



PROBLEMA DE CLASIFICACIÓN DE FOLIACIONES EN \mathbb{CP}^2 CON TEORÍA DE INVARIANTES GEOMÉTRICOS (GIT)

P. RUBÍ PANTALEÓN-MONDRAGÓN & JUAN VÁSQUEZ AQUINO

RESUMEN. En este artículo panorámico explicamos algunos resultados sobre el problema de clasificación de foliaciones holomorfas de grado 1, 2 y 3 sobre el plano proyectivo complejo usando la Teoría de Invariantes Geométricos (GIT). Proporcionamos ejemplos explícitos de foliaciones con un único punto singular y diferentes multiplicidades, además, su clasificación por estabilidad GIT.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría geométrica de foliaciones se conoce desde principios del siglo XX con los trabajos de C. Ehresmann y G. Reeb. Fue motivada por entender mejor los problemas de estudio de soluciones de ecuaciones diferenciales. Se cree que tomó impulso al querer resolver el problema 16 de una lista de 23 problemas presentada en 1900 en un congreso de matemáticas en París por el matemático alemán David Hilbert y estudiado principalmente por H. Poincaré. Este problema busca determinar una cota en el número de ciclos límites (conjunto límite de las soluciones periódicas) de ecuaciones diferenciales

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}$$

con $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$. Sin embargo, este problema sigue sin ser resuelto. En [1], el autor explica los intentos fallidos por tratar de resolverlo. Aunque también muestra los significativos avances en otras áreas, entre ellas la teoría geométrica de ecuaciones diferenciales y, por supuesto, la teoría de foliaciones. Uno de los enfoques dados en dicho problema fue la complexificación, es decir, en lugar de trabajar sobre los reales se emplean los complejos. En foliaciones, la complexificación abrió muchos problemas, por ejemplo, la existencia de foliaciones con conjuntos minimales no triviales [2], o existencia y clasificación de foliaciones con propiedades específicas en ellas. En general, estos problemas no son fáciles de calcular, por lo que se usan diferentes técnicas, herramientas y teorías para poder decir u obtener información de estos objetos. En este artículo buscamos explicar a través de ejemplos explícitos, una de las herramientas más importantes usadas en geometría algebraica para construir espacios moduli; la Teoría de Invariantes Geométricos (conocida como GIT por sus siglas en inglés) aplicada a la teoría de foliaciones, la cual nos permite exponer explícitamente clases o familias de foliaciones sobre el plano proyectivo \mathbb{CP}^2 con propiedades específicas, así como su complejidad. Nos enfocaremos en una clase interesante de foliaciones, proporcionando ejemplos con propiedades específicas y los avances en este problema.

Recordemos que un sistema de ecuaciones como (1) puede interpretarse como un campo vectorial X cuyas soluciones son curvas que son tangentes a este campo en cada punto de sus trayectorias (como muestra la Figura 1) y esto es análogo al considerar el campo \mathbb{C} .

Al igual que en el plano real, el Teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias holomorfas nos garantiza que por cada punto pasa una y solo

2010 *Mathematics Subject Classification.* 32S65, 14B05, 37F75, 32M25, 14L30.

Palabras clave. Foliaciones holomorfas, Teoría de Invariantes Geométricos, Acciones de grupos algebraicos, GIT-estabilidad.

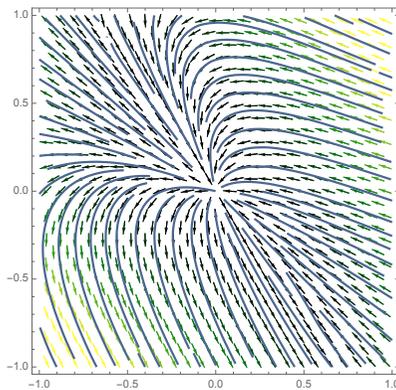


FIGURA 1. Flujo de un campo vectorial.

una solución σ satisfaciendo la condición inicial $\sigma(t_0) = p$, salvo en los puntos donde el campo se “anula”. Es decir, salvo en estos puntos, las soluciones descomponen al espacio (\mathbb{C}^2) en curvas. Esta descomposición es conocida como "foliaciones por curvas asociadas al campo vectorial X ". Además, salvo en los puntos donde el campo se anula (llamados puntos singulares), podemos “enderezar” a las curvas (como se muestra en la Figura (2)) obteniendo un comportamiento lineal. Entonces, ¿dónde radica el problema?, pareciera que todo el comportamiento es rectificable. El problema surge cuando uno desea ver el comportamiento alrededor de puntos donde el campo vectorial se anula, por lo que surgen las siguientes preguntas: ¿el conjunto singular del campo vectorial nos da información para definir a la foliación asociada?, ¿una foliación puede ser determinada por un campo vectorial?, etc.

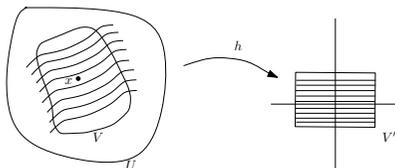


FIGURA 2. Rectificación en una vecindad sin “puntos anuladores”

En [3] Gómez-Mont y Ortiz exponen ampliamente cómo una foliación por curvas sobre un espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ puede ser descrita por campos vectoriales polinomiales homogéneos en \mathbb{C}^{n+1} . En particular, en este artículo nos centraremos en foliaciones holomorfas sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Un sistema de ecuaciones diferenciales polinomiales como en (1), con $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, representará una foliación de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (de manera local). Con esta representación se puede hablar del conjunto singular del campo vectorial asociado y más aún, el conjunto singular jugará un papel muy importante para su comportamiento. De hecho, sobre el plano proyectivo, el conjunto de puntos donde el campo se anula puede ser finito o infinito. En el caso finito, en 1998, Gómez-Mont y Kempf en [4] probaron que si el número de puntos singulares del campo vectorial son diferentes, entonces la foliación asociada está completamente determinada por ellos. Más adelante, en 2001, Campillo y Olivares [5] dan una generalización considerando puntos con multiplicidad (es decir, se valen puntos repetidos) siempre y cuando la foliación sea de grado diferente de 1. Las preguntas naturales en este caso son ¿qué tantos puntos singulares puede tener una foliación?, ¿cualquier configuración de puntos sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ determina una foliación con este conjunto singular?

Una de las herramientas importantes cuando se trata de clasificar objetos es la GIT. En la sección 4, daremos un repaso introductorio de esta teoría usando ejemplos simples de su aplicación. Ejemplo de aplicaciones de la GIT sobre foliaciones en el plano proyectivo se puede ver en [6, 7, 8] y [9].

Las secciones están formadas de las siguientes maneras. En la sección (2), hacemos un recordatorio sobre curvas planas y algunas propiedades en ellas. En la sección (3) presentamos los conceptos de foliaciones que usamos a lo largo del texto. A continuación, en la sección (4), introduciremos a grandes rasgos la teoría de invariantes geométricos aplicada sobre el espacio de foliaciones. En la sección (5) tenemos el objetivo principal del escrito, es decir, presentaremos los resultados conocidos de la estabilidad de foliaciones de grado 1, 2 y 3 con un único punto singular, nuestras aportaciones en ejemplos explícitos y bibliografía donde el interesado en el tema puede explorar para más detalles. Para finalizar, en la sección (6) presentaremos nuestras conclusiones y problemas abiertos en esta línea de investigación.

2. PRELIMINARES BÁSICOS

El espacio proyectivo complejo de dimensión n , denotado por $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, se define como el conjunto de clases de equivalencia $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}) / \sim$, donde \sim se define de la siguiente manera: dos puntos no cero p y q de \mathbb{C}^{n+1} son equivalentes ($p \sim q$) si y sólo si existe un escalar no cero, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, tal que $p = \lambda q$. De esta manera, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ parametriza líneas de \mathbb{C}^{n+1} que pasan por el origen, sin contener el origen.

Denotaremos a las clases de equivalencia de un punto como $[x_0 : \dots : x_n]$, también conocidas como coordenadas homogéneas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. En el caso particular $n = 2$, llamamos al espacio $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ como *plano proyectivo*, y denotamos sus coordenadas homogéneas por $[x : y : z]$.

Sean $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en $n + 1$ variables y $S = \{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ un conjunto finito de polinomios. Denotaremos por

$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_m) = \{p \in \mathbb{C}^{n+1} \mid f_1(p) = \dots = f_m(p) = 0\}$$

al conjunto de ceros comunes de los polinomios en S . Con esta definición es fácil ver que $\mathbb{V}(S) = \bigcap_{f \in S} \mathbb{V}(f)$.

Un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ de grado d se puede expresar como

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_{d-1} + f_d,$$

donde cada f_k es un polinomio homogéneo de grado k , es decir, todos los monomios de f_k tienen grado k , con $k \in \{0, \dots, d\}$. En particular, en este escrito, nos interesan los polinomios en no más de 3 variables.

Cuando $f \in \mathbb{C}[x, y]$ es un polinomio no constante de grado d , $\mathbb{V}(f)$ define una curva de grado d en \mathbb{C}^2 . Análogamente, un polinomio homogéneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ de grado d satisface que, para todo $p \in \mathbb{C}^3$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $F(\lambda p) = \lambda^d F(p)$. Así, dado que F se escribe de la forma

$$F = \sum_{i+j+k=d} a_{ij} x^i y^j z^k \text{ con } a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ no todos cero,}$$

si $F(p) = 0$ entonces $F(\lambda p) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$, es decir, F se anula en toda la clase de p en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Denotamos por $\mathbb{C}[x, y, z]_d$ el espacio de polinomios homogéneos de grado d . Al conjunto $C = \mathbb{V}(F) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, donde $F \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$ es un polinomio no cero, se le llama *curva plana de grado d* . Para cada $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, la multiplicidad de p respecto a la curva plana $C = \mathbb{V}(F)$ se define de la siguiente manera, supongamos que $p = [1 : 0 : 0]$ (salvo cambio de coordenadas) y $f(y, z) = F(1, y, z)$, entonces, $m_p(f) = 0$ si $p \notin C$ o $m_p(f) = m$ si $f(y, z) = f_m + f_{m+1} + \dots + f_d$ con $f_m \neq 0$ y $p \in C$.

Un resultado importante sobre intersección de curvas planas es el teorema de Bézout.

TEOREMA 1 (Bézout, [10]). *Sean F y G polinomios homogéneos de grado d_1 y d_2 respectivamente. Entonces $\mathbb{V}(F, G)$ consiste en $d_1 d_2$ puntos contando multiplicidades.*

Sean $\mathbb{V}(f)$ y $\mathbb{V}(g)$ dos curvas en \mathbb{C}^2 y $p \in \mathbb{C}^2$ un punto. Definimos el número de intersección de $\mathbb{V}(f)$ y $\mathbb{V}(g)$ en p , denotado por $I_p(f, g)$, como un número real que cumple las siguientes propiedades:

1. $I_p(f, g)$ es un entero no negativo para cada $p \in \mathbb{C}^2$ tal que f y g no tienen componentes comunes que contienen a p , e ∞ en caso contrario.
2. $I_p(f, g) = 0$ si y sólo si $p \notin \mathbb{V}(f) \cap \mathbb{V}(g)$. $I_p(f, g)$ depende sólo de las componentes de f y g .
3. Sea T un cambio de coordenadas en \mathbb{C}^2 con $T(p) = q$. Denotamos por f^T y g^T a los polinomios que definen a las curvas transformadas. Entonces $I_p(f, g) = I_q(f^T, g^T)$.
4. $I_p(f, g) = I_p(g, f)$.
5. $I_p(f, g) \geq m_p(f)m_p(g)$. La igualdad se da si y sólo si f y g no tienen rectas tangentes en común en p . De esta forma, el número de intersección es 1 cuando las curvas se intersecan transversalmente.
6. Si $f = \Pi f_i^{r_i}$ y $g = \Pi g_j^{s_j}$, entonces $I_p(f, g) = \sum_{i,j} r_i s_j I_p(f_i, g_j)$.
7. $I_p(f, g) = I_p(f, g + Af)$ para todo $A \in \mathbb{C}[x, y]$.

Este número existe y es único [10].

Con las nociones de ceros de polinomios, sean $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ no tiene elementos nilpotentes, definimos

$$\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq s\}$$

como la *variedad afín* definida por f_1, \dots, f_s . Un morfismo de variedades afines $V \subset \mathbb{C}^n$ y $W \subset \mathbb{C}^m$ es una función $\varphi : V \rightarrow W$ tal que existen funciones $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tales que $\varphi(p) = (g_1(p), \dots, g_m(p)) \in W$ para cada punto $p \in V$.

Similarmente, sean $F_1, \dots, F_s \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ polinomios homogéneos. Definimos

$$\mathbb{V}(F_1, \dots, F_s) = \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid F_i(a_0, \dots, a_n) = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq s\}$$

como la *variedad proyectiva* definida por F_1, \dots, F_s . Sean $V \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ y $W \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ dos variedades proyectivas, y suponga que $\varphi : V \rightarrow W$ es una función de V a W . Decimos que φ es un *morfismo de variedades proyectivas* si lo siguiente se cumple: Para cada $p \in V$, existen polinomios homogéneos $F_0, \dots, F_m \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ tales que para algún conjunto abierto $U \subset V$ que contiene a p , la función restringida $\varphi|_U : U \rightarrow W$ se ve como $q \mapsto [F_0(q) : F_1(q) : \dots : F_m(q)]$.

3. FOLIACIONES SOBRE EL PLANO PROYECTIVO COMPLEJO

Definición 2. Una *foliación* X de grado d sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ puede ser descrita, salvo factor escalar, de dos maneras principales:

1. Por un campo vectorial

$$X = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

donde $P, Q, R \in \mathbb{C}[x, y, z]_d$. Si consideramos el campo radial $E = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$. Los campos vectoriales X y $X + hE$, donde $h \in \mathbb{C}[x, y, z]_{d-1}$, representan la misma foliación.

2. Por una 1-forma $A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$, donde $A, B, C \in \mathbb{C}[x, y, z]_{d+1}$ con la propiedad $xA + yB + zC = 0$ llamada condición de Euler.

Estas dos expresiones están relacionadas de la siguiente manera: $A = zQ - yR$, $B = xR - zP$ y $C = yP - xQ$.

Denotaremos por $\mathcal{F}(d, 2)$ al espacio de foliaciones de grado d sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. En [3] se prueba con gran detalle que $\mathcal{F}(d, 2)$ es un espacio proyectivo de dimensión $d^2 + 4d + 2$.

Un punto $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ se dice *punto singular* de una foliación X si se satisface lo siguiente:

1. Visto como un campo vectorial, $X(p) = \alpha p$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$ o,
2. Como una 1-forma, $A(p) = B(p) = C(p) = 0$, es decir, $p \in \mathbb{V}(A, B, C)$.

Se puede verificar que ambas condiciones son equivalentes. Denotaremos al conjunto de puntos singulares de una foliación X como $Sing(X)$.

Observemos que el conjunto singular puede ser infinito o finito como conjunto. De hecho, si las componentes (del campo vectorial o de la 1-forma) no tienen factores en común, el conjunto singular $Sing(X)$ es finito, en este caso decimos que la foliación tiene *singularidades aisladas*. Las foliaciones de mayor interés son justamente las que tienen singularidades aisladas y nos restringiremos a ellas en este artículo. De hecho, Jouanolou demostró que podemos contar dichas singularidades y que este número depende solo del grado de la foliación, como veremos en la Proposición 4.

Sin pérdida de generalidad, si $p = [1 : 0 : 0]$ es una singularidad aislada de la foliación X , se puede dar una representación local de X sobre un abierto $U \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ que contenga a p (podemos pensar a $U \cong \mathbb{C}^2$) tomando el campo vectorial o la 1-forma asociada a X de la forma

$$(2) \quad f(y, z) \frac{\partial}{\partial y} + g(y, z) \frac{\partial}{\partial z} \quad \circ \quad -g(y, z)dy + f(y, z)dz.$$

donde $f(y, z) = -C(1, y, z)$ y $g(y, z) = B(1, y, z)$.

Considerando la proyección natural $\pi : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, sea $q = \pi(p)$ en el abierto U .

LEMA 3. *Existe una correspondencia entre puntos singulares de la foliación X y los puntos en $\mathbb{V}(f, g)$.*

Demostración. Sea $p = [1 : \beta : \gamma] \in Sing(X)$ con $\pi(p) = (\beta, \gamma)$. Como $0 = B(p) = g(\pi(p))$ y $0 = -C(p) = f(\pi(p))$ entonces $(\beta, \gamma) \in \mathbb{V}(f, g)$. De manera inversa, sea $(b, c) \in \mathbb{V}(f, g)$. Sea $p = [1 : b : c]$, como $f(b, c) = g(b, c) = 0$ y $xA(x, y, z) = -yB(x, y, z) - zC(x, y, z)$, entonces $A(p) = -bB(p) - cC(p) = 0$. Por lo tanto, $p \in Sing(X)$. \square

Con la representación local anterior, se definen algunos invariantes sobre cada singularidad, entre ellos se encuentran los siguientes. Supongamos que $p \in Sing(X)$ con $q = (0, 0)$ (a través de un cambio de coordenadas).

- La *multiplicidad algebraica* de p se define como el orden mínimo de f y g en q , es decir, si descomponemos a f y g en su partes homogéneas: $f = f_m + f_{m+1} + \dots$ y $g = g_s + g_{s+1} + \dots$, donde $f_i, g_i \in \mathbb{C}[x, y]_i$, entonces

$$m_p(X) := \min\{m, s\}.$$

- El *número de Milnor* de p sobre X se define como

$$\mu_p(X) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)}{\langle f, g \rangle \cdot \mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)},$$

donde $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^2)$ es el anillo de funciones regulares sobre q y $\langle f, g \rangle$ es el ideal generado por las componentes del campo vectorial local. Un hecho conocido es que este número coincide con el índice de intersección de las curvas definida por f y g en el punto q , $I_q(f, g)$ (ver [10]).

Una propiedad importante del número de Milnor es la siguiente.

PROPOSICIÓN 4 (Jouanolou, [11]).

$$\sum_{p \in Sing(X)} \mu_p(X) = d^2 + d + 1.$$

Esta fórmula es de naturaleza topológica y nos da una manera de determinar cuántos puntos singulares podemos tener, por ejemplo: $d^2 + d + 1$ puntos singulares con número de Milnor 1, o el caso donde hay un único punto singular p con número de Milnor máximo $\mu_p(X) = d^2 + d + 1$.

Ejemplo 1. Consideremos el campo vectorial:

$$X = y^2 \frac{\partial}{\partial x} + z^2 \frac{\partial}{\partial y},$$

o equivalentemente, la 1-forma:

$$-z^3 dx + zy^2 dy + (xz^2 - y^3) dz,$$

que definen a una foliación de grado 2. Observemos que $p = [1 : 0 : 0] \in \text{Sing}(X)$, así, en una vecindad de p , X puede representarse por la expresión local $f = -zy^2$ y $g = -z^2 + y^3$, es decir,

$$-zy^2 dy + (-z^2 + y^3) dz,$$

con punto singular $q = (0, 0)$, como se puede observar en la Figura 3. De la expresión local de la 1-forma se puede ver que la multiplicidad del punto es $m_p(X) = 2$. Para calcular el número de Milnor de X sobre p , se pueden usar las propiedades de índice de intersección entre las curvas definidas por f y g de la sección 2. Así,

$$\begin{aligned} \mu_{(p)}(X) &= I_q(f, g) \\ &= I_q(z, z^2 - y^3) + 2I_q(y, z^2 - y^3) \text{ (propiedad 6)} \\ &= 3 + 4 = 7 \text{ (propiedad 7)}. \end{aligned}$$

Por Jouanolou, como el número de Milnor es el máximo posible, entonces $\text{Sing}(X) = \{p\}$. De hecho, este es un ejemplo de las cuatro foliaciones (salvo cambio de coordenadas) de grado 2 que tienen un único punto singular clasificadas en [12].

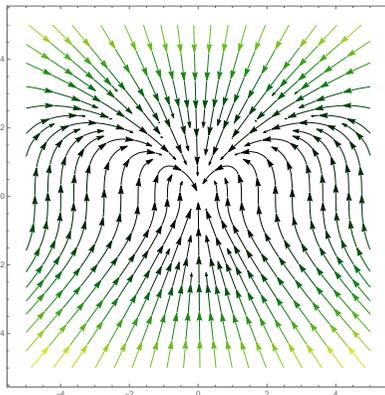


FIGURA 3. Representación local de la foliación $X = z^2 \frac{\partial}{\partial y} + y^2 \frac{\partial}{\partial x}$.

En general, no es trivial determinar las foliaciones de grado d con un único punto singular, es decir, no existe una clasificación en general. Sin embargo, bajo condiciones a añadidas, existen varios resultados, ver por ejemplo: [12, 7, 13, 14, 15, 9, 16, 17].

4. PROBLEMA DE CLASIFICACIÓN DE FOLIACIONES EN \mathbb{CP}^2 CON GIT

La Teoría de Invariantes Geométricos (GIT) es una herramienta importante y poderosa para construir espacios moduli, como cocientes de acciones de grupos algebraicos sobre variedades algebraicas [18]. Esta teoría busca construir una variedad algebraica donde cada punto de esta variedad represente una clase de isomorfismo, es decir, una clase de equivalencia de los objetos que deseamos clasificar, como en nuestro caso, clasificar foliaciones en \mathbb{CP}^2 salvo isomorfismos del plano proyectivo.

Los conceptos básicos de esta sección pueden ser explorados con más detalle en [18, 19, 20] y [21].

Definición 5. Un *grupo algebraico* G es un grupo que además tiene estructura de variedad algebraica y cuyas operaciones de grupo, producto e inverso, son morfismos de variedades algebraicas.

Algunos ejemplos clásicos de grupos algebraicos son:

- El grupo general lineal $GL_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2+1}$ es la variedad afín definida por $\mathbb{V}(\text{ydet} - 1)$, donde $\text{ydet} - 1 \in \mathbb{C}[x_{ij}, y]$ y det denota al polinomio determinante de matrices de tamaño $n \times n$.
- El grupo especial lineal $SL_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ es la variedad afín definida por $\mathbb{V}(\text{det} - 1)$, donde $\text{det} - 1 \in \mathbb{C}[x_{ij}]$.
- Los subgrupos cerrados de $GL_n(\mathbb{C})$ son grupos algebraicos, conocidos como *Grupos algebraicos lineales*.

Un morfismo de grupos algebraicos es un morfismo de grupos que también es morfismo de variedades algebraicas.

Definición 6. Una *acción* de un grupo algebraico G sobre una variedad algebraica V afín o proyectiva, es un morfismo

$$\begin{aligned} \cdot : G \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto g \cdot v \end{aligned}$$

que satisface lo siguiente para todo $g, g' \in G$ y $v \in V$;

- $g \cdot (g' \cdot v) = (gg') \cdot v$
- $e \cdot v = v$, donde e es la identidad del grupo G .

La acción $G \times V \rightarrow V$ se dice *lineal* si viene dada por una representación, es decir, un espacio vectorial W y un morfismo de grupos algebraicos $\rho : G \rightarrow GL(W)$ tal que la acción de G en V se ve como $g \cdot v = \rho(g)v$.

La teoría de representaciones de grupos es muy extensa y muy rica. Un libro clásico sobre este tema es [19]. En los capítulos 12 y 13 de dicho libro se explica que para grupos específicos podemos dibujar un diagrama de pesos de la representación, por ejemplo, para las representaciones de $SL_n(\mathbb{C})$ y cuando $n = 3$, este diagrama se puede ver en \mathbb{R}^2 .

4.1. Acción por cambio de coordenadas. Uno de los objetivos de la teoría de foliaciones sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ es clasificar estos objetos salvo isomorfismos del plano proyectivo. Así, dos foliaciones X_1 y X_2 son equivalentes si existe un isomorfismo de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ que nos lleva uno al otro. Esto se ve formalmente por la siguiente acción.

Sea $V = \mathcal{F}(d, 2)$ el espacio de foliaciones holomorfas de grado d sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ y $G = SL_3(\mathbb{C})$. La función definida por

$$\begin{aligned} SL_3(\mathbb{C}) \times \mathcal{F}(d, 2) &\rightarrow \mathcal{F}(d, 2) \\ (g, X) &\mapsto g \cdot X = DgX(g^{-1}), \end{aligned}$$

es una acción lineal, y es llamada *acción por cambio de coordenadas en $\mathcal{F}(d, 2)$* . En efecto; sean $g, h \in SL_3(\mathbb{C})$ y $X \in \mathcal{F}(d, 2)$, entonces

1. $g \cdot (h \cdot X) = g \cdot (DhX(h^{-1})) = D(gh)X((gh)^{-1}) = (gh) \cdot X$.
2. $Id \cdot X = DIdX(Id^{-1}) = DIdX = X$.

La GIT (clásica) estudia acciones de un tipo particular de grupos algebraicos, los *grupos reductivos*, que evitaremos su explicación en este texto, ya que para nuestros fines, el grupo de nuestro interés, $SL_3(\mathbb{C})$, sí lo es. El lector interesado puede consultar [21] para descubrir la historia de esta definición y su relación con el problema 14 de Hilbert.

Dos conceptos importantes derivados de la acción de un grupo algebraico sobre una variedad algebraica son los siguientes.

Definición 7. Sean G un grupo reductivo actuado sobre una variedad algebraica V y $v \in V$.

- El *estabilizador* de v , o también llamado el *subgrupo de isotropía* de v , es el subgrupo cerrado $G_v := \{g \in G \mid gv = v\}$ de G .
- La *órbita* de v es la subvariedad $O(v) := \{g \cdot v \mid g \in G\}$ de V .

Una consecuencia importante de estos conjuntos y los cuales los relaciona, está dada en el siguiente lema muy conocido.

LEMA 8. Si G actúa linealmente en V . Para cada $v \in V$,

$$\dim O(v) = \dim G - \dim G_v.$$

Ejemplo 2. Sea $X = (-xz - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y} + xy \frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{F}(2, 2)$. Podemos ver que $\text{Sing}(X) = \{[0 : 0 : 1]\}$. Consideremos las matrices

$$g_1 = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} j^2 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donde } j = e^{2i\pi/3} \text{ y } g_3 = Id.$$

Bajo la acción por cambio de coordenadas, el estabilizador de X es $SL_3(\mathbb{C})_X = \{g_1, g_2, g_3\}$. En efecto, supongamos que $g = (a_{ij}) \in SL_3(\mathbb{C})$ y $g^{-1} = (b_{ij}) \in SL_3(\mathbb{C})$ con $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$. De las igualdades $g \cdot X = X$ y $g \cdot g^{-1} = Id$ tenemos: $b_{32} = 0, b_{31} = 0, b_{23} = 0, b_{21} = 0, b_{13} = 0, b_{12} = 0, a_{32} = 0, a_{31} = 0, a_{23} = 0, a_{21} = 0, a_{13} = 0, a_{12} = 0, b_{33} = 1, a_{33} = 1, a_{22} = b_{11}, a_{11} = b_{22}, b_{22}^2 = b_{11}, b_{11}b_{22} = 1, b_{11}^2 = b_{22}$. De esto concluimos que b_{22} y b_{11} son una raíz cúbica de la unidad. Más aún, se satisface una de las siguientes condiciones

$$(a_{11} = b_{22}, a_{22} = b_{22}^2) \text{ o } (a_{11} = b_{11}^2, a_{22} = b_{11}).$$

Por lo tanto, $g = \text{diag}(b_{22}, b_{22}^2, 1)$ o $g = \text{diag}(b_{11}^2, b_{11}, 1)$ o $g = Id$. Es decir, los únicos elementos que dejan fijos a X bajo la acción son g_1, g_2 y Id , por lo tanto, $\dim O(X) = 8$.

En el ejemplo anterior, uno de los problemas importantes a entender es el comportamiento de la órbita de X bajo la acción. En [12] los autores estudian los comportamientos de las órbitas para foliaciones de grado 2 con único punto singular, aunque en general no es trivial describir dicho conjunto.

Uno de los resultados más importantes de la GIT nos dice que, dada una acción lineal de un grupo reductivo sobre una variedad proyectiva, no siempre existe el cociente V/G , al menos no como variedad algebraica, pero que al considerar un cierto subconjunto abierto de la subvariedad V , que llamaremos V^{ss} , existe un cociente, denotado por V^{ss}/G , que sí es una variedad proyectiva. Por otro lado, construir dicho cociente es uno de los problemas más difíciles de esta área, comenzando por describir los objetos en V^{ss} y su complemento.

Definición 9. Sea x un punto en la variedad proyectiva V . Consideremos un representante $\bar{x} \in \mathbb{C}^{n+1}$, es decir, $\bar{x} \in x$. Denotemos por $O(\bar{x})$ la órbita de \bar{x} en el cono afín de V , entonces

- x es *inestable* si $0 \in \overline{O(\bar{x})}$ (donde la barra significa cerradura). El conjunto de puntos inestables es denotado por V^{un} .
- x es *semiestable* si $0 \notin \overline{O(\bar{x})}$. El conjunto de puntos semiestables es denotado por V^{ss} .
- x es *estable* si es semiestable, la órbita de x es cerrada en V^{ss} y $\dim O(x) = \dim G$. El conjunto de puntos estables es denotado por V^s .

Un método para determinar la estabilidad de los puntos de una variedad con la acción de un grupo algebraico es el conocido Criterio de Hilbert-Mumford [21]. Aquí vamos a presentar brevemente un criterio equivalente al Hilbert-Mumford, como se muestra en [22].

Dado que la acción de $SL_3(\mathbb{C})$ en el espacio de foliaciones $\mathcal{F}(d, 2)$ es una acción lineal, tenemos una representación de $SL_3(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^{(d^2+4d+2)+1}$. Para dibujar el diagrama de pesos de esta representación consideremos el toro maximal T de $SL_3(\mathbb{C})$ dada por el conjunto de matrices diagonales con determinante igual a 1. De la representación de $SL_3(\mathbb{C})$ tenemos una representación inducida de T , es decir, un morfismo no trivial $T \rightarrow GL(\mathbb{C}^{(d^2+4d+2)+1})$. De esta manera, tenemos una descomposición en subrepresentaciones escalares $\mathbb{C}^{d^2+4d+3} = \bigoplus_r \alpha_r V_{\alpha_r}$, donde $\alpha_r : T \rightarrow \mathbb{C}$ con $r = 1, \dots, d^2 + 4d + 3$ y es llamada peso de la representación. Para el caso específico de nuestra acción, estos

pesos están definidos como sigue: consideremos el conjunto generador del espacio de foliaciones $\mathcal{F}(d, 2)$ dada por

$$\left\{ x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial x}, x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial y} \text{ donde } i + j + k = d \text{ y } x^k y^i \frac{\partial}{\partial z} \text{ con } i + k = d \right\}.$$

Tomamos una matriz diagonal $diag(a, b, c) \in T$ y aplicamos la acción por cambio de coordenadas definida anteriormente. Así

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{d^2+4d+3} = & \bigoplus_{i+j+k=d} a^{-k+1} b^{-i} c^{-j} \langle x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial x} \rangle \\ & \bigoplus_{i+j+k=d} a^{-k} b^{-i+1} c^{-j} \langle x^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial y} \rangle \bigoplus_{k+i=d} a^{-k} b^{-i} c \langle x^k y^i \frac{\partial}{\partial z} \rangle, \end{aligned}$$

A esta representación le vamos a asociar un conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 ,

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-k+j)L_1 + (-i+j)L_2 : i+j+k=d, \\ (-i+k)L_1 + (1-j+k)L_2 : i+j+k=d, \\ (-1-k)L_1 + (-1-i)L_2 : i+k=d \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

donde $L_1 = (1, 0)$, $L_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $L_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

A este conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 le llamaremos *diagrama de pesos de la representación*. Los ejemplos explícitos de estos diagramas para la acción de $SL_3(\mathbb{C})$ en espacios de foliaciones se pueden ver en las figuras 4, 5 y 6.

Para una foliación $X \in \mathcal{F}(d, 2)$, podemos considerar el conjunto convexo definido por sus pesos en el diagrama correspondiente en \mathbb{R}^2 . Si para cualquier cambio de coordenadas se tiene que:

- si el origen está contenido en el interior del convexo, entonces la foliación es estable,
- si el origen está en el convexo, la foliación es semiestable, y
- si el origen está fuera del convexo, la foliación es inestable.

Ejemplos explícitos de este criterio se muestran en las figuras 7a, 8a y 9a. Otros problemas de GIT donde se usa este criterio se puede ver en [23, 22] y [25].

En [26], la autora estudia foliaciones de grado 2. Describe a las foliaciones inestables de este grado y da otra prueba de las 4 foliaciones de grado 2 con un único punto singular que fueron descritas en [12], también salvo cambio de coordenadas. En [24] de la misma autora, se describe más en general a las foliaciones inestables clasificandolas por medio de sus grupos de automorfismos.

En [7] y [9] los autores damos ejemplos explícitos de foliaciones de grado 3 con un único punto singular. Además, damos una prueba sencilla de que las foliaciones con puntos singulares de multiplicidad 1 son estables. También damos ejemplos de foliaciones con singularidades de multiplicidad 2 que son inestables y semiestables no estables. Casos explícitos serán considerados en la siguiente sección.

5. FOLIACIONES CON UN ÚNICO PUNTO SINGULAR

Dos clases importantes de foliaciones son aquellas extremas, es decir, aquellas que tienen todas sus singularidades diferentes (también llamadas foliaciones no degeneradas), o aquellas con un único punto singular. Las foliaciones no degeneradas forman un espacio denso en el espacio de foliaciones y son estables (ver [4]). Por otro lado, no hay una clasificación general de foliaciones con un único punto singular, aunque sí hay algunos resultados importantes al respecto. En esta sección hablaremos de los avances para foliaciones de grado 1, 2 y 3 (incluyendo nuestras contribuciones [9]) con un único punto singular.

Definamos los siguientes conjuntos

$$\mathcal{A}_d := \{X \in \mathcal{F}(d, 2) \mid \text{Sing}(X) = \{p\}, \mu_p(X) = d^2 + d + 1\},$$

$$\mathcal{A}_{d,m} := \{X \in \mathcal{A}_d \mid m_p(X) = m\}.$$

5.1. Grado 1, $\mu_p(X) = 3$. Consideremos el diagrama de pesos de las foliaciones de grado 1 sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ dado por la Figura 4.

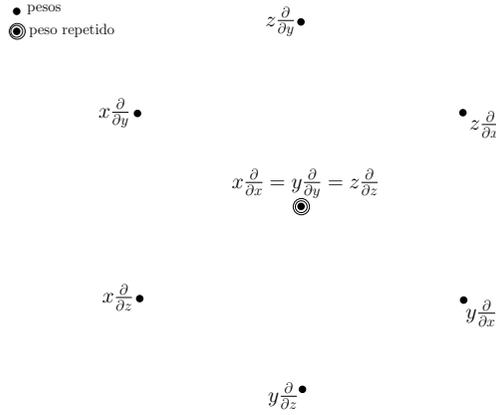


FIGURA 4. Diagrama de pesos de $\mathcal{F}(1, 2)$.

TEOREMA 10. [6] *Una foliación de grado 1 es de la forma*

$$X = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donde $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$. Además, X es inestable si A es nilpotente.

5.2. Grado 2, $\mu_p(X) = 7$. La Figura 5 representa el diagrama de pesos del espacio $\mathcal{F}(2, 2)$. Por [12], existen cuatro foliaciones (hasta cambio de coordenadas) en \mathcal{A}_2 :

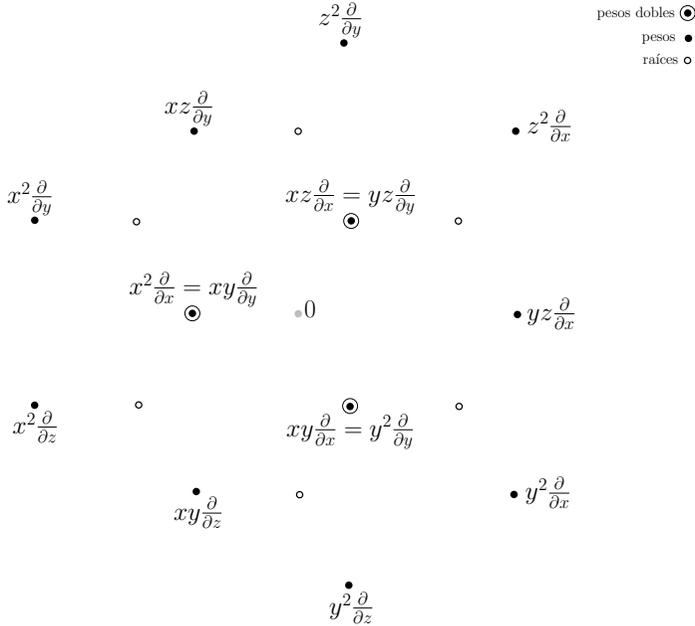


FIGURA 5. Diagrama de pesos de $\mathcal{F}(2, 2)$.

1. $X_1 = y^2 \frac{\partial}{\partial x} + z^2 \frac{\partial}{\partial y}$,
2. $X_2 = -y^2 \frac{\partial}{\partial x} + (yz - z^2) \frac{\partial}{\partial y} + z^2 \frac{\partial}{\partial z}$,
3. $X_3 = (y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial x} + yz \frac{\partial}{\partial y}$,

4. $X_4 = -yz \frac{\partial}{\partial x} + (xy + z^2) \frac{\partial}{\partial y} + y^2 \frac{\partial}{\partial z}$.

Sin perder generalidad, podemos ver que $Sing(X_i) = \{[1 : 0 : 0]\}$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Usando la representación local alrededor de la singularidad y usando el diagrama de pesos, tenemos la siguiente tabla:

i	f	g	$m_p(X)$	Estabilidad
1	$z^2 - y^3$	$-zy^2$	2	Inestable
2	$yz - z^2 + y^3$	$z^2 + y^2z$	2	Inestable
3	$yz - y^3 - yz^2$	$-y^2z - z^3$	2	Inestable
4	$y + z^2 + y^2z$	$y^2 + yz^2$	1	Estable

5.3. Grado 3, $\mu_p(X) = 13$. El diagrama de pesos de foliaciones de grado 3 está dado en la Figura 6. Los resultados particulares presentados en esta sección pueden ser consultados en [9] principalmente.

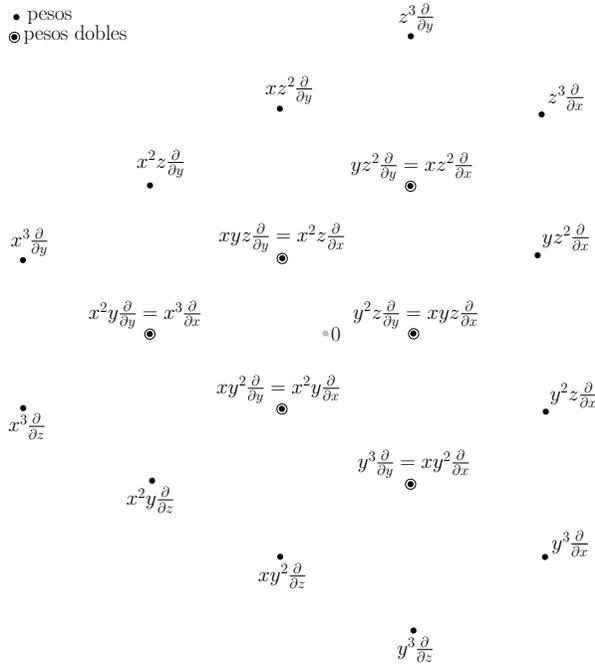


FIGURA 6. Diagrama de pesos de $\mathcal{F}(3, 2)$.

Para foliaciones de grado 3, con multiplicidad 1 se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 11. $\mathcal{A}_{3,1} \subset \mathcal{F}(3, 2)^s$.

Para foliaciones de grado 3 y multiplicidad 2, simplificaremos los resultados con ejemplos explícitos.

Ejemplo 3. [9, Theorem 4.1] La foliación dada por el campo vectorial

$$X = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^2 - 6y^3 - xyz - 7y^2z - 2xz^2 - 3z^3 \\ y^3 + xyz + xz^2 - yz^2 + 2z^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene como punto singular al punto $p = [1 : 0 : 0]$. Alrededor de p , una representación local de X , que se puede ver en la figura 7b, es dada por el campo vectorial

$$\begin{pmatrix} f(y, z) = yz + z^2 + yz^2 + y^2z + 2z^3 + 6y^4 + 7y^3z + 3yz^3 \\ g(y, z) = -y^2z + 6y^3z + yz^2 + 7y^2z^2 + 2z^3 + 3z^4 \end{pmatrix}$$

Uno puede verificar que los términos de las componentes de X pertenecen al convexo $\mathcal{A}_{3,2}^s$ de la figura 8a. Además, las condiciones de estabilidad están fuertemente dadas en los coeficientes de $y^3 \frac{\partial}{\partial z}$, $z^3 \frac{\partial}{\partial y}$ y $x^2 y \frac{\partial}{\partial x}$ los cuales son no cero. Por lo tanto, $X \in \mathcal{A}_{3,2}^s$.

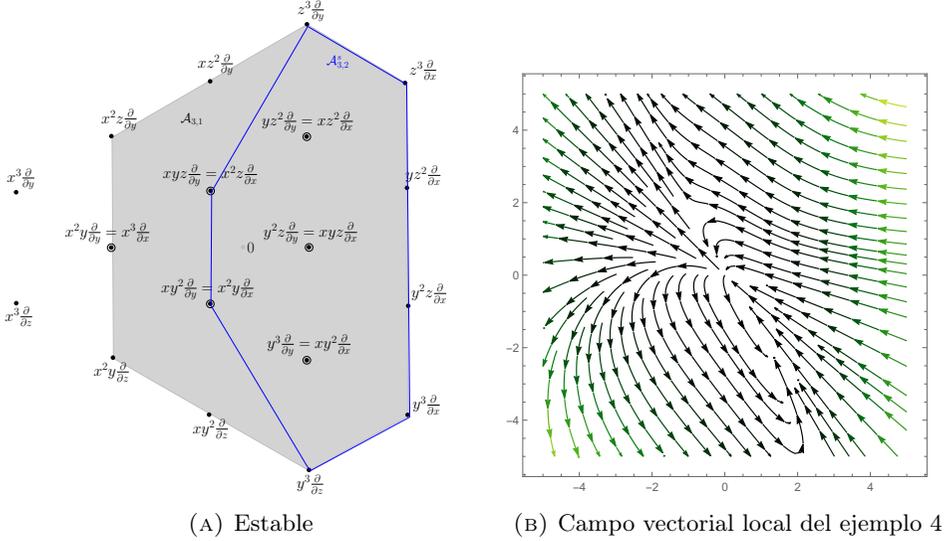


FIGURA 8. Estabilidad de $\mathcal{F}(3, 2)$ con multiplicidad 1 y 2.

Para terminar la multiplicidad 2, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5. [9, Lemma 1] Consideremos la foliación dada por el campo vectorial

$$X = \begin{pmatrix} y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \\ xyz - 2y^2z + xz^2 + \frac{1}{2}yz^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que el punto $p = [1 : 0 : 0]$ es punto singular de X , una representación local (ver figura 9b) está dada por el campo vectorial

$$\begin{pmatrix} f(y, z) \\ g(y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^4 - 3y^3z - 3y^2z^2 - yz^3 - 2y^2z + \frac{1}{2}yz^2 + yz + z^2 \\ -y^3z - 3y^2z^2 - 3yz^3 - z^4 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que $m_p(X) = 2$. Además, observemos que $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = (y+z)^3$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_{(p)}(X) &= I_{(0,0)}(f, g) \\ &= I_{(0,0)}(f, z) + 3(I_{(0,0)}(y+z, z) + I_{(0,0)}(y+z, y(4y-z))) \\ &= 4 + 3(1+2) = 13. \end{aligned}$$

Los monomios en las componentes de X pertenecen al convexo sombreado dado en la figura 9a, por lo que X es inestable, es decir, $X \in \mathcal{A}_{3,2}^{un}$.

Además, para grado 3 y multiplicidad 3 (salvo cambio de coordenadas) se tiene lo siguiente.

TEOREMA 12. $\mathcal{A}_{3,3} \subset \mathcal{F}(3, 2)^{un}$.

En resumen, la siguiente tabla muestra la estabilidad de foliaciones de grado 3 con un único punto singular y multiplicidad 1, 2 y 3.

$m_p(X)$	$\mu_p(X)$	Estabilidad
1	13	estable
2	13	estable, semiestable no-estable, inestable
3	13	inestable

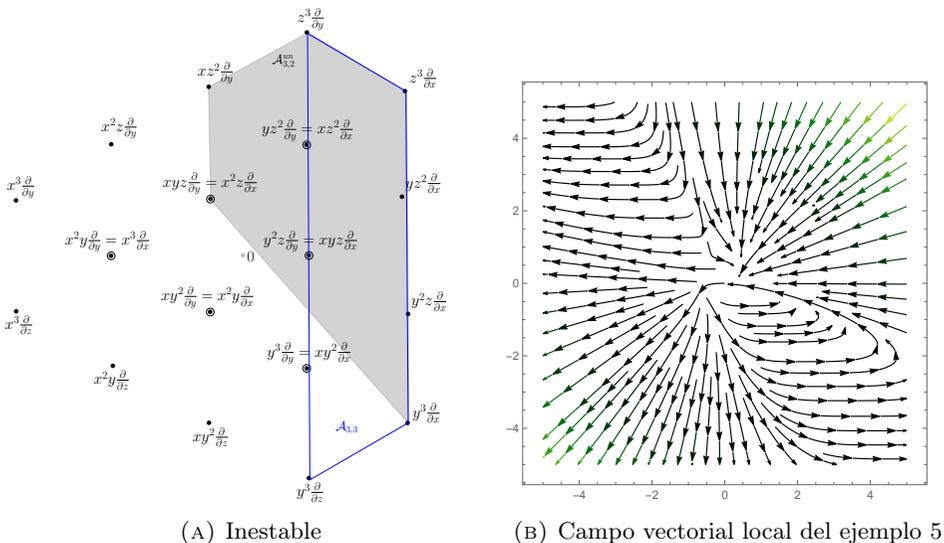


FIGURA 9. Estabilidad de $\mathcal{F}(3, 2)$ de multiplicidad 2 y 3.

6. CONCLUSIÓN

Los resultados presentados en este artículo son casos particulares de resultados dados en [9] principalmente con el objetivo de hacer más explícita la descripción de los campos vectoriales que definen a las foliaciones con cada tipo de estabilidad. Además, uno podría fácilmente demostrar el siguiente corolario.

COROLARIO 13. *Para cada $d \geq 2$, $\mathcal{A}_{d,d} \subset \mathcal{F}(d, 2)^{un}$.*

Algunas preguntas por responder en este camino: ¿Cómo se distribuyen la estabilidad de las foliaciones en $\mathcal{A}_{d,i}$ con $2 \leq i \leq d - 1$? ¿qué se puede decir de la estabilidad de las foliaciones en $\mathcal{F}(d, 2)$ con al menos dos puntos singulares? Más aún, ¿podemos entender el comportamiento de las órbitas?

Un problema importante en la GIT, es la existencia del cociente bueno. En caso de foliaciones sobre \mathbb{CP}^2 , en [6], la autora demostró que el cociente $\mathcal{F}(1, 2) // SL_3(\mathbb{C}) = \mathbb{CP}^1$, y recientemente en [8] se dieron avances para el caso $\mathcal{F}(2, 2) // SL_3(\mathbb{C})$. ¿Qué se puede decir de $\mathcal{F}(d, 2) // SL_3(\mathbb{C})$ para $d \geq 2$?

Todas estas preguntas no son fáciles de contestar y siguen siendo temas de investigación activas.

REFERENCIAS

- [1] Ilyashenko, Y., *Centennial history of Hilbert’s 16th problem*, Bulletin of the American Mathematical Society, 39, no. 3, 301–354, 2002.
- [2] Camacho, C., De Figueiredo, L. H., *The dynamics of the Jouanolou foliation on the complex projective 2-space*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Cambridge University Press. 21, no. 3, 757–766, 2001.
- [3] Gómez-Mont, X., Ortiz-Bobadilla, L., *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*, Aportaciones Matemáticas: Notas de Investigación, 3, 2004.
- [4] Gómez-Mont, X., Kempf, G., *Stability of meromorphic vector fields in projective spaces*, Commentarii Mathematici Helvetici, Springer, 64, no. 1, 462–473. 1989.
- [5] Campillo, A., Olivares, J., *Polarity with respect to a foliation and Cayley-Bacharach Theorems*, Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik, Walter de Gruyter, 534, 95–118, 2001.
- [6] R. Alcántara, C., *The Good Quotient of the Semi-Stable Foliations of \mathbb{CP}^2 of Degree 1*, Results in Mathematics, 53, no. 1, 1–7, 2009.
- [7] R. Alcántara, C., Ronzon-Lavie, R., *Classification of foliations on \mathbb{CP}^2 of degree 3 with degenerate singularities*, 14, 52–73, 2016.
- [8] R. Alcántara, C., Vásquez Aquino, J., *GIT quotient of holomorphic foliations on \mathbb{CP}^2 of degree 2 and quartic plane curves*. Forum Mathematicum. doi:10.1515/forum-2024-0043, 2024.

- [9] Castorena, Abel, Pantaleón-Mondragón, P. R., Vásquez Aquino, J., *On the GIT-Stability of Foliations of Degree 3 with a Unique Singular Point*. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series. Springer. 55, no. 6, 2024.
- [10] Fulton, W., *Algebraic curves*, An Introduction to Algebraic Geom. 54, 2008.
- [11] Jouanolou, J.P., *Equations de Pfaff algébriques*, Springer, 708, 2006.
- [12] Cerveau, D., Déserti, J., Belko, D. G., Meziani, R., *Géométrie classique de certains feuilletages de degré deux*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, Springer, 41, no. 2, 161–198, 2010.
- [13] R. Alcántara, C., *Foliations on $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ of degree d with a singular point with Milnor number $d^2 + d + 1$* , Revista Matemática Complutense, Springer, 31, no. 1, 187–199, 2018.
- [14] R. Alcántara, C., y Pantaleón-Mondragón, P. R., *Foliations on $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ with a unique singular point without invariant algebraic curves*, Geometriae Dedicata, Springer, 207, no. 1, 193–200, 2020.
- [15] R. Alcántara, C., *Special foliations on $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ with a unique singular point*, Research in the Mathematical Sciences, Springer, 9, no. 1, 2022.
- [16] Martín Del Campo, A., Pantaleón-Mondragón, P. R., *The Euler-Betti Algorithm to identify foliations in the Hilbert Scheme*, <https://arxiv.org/abs/2303.17698>, 2023.
- [17] Medina, N.S., *Estratificación del espacio de foliaciones holomorfas de grado 4 en el plano proyectivo complejo*, Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú), 2021.
- [18] Mumford, D., Kirwan, F., Fogarty, J., *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, Berlin. 1994.
- [19] Fulton, W., Harris, J., *Representation theory: a first course*, Springer Science & Business Media. 129, 2013.
- [20] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Springer Science & Business Media, 52, 2013.
- [21] Newstead, P. E., *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.
- [22] Mumford, D., *Stability of projective varieties* L'Enseignement mathématique, 1977.
- [23] Kirwan, F. C., *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton University Press, 31, 1984.
- [24] R. Alcántara, C., *Singular points and automorphisms of unstable foliations of $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$* , Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), 16, 39–51, 2010.
- [25] Vásquez Aquino, J., *Intersection Betti Numbers of the GIT Quotient of Quartic Plane Curves*, Transformation Groups, Springer, 1–25, 2024.
- [26] R. Alcántara, C., *Foliations on $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ of degree 2 with degenerate singularities*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, Springer, 44, no. 3, 421–454, 2013.

Petra Rubí Pantaleón Mondragón

SECIHTI-Universidad Nacional Autónoma de México ,
 Centro de Ciencias Matemáticas,
 Antigua Carretera a Pátzcuaro # 8701,
 Col. Ex. Hacienda San José de la Huerta
 Morelia, C.P. 58089, Michoacán, México.
 e-mail: pantaleon.rubi@gmail.com

Juan Vásquez Aquino

SECIHTI-Universidad Autónoma de Zacatecas,
 Unidad Académica de Matemáticas.
 Paseo la Bufa, C.P. 98060
 Zacatecas, Zacatecas, México.
 e-mail: juan.vasquez@cimat.mx