- *Adalit Betsabe Fuentes Colorado*, Universidad Veracruzana
- *Sebastián Franco Martínez*, UAM Cuajimalpa
- *Abraham David Martínez Matuz*, Universidad Veracruzana

- *Diana Skarleth Hernández Álvarez*, Universidad Veracruzana
- *Rodrigo Zárate Chávez*, Universidad Veracruzana
- *Sebastian Lara Benitez*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *Alejandra Esmeralda Gámiz Hernández*, Universidad Juárez del Estado de Durango
- *Hugo Andrés Amaya Chaire*, Universidad Juárez del Estado de Durango
- *Mariana Cruz Gutierrez*, UAM Iztapalapa
- *Abril Midori Rebollar Mariano*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *Carlos E. López Cesáreo*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
- *Paola Piedras Samaniego*, Universidad Autónoma del Estado de México
- *Yolocelic Alma Victoriano Sánchez*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *Vincent A. González Andalón*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
- *Jafet Santiago Valerio*, UAM Iztapalapa
- *César Alberto Solís Gómez*, UAM Iztapalapa
- *José M. Contreras Dávila*, Universidad Autónoma del Estado de México
- *Jose David Lamas Medina*, Universidad Autónoma de Coahuila
- *Hillary Temaxte Cano*, Universidad Autónoma de Tlaxcala
- *Miguel Alejandro Gaspar Flores*, Universidad de Colima
- *Jesús Santiago Santos Rodríguez*, UAM Iztapalapa
- *Bryan Eduardo Flores Silva*, Universidad de Colima
- *Fernando Nava Hernández*, Universidad Autónoma de Tlaxcala
- *Diana Laura Sánchez Sánchez*, UAM Iztapalapa
- *Luis Josías López Barrios*, UAM Iztapalapa
- *Meiri Yensuni Pucheta Hernández*, UAM Iztapalapa
- *Victoria Rodríguez Villarreal*, Universidad de Sonora
- *Diego Armando Victoria García*, UAM Iztapalapa
- *Diana C. Manzano Baza*, Escuela Superior de Matemáticas No.2 Guerrero
- *José Miguel Pérez Mejía*, Universidad Autónoma de Guerrero
- *Ricardo Daniel Moreno Padilla*, UAM Iztapalapa
- *Dulce María Flores Tapia*, UAM Iztapalapa
- *Luis Raúl Serrano Olea*, UAM Iztapalapa

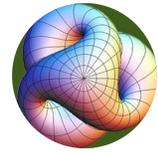
Comité Organizador



7º COLOQUIO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

del 27 al 31 de enero del 2025, Unidad Iztapalapa de la UAM, Ciudad de México

Departamento de Matemáticas
UAM IZTAPALAPA



Posgrado de Matemáticas
UAM IZTAPALAPA

