



DESTRUYENDO GRÁFICAS

JUAN CARLOS GARCÍA ALTAMIRANO

RESUMEN. En este artículo, se expone un juego que se puede implementar sobre cualquier gráfica. Es un juego por parejas en donde ambos jugadores tienen una copia de la misma gráfica en donde imaginamos que cada vértice es una *bomba explosiva* con cierto valor de peso asignado y el objetivo es destruir a la gráfica del oponente en el menor número de tiradas, bajo ciertas reglas que estimulan el razonamiento matemático y son acompañadas, en buena medida, por el azar, encarnado por un dado que dicta el *valor de ataque*.

Si bien la intención principal es proponer un juego didáctico y divertido, nacido en las entrañas de la teoría de gráficas, su implementación sugiere algunas preguntas teóricas interesantes, que incitan a realizar una investigación un poco más rigurosa.

INTRODUCCIÓN

La teoría de gráficas tiene innumerables aplicaciones en diversas áreas del conocimiento y problemas de la vida cotidiana [1] y, a pesar de ser una disciplina relativamente reciente, posee un amplio acervo teórico. Por ello, es pertinente hacer divulgación científica matemática en donde se aborden temas correspondientes a esta asignatura para alentar a las nuevas generaciones de científicos a comprender y realizar investigaciones al respecto o incluso al público en general para que tenga una mejor noción de los temas que ahí se abordan.

La manera más didáctica y divertida de introducir a alguien al mundo de la teoría de gráficas es por medio de juegos en donde no sea absolutamente necesario conocer los conceptos fundamentales y jugar con ellos sin darse cuenta: jugar con *vértices y aristas* a través de “bolitas y palitos”.

En este artículo se establecen las bases para implementar un juego sobre cualquier gráfica y se da un ejemplo concreto de cómo aplicarlo en la gráfica más famosa que existe: la gráfica de Petersen. El juego de “Destruyendo la gráfica de Petersen”, descrito en la sección 4, es un juego por parejas; aunque con unas pequeñas modificaciones, se puede jugar con más integrantes o de manera individual. Es una herramienta eficiente para ser presentada en talleres de divulgación matemática, ya que, implícitamente, en él se trabajan conceptos como “gráficas”, “digráficas”, “algoritmos”, “isomorfismos”, “combinaciones”, “probabilidad”, entre otros. Además de ejercitar la toma de decisiones basadas en el análisis matemático, aunque estas dependan del azar.

En pocas palabras, el juego de “Destruyendo gráficas” consiste en lo siguiente: ambos jugadores tienen una copia de la misma gráfica en donde imaginamos que cada vértice es una *bomba explosiva* con cierto valor de peso asignado y el objetivo es destruir a la gráfica del oponente, con valores de ataque determinados por un dado, en la menor cantidad de tiradas. Los detalles del juego se exponen en la sección 2.

Si quitamos al azar de la ecuación, una pregunta teórica natural es: dada una gráfica con una asignación de pesos a sus vértices establecida, ¿cuál es la menor cantidad de tiradas para destruir a esta gráfica si nosotros podemos decidir el valor de ataque en cada tirada? En su versión más sencilla, cuando los pesos son iguales a 1 para

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C20, 05C21, 05C22, 05C35, 05C57, 05C85.

Palabras clave. Gráficas, digráficas, algoritmos, automorfismos, combinaciones.

todos los vértices y el valor de ataque es $d = 2$, contestar esta pregunta es equivalente a encontrar un conjunto dominante independiente de orden mínimo [2, 3]; mientras que si el valor de ataque es una constante $d \geq 2$, el problema consiste en obtener un d -conjunto dominante en distancia formado por vértices independientes de orden mínimo [4]; los cuales son problemas del tipo NP-completo [5], es decir, no se conoce ningún algoritmo que encuentre una solución en *tiempo polinomial*. El problema de dominación es uno de los temas más estudiados en teoría de gráficas por su interés teórico, así como por sus diversas aplicaciones en temas como redes de comunicación, logística y transporte, optimización de recursos, redes neuronales, entre muchos otros [6].

Este trabajo se divide en 5 secciones. Si el lector ya conoce los conceptos básicos de teoría de gráficas, bien puede omitir la sección 1. Por el contrario, si el lector quiere profundizar en algún concepto de los que están expuestos en dicha sección, puede consultar el siguiente libro [7], que es muy accesible. A alguien que solamente le interese saber cómo se juega y ver al juego en acción, se le invita a ver la subsección 2.1 y la sección 4 que son en donde se exponen las reglas del juego y se ve un ejemplo concreto, respectivamente. Aunque es recomendable revisar toda la sección 2, ya que ahí se encuentran los resultados principales de este artículo y el análisis de las posibles *estrategias ganadoras* que ahí se realiza, es lo que permite comprender la complejidad de este juego. Es importante mencionar que el ejemplo de la sección 4 fue desarrollado en el sexto Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas (TOMMAD24), en colaboración con alumnos de la UAM-Cuajimalpa y UAM-Iztapalapa. En la sección 3, tomando en cuenta el análisis realizado en la sección 2, se sugieren las familias de gráficas más adecuadas para implementar el juego y, finalmente, en las conclusiones se plantean algunas posibles líneas de investigación.

1. PRELIMINARES

Una **gráfica** G es un par ordenado $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto de elementos llamados **vértices** y $E(G)$ un conjunto de elementos llamados **aristas** que consiste de parejas *no ordenadas* de vértices. Una **gráfica simple** es una gráfica en la que pedimos que los vértices de una arista sean diferentes y que $E(G)$ no tenga aristas repetidas. La cantidad de vértices de una gráfica G es el **orden** de G y se denota por n . La cantidad de aristas de G se llama **tamaño** de G y se denota por m . Una gráfica es **nula** si su conjunto de vértices es vacío (por ende, también su conjunto de aristas). Una gráfica es **vacía** si $m = 0$ y es **trivial** si $n = 1$. Una gráfica simple es **finita** si su conjunto de vértices es finito. En este artículo, consideraremos únicamente gráficas simples finitas, así que para nosotros el término “gráfica” siempre significará gráfica simple y finita.

Cada arista $\{u, v\}$ de $E(G)$ es regularmente denotada como uv o vu . Si $e = uv$ es una arista, decimos que e une a u y v ; en el mismo contexto, los vértices u y v son llamados **extremos** de la arista e . A los extremos de una arista se dice que son **incidentes** con la arista y viceversa. Dos vértices incidentes con la misma arista decimos que son **adyacentes** y dos vértices que son adyacentes son **vecinos**.

El **grado** de un vértice v en una gráfica G es el número de aristas incidentes con v , es decir, en gráficas simples, el grado de v es el número de vecinos de v en G . Un vértice de grado cero es llamado **vértice aislado**. El máximo entre todos los grados de los vértices de G es llamado **grado máximo** de G . Análogamente, se define el **grado mínimo** de G . Si todos los vértices de una gráfica G tienen el mismo grado, entonces G es una **gráfica regular**. Si cada vértice de G tiene grado k , entonces G es **k -regular**.

Una gráfica $H(V(H), E(H))$ es llamada **subgráfica** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. En tal caso, decimos que G **contiene** a H o H está **contenida** en G . Cuando

$H \subseteq G$ pero $H \neq G$, llamamos a H **subgráfica propia** de G . Si v es un vértice de una gráfica $G = (V(G), E(G))$, podemos obtener una subgráfica de G con $|V(G)| - 1$ vértices eliminando a v de G y a todas las aristas que inciden en v ; el resultado lo denotamos por $G - v$. Una subgráfica obtenida a partir de la eliminación de vértices es llamada **subgráfica inducida**. Si X es el conjunto de vértices eliminados, la subgráfica resultante es denotada por $G - X$.

Dos gráficas $G = (V(G), E(G))$ y $H = (V(H), E(H))$ son **isomorfas**, escrito $G \cong H$, si existe una biyección $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$, tal que, para $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$ si y sólo si $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$; tal función es llamada **isomorfismo** entre G y H . Cuando $H = G$, decimos que φ es un **automorfismo** de G .

Una subgráfica P de una gráfica G es una **trayectoria** en G si los vértices de P pueden ser etiquetados en una sucesión lineal (sin repetir vértices) de tal manera que cada par de vértices consecutivos en la sucesión son adyacentes, y son no adyacentes en otro caso. Para dos vértices distintos u y v en una gráfica G , una $u - v$ trayectoria es una trayectoria con vértice inicial u y vértice terminal v . De manera similar, una subgráfica C de G es un **ciclo** en G , si tiene tres o más vértices, los cuales pueden ser etiquetados en una sucesión cíclica (sin repetir vértices) de tal forma que cada par de vértices consecutivos en la sucesión son adyacentes, y son no adyacentes en otro caso. El número de aristas contenidas en una trayectoria o en un ciclo es su **longitud**. Un ciclo de longitud $k \geq 3$ es llamado **k -ciclo**. El **cuello** de una gráfica G es la longitud más pequeña entre todos sus ciclos.

Decimos que un conjunto de vértices de una gráfica G es **independiente** si ninguna pareja de vértices en el conjunto es adyacente. Dos vértices u y v están **conectados** si G contiene una $u - v$ trayectoria. Una gráfica G es **conexa** si cualquier par de vértices está conectado. Una gráfica que no es conexa es una **gráfica inconexa**. Una subgráfica conexa H de una gráfica G es una **componente conexa**, o simplemente una **componente** de G , si esta no es una subgráfica propia de una subgráfica conexa de G .

Sean u y v vértices en una gráfica conexa G . La **distancia** entre u y v es la mínima de las longitudes entre todas las $u - v$ trayectorias en G . Un subconjunto de vértices S de una gráfica G es **dominante** si todo vértice de G está a distancia a lo más uno de algún vértice del conjunto S . Un conjunto dominante es de **cardinalidad mínima** si tiene la menor cardinalidad de entre todos los conjuntos dominantes de G (más información en [2]). En general, un subconjunto de vértices S de una gráfica G es **d -dominante en distancia** si todo vértice de G está a distancia a lo más d de algún vértice del conjunto S (para más detalles, consultar [3, 4, 5, 8, 9]).

Una **digráfica** D es un conjunto finito de vértices $V(D)$ y un conjunto de pares de vértices **ordenados** $A(D)$, llamados **arcos**. Si $(u, v) \in A(D)$, lo denotamos como uv . En este caso, dado que son parejas ordenadas, $uv \neq vu$. Decimos que $uv \in A(D)$ es un **arco simétrico** si también $vu \in A(D)$. Una digráfica es **acíclica** si no tiene ciclos dirigidos.

Ahora, ya contamos con todas las herramientas para describir y analizar nuestro juego.

2. JUEGO: DESTRUYENDO GRÁFICAS

Pasemos directamente a la descripción de las reglas del juego; luego vemos un ejemplo y después analizamos cada uno de sus detalles.

2.1. Reglas del juego. Consideremos una gráfica G y sea w una función de asignación de peso a los vértices de G , con $w : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$.

Digamos, en virtud del juego, que cada vértice $v \in V(G)$ es una **bomba explosiva**, y que $w(v)$ determina su **resistencia** a explotar.

Es un juego por parejas en donde ambos jugadores tienen una copia de la misma gráfica con la misma asignación de peso a los vértices. El objetivo es destruir la gráfica del oponente en la menor cantidad de **tiradas** bajo las siguientes condiciones:

1. Un jugador **tira**: lanza un dado y al valor d que le salga, le llamaremos **valor de ataque** en ese turno. Escoge algún vértice v_0 de la gráfica de su oponente para ser **detonado** o **atacado**. La **detonación** o **ataque** se realiza por medio de una sucesión de **pasos** descritos en el siguiente

Algoritmo:

Paso 1: Sea $t : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$, con $t(v) = 0$ para todo $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$ y $t(v_0) = d$. Definimos $r_0 = w(v_0) - t(v_0)$:

- Si $r_0 > 0$, entonces actualizamos el peso de v_0 por r_0 y es el turno del otro jugador.
- Si $r_0 = 0$, entonces decimos que v_0 **explota** y es el turno del otro jugador.
- Si $r_0 < 0$, entonces v_0 **explota**. Si u es vecino de v_0 , entonces a $t(u)$ le sumamos $-r_0$. En este caso, decimos que $-r_0$ es el **potencial transferido** de v_0 a u .

Si $r_0 < 0$, existe un

Paso 2: Para cada vecino u de v_0 , sea $r_u = w(u) - t(u)$:

- Si $r_u > 0$, entonces actualizamos el peso de u por r_u y nuevamente $t(u) = 0$.
- Si $r_u = 0$, entonces u **explota**.
- Si $r_u < 0$, entonces u **explota**. Si v es vecino de u , con $v \neq v_0$ y v no explota en este paso, entonces a $t(v)$ le sumamos $-r_u$. Decimos que $-r_u$ es el potencial transferido de u a v .

En general: Si en el **paso n**, con $n \geq 2$, $r_u < 0$ para algún vértice u explotado en este paso, donde $r_u = w(u) - t(u)$; existe un

Paso n+1: Para cada uno de los vértices v a los que les transfirieron potencial en el paso anterior, sea $r_v = w(v) - t(v)$:

- Si $r_v > 0$, entonces actualizamos el peso de v por r_v y nuevamente $t(v) = 0$.
- Si $r_v = 0$, entonces v **explota**.
- Si $r_v < 0$, entonces v **explota**. Si z es vecino de v y z no explota en este paso ni ha explotado en ningún paso anterior, entonces a $t(z)$ le sumamos $-r_v$ y decimos que $-r_v$ es el potencial transferido de v a z .

2. En el siguiente turno de este mismo jugador, atacará a la gráfica inducida que resulta de eliminar a los vértices explotados y con la asignación de pesos actualizados de los vértices que aún no explotan.
3. El juego concluye cuando ambos jugadores realizan la misma cantidad de tiradas y al menos una gráfica ha sido **destruida**, es decir, todos los vértices de la gráfica han explotado. Gana el jugador que haya destruido la gráfica de su contrincante y aún conserve algún vértice sin explotar; en su defecto, se declara empate.

Veamos un ejemplo concreto de cómo se realiza una tirada. Consideremos a la gráfica G correspondiente a la figura 1(a) con vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ y pesos 6, 1, 3, 4, 7, 3, 2, respectivamente. Supongamos que el valor de ataque es $d = 6$:

- Si en el paso 1 atacamos al vértice v_5 ; el peso de v_5 se actualiza a 1 y es el turno del otro jugador.
- Si en el paso 1 atacamos al vértice v_1 ; v_1 explota y es el turno del otro jugador.
- Si en el paso 1 atacamos al vértice v_2 ; v_2 explota y le transfiere a sus vecinos (v_1, v_3, v_5 y v_7) un potencial de 5; ver figura 1(b). Hay un segundo paso.
- En el segundo paso: el peso de v_1 se actualiza a 1; el peso de v_5 se actualiza a 2; v_3 y v_7 explotan; v_3 le transfiere un potencial de 2 a v_4 y v_6 ; v_7 le transfiere un potencial de 3 a v_6 ; v_3 y v_7 no se transfieren potencial, a pesar de ser vecinos, ya que ambos explotan en el mismo paso; ver figura 1(c). Hay un tercer paso.
- En el tercer paso: v_6 explota; v_6 le transfiere un potencial de 2 a v_1 y v_5 ; v_6 no le transfiere potencial a v_3 y v_7 porque ya explotaron en un paso anterior; ver figura 1(d). Hay un cuarto paso.
- En el cuarto paso: v_1 y v_5 explotan; v_1 le transfiere un potencial de 1 a v_4 ; v_5 ya no transfiere ningún potencial a v_4 ; ver figura 1(e). Hay un quinto paso.
- En el quinto paso: el peso de v_4 se actualiza a 1 y es el turno del otro jugador, ver figura 1(f).
- La gráfica resultante es únicamente el vértice v_4 con peso 1.

2.2. Análisis del juego. Olvidémonos por un momento de que es un juego de parejas. Supongamos que es un juego individual para analizar sus principales características y comprender su complejidad.

Sea G una gráfica con función w de asignación de peso a los vértices de G . Sea d un valor de ataque y sea $v \in V(G)$. Definimos a la **digráfica de transferencia** con valor de ataque d desde v , $D_G(d, v)$, como la digráfica que tiene el mismo conjunto de vértices de G y ab es un arco de $D_G(d, v)$ si a le transfirió algún potencial a b al momento de atacar a v con el valor de ataque d ; etiquetamos a cada arco de $D_G(d, v)$ con el respectivo potencial transferido. En este contexto, definimos a la **gráfica resultante** como la gráfica que se obtiene desde G al remover a los vértices explotados, con la función de asignación de peso actualizada. Por ejemplo, sea G la gráfica de la figura 2(a) con vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ y pesos 1, 1, 2, 3, 2, 1, respectivamente. En la figura 2(b) podemos apreciar a $D_G(4, v_1)$ y en la figura 2(c) la gráfica resultante (con los pesos actualizados).

Notemos que la digráfica de transferencia está bien definida, ya que, en cada paso, los vértices que explotan no se transfieren potencial entre ellos y únicamente le transfieren potencial a vértices que aún no han explotado. Es decir, es una digráfica sin ciclos dirigidos, en particular, sin arcos simétricos. Si $D_G(d, v)$ es una digráfica de transferencia, definimos su **potencia** como la suma de las etiquetas de todos sus arcos y la denotamos por $\mathcal{P}[D_G(d, v)]$. Por ejemplo, la digráfica de transferencia de la figura 2(b) tiene potencia igual a 9. Más aún, si para destruir a una gráfica G fue suficiente con detonar, sucesivamente, a los vértices v_1, v_2, \dots, v_k con los valores de ataque d_1, d_2, \dots, d_k , respectivamente; denotamos a esta **sucesión de detonaciones** como $[v_1^{d_1}, v_2^{d_2}, \dots, v_k^{d_k}]$ y decimos que su **carga explosiva** es la suma de todos sus valores de ataque; cuando el valor de ataque es constante, a la sucesión de detonaciones la denotamos por $[v_1, v_2, \dots, v_k]$. Definimos a la **digráfica de transferencia total**, correspondiente a esta sucesión, como la digráfica $D_G[v_1^{d_1}, v_2^{d_2}, \dots, v_k^{d_k}]$ que se obtiene de unir a todas las digráficas $D_G(d_i, v_i)$ con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$; dicha digráfica es acíclica.

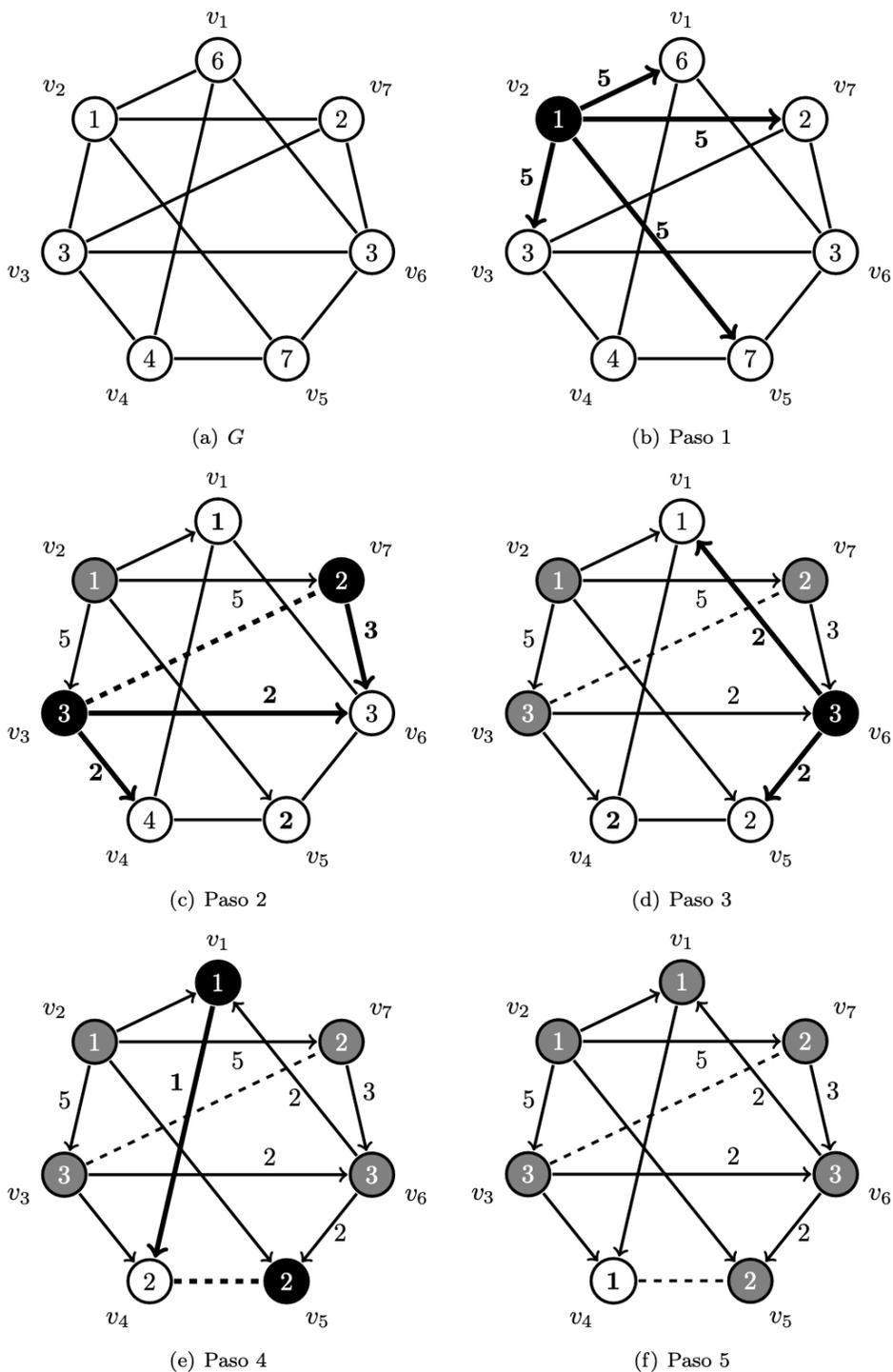


FIGURA 1. En color negro, los vértices que explotan en el respectivo paso, y en color gris, los vértices explotados en pasos anteriores. Las flechas con etiquetas son auxiliares para indicar los potenciales transferidos

Llamamos **potencia destructiva** de $D_G[v_1^{d_1}, v_2^{d_2}, \dots, v_k^{d_k}]$ como la suma de potencias de $D_G(d_i, v_i)$ con $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, es decir, la suma de las etiquetas de todos sus arcos.

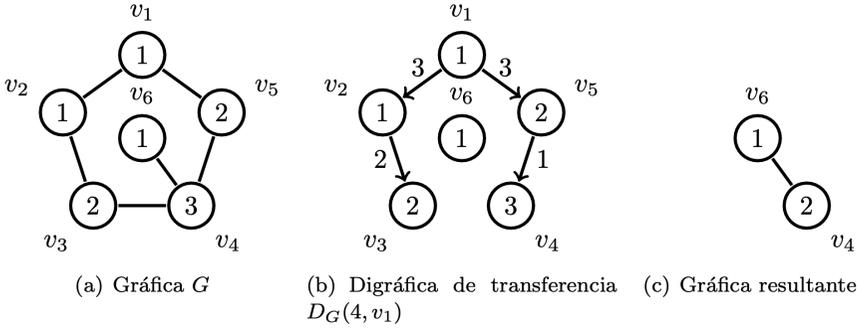


FIGURA 2

Cabe mencionar que si el valor de ataque fuera una constante d y todos los vértices tuvieran peso igual a 1, este problema sería equivalente a obtener un d -conjunto dominante en distancia formado por vértices independientes mínimo [2, 3]. Como no es el caso, el éxito en este juego depende del azar y de la habilidad del jugador para desarrollar una estrategia ganadora.

2.3. “Estrategias”. Intuitivamente, buscamos al mejor vértice para ser atacado en cada turno, dependiendo de alguna particularidad de este. Veamos algunas de estas posibles características y mostremos que, a veces, la intuición puede fallar.

2.3.1. Grado máximo. Se podría considerar que, si tenemos dos vértices con el mismo peso, convendría atacar al de mayor grado. Por ejemplo, en la gráfica de la figura 2(a), si en la primera y segunda tirada tenemos los valores de ataque $d_1 = 5$ y $d_2 = 1$, respectivamente. Si atacamos a v_1 (de grado 2) y después a v_6 , destruimos a la gráfica. Por otro lado, si comenzamos atacando a v_6 (de grado 1), necesitamos al menos 3 tiradas para destruir a G . Sin embargo, considerando la gráfica H de la figura 3, si en todas las tiradas los valores son iguales a 4, si comenzamos atacando a v_2 (de grado 4), destruimos la gráfica en 5 tiradas ($[v_2, v_1, v_4, v_6, v_3]$). Mientras que, si comenzamos por v_1 (de grado 1), la destruimos en 3 tiradas ($[v_1, v_2, v_3]$). Así que el grado de los vértices no es determinante para destruir una gráfica en el menor número de tiradas, aun cuando estos tienen el mismo peso asignado.

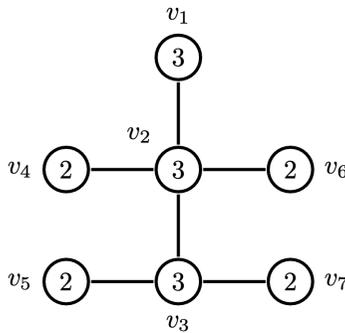


FIGURA 3. Gráfica H

2.3.2. Potencia máxima. De manera parecida al caso anterior, podríamos suponer que, entre dos vértices, conviene atacar al vértice cuya digráfica de transferencia tenga mayor potencia. Como sucede en la gráfica G de la figura 2(a), donde $\mathcal{P}[D_G(4, v_1)] = 9$ y $\mathcal{P}[D_G(4, v_6)] = 3$. De manera contraria, en la gráfica H de la figura 3, $\mathcal{P}[D_H(4, v_2)] = 4$ mientras que $\mathcal{P}[D_H(4, v_1)] = 1$. Por lo que esta tampoco es una peculiaridad

determinante. De hecho, podríamos profundizar un poco más y darnos cuenta de que tampoco depende de la potencia destructiva de las digráficas correspondientes a dos sucesiones de vértices que destruyen la gráfica (ver sección 4).

2.3.3. Valor de ataque máximo. Algo que sin duda es importante para explotar un vértice es el valor de ataque con el que lo detonemos. Pensaríamos que “a mayor carga explosiva, mayor destrucción”. En la gráfica H de la figura 3, si el valor de ataque es constante, igual a 6, destruiríamos la gráfica en al menos 3 tiradas; por ejemplo, $[v_1, v_2, v_3, v_6]$, $[v_2, v_5, v_7]$, $[v_3, v_1, v_4, v_6]$, $[v_4, v_1, v_3, v_6]$ o $[v_5, v_2, v_7]$. Por otro lado, si el valor de ataque es constante e igual a 5, lo podemos hacer en 2 tiradas, atacando a v_3 seguido de v_2 . Esto sí es algo verdaderamente sorprendente.

2.3.4. El orden de las detonaciones. A la gráfica H , de la figura 3, la podemos destruir si el valor de ataque sobre v_3 es 5 y después el valor de ataque sobre v_2 es 4. No obstante, si primero atacamos a v_2 con un valor de ataque igual a 4 (o incluso 5), ya no destruimos la gráfica aplicándole un valor de ataque de 5 a v_3 . Esto es: “A pesar de que ya sepamos qué vértices hay que detonar, importa el orden en el que lo hagamos”.

2.3.5. Toma de decisiones “a ciegas”. Supongamos que en la gráfica H de la figura 3 el peso de v_3 es 4. Si en la primera tirada el valor de ataque sale 1 y, por alguna razón, sabemos que en la tercera tirada caerá 4 o más. Entonces, ¿a quién conviene atacar en la primera tirada? Si atacamos a v_3 y en la segunda tirada sale 6, como vimos en el punto 2.3.3, necesitaríamos al menos 3 tiradas más para destruir la gráfica, por lo que convendría atacar a cualquier vértice distinto de v_3 y v_2 . Ahora bien, si en la segunda tirada sale 5, para terminar el juego en la tercera tirada, en la primera sí se debió atacar a v_3 . Por lo tanto, dado que no sabemos qué saldrá en las tiradas posteriores, no tenemos certeza de cuál es la mejor tirada en cada turno, aunque bien podemos recurrir a la probabilidad.

El problema principal, en todos los casos anteriores, es que se generan nuevas componentes, lo que, en principio, aumenta la cantidad de tiradas.

2.3.6. Menor número de componentes. Si el valor de ataque es constante, igual a 5. En la gráfica F de la figura 4, los únicos vértices que no aumentan la cantidad de componentes son v_1 y v_{11} que, por simetría, son equivalentes. Si detonamos a v_1 , la gráfica resultante se destruye con al menos 3 detonaciones extra ($[v_9, v_6, v_{11}]$ por ejemplo). En cambio, si detonamos a v_6 , obtenemos 2 componentes que se destruyen con una tirada cada una. Por lo que mantener el mínimo número de componentes tampoco es una estrategia ganadora en este juego.

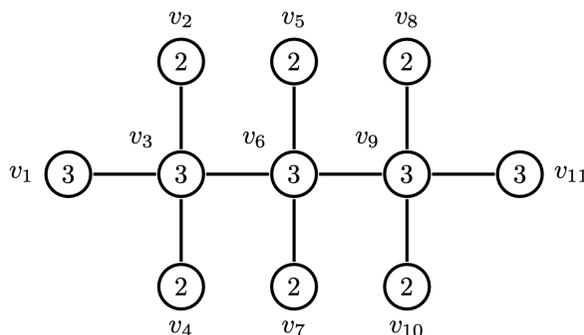


FIGURA 4. Gráfica F

Luego de este análisis, ya podemos dimensionar un poco más la complejidad de este juego. También podemos notar que el azar (del dado) juega un papel muy importante.

3. GRÁFICAS PARA JUGAR

En principio, este juego se puede implementar en cualquier gráfica, pero para que el juego sea interesante, debemos hacer algunas consideraciones:

Gráfica regular: Pedimos regularidad, para que, desde el principio, no haya preferencia por algún vértice debido a su grado.

Función balanceada de asignación de peso: De manera similar a la petición anterior, sería conveniente que la cantidad de valores distintos que toma la función de asignación de peso a los vértices dividiera (en la medida de lo posible) a la cantidad de vértices.

Cuello adecuado: Tomando en cuenta la obtención de las digráficas de transferencia, para que dos o más vértices no le transfieran *mucho* potencial a un solo vértice en el mismo paso y el juego termine muy rápido, requerimos que la gráfica tenga un cuello de longitud impar lo suficientemente holgado.

Dado acotado: Relacionado con el punto anterior, los valores del dado no deberían ser demasiado grandes. Como recomendación, si se complica mucho conseguir un dado de cierta cantidad de valores posibles, también se puede usar una pirinola con la cantidad de caras deseadas.

Con estas condiciones, podríamos pensar en las gráficas asociadas a los polígonos platónicos, gráficas circulantes o en *jaulas*.

Una (k, g) -*jaula* es una gráfica k -regular de cuello g de orden mínimo. Si se desea introducirse un poco más en el tema de jaulas, es recomendable ver [10]. Si se desea conocer algunos de los resultados más recientes, ver [11].

Veamos cómo implementar nuestro juego en la única $(3, 5)$ -jaula [11], conocida como la **gráfica de Petersen**; ver figura 5.

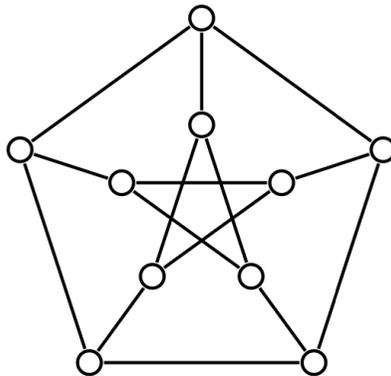


FIGURA 5. Gráfica de Petersen

4. DESTRUYENDO LA GRÁFICA DE PETERSEN

Tomando en cuenta las consideraciones de la sección anterior, dado que la gráfica de Petersen es de orden $n = 10$ y cuello $g = 5$, la función que le asigna peso a los vértices debe tomar valores entre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y cada valor se repite una vez. Por ejemplo, un *tablero* de juego podría ser la gráfica de Petersen con la función de asignación de pesos como se muestra en la figura 6, que denotaremos por P_0 .

Para que el juego sea más dinámico, usamos un dado común de 6 caras, que toma valores entre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Aprovechando que tenemos este ejemplo específico, tenemos la oportunidad de hacer algunas observaciones interesantes:

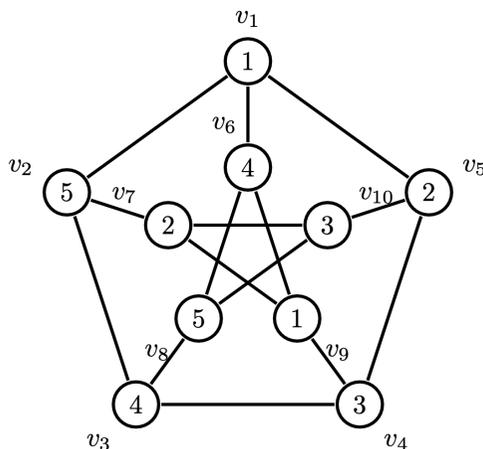


FIGURA 6. Gráfica de Petersen con pesos asignados P_0

Supongamos que en todas las tiradas obtenemos 6.

- Si comenzamos detonando al vértice v_1 , de peso 1, destruimos a la gráfica en 4 tiradas, $[v_1, v_3, v_7, v_8]$, ver figura 7. Por otro lado, si comenzamos detonando al vértice v_9 , de peso 1, destruimos a la gráfica en 2 tiradas, $[v_9, v_3]$, ver figura 8.
- Si nuestra sucesión de detonaciones es $[v_8, v_9, v_2]$, destruimos a la gráfica en 3 tiradas y obtenemos una potencia destructiva de 36 (ver figura 9). Mientras que si la sucesión de detonaciones es $[v_9, v_3]$, destruimos a la gráfica en 2 tiradas a pesar de que obtengamos una potencia destructiva de 35 (ver figura 8). En otras palabras, confirmando lo que se mencionó en el punto 2.3.2, la potencia destructiva de una digráfica no determina la menor cantidad de detonaciones para destruir una gráfica.

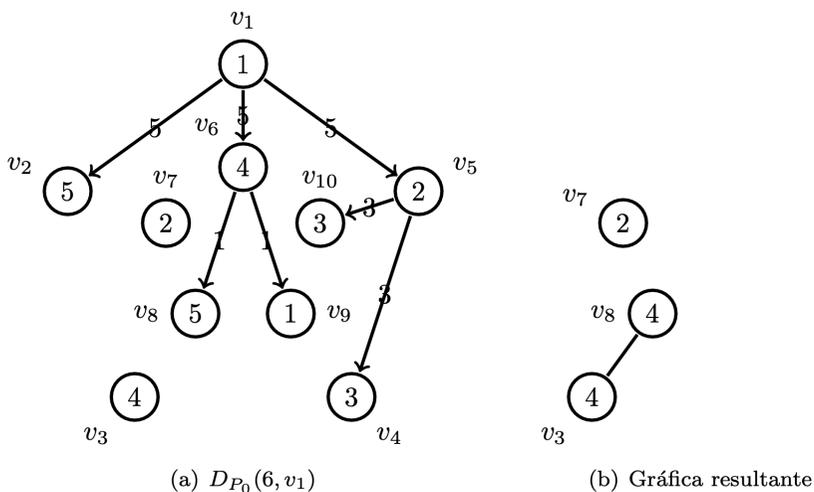


FIGURA 7

Si dos personas juegan a destruir la gráfica de Petersen bajo estas condiciones, entre ambas podrían colocar los pesos sobre los vértices de manera aleatoria, pero ¿de cuántas maneras distintas se puede hacer esto?

4.1. Cantidad de tableros distintos. Digamos que cada asignación de peso a los vértices de la gráfica de Petersen, que toma valores entre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y cada valor

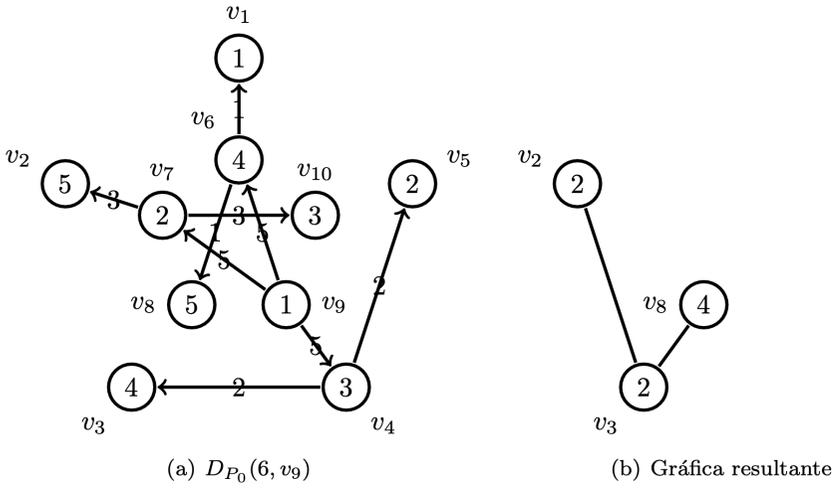


FIGURA 8

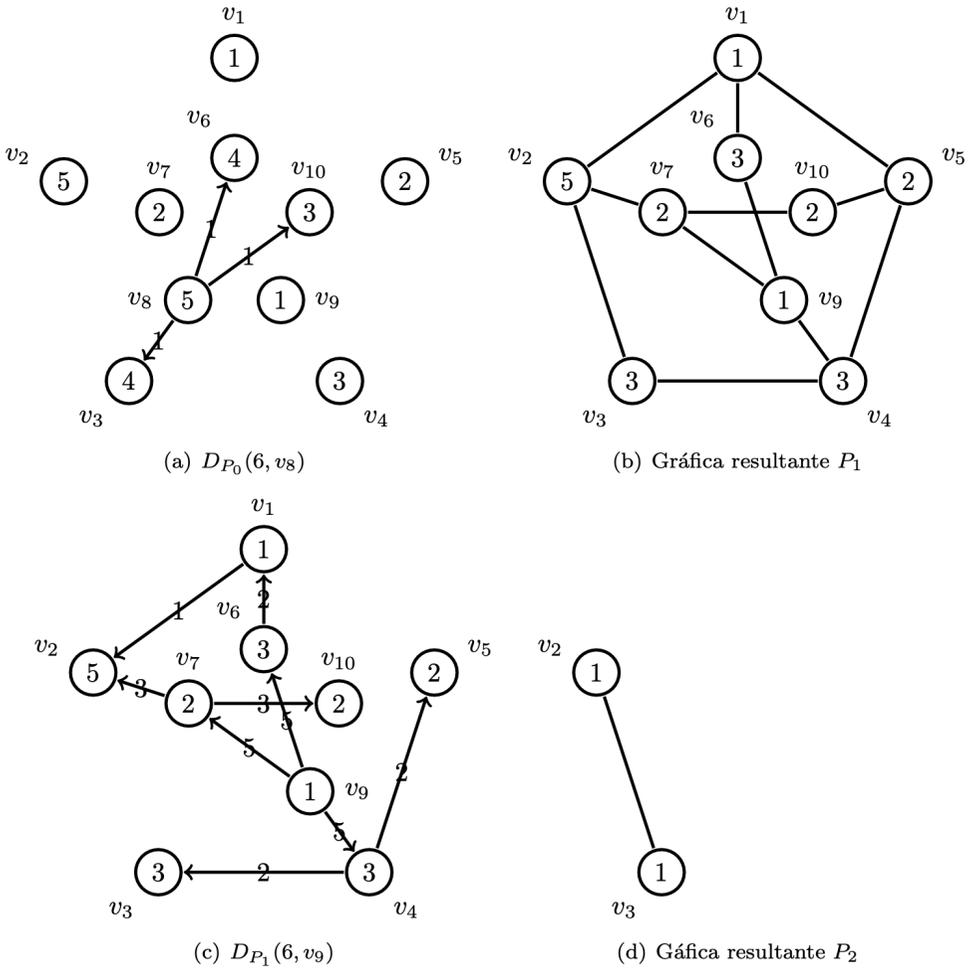


FIGURA 9

se repite una vez; es un **tablero de Petersen** en donde podemos jugar. Dado que el grupo de automorfismos de la gráfica de Petersen es isomorfo al *grupo simétrico*

$Sym(5)$ [11], y este tiene $5! = 120$ elementos, entonces la gráfica de Petersen tiene 120 automorfismos, es decir, 120 maneras de permutar sus vértices de tal manera que veamos el mismo dibujo que la representa. Por lo que la estructura de cada tablero representa a 120 de entre todos los posibles tableros. Ahora bien, para contar a todos los posibles tableros, debemos considerar todas las combinaciones de que a 2 de los 10 vértices se les asigne el peso 1; luego, que 2 de los 8 vértices restantes tengan peso 2; 2 de los 6 vértices restantes tengan peso 3; 2 de los 4 vértices restantes tengan peso 4; y por último, los 2 vértices que tengan peso 5. Es decir,

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 113,400.$$

Por lo tanto, existen $\frac{113,400}{120} = 945$ tableros de Petersen distintos *bajo isomorfismo*. Muchos como para memorizarse una estrategia ganadora para cada uno, sin contar con la capacidad de reconocer qué estructura *representante* es si esta está bajo un automorfismo.

5. CONCLUSIONES

Sería deseable ampliar la lista de ejemplos concretos de gráficas en las cuales implementar nuestro juego, especificando la imagen de función de asignación de peso a los vértices, la cantidad de vértices en cada conjunto que tendrán el mismo valor y los posibles valores del dado. Sin dejar de lado que el juego tiene que ser ágil y divertido.

En cualquier tablero de Petersen (3-regular, sin 3 y 4-ciclos), dado que tenemos dos 5 y dos 4, ninguno de ellos puede destruirse en una tirada. Vimos que el tablero de la figura 6 sí es posible destruirlo en 2 tiradas. Una pregunta teórica interesante es, de entre todos los tableros de Petersen que se pueden destruir en dos tiradas, ¿cuál es la menor carga explosiva necesaria?

En general, para una gráfica G con una asignación de peso a sus vértices *fija*:

- 1: ¿Cuál es la menor cantidad de tiradas que necesitamos para destruir a G ?
- 2: De entre las sucesiones de detonaciones que destruyen a G en la menor cantidad de tiradas, ¿cuál es la carga explosiva mínima?

Ahora bien, para una gráfica G , ¿cuáles son los valores menores de las preguntas 1 y 2 de entre todas las funciones balanceadas de asignación de peso a sus vértices que toman valores de un conjunto W y un rango de valores de ataque dentro de un conjunto D ? Una línea de investigación sería responder la interrogante anterior para gráficas concretas con conjuntos W y D determinados.

Decimos que una sucesión de detonaciones que destruye a G es **mínima** si no se puede destruir a G con la misma sucesión de vértices detonados, pero con una carga explosiva menor. Sería interesante saber si, entre dos sucesiones de detonaciones mínimas (no necesariamente de la misma longitud) que destruyen a G , ¿la carga explosiva menor implica una mayor potencia destructiva de la respectiva digráfica de transferencia total? Nótese que el ejemplo de la figura 9 visto en la sección 4 no es contraejemplo, ya que la gráfica de la figura 9(d) se puede destruir con un valor de ataque igual a 2. Más aún, entre dos sucesiones de detonaciones que destruyen a G , ¿la carga explosiva mayor implica una menor o igual cantidad de detonaciones para destruir a la gráfica?

AGRADECIMIENTOS. El autor expresa su gratitud a la Universidad Autónoma Metropolitana por los recursos aportados para la realización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas 2024; en particular a la UAM-Cuajimalpa y a la UAM-Iztapalapa. En especial, agradezco a los organizadores que me recibieron como profesor invitado y a los alumnos que participaron en el taller.

REFERENCIAS

- [1] Majeed, Abdul, and Ibtisam Rauf. *Graph theory: A comprehensive survey about graph theory applications in computer science and social networks*. Inventions, 5.1 (2020): 10.
- [2] Allan, R. B., & Laskar, R. *On domination and independent domination numbers of a graph*. Discrete mathematics, 23(2) (1978), 73-76.
- [3] Gimbel, J., & Henning, M. A. *Bounds on an independent distance domination parameter*. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 20 (1996), 193-205.
- [4] Meir, A., & Moon, J. *Relations between packing and covering numbers of a tree*. Pacific Journal of Mathematics, 61(1) (1975), 225-233.
- [5] Fricke, G. H., Hedetniemi, S. T., & Henning, M. A. *Distance independent domination in graphs*. Ars Combinatoria, 41(3995) (1995), 33-44.
- [6] Dreyer Jr, P. A. *Applications and variations of domination in graphs*. Rutgers The State University of New Jersey, School of Graduate Studies, 2000.
- [7] Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. *Graph theory*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.
- [8] Beineke, L. W., & Henning, M. A. *Some extremal results on independent distance domination in graphs*. Ars Combinatoria, 37 (1994), 223-233.
- [9] Henning, M. A. *Distance domination in graphs*. Topics in Domination in Graphs, (2020), 205-250.
- [10] Wong, P. K. *Cages—a survey*. Journal of Graph Theory, 6(1) (1982), 1-22.
- [11] Exoo, G., & Jajcay, R. *Dynamic cage survey*. The electronic journal of combinatorics, DS16-Jul (2012).

Juan Carlos García Altamirano

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,

División de Ciencias Naturales e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.

Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa,

Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348, Ciudad de México, México.

e-mail: carlosg@cua.uam.mx