



## GRÁFICAS DE RE-COLORACIÓN: ¿PUEDES TRANSFORMAR UNA COLORACIÓN EN OTRA SIN ROMPER LAS REGLAS?

ROMINA BARCENA MORALES, EMILIO YEDIDIA LICEA MESINO, DAVID DAN LÓPEZ CONTRERAS, MIKA OLSEN, LIZZETH ARIADNA SÁNCHEZ SOLIS

RESUMEN. Los problemas de configuraciones, como el del cubo Rubik, inspiran preguntas matemáticas sobre cómo transformar una solución en otra paso a paso. Un ejemplo de ello es la gráfica de re-coloración, en donde cada vértice representa una coloración propia de una gráfica, y hay una arista si las coloraciones correspondientes difieren en un solo vértice. Analizamos propiedades como la conexidad, el grado mínimo y el grado máximo y el diámetro de estas gráficas para tres familias: completas, trayectorias y ciclos.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de configuración son clásicos en matemáticas. Un ejemplo muy conocido es el cubo Rubik, y aunque no todos sepamos resolverlo, comprendemos su objetivo: llegar a la configuración solución desde cualquier otra mediante movimientos válidos. Una de las primeras preguntas que se resolvieron sobre el cubo fue precisamente esta: ¿es posible alcanzar la solución desde cualquier configuración haciendo solo un cambio a la vez? En teoría de gráficas, surgen problemas análogos [3]. Uno de ellos es el de la gráfica de re-coloración, que aparece al estudiar las distintas maneras de colorear los vértices de una gráfica utilizando a lo más  $k$  colores. En este contexto, se construye una nueva gráfica cuya estructura refleja el espacio de todas las coloraciones propias: cada vértice representa una coloración válida, y se conectan dos vértices si las coloraciones correspondientes difieren únicamente en el color asignado a un solo vértice. La pregunta natural es entonces: ¿es posible transformar una coloración en otra mediante una secuencia de cambios válidos que modifiquen el color de un solo vértice a la vez? Este tipo de preguntas explora si cambios locales permiten alcanzar una transformación global, una idea fundamental en diversas áreas de las matemáticas.

El problema de colorear vértices es uno de los más estudiados en teoría de gráficas. Su formulación es sencilla, pero su resolución suele requerir creatividad, técnicas computacionales y análisis combinatorio. Este problema ha atraído tanto a matemáticos teóricos como a investigadores en ciencias de la computación, debido a su riqueza estructural y a sus numerosas aplicaciones en campos como redes, optimización, programación de tareas e informática. Más allá de encontrar una coloración óptima, en años recientes ha surgido un enfoque complementario: comprender la estructura del espacio de todas las coloraciones propias. Un aspecto central de este enfoque consiste en medir qué tan cercanas están dos coloraciones, es decir, si es posible pasar de una a otra mediante una secuencia de cambios pequeños, sin violar en ningún momento la condición de coloración propia. Esta dinámica está modelada por la gráfica de re-coloración, definida por L. Cereceda *et al.* en [1], y constituye el objeto central de estudio en este trabajo. Nos enfocamos en las coloraciones propias, es decir, asignaciones de colores a los vértices de una gráfica en las que vértices adyacentes reciben colores distintos. Además, se busca minimizar el número de colores utilizados;

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C76, 05C12, 05C38, 05C69.

*Palabras clave.* Coloraciones propias, gráfica de re-coloración, problemas de configuraciones.

este valor mínimo se conoce como el número cromático. Determinarlo no es sencillo: en general, se trata de un problema  $\mathcal{NP}$ -completo<sup>1</sup>, si quieres saber más acerca de problemas  $\mathcal{NP}$ -completos puedes consultar [2]. Ante esta dificultad, se han propuesto numerosas heurísticas computacionales, como algoritmos greedy y técnicas de aproximación.

En este trabajo se presentan algunas propiedades básicas de la gráfica de re-coloración para tres familias fundamentales de gráficas: completas, trayectorias y ciclos, considerando distintos valores del parámetro  $k$ , que representa el número máximo de colores permitidos.

## 2. DEFINICIONES Y OBSERVACIONES

Una gráfica  $G = (V(G), A(G))$  consta de un conjunto de vértices  $V(G)$  y un conjunto de aristas  $A(G)$ , donde cada arista es un subconjunto de dos vértices distintos. En este trabajo sólo consideramos gráficas simples: no permitimos aristas que conecten un vértice consigo mismo (lazos), ni más de una arista entre dos vértices (aristas múltiples). Decimos que dos vértices  $u, v \in V(G)$  son **adyacentes** si están conectados por una arista, es decir, si  $\{u, v\} \in A(G)$ . En caso contrario, decimos que son **independientes**. La **vecindad** de un vértice  $v$  se define como el conjunto de todos los vértices que son adyacentes a él:  $N(v) = \{u \in V(G) \mid \{u, v\} \in A(G)\}$ . El **grado** de un vértice  $v$ , denotado  $d(v)$ , es simplemente el número de vértices en su vecindad:  $d(v) = |N(v)|$ . Una gráfica es **r-regular** si todos los vértices de la gráfica tienen grado igual a  $r$ . Un **camino** en una gráfica es una sucesión de vértices  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  tal que cada par consecutivo está conectado por una arista:  $\{v_i, v_{i+1}\} \in A(G)$  para  $0 \leq i < k$ . Si ningún vértice se repite, el camino se llama una **trayectoria**; denotamos por  $P_k$  a la trayectoria con  $k$  vértices. Un **ciclo** es una trayectoria al que le agregas una arista entre el primer vértice y el último vértice. El ciclo con  $k$  vértices se denota por  $C_k$ . La **longitud** de un camino es el número de aristas que contiene; por lo tanto, una trayectoria  $P_k$  tiene longitud  $k - 1$ , y un ciclo  $C_k$  tiene longitud  $k$ . Si hay una trayectoria entre cualquier par de vértices, decimos que la gráfica es **conexa**. La **distancia** entre dos vértices  $u$  y  $w$  es la longitud de la trayectoria más corta que los conecta, y el **diámetro** de una gráfica conexa es la mayor de todas las distancias posibles entre pares de vértices:  $\text{diam}(G) = \max\{\text{dist}(u, w) \mid u, w \in V(G)\}$ . Si una gráfica  $G$  no es conexa, diremos que una subgráfica de  $G$  es una componente conexa si al agregar cualquier otro vértice o arista deja de ser una subgráfica conexa (una subgráfica conexa maximal). Una **coloración propia** de los vértices de una gráfica  $G$  es una función  $\varphi : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$  tal que vértices adyacentes reciben colores distintos. Siempre es posible encontrar una coloración propia usando  $|V(G)|$  colores, simplemente asignando un color diferente a cada vértice. Si una coloración usa a lo más  $k$  colores, la llamamos **k-coloración**. Dadas dos  $k$ -coloraciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  de una gráfica  $G$ , diremos que son distintas si existe al menos un vértice  $v$  tal que  $\varphi_1(v) \neq \varphi_2(v)$ . Una herramienta útil para estudiar coloraciones es el **polinomio cromático**, que cuenta cuántas coloraciones propias, con a lo más  $k$  colores, existen de una gráfica  $G$  y es denotado por  $\mathcal{P}(G; k)$ . Para poder construir el polinomio cromático, necesitamos definir dos operaciones llamadas borrar y contraer. Dado una gráfica  $G$  y una arista  $a \in A(G)$ , la operación **borrar** la arista  $a$ , denotado  $G - a$ , consiste en eliminar la arista  $a$  del conjunto de aristas de  $G$ , mientras que el resultado de la operación **contraer** la arista  $a = \{u, v\}$ , denotado  $G/\{u, v\}$  es la gráfica que se obtiene al reemplazar vértices  $u$  y  $v$  por un vértice nuevo  $w$ , y conectar  $w$  con todos los vecinos de  $u$  y  $v$ :  $N(w) = N(u) \cup N(v) \setminus \{u, v\}$ . Utilizando esta operación y la eliminación de aristas, se obtiene la siguiente versión del teorema del polinomio cromático, conocido como “**borrar y contraer**”.

<sup>1</sup>Un problema es  $\mathcal{NP}$ -completo si su solución puede verificarse eficientemente, y si todos los problemas en  $\mathcal{NP}$  pueden reducirse a él. Resolver uno de estos problemas eficientemente implicaría resolver todos los demás de forma eficiente.

La idea intuitiva de la prueba del siguiente teorema es que cuando eliminas la arista  $\{u, v\}$  permites que los vértices  $u$  y  $v$  tengan el mismo color, por lo que debes restar el número de coloraciones en donde  $u$  y  $v$  comparten el mismo color, y eso lo puedes hacer identificando los dos vértices y así obligándolos a tener el mismo color.

TEOREMA 1. *Sea  $G$  una gráfica,  $a = \{u, v\}$  una arista de  $G$  y  $k$  un entero positivo. Entonces el número de  $k$ -coloraciones de  $G$  es:*

$$\mathcal{P}(G; k) = \mathcal{P}(G - a; k) - \mathcal{P}(G/a; k).$$

*Demostración.* Sea  $G = (V, A)$ ,  $a = \{u, v\} \in A$ , y  $k$  un entero positivo. Observa que en  $G - a$ , los vértices  $u$  y  $v$  ya no están conectados, por lo tanto, pueden tener el mismo color. Así,  $\mathcal{P}(G - a; k)$  cuenta todas las coloraciones propias de  $G$  tanto las coloraciones donde  $u$  y  $v$  tienen colores distintos como aquellas en que tienen el mismo color.

Ahora bien, si forzamos que  $u$  y  $v$  tengan el mismo color, podemos representarlo mediante la contracción  $G/a$ . El número de esas coloraciones es  $\mathcal{P}(G/a; k)$ . Restando estas de las de  $G - a$ , obtenemos exactamente las coloraciones en donde  $u$  y  $v$  tienen colores distintos, que son justo las coloraciones propias de  $G$ :

$$\mathcal{P}(G; k) = \mathcal{P}(G - a; k) - \mathcal{P}(G/a; k).$$

□

Dada una gráfica  $H$  y un número de colores  $k$ , la **gráfica de re-coloración** de una gráfica  $H$ , denotada  $G^k(H)$ , es la gráfica cuyos vértices son todas las  $k$ -coloraciones propias de  $H$ . Por lo tanto, su número de vértices es exactamente  $\mathcal{P}(H; k)$ . Sean  $u_1$  y  $u_2$  vértices de  $G^k(H)$  y sean  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  las coloraciones correspondientes de  $H$ . Los vértices  $u_1$  y  $u_2$  son adyacentes si las coloraciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  difieren en exactamente un vértice de la gráfica  $H$ . Dos coloraciones están conectadas por una arista en  $G^k(H)$  si difieren en el color de un solo vértice. Para visualizar este concepto, en la figura 1 mostramos cuatro coloraciones distintas de la trayectoria  $P_5$ . Las primeras dos coloraciones,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , usan sólo dos colores. La segunda coloración no es adyacente a ninguna de las otras tres coloraciones, mientras que la coloración  $\varphi_3$  es adyacente tanto a  $\varphi_1$  (difieren en el color de  $v_3$ ) como a  $\varphi_4$  (difieren en  $v_5$ ).

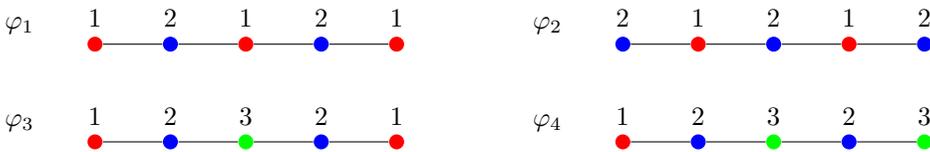


FIGURA 1. Coloraciones de una trayectoria con 2 o 3 colores

Si usamos tres colores, entonces en las coloraciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  de la figura 1, cada vértice puede cambiar su color al color 3 (verde) sin violar las condiciones de una coloración propia, mientras que en la coloración  $\varphi_3$  de la figura 1, los dos vértices que tienen el color 2 (azul) no permiten ningún cambio válido de color, ya que son adyacentes tanto a un vértice de color 1 (rojo) como un vértice de color 2 (azul). De manera general, es fácil ver que podemos cambiar el color de un vértice  $v \in V(H)$  si el número total de colores  $k$  es mayor que el número de colores distintos usados en  $v$  y sus vecinos. En particular, podemos asegurar que el color de un vértice  $v$  puede cambiar si  $k > d(v) + 1$ . Definimos el conjunto de colores bloqueados de un vértice  $v$ , denotado  $B(v)$ , como el conjunto de colores que aparecen en  $v$  y en sus vecinos. Con esta definición, podemos establecer dos observaciones sencillas pero útiles.

*Observación 1.* Sea  $v \in V(H)$ . El vértice  $v$  permite exactamente  $k - |B(v)|$  posibles cambios de color.

Dado que  $|B(v)| \leq d(v)+1$ , obtenemos la siguiente cota inferior, más simple de calcular pero menos precisa: el vértice  $v$  permite al menos  $k - (d(v) + 1)$  cambios de color. Como en la gráfica de re-coloración dos vértices están conectados si las coloraciones que representan difieren en exactamente un vértice, la vecindad de un vértice en esta gráfica corresponde a todas las coloraciones que se pueden obtener cambiando el color de un solo vértice. Esto nos da la siguiente observación:

*Observación 2.* El grado de un vértice  $w$  en la gráfica de re-coloración es igual al número de cambios posibles en la coloración asociada a ese vértice.

$$d(w) = \sum_{v \in V(H)} k - |B(v)|.$$

### 3. LA GRÁFICA DE RE-COLORACIÓN DE UNA GRÁFICA VACÍA O COMPLETA

Comenzamos con las dos estructuras más simples en teoría de gráficas: las gráficas vacías y las gráficas completas. Una gráfica con  $n$  vértices es una **gráfica vacía** si no tiene ninguna arista y la denotamos  $\overline{K}_n$ . Como la gráfica no tiene aristas, cualquier coloración de los vértices es una coloración propia, por lo que  $\mathcal{P}(\overline{K}_n) = k^n$ , además, podemos cambiar el color de un vértice a cualquier otro color sin violar la condición de coloración propia. Por la observación 2, cualquier vértice  $w \in V(G^k(\overline{K}_n))$  tiene grado  $n(k - 1)$ . Como el color de un vértice puede ser cambiado por cualquier otro, la distancia más grande entre vértices de la gráfica  $G^k(\overline{K}_n)$  es igual a  $n$  y se alcanza justo entre dos coloraciones  $\varphi$  y  $\varphi'$  donde ningún vértice conserva su color, es decir, para todo  $w \in V(\overline{K}_n)$ ,  $\varphi(w) \neq \varphi'(w)$ . En resumen, tenemos el siguiente resultado.

**PROPOSICIÓN 2.** *La gráfica de re-coloración  $G^k(\overline{K}_n)$  es una gráfica  $n(k - 1)$ -regular con  $k^n$  vértices y diámetro  $n$ .*

Una gráfica con  $n$  vértices es una **gráfica completa** si todo par de vértices está conectado por una arista, y la denotamos  $K_n$ . En una coloración propia de  $K_n$ , es necesario usar un color distinto para cada vértice, ya que cualquier par de vértices son adyacentes. Por lo tanto, si  $k \geq n$ , el número de coloraciones propias posibles de  $K_n$  con a lo más  $k$  colores es igual al número de formas de ordenar  $n$  colores tomados sin repetición de un conjunto de  $k$  colores, y la gráfica de re-coloración  $G^k(K_n)$  tiene  $\frac{k!}{(k - n)!}$  vértices.

Queremos demostrar que la gráfica de re-coloración de una gráfica completa es una gráfica regular. Recordemos, por la observación 2, que el grado de un vértice en la gráfica de re-coloración coincide con el número de cambios de color válidos que pueden hacerse en su coloración correspondiente.

**PROPOSICIÓN 3.** *Sea  $k \geq n$ . La gráfica de re-coloración  $G^k(K_n)$  tiene  $\frac{k!}{(k - n)!}$  vértices y es  $n(k - n)$ -regular.*

*Demostración.* Para probar que la gráfica es  $n(k - n)$ -regular, basta probar que  $\delta(G^k(K_n)) = \Delta(G^k(K_n)) = n(k - n)$ . Una coloración propia arbitraria de la gráfica  $K_n$  corresponde a un vértice arbitrario en  $G^k(K_n)$ . Como en toda coloración propia de  $K_n$  se usan  $n$  colores distintos, y hay  $k$  colores disponibles, entonces para cada uno de los  $n$  vértices hay  $k - n$  colores disponibles para cambiar el color actual (evitando repetir alguno ya usado por los otros  $n - 1$  vértices). Como tenemos  $n$  vértices y para

cada uno hay  $k - n$  opciones válidas de re-coloración, por la observación 2, el número total de coloraciones adyacentes, es decir, el grado de cualquier vértice, es  $n(k - n)$ .  $\square$

Si coloreamos  $K_n$  usando exactamente  $n$  colores, entonces, por la observación 1, no es posible cambiar el color de ningún vértice sin violar la condición de coloración propia, por lo que la gráfica de re-coloración  $G^n(K_n)$  es la gráfica vacía con  $n!$  vértices.

4. LA GRÁFICA DE RE-COLORACIÓN DE UNA TRAYECTORIA

En esta sección analizamos la gráfica de re-coloración de una trayectoria. En la sección 2 se mostraron algunos ejemplos de coloraciones propias de la trayectoria con 5 vértices y se mencionaron algunas de sus adyacencias. Comenzamos considerando el caso en que la trayectoria se colorea con sólo dos colores.

PROPOSICIÓN 4. Sea  $n \geq 2$ . La gráfica de re-coloración de  $P_n$  con dos colores es una gráfica con dos vértices no adyacentes, es decir,

$$G^2(P_n) \cong \overline{K_2}.$$

*Demostración.* Si coloreamos los vértices de la trayectoria  $P_n$  con únicamente dos colores, entonces existen exactamente dos coloraciones propias (véase  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  en la figura 1):

$$\varphi_1(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2m + 1; \\ 2 & \text{si } i = 2m, \end{cases} \quad \text{y} \quad \varphi_2(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = 2m + 1; \\ 1 & \text{si } i = 2m. \end{cases}$$

En ambas coloraciones, cada vértice es adyacente a al menos un vértice del color opuesto, por lo que no es posible modificar el color de ningún vértice sin violar la condición de coloración propia. Así, la gráfica de re-coloración consta de dos vértices no adyacentes.  $\square$

El caso de colorear con sólo dos colores tiene un comportamiento atípico. A partir de aquí, asumimos que se dispone de al menos tres colores.

Para comprender mejor el caso general, consideramos primero la trayectoria  $P_3$  con tres colores.

**Ejemplo 1.** Una coloración de  $P_3$  con tres colores puede representarse como una terna  $(a, b, c)$  sin repeticiones consecutivas. En la figura 2, cada sucesión de números representa una coloración usando los colores  $\{0, 1, 2\}$ , donde la posición indica el vértice correspondiente.

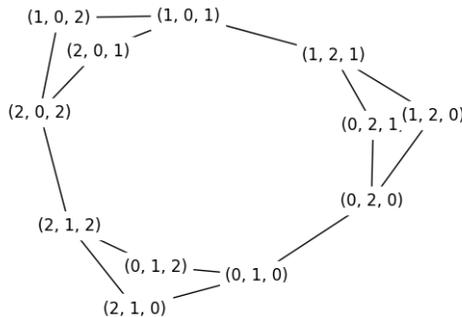


FIGURA 2. La gráfica de re-coloración de  $P_3$  con  $k = 3$

Antes de analizar la estructura de la gráfica de re-coloración, determinamos el número de vértices, así como su grado mínimo y máximo. Posteriormente, probamos que la gráfica es conexa si  $k \geq 3$ , y calculamos su diámetro.

El siguiente resultado nos ayuda a determinar el número exacto de vértices de la gráfica de re-coloración de una trayectoria.

**PROPOSICIÓN 5.** *El número de coloraciones propias de  $P_n$  con  $k$  colores es  $k(k-1)^{n-1}$ .*

*Demostración.* El primer vértice puede recibir cualquiera de los  $k$  colores. Cada vértice posterior sólo tiene un vecino previamente coloreado, por lo que hay  $k - 1$  opciones para cada uno. El resultado se obtiene multiplicando:  $k(k - 1)^{n-1}$ .  $\square$

Para facilitar la comprensión del teorema 6, que establece el **grado mínimo**  $\delta$  y el **grado máximo**  $\Delta$  de la gráfica de re-coloración de una trayectoria, probamos primero el caso particular en que  $k = 3$ . La gráfica  $G^3(P_3)$  de la figura 2 puede servir como apoyo para visualizar los argumentos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.** El grado mínimo y el grado máximo de la gráfica de re-coloración de  $P_n$  con tres colores es 2 y  $n$  respectivamente:

$$\delta(G^3(P_n)) = 2 \quad y \quad \Delta(G^3(P_n)) = n.$$

Sea  $P_n = (v_1, \dots, v_n)$  la trayectoria con  $n$  vértices y considera una coloración propia de los vértices con colores del conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . Por la observación 2, el grado de un vértice en  $G^3(P_n)$  es la suma del número de cambios de color válidos de sus vértices.

**Caso 1:** Sea  $v$  un vértice de grado 1, entonces  $v$  tiene un solo vecino. Supongamos que su color es  $a$  y el del vecino es  $b \neq a$ . El único color posible para el cambio es  $c \in \{1, 2, 3\} \setminus \{a, b\}$ . Observa que siempre es posible cambiar el color del vértice  $v$  del color  $a$  al color  $c$ .

**Caso 2:** Sea  $v$  un vértice de grado 2 en  $P_n$ , entonces  $v$  tiene exactamente dos vecinos. Sea  $a \in \{1, 2, 3\}$  el color de  $v$  y sean  $x, y \in \{1, 2, 3\}$  los colores de los vecinos de  $v$ , como  $\varphi$  es una coloración propia,  $a \neq x, y$ . Si  $x \neq y$ , entonces no hay ningún color disponible para cambio de color de  $v$ . Si los vecinos tienen el mismo color, entonces hay exactamente un color disponible distinto de  $a$  y distinto del color  $x = y$ .

En el primer caso, el vértice de  $P_n$  siempre permite un cambio de color y en el segundo caso el vértice de  $P_n$  permite a lo más un cambio de color. Como la trayectoria tiene dos vértices de grado 1, el grado de un vértice (una coloración) en  $G^3(P_n)$  es al menos 2 y a lo más  $n$ . El vértice correspondiente a la coloración  $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$  tiene grado 2, mientras que el vértice correspondiente a la coloración  $(1, 2, 1, 2, \dots)$  tiene grado  $n$  y el resultado se sigue.

Ahora generalizamos el resultado del ejemplo 2 a cualquier  $k \geq 3$ :

**TEOREMA 6.** *Para  $P_n$  con  $k \geq 3$ , se cumple que*

$$\delta(G^k(P_n)) = n(k - 3) + 2 \quad y \quad \Delta(G^k(P_n)) = n(k - 2).$$

*Demostración.* Los vértices de grado 1 tienen  $k - 2$  opciones de cambio de color, mientras que los vértices de grado 2 tienen  $k - 3$  o  $k - 2$  opciones de cambio de color. Así, el número mínimo de cambios es:  $2(k - 2) + (n - 2)(k - 3) = kn - 3n + 2$  y el máximo número de cambios es  $n(k - 2)$  y se alcanza cuando todos los vértices admiten  $k - 2$  cambios.

Vamos a mostrar dos coloraciones en donde estos valores se alcanzan. En la coloración  $(i, j, k, i, j, k, \dots)$  donde  $i, j$  y  $k$  son colores distintos del conjunto de  $k$  colores, nos

aseguramos que cada vértice tenga su número mínimo de cambios:  $kn - 3n + 2$ , mientras que la coloración  $(i, j, i, j, \dots)$ , donde  $i$  y  $j$  son elementos distintos del conjunto de  $k$  colores, nos aseguramos que cada vértice tenga su número máximo de cambios:  $(k - 2)$ . Por lo que  $\delta(G^k(P_n)) = n(k - 3) + 2$  y  $\Delta(G^k(P_n)) = n(k - 2)$ .  $\square$

Finalmente, establecemos una cota inferior para el diámetro de la gráfica de re-coloración, encontrando dos coloraciones que requieren un gran número de pasos para transformar una coloración en la otra.

TEOREMA 7. *Si  $k \geq 3$ , entonces*

$$\text{diam}(G^k(P_n)) \geq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

*Demostración.* Como el diámetro corresponde a la máxima distancia entre pares de vértices en la gráfica, para establecer una cota inferior, basta con exhibir dos coloraciones  $\varphi$  y  $\varphi'$  en  $G^k(P_n)$  tales que  $\text{dist}(\varphi, \varphi') = n + \lfloor n/2 \rfloor$ . A continuación definimos ambas coloraciones y explicamos por qué se requieren exactamente  $n + \lfloor n/2 \rfloor$  pasos para transformar una en la otra.

Sea  $t$  el índice del paso en la secuencia de re-coloraciones y sea  $\varphi_t$  la coloración en el paso  $t$ ; así  $\varphi_0$  corresponde a la coloración inicial. Consideramos la trayectoria  $P_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  y definimos las siguientes coloraciones:

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 2 & \text{si } i \text{ es par,} \end{cases} \quad \text{y} \quad \varphi'(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 1 & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Observamos que no es posible cambiar directamente el color de un vértice  $v_{\text{impar}}$  de 1 a 2 (pues sus vecinos tienen color 2), ni el de un vértice  $v_{\text{par}}$  de 2 a 1 (pues sus vecinos tienen color 1), es necesario introducir un color temporal, el color 3. Como no podemos cambiar directamente el color de la coloración  $\varphi$  al color de la coloración  $\varphi'$  en ninguno de los vértices de la trayectoria  $P_n$ , entonces hace falta cambiar el color en a coloración  $\varphi$  al color temporal (color 3) en al menos la mitad de los vértices de la trayectoria. Observamos que después de cambiar el color de un vértice al color 3, todavía falta cambiarle el color al color de  $\varphi'$ ; por lo tanto, en  $G^3(P_n)$  se cumple

$$\text{dist}(\varphi, \varphi') \geq n + \lfloor n/2 \rfloor.$$

Queremos probar que en  $G^3(P_n)$  se cumple  $\text{dist}(\varphi, \varphi') = n + \lfloor n/2 \rfloor$ . Como el número de vértices de índice par es a lo más igual al número de vértices de índice impar, para minimizar el número de pasos, colocamos el color temporal en los vértices pares. Sea  $\varphi_0 = \varphi$ . En el paso  $t = \lfloor n/2 \rfloor$  obtenemos:

$$\varphi_{\lfloor n/2 \rfloor}(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 3 & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Luego, cambiamos los vértices de índice impar del color 1 al color 2. Así, en el paso  $t = n$ , tenemos la coloración

$$\varphi_n(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 3 & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Finalmente, en los pasos restantes, volvemos a colorear los vértices pares, ahora del color 3 al color 1, y en el paso  $t = n + \lfloor n/2 \rfloor$  obtenemos la coloración

$$\varphi_{n+\lfloor n/2 \rfloor}(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ es impar;} \\ 1 & \text{si } i \text{ es par,} \end{cases}$$

que coincide con la coloración  $\varphi'$ .

Por lo tanto, transformar  $\varphi$  en  $\varphi'$  requiere exactamente  $n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  pasos, y como  $\text{dist}(\varphi, \varphi') = n + \lfloor n/2 \rfloor$ , concluimos que  $\text{diam}(\varphi, \varphi') \geq n + \lfloor n/2 \rfloor$ .  $\square$

Este proceso ilustra cómo ciertos cambios globales requieren introducir colores temporales. Esta técnica se usará también para analizar ciclos y otras familias de gráficas.

## 5. LA GRÁFICA DE RE-COLORACIÓN DE UN CICLO

Si el ciclo tiene longitud par, puede colorearse con dos colores. En este caso, se cumple el siguiente resultado. Omitimos su prueba ya que es análoga a la prueba de la proposición 4.

**PROPOSICIÓN 8.** *La gráfica de re-coloración de  $C_{2n}$  con dos colores es una gráfica con dos vértices independientes,*

$$G^2(C_{2n}) \cong \overline{K_2}.$$

Para determinar el número de vértices de la gráfica de re-coloración de un ciclo, calculamos su polinomio cromático.

**PROPOSICIÓN 9.** *El número de coloraciones propias de un ciclo  $C_n$  con  $k$  colores es*

$$\mathcal{P}(C_n; k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre el número de vértices del ciclo.

**Caso base:** Para  $n = 3$  tenemos que  $C_3 \cong K_3$ . Por la proposición 3, se tiene que  $\mathcal{P}(C_3; k) = k(k-1)(k-2)$ , y como  $(k-1)^3 + (-1)^3(k-1) = (k-1)((k-1)^2 - 1) = (k-1)k(k-2)$ , el caso base satisface la propiedad.

**Hipótesis inductiva:** Supongamos que, para algún  $n \geq 3$ , se cumple que

$$\mathcal{P}(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

**Paso inductivo:** Verificamos que la fórmula también se cumple para  $n+1$ . Aplicamos la regla de contracción-borrado del teorema 1, la cual establece:

$$\mathcal{P}(C_{n+1}, k) = \mathcal{P}(C_{n+1} - a, k) - \mathcal{P}(C_{n+1}/a, k),$$

donde  $a$  es una arista de  $C_{n+1}$ . Notamos que  $C_{n+1} - a = P_{n+1}$  y  $C_{n+1}/a = C_n$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(C_{n+1}, k) &= \mathcal{P}(P_{n+1}, k) - \mathcal{P}(C_n, k) \\ &= k(k-1)^n - ((k-1)^n + (-1)^n(k-1)) \\ &= (k-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(k-1). \end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática, el resultado se sigue.  $\square$

Ya establecido el número de vértices de  $G^k(C_n)$  procedemos a determinar el grado mínimo y máximo según el valor de  $k$  y la paridad del ciclo.

**PROPOSICIÓN 10.** *Sea  $G^k(C_n)$  la gráfica de re-coloración del ciclo  $C_n$  con  $k$  colores. Si  $k \geq 4$ , entonces el grado mínimo es  $\delta(G^k(C_n)) = n(k-3)$ . Además, para  $m \in \mathbb{N}$  tenemos que*

$$\delta(G^3(C_n)) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 3m; \\ 1, & \text{si } n = 3m + 1; \\ 2, & \text{si } n = 3m + 2. \end{cases}$$

*Demostración.* Como cada vértice de  $C_n$  tiene grado 2, el vértice y sus vecinos usan a lo más 3 colores. Por la observación 1, cada vértice permite al menos  $k - 3$  cambios de color, y por la observación 2, el grado mínimo es al menos  $n(k - 3)$ .

**Caso 1:** Sea  $k \geq 4$ . Si  $n = 3m$ , la coloración  $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3)$  tiene grado  $n(k - 3)$ , ya que cada vértice permite exactamente  $k - 3$  cambios. Si  $n = 3m + 1$ , la coloración  $(4, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3)$  cumple lo mismo. Si  $n = 3m + 2$ , la coloración  $(4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$  también tiene grado  $n(k - 3)$ .

**Caso 2:** Sea  $k = 3$ . Si  $n = 3m$ , la coloración  $(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$  tiene grado 0, pues ningún vértice admite cambios. Si  $n = 3m + 1$ , la coloración  $(2, 1, 2, 3, \dots)$  tiene grado 1, ya que sólo el segundo vértice permite un cambio. Si  $n = 3m + 2$ , la coloración  $(1, 2, 1, 2, 3, \dots)$  tiene grado 2, con cambios posibles sólo en el segundo y en el tercer vértices.  $\square$

PROPOSICIÓN 11. Sea  $G^k(C_n)$  la gráfica de re-coloración del ciclo  $C_n$  con  $k \geq 3$  colores. Entonces:

$$\Delta(G^k(C_n)) = \begin{cases} n(k - 2) & \text{si } n \text{ es par;} \\ (n - 3)(k - 2) + 3(k - 3) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración.* Dado que cada vértice tiene grado 2, el número de colores usados por él y sus vecinos es al menos 2 y a lo más 3, por lo tanto, cada vértice admite a lo más  $k - 2$  cambios de color. Por la observación 2, el grado máximo de un vértice en  $G^k(C_n)$  es a lo más  $n(k - 2)$ .

**Caso 1:** Si  $n$  es par, la coloración  $(1, 2, 1, 2, \dots)$  alcanza el grado máximo  $n(k - 2)$ , pues cada uno de los  $n$  vértices del ciclo permite  $k - 2$  cambios.

**Caso 2:** Si  $n$  es impar, toda coloración propia requiere al menos tres colores. Tomemos una coloración donde sólo tres vértices consecutivos usan tres colores distintos, y el resto alterna dos colores  $(3, 1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2)$ . En esta coloración, los vértices que tienen vecinos del mismo color admiten  $k - 2$  cambios, y los que tienen vecinos de colores distintos admiten  $k - 3$ . Hay al menos tres vértices en esta situación (el de color diferente y sus dos vecinos), es decir, 3 de los  $n$  vértices permiten sólo  $k - 3$  cambios y el resto permiten  $k - 2$  cambios. Por la observación 2, tenemos que:

$$\Delta(G^k(C_n)) = (n - 3)(k - 2) + 3(k - 3).$$

$\square$

De forma análoga al caso de las trayectorias (teorema 7), para establecer una cota inferior para el diámetro, basta encontrar dos coloraciones que están a distancia grande.

TEOREMA 12. Sea  $C_n$  un ciclo. Si  $k \geq 3$  cuando  $n$  es par, y  $k \geq 4$  cuando  $n$  es impar, entonces

$$\text{diam}(G^k(C_n)) \geq \begin{cases} n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, & \text{si } n \text{ es par;} \\ n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $C_n$  un ciclo y  $k$  el número de colores, con  $k \geq 3$  si  $n$  es par y  $k \geq 4$  si  $n$  es impar. Basta encontrar dos coloraciones  $\varphi, \varphi'$  tales que

$$\text{dist}(\varphi, \varphi') = \begin{cases} n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, & \text{si } n \text{ es par;} \\ n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

**Caso 1:** Si  $n$  es par, el ciclo puede colorearse alternando dos colores. Sea

$$\varphi_1(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ impar;} \\ 2 & \text{si } i \text{ par,} \end{cases} \quad \varphi_2(v_i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ impar;} \\ 1 & \text{si } i \text{ par.} \end{cases}$$

Siguiendo el procedimiento análogo al de la trayectoria, llegamos a que requerimos cambiar el color en a coloración  $\varphi$  al color temporal en al menos la mitad de los vértices y siguiendo el proceso de re-coloración para la trayectoria podemos concluir que se requieren exactamente  $n + \lfloor n/2 \rfloor$  pasos para transformar  $\varphi$  en  $\varphi'$ .

**Caso 2:** Si  $n$  es impar, se requiere al menos un vértice de un tercer color. Considere las coloraciones:

$$\varphi = (1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2, 3), \quad \varphi' = (3, 1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2).$$

Los colores 3 de  $\varphi$  y  $\varphi'$  están asignados a vértices adyacentes. Además, todos los vértices con color 1 son adyacentes a vértices de color 2 y viceversa, por lo que inicialmente no se puede hacer ningún cambio directo. Aplicando un procedimiento similar al de la trayectoria (usando el color 3 como color temporal), se requieren exactamente  $n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$  pasos para transformar  $\varphi$  en  $\varphi'$ , como se deseaba.  $\square$

**5.1. Coloreando ciclos con tres colores.** La gráfica de re-coloración de un ciclo con tres colores resulta ser desconexa. Primero observemos que, si la longitud del ciclo es múltiplo de 3, entonces, por la observación 1, en las siguientes coloraciones no es posible realizar ningún cambio de color en ninguno de los vértices:

$$(1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3), \quad (3, 1, 2, 3, 1, 2, \dots, 3, 1, 2), \quad (2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots, 2, 3, 1), \\ (1, 3, 2, 1, 3, 2, \dots, 1, 3, 2), \quad (2, 1, 3, 2, 1, 3, \dots, 2, 1, 3), \quad (3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, 3, 2, 1).$$

Por la proposición 9, el número de vértices de la gráfica de re-coloración crece rápidamente con  $n$ . A continuación, analizamos el caso del ciclo de longitud 5, y posteriormente presentamos una conjetura basada en los resultados de un análisis computacional para encontrar el número de componentes de la gráfica  $G^3(C_n)$ .

**Ejemplo 3.** Consideremos el ciclo  $C_5$ , es decir, un ciclo con 5 vértices. Por la proposición 9, el número de coloraciones propias es  $2^5 - 2 = 30$ ; por lo tanto, la gráfica de re-coloración  $G^3(C_5)$  tiene 30 vértices. De acuerdo con las proposiciones 10 y 11, la gráfica  $G^3(C_5)$  es 2-regular, y por tanto consiste en una o varias componentes cíclicas.

Consideremos la coloración  $\varphi_1 = (1, 2, 1, 2, 3)$ . La subgráfica inducida por los cambios de color válidos desde  $\varphi_1$  forma un ciclo de longitud 15. Las siguientes coloraciones son justo los vértices del ciclo de longitud 15, en cada coloración, el color en negritas indica el vértice cuyo color será modificado:

$$(1, 2, \mathbf{1}, 2, 3), \quad (1, 2, 3, \mathbf{2}, 3), \quad (1, 2, 3, 1, \mathbf{3}), \quad (1, 2, 3, 1, 2), \quad (3, \mathbf{2}, 3, 1, 2), \\ (3, 1, \mathbf{3}, 1, 2), \quad (3, 1, 2, \mathbf{1}, 2), \quad (3, 1, 2, 3, \mathbf{2}), \quad (\mathbf{3}, 1, 2, 3, 1), \quad (2, \mathbf{1}, 2, 3, 1), \\ (2, 3, \mathbf{2}, 3, 1), \quad (2, 3, 1, \mathbf{3}, 1), \quad (2, 3, 1, 2, \mathbf{1}), \quad (\mathbf{2}, 3, 1, 2, 3), \quad (1, \mathbf{3}, 1, 2, 3).$$

Observamos que la coloración  $\varphi_2 = (2, 1, 2, 1, 3)$  no aparece en este ciclo. Los cambios de color válidos desde  $\varphi_2$  generan, de manera análoga, otro ciclo disjunto de longitud 15. Por lo tanto,  $G^3(C_5)$  está compuesto por dos ciclos disjuntos de longitud 15.

Se realizó una exploración asistida por computadora para determinar el número de componentes conexas de la gráfica de re-coloración  $G^3(C_n)$ . Con base en los resultados observados, se propone la siguiente conjetura:

CONJETURA 13. *El número de componentes de  $G^3(C_n)$  es:*

$$\# \text{Componentes de } G^3(C_n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor, & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{3}; \\ \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + 6, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

## 6. DISCUSIÓN

Las trayectorias y los ciclos pares son ejemplos de gráficas bipartitas. Una gráfica es bipartita si y sólo si tiene número cromático igual a dos, los árboles son otra clase interesante de gráficas bipartitas. De la misma manera en que probamos que la gráfica de re-coloración de la trayectoria es  $\overline{K}_2$ , podemos probar el siguiente resultado general.

TEOREMA 14. *Sea  $H$  una gráfica bipartita conexa. Entonces  $G^2(H) \cong \overline{K}_2$ .*

Para el caso en que el número cromático de una gráfica sea igual a 3, determinamos que la gráfica de re-coloración de un ciclo con 3 colores es disconexa: es una gráfica vacía (sin aristas) en el caso del triángulo  $C_3$ , tiene vértices aislados si el número de vértices del ciclo es múltiplo de 3, sin importar si es un ciclo de longitud par o impar; y el número de componentes conexas de gráfica de re-coloración crece conforme va creciendo el número de vértices. Observemos que la gráfica de re-coloración de los ciclos de longitud  $6n$  es disconexa tanto si usamos 2 como si usamos 3 colores, mientras que la gráfica de re-coloración de cualquier ciclo es conexa si usamos al menos 4 colores.

**AGRADECIMIENTOS.** Los autores expresan su gratitud a las Unidades de Cuajimalpa e Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana por los recursos aportados para la realización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas 2025 así como al árbitro anónimo.

## REFERENCIAS

- [1] L. Cereceda, J. van den Heuvel, M. Johnson, Connectedness of the graph of vertex-colourings, *Discrete Mathematics* 308 (2008) 913–919.
- [2] M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, 1979.
- [3] J. van den Heuvel, The Complexity of Change, *Surveys in combinatorics* 409 (2013), 127–160.

*Romina Barcena Morales*

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,  
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.  
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348, México, Ciudad de México.  
e-mail: romina.barcena@cua.uam.mx

*Emilio Yedidia Licea Mesino*

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,  
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México  
e-mail: cbi2213009504@izt.uam.mx

*David Dan López Contreras*

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa,  
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 Ciudad de México, México  
e-mail: cbi2182018437@izt.uam.mx

*Mika Olsen*

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,  
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.  
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348, México, Ciudad de México.  
e-mail: [olsen@cua.uam.mx](mailto:olsen@cua.uam.mx)

*Lizzeth Ariadna Sánchez Solís*

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa,  
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.  
Av. Vasco de Quiroga 4871, Col. Santa Fe Cuajimalpa  
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348, México, Ciudad de México.  
e-mail: [lizzeth.sanchez@cua.uam.mx](mailto:lizzeth.sanchez@cua.uam.mx)