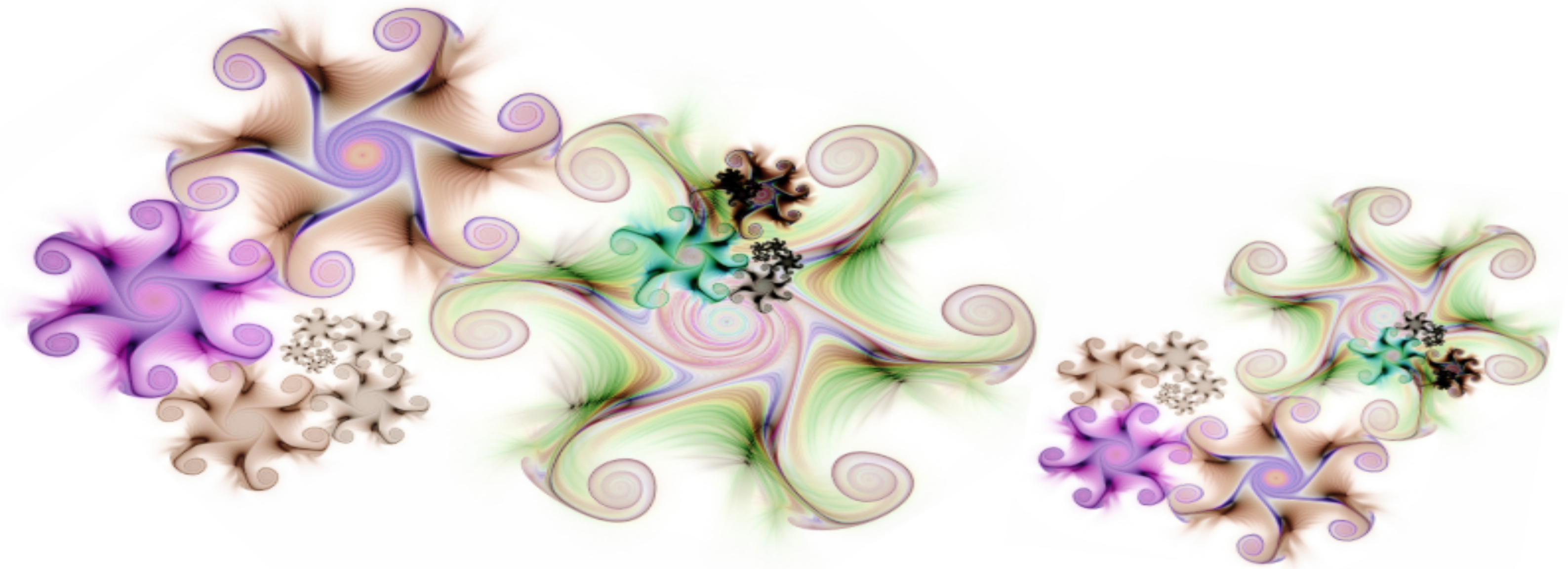
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Iztapalapa

Ciencias Básicas e Ingeniería CBI

Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/fergavsan ISSN: 2007-7874



Un breve recorrido por la teoría de prerradicales y sus retículas

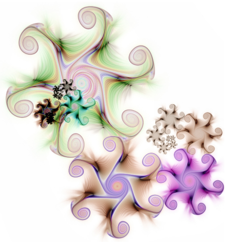
Rogelio Fernández-Alonso González
Silvia Claudia Gavito Ticozzi
Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda

7° Coloquio del Departamento de Matemáticas UAM-I
Del 27 al 31 de enero de 2025
Universidad Autónoma Metropolitana

MIXBA'AL. Vol. 16, No. 1, enero-diciembre de 2025, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Alcaldía Tlalpan, C.P. 14387, CDMX, México y Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, No. 186, Col. Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Tel. 5804 4658. Página electrónica de la revista: http://mat.izt.uam.mx/mat/ index.php/revistamixba-al. Correos electrónicos: mixbaal2009@gmail.com, mixb@xanum.uam.mx. Coordinador Editorial Mario Pineda Ruelas. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No. 04-2023-07031 1572300-102, ISSN5 2007-7874, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número Mario Pineda Ruelas, Departamento de Matemáticas, edificio AT, oficina 318. División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco No. 186,Colonia Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Fecha de última modificación 30 de agosto de 2025. Tamaño del archivo 121.3 MB.

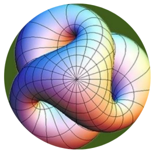
Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

7o COLOQUIO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



del 27 al 31 de enero del 2025, Unidad Iztapalapa de la UAM, Ciudad de México

Departamento de Matemáticas
UAM IZTAPALAPA



Posgrado de Matemáticas
UAM IZTAPALAPA

Taller 1: Análisis de datos con un enfoque bayesiano

Autor: Dr. Asael Fabian Martínez Martínez

Taller 2: Un breve recorrido por la teoría de prerradicales y sus retículas

Autores: Dr. Rogelio Fernández-Alonso, Dra. Silvia Gavito Ticozzi,
Dra. Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda

Taller 3: Resultados del cálculo y álgebra lineal relevantes en modelos y aplicaciones

Autor: Dr. Lorenzo Héctor Juárez

Taller 4: Análisis geométrico de superficies: una introducción elemental

Autores: Dr. Josué Melendez y M. en C. Eduardo Rodríguez Romero

Taller 5: Una introducción a los torneos y sus generalizaciones

Autores: Dr. Ilán Goldfeder Ortiz y Dra. Nahid Yelene Javier Nol

Taller 6: Del cero al quantum: un viaje por el mundo de los códigos

Autores: Dr. Jorge Bolaños Servín, Dra. Yuriko Pitones Amaro y Dr. Josué Rios Cangas

Taller 7: Introducción a la teoría de juegos epistémica

Autor: Dr. Rubén Becerril Borja

Taller 8: Cómo contar más allá del infinito y para qué sirve. Inducción transfinita y algunas aplicaciones

Autor: Dr. Rodrigo Hernández Gutiérrez

Casa abierta al tiempo UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA Unidad Iztapalapa

Ciencias Básicas e Ingeniería CBI

7° Coloquio del Departamento de Matemáticas UAM-I 2025

Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa CDMX.

Introducción

Existen diversas herramientas para recabar información de los anillos, una de ellas es la teoría de prerradicales. Estos objetos fueron estudiados en la década de los 70 por los matemáticos checoslovacos Bican, Kepka, Nemec y Jambor y, en nuestro país, desde el inicio del presente siglo, por un grupo de matemáticos mexicanos, fundado por Francisco Raggi, quien enfatizó sobre los prerradicales el punto de vista reticular. A lo largo de estas más de dos décadas, los resultados han sido muy fructíferos y se han derivado muchos artículos de investigación y varios trabajos de tesis de posgrado. De toda esta investigación, un problema interesante ha sido describir la gran retícula de prerradicales sobre un anillo y saber, en particular, si es o no un conjunto. En varios casos se ha llegado a una respuesta. Tomando como hilo conductor dichos casos, el propósito de este curso es presentar una introducción a los prerradicales, sus propiedades básicas y sus ejemplos más representativos.

Rogelio Fernández-Alonso González
rfg@xanum.uam.mx
Departamento de Matemáticas
UAM-Iztapalapa

Silvia Claudia Gavito Ticozzi
sgt@azc.uam.mx
Departamento de Ciencias Básicas
UAM-Azcapotzalco

Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda
marlisha@xanum.uam.mx
Departamento de Matemáticas
UAM-Iztapalapa

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Categorías y Funtores

En esta sección damos un breve recordatorio sobre el leguaje básico en teoría de categorías y funtores, que serán útiles en el siguiente capítulo. Para un estudio más profundo sobre Teoría de categorías, sugerimos al lector revisar textos tales como [4], [1], [2], [5], [23], [24].

Definición 1.1. Una categoría $\mathcal{A}$ está dada por una clase de objetos, denotada por $\mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ ó simplemente por $\mathcal{A}$, una clase $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$ de morfismos y una operación parcial binaria $\circ$ definida en $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$, tales que las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}) = \bigcup_{(A,B)\in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})\times \mathrm{Obj}(\mathcal{A})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$, donde $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ es un conjunto para todo par

$$(A,B) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$$

.

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,D)$ si y sólo si $A = C$ y $B = D$.

(c) Para cada triple $(A,B,C) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, la operación parcial binaria $\circ$, definida en $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$, induce por restricción, la función $\Omega : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ dada por $\Omega(f,g) := f \circ g$, que satisface las siguientes propiedades:

   (i) asociatividad: $(h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g)$ siempre que dicha composición esté definida,

   (ii) existencia de identidades: para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, existe $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A)$ tal que, para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ y para cada $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,A)$ se tiene que $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$.

Notación 1.2. Escribiremos fg en lugar de $f \circ g$; y en ocasiones, denotaremos a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A)$ por $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A)$. Observemos además, que para cada $A \in \mathcal{A}$, el elemento identidad $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A)$ es único.

Ejemplo 1.3. (a) La categoría $\mathcal{S}$, cuya clase de objetos es la clase de todos los conjuntos, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(A,B)$ es el conjunto de todas las funciones de A en B y la composición de morfismos es la composición usual de funciones.

(b) La categoría *Gr*, cuya colección de objetos está dada por los grupos y para cada par de grupos G y G', $\mathrm{Hom}_{Gr}(G,G')$ es el conjunto de todos los morfismos de grupos de G en G'.

(c) La categoría *Ab*, cuya colección de objetos está dada por todos los grupos abelianos; y para cada par de grupos abelianos G y G', $\mathrm{Hom}_{Ab}(G,G')$ es el conjunto de todos los morfismos de grupos abelianos. La composición de morfismos en *Ab* es la dada por la composición usual de funciones.

(d) La categoría *Rng*, donde los objetos corresponden a los anillos (no necesariamente unitarios); y para cada par de anillos R,S, $\mathrm{Hom}_{Rng}(R,S)$ es el conjunto de morfismos de anillos. La composición es la usual de funciones.

(e) La categoría *Rng1*, donde los objetos corresponden a los anillos con identidad; y para cada anillo con identidad R,S, $\mathrm{Hom}_{Rng1}(R,S)$ es el conjunto de morfismos de anillos con identidad. La composición es la misma que en *Rng*.

(f) La categoría $\mathrm{R{-}Mod}$, de $R-$módulos izquierdos, donde R es un anillo asociativo con identidad; y $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ es el conjunto de todos los morfismos de $R-$módulos izquierdos de M en N.

Definición 1.4. Una categoría $\mathcal{A}$ es llamada **pequeña** cuando la clase de objetos $\mathsf{Obj}(\mathcal{A})$ es un conjunto.

Definición 1.5. Sea $\mathcal{A}$ una categoría. Diremos que $\mathcal{A}'$ es una **subcategoría** de $\mathcal{A}$ si se satisfacen las siguientes condiciones.

(a) $\mathsf{Obj}(\mathcal{A}') \subseteq \mathsf{Obj}(\mathcal{A})$.

(b) Para cada $(A,B) \in \mathsf{Obj}(\mathcal{A}') \times \mathsf{Obj}(\mathcal{A}')$, se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(A,B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$.

(c) La operación parcial $\circ'$ en $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}')$, coincide con la restricción de la operación parcial $\circ$ (definida en $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$) en $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}')$.

(d) Si $1'_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(A,A)$ es la identidad en $\mathcal{A}'$, entonces $1'_A = 1_A$; donde $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A)$ es la identidad en $\mathcal{A}$.

Definición 1.6. Sea $\mathcal{B}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$. Decimos que $\mathcal{B}$ es una **subcategoría plena** de $\mathcal{A}$ si se satisface que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y){:=}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$, para cada par X, $Y \in \mathsf{Obj}(\mathcal{B})$.

Ejemplo 1.7. (a) Notemos que si $\mathcal{A}$ es una categoría y $\mathcal{B}$ es una subclase de objetos de $\mathcal{A}$, podemos ver a $\mathcal{B}$ como una subcategoría de $\mathcal{A}$, definiendo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y){:=}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

(b) La categoría $Ab = \mathbb{Z} - Mod$, de grupos abelianos, es una subcategoría plena de Grp.

(c) La categoría $\mathrm{mod(R)}$, de $R-$módulos izquierdos finitamente generados, es una subcategoría plena de $\mathrm{R{-}Mod}$.

(d) La categoría *Rng*1 es una subcategoría de *Rng* que no es plena.

Definición 1.8. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un **funtor covariante** $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ es una asignación de un objeto $F(A)\in\mathcal{B}$, para cada objeto $A\in\mathcal{A}$; y un morfismo $F(f)\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A),F(A'))$ para cada morfismo $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A')$, tal que:

(a) si fg está definida en $\mathcal{A}$, entonces $F(fg)=F(f)F(g)$; y

(b) para cada $A\in\mathcal{A}$, se tiene que $F(1_A)=1_{F(A)}$.

Definición 1.9. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un **funtor contravariante** $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ es una asignación de un objeto $F(A)\in\mathcal{B}$, para cada objeto $A\in\mathcal{A}$; y un morfismo $F(f)\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A'),F(A))$ para cada morfismo $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A')$, tal que:

(a) si fg está definida en $\mathcal{A}$, entonces $F(fg)=F(g)F(f)$; y

(b) para cada $A\in\mathcal{A}$, se tiene que $F(1_A)=1_{F(A)}$.

Notación 1.10. Para cualquier categoría $\mathcal{A}$, denotaremos $1_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, al funtor covariante tal que $1_{\mathcal{A}}(A)=A$ para cada $A\in\mathcal{A}$ y $1_{\mathcal{A}}(f)=f$ para cada morfismo f en $\mathcal{A}$. Este es llamado el funtor identidad de $\mathcal{A}$.

Observación 1.11. (a) Sean $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ y $G:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ funtores cualesquiera. Definimos la composición $GF:\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ por las reglas $GF(A):=G(F(A))$ y $GF(f):=G(F(f))$.

(b) Si $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ y $G:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ son ambos funtores covariantes, entonces $GF:\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ es un funtor covariante.

(c) Si $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ y $G:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ son ambos funtores contravariantes, entonces $GF:\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ es un funtor covariante.

(d) Si uno de los funtores F o G es covariante y el otro contravariante, entonces $GF:\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ es contravariante.

Ejemplo 1.12. (1) Sea R un anillo asociativo con identidad. Consideremos $\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$, su categoría de módulos y $\mathbb{Z}-\mathrm{Mod}$, la categoría de grupos abelianos. Para cada $M\in\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$, se define el funtor covariante

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,-)\colon \mathrm{R}-\mathrm{Mod}\to\mathbb{Z}-\mathrm{Mod},$$

tal que:

(i) Para cada $N\in\mathrm{R}-\mathrm{Mod}$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,-)(N)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,N)$, el grupo abeliano de los morfismos de $\mathrm{R}-$módulos de M en N.

(ii) Para cada $f\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(L,N)$, $f_\star:=\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,-)(f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,L)\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,N)$, está dada por $f_\star(g)=fg$.

(2) Sea R un anillo asociativo con identidad. Consideremos R−Mod, su categoría de módulos y $\mathbb{Z}-$Mod, la categoría de grupos abelianos. Para cada $N \in$ R−Mod, se define el funtor contravariante

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(-,N)\colon \mathrm{R}{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{Z}-\mathrm{Mod},$$

tal que:

(i) Para cada $M \in$ R−Mod, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(-,N)(M) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,N)$, el grupo abeliano de los morfismos de R−módulos de M en N.

(ii) Para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(K,L)$, $f^\star := \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(-,N)(f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(L,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(K,N)$, está dada por $f^\star(g) = gf$.

Definición 1.13. Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores. Una **transformación natural** $\eta : F \to G$ es una familia de morfismos $\eta := \{\eta_A : F(A) \to G(A)\}_{A\in\mathcal{A}}$ en $\mathcal{B}$ tal que para cada morfismo $g : A \to A'$ en $\mathcal{A}$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(g)"'] & G(A) \arrow[d, "G(g)"] \\ F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"] & G(A') \end{tikzcd}$$

Observación 1.14. (a) Dadas $\eta : F \to G$ $\rho : G \to F$ transformaciones naturales de funtores, se define la composición $\rho\eta : F \to G$ $(\rho\eta)_A := \rho_A\eta_A$, para cada $A \in \mathcal{A}$.

(b) Para cualquier funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, la transformación natural identidad $1_F : F \to F$ es por definición $(1_F)_A := 1_F(A)$ para cada $A \in \mathcal{A}$.

(c) Sean $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores; y $\eta : F \to G$ una transformación natural. Entonces tenemos una transformación natural $H\eta : HF \to HG$ definida por $(H\eta)_A := H(\eta_A)$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Similarmente, si $L : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ es un funtor, entonces $\eta L : FL \to GL$ es una transformación natural dada por $(\eta L)_D := \eta_{L(D)}$, para cada $D \in \mathcal{D}$.

Definición 1.15. Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores y $\eta : F \to G$ una transformación natural. Decimos que η es una **equivalencia natural** si se satisface que η_A es un isomorfismo para cada $A \in \mathcal{A}$.

Observación 1.16. Si $\eta : F \to G$ es una equivalencia natural, entonces, se obtiene la transformación natural $\eta^{-1} : G \to F$ definida por $(\eta^{-1})_A := (\eta_A)^{-1}$ para cada $A \in \mathcal{A}$,

Notación 1.17. $F \simeq G$ denota que F y G son naturalmente equivalentes.

Definición 1.18. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor. Decimos que F es una **equivalencia de categorías** si existe un funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $GF \simeq 1_{\mathcal{A}}$ y $FG \simeq 1_{\mathcal{B}}$. Además, diremos en este caso que F y G son cuasi-inversos uno del otro.

Observación 1.19. Una **dualidad de categorías**. es un funtor contravariante $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, que es una equivalencia de categorías.

Definición 1.20. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor. Para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene la función inducida por F,

$$F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A),F(B)),$$

dada por $F_{A,B}(f) := F(f)$, para cada $f \in \mathrm{Hom}_{A}(A,B)$.

(a) Decimos que F es **fiel** si la función inducida $F_{A,B}$ es inyectiva para cada $A, B \in \mathcal{A}$.

(b) Decimos que F es **pleno** si la función inducida $F_{A,B}$ es suprayectiva para cada $A, B \in \mathcal{A}$.

(c) Decimos que F es **denso** si para cada objeto B de $\mathcal{B}$, existe un objeto A en $\mathcal{A}$, tal que B es isomorfo a $F(A)$.

Teorema 1.21. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *F define una equivalencia de categorías.*

(b) *F es un funtor fiel, pleno y denso.*

Definición 1.22. Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funtores. Decimos que F es **adjunto izquierdo** a G y que G es **adjunto derecho** a F si se satisface que para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ y $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A),Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,G(Y))$ es una biyección natural. En tal caso, se dice que F y G forman un par adjunto y se escribe $\langle F,G\rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Definición 1.23. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que $\mathcal{C}$ es una **categoría aditiva** si se satisfacen las siguientes condiciones.

(a) Para cada familia finita $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ de objetos en $\mathcal{C}$, existe el coproducto $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ en $\mathcal{C}$.

(b) Para cada $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es un grupo abeliano.

(c) Para cada $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, la composición de morfismos en $\mathcal{C}$ es $\mathbb{Z}-$bilineal. Esto es, para cada $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ y $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ se tiene que $(f+f')g = fg+f'g$ y $f(g+g') = fg+fg'$.

(d) Existe un objeto $0 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ (llamado **el objeto cero de** $\mathcal{C}$) tal que el morfismo identidad 1_0 es el elemento cero del grupo abeliano $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,0)$.

Definición 1.24. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtor entre categorías aditivas.

(a) Decimos que F **preserva sumas directas**, si para cada par de objetos X_1 y X_2 en $\mathcal{C}$, se tiene que $F(X_1 \oplus X_2) \cong F(X_1) \oplus F(X_2)$.

(b) Decimos que F es **aditivo**, si para cada par de objetos X y Y en $\mathcal{C}$, la función $F_{X,Y}$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y))$ satisface que $F(f+g) = F(f)+F(g)$ para cada $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

En este texto, se considerarán principalmente funtores aditivos.

Ejemplo 1.25. Para cada $M \in \mathrm{R}-\mathbf{Mod}$, los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,-)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(-,M)$ son aditivos.

Definición 1.26. Sean $G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor. Un **subfuntor** de G es un par (F,γ) donde $F : \mathcal{A} \to B$ es un funtor y $\gamma\colon F \to G$ es una transformación natural tal que para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, $\gamma_X : F(X) \to G(X)$ es un monomorfismo en $\mathcal{B}$.

Observación 1.27. Cada subfuntor de un funtor aditivo $G\colon \mathcal{A} \to Ab$, es aditivo también.

Definición 1.28. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$.

(a) Un **núcleo de** f es un objeto $\mathrm{Ker}(f)$ junto con un morfismo $u : \mathrm{Ker}(f) \to X$ que satisface las siguientes condiciones.

  (i) $fu = 0$.

  (ii) Para cada morfismo $h : Z \to X$ en $\mathcal{C}$ tal que $fh = 0$, existe un único morfismo $h' : Z \to \mathrm{Ker}(f)$ tal que $h = uh'$. (Ésta es llamada **la propiedad universal del núcleo**).

(b) Un **Conúcleo de** f es un objeto $\mathrm{Coker}(f)$ junto con un morfismo $\rho : Y \to \mathrm{Coker}(f)$ que satisface las siguientes condiciones.

  (i) $\rho f = 0$.

  (ii) Para cada morfismo $g : Y \to Z$ en $\mathcal{C}$ tal que $gf = 0$, existe un único morfismo $g' : \mathrm{Coker}(f) \to Z$ tal que $g = g'\rho$. (Ésta es llamada **la propiedad universal del conúcleo**).

Observación 1.29. (a) El morfismo $u : \mathrm{Ker}(f) \to X$ dado en 1.28 (a), es un monomorfismo. Similarmente, el morfismo $\rho : Y \to \mathrm{Coker}(f)$, dado en 1.28 (b), es un epimorfismo.

(b) Si $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva que admite núcleos y conúcleos; entonces, para cada morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $\overline{f} : \mathrm{Coker}(u) \to \mathrm{Ker}(\rho)$ en $\mathcal{C}$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho'"'] & Y \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Coker}(f) \\
 & \mathrm{Coker}(u) \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathrm{Ker}(\rho) \arrow[u, "u'"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $u' : \mathrm{Ker}(\rho) \to Y$ es el núcleo de ρ y $\rho' : X \to \mathrm{Coker}(u)$ es el conúcleo de u. El objeto $\mathrm{Ker}(\rho)$ es llamado **la imagen de** f y es denotado por $\mathrm{Im}(f)$.

Definición 1.30. Una categoría $\mathcal{C}$ es llamada **abeliana** si satisface las siguientes condiciones.

(a) $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva.

(b) Cada morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ admite un núcleo $u : \mathrm{Ker}(f) \to X$ de f y un conúcleo $\rho : Y \to \mathrm{Coker}(f)$ de f; y el morfismo $\overline{f} : \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Ker}(\rho)$ es un isomorfismo.

Ejemplo 1.31. [22, 5.90]

(a) Sea R un anillo asociativo con identidad. La categoría $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$ es abeliana. En particular, $Ab = \mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$ es abeliana.

(b) La subcategoría $\mathcal{G}$ de $\mathbb{Z} - \mathbf{Mod}$ de grupos abelianos finitamente generados es una subcategoría abeliana.

(c) La subcategoría plena $\mathcal{T}$, de todos los grupos abelianos de torsión, es una categoría abeliana.

1.2 Conjuntos parcialmente ordenados y retículas

En esta sección abordamos un breve recordatorio de nociones básicas sobre conjuntos parcialmente ordenados y retículas. Para una lectura más amplia y profunda del tema, sugerimos consultar, por ejemplo, [3], [9], [10], [24], [25].

Definición 1.32. Un **conjunto parcialmente ordenado (copo)** es un par (A, ω) donde A es un conjunto distinto del vacío y $\omega \subseteq A \times A$ es una relación binaria sobre A tal que, para cualesquiera $x, y, z \in A$, se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $(x, x) \in \omega$ (reflexividad)

(b) $(x, y) \in \omega \;\&\; (y, x) \in \omega \Rightarrow x = y$ (antisimetría).

(c) $(x, y) \in \omega \;\&\; (y, z) \in \omega \Rightarrow (x, z) \in \omega$ (transitividad)

En este caso, decimos que ω es una relación de orden en el conjunto A.

Para indicar que el par (x, y) pertenece a la relación ω, usulamente se escribe $x\omega y$. De hecho, es común utilizar símbolos como "$\leq$” o "$\preceq$’.

Así, que $(A, \preceq)$ sea un conjunto parcialmente ordenado, quiere decir que se satisfacen las siguientes condiciones:

(r) Para cada $x \in A$, $x \preceq x$.

(a) Si $x \preceq y$, entonces $y \preceq x$.

(t) Si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$.

Definición 1.33. Sea $(A, \preceq)$ un copo.

(a) Decimos que dos elementos $a, b \in A$ son **comparables** si $a \preceq b$ o $b \preceq a$.

(b) Decimos que dos elementos $a,b \in A$ son **incomparables** si $a \npreceq b$ y $b \npreceq a$. Se denota $a \,||\, b$.

(c) Decimos que un subconjunto X de A es un **conjunto totalmente ordenado (o una cadena)** si todos sus elementos son comparables. En tal caso, también se dice que el orden $\preceq$ es total.

Notación 1.34. Sea $(A,\preceq)$ un copo. Para indicar que $x \preceq y$ pero $x \neq y$, escribimos $x \prec y$.

Ejemplo 1.35. (a) $(\mathbb{N},\leq)$, el conjunto de los números naturales con el orden usual.

(b) $(P(A),\subseteq)$, el conjunto potencia de cualquier conjunto A con el orden dado por la contención de conjuntos.

(c) Consideremos también $\mathbb{N}$ con la relación de divisiblidad, "$|$", dada por $m \mid n$ si y sólo si $n = xm$, para algún $x \in \mathbb{N}$. Se puede verificar que $(\mathbb{N},|)$ es un copo.

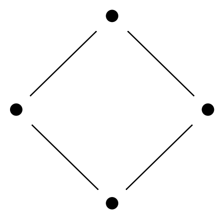
Este ejemplo nos permite notar que un conjunto puede ser ordenado de distintas maneras. Notemos que $(\mathbb{N},\leq)$ y $(\mathbb{N},|)$ son diferentes, ya que por ejemplo $3 \leq 4$, pero $3 \nmid 4$.

Observación 1.36. Dado $(A,\preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado finito, es posible representarlo mediante un diagrama (**Diagrama de Hasse**), como sigue:

(a) Los elementos de A son representados por puntos.

(b) Un punto $a \in A$ es colocado abajo del punto $b \in A$ si y sólo si $a \preceq b$ en A y no existe $c \in A$ tal que $a \prec b \prec c$. Y en este caso, se dibuja una línea entre a y b.

Ejemplo 1.37. . Con el siguiente diagrama de Hasse representamos al copo $(P(A),\subseteq)$, donde $A = \{1,2\}$. En este caso, sabemos que $(P(A) = \{A,\{1\},\{2\},\emptyset\}$



Ejemplo 1.38. (a) Consideremos el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_6,+)$. Recordemos que sus subgrupos son: $\{0\},\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_6$, y podemos ordenados parcialmente con la contención. Notemos que $\mathbb{Z}_2 \,||\, \mathbb{Z}_3$.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
& \mathbb{Z}_6 & \\
\mathbb{Z}_2 \arrow[ur] & & \mathbb{Z}_3 \arrow[ul] \\
& \{0\} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Diagrama de Hasse de $(\mathbb{Z}_6,+,\leq)$

(b) Ahora, consideremos el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_8, +)$. Los subgrupos de $\mathbb{Z}_8$ son: $\{0\}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_8$, ordenados con la contención de subgrupos, denotada "$\leq$". Notemos que en este caso, $\mathbb{Z}_2 \leq \mathbb{Z}_4 \leq \mathbb{Z}_8$. Por lo tanto, $\leq$ es un orden total. El diagrama de Hasse correspondiente es,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_8 \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Z}_4 \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Z}_2 \arrow[d, dash] \\
\{0\}
\end{tikzcd}$$

Diagrama de Hasse de $(\mathbb{Z}_8, +, \leq)$

Definición 1.39. Sean $(A, \preceq)$ un copo y $X \subseteq A$.

(a) Decimos que un elemento $a \in A$ es una **cota superior para** X si para cada $x \in X$, $x \preceq a$.

(b) Decimos que un elemento $a \in A$ es una **cota inferior para** X si para cada $x \in X$, $a \preceq x$.

(c) Decimos que un elemento $m \in X$ es un **máximo** si

$$\forall x \in X (m \preceq x \Rightarrow m = x).$$

(d) Decimos que un elemento $n \in X$ es un **mínimo** si

$$\forall x \in X (x \preceq n \Rightarrow n = x).$$

(e) Decimos que un elemento $m \in X$ es un **mayor** si para cada $x \in X$, $(x \preceq m)$.

(f) Decimos que un elemento $n \in X$ es un **menor** si para cada $x \in X$, $(n \preceq x)$.

Observación 1.40. Sean $(A, \preceq)$ un copo y $X \subseteq A$.

(a) Si $m \in X$ es un elemento mayor, entonces es único.

(b) Si $n \in X$ es un elemento menor, entonces es único.

(c) Si $m \in X$ es mayor, entonces m también es máximo.

(d) Si $n \in X$ es menor, entonces n también es mínimo.

(e) Los recíprocos de los dos incisos anteriores no se satisfacen.

Definición 1.41. Sean $(A, \preceq_1)$ y $(B, \preceq_2)$ conjuntos parcialmente ordenados y $f : A \to B$ una función.

(a) Decimos que f es un **morfismo de orden isótono** si se satisface que para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x \preceq_1 x$ entonces $f(x) \preceq_2 f(y)$.

(f preserva el orden)

(b) Decimos que f es un **morfismo de orden antítono** si se satisface que para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $x \preceq_1 x$ entonces $f(y) \preceq_2 f(x)$.

(f invierte el orden)

Observación 1.42. Un morfismo de orden $f\colon (A, \preceq_1) \to (B, \preceq_2)$ isótono, inyectivo e *inversamente isótono* (es decir, $f(x) \preceq_2 f(y)$ implica $x \preceq_1 y$) se dice un **encaje de copos** de $(A, \leq)$ en $(B, \leq)$. Un encaje de copos suprayectivo es llamado un **isomorfismo** de los conjuntos o $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$.

Una noción más débil que la de isomorfismo de copos, pero con una gran presencia en diversas áreas de las matemáticas, es la de conexión de Galois.[1].

Definición 1.43. Una **conexión de Galois** (isótona) entre los copos $\langle P, \leq\rangle$ y $\langle Q, \preceq\rangle$ es una pareja $\langle f, g\rangle$, donde $f : P \longrightarrow Q$ y $g : Q \longrightarrow P$ son funciones que preservan el orden[2] y cumplen las siguientes propiedades:

1. $p \leq (g \circ f)(p)$ para cada $p \in P$;

2. $(f \circ g)(q) \preceq q$ para cada $q \in Q$.

Se denota por $\langle f, g\rangle : P \longrightarrow Q$ a la conexión de Galois entre los copos $\langle P, \leq\rangle$ y $\langle Q, \preceq\rangle$.

1.2.1 Retículas

Definición 1.44. Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que $(\mathcal{L}, \preceq)$ es una **retícula** (en inglés, "*lattice*") si se satisfacen las siguientes condiciones

(a) Cada pareja $a, b \in \mathcal{L}$ tiene una menor cota superior (llamado el supremo de a y b en $\mathcal{L}$, denotado por $a \vee b$).

(b) Cada pareja $a, b \in \mathcal{L}$ tiene una mayor cota superior (llamado el ínfimo de $a, b \in \mathcal{L}$, denotado por $a \wedge b$).

Observación 1.45. Dada $(\mathcal{L}, \preceq)$ una retícula, aplicando inducción se demuestra que todos subconjunto finito de elementos de L tiene supremo e ínfimo.

[1]Dichas conexiones deben su nombre al famoso teorema fundamental de la teoría de Galois, el cual establece, bajo ciertas condiciones de una extensión de campos, una correspondencia biunívoca entre extensiones intermedias y subgrupos del grupo de Galois de esta extensión (véase [12]).

[2]en el caso del teorema fundamental de la teoría de Galois, las funciones implicadas invierten el orden, por lo que la conexión de Galois correspondiente se dice antítona

Notación 1.46. Si $(\mathcal{L}, \preceq)$ tiene elemento mayor, se denota por $\mathbf{1}_{\mathcal{L}}$; y si tiene elemento menor, este se denota por $\mathbf{0}_{\mathcal{L}}$.

Ejemplo 1.47. (a) Se X un conjunto, entonces $(P(X), \subseteq)$ es una retícula, donde para cualesquiera $A, B \in P(X)$ se tiene que $A \wedge B = A \cap B$ y $A \vee B = A \cup B$. Además, X es el elemento mayor y $\emptyset$ es el elemento menor.

(b) Sea G un grupo abeliano. Entonces, el conjunto de subgrupos de G, junto con la contención, forman una retícula. Esta, será denotada por $Sub(G)$. En este caso, para $H, K \leq G$ se tiene que $H \vee K = H + K = \langle H \cup K \rangle$ (el subgrupo generado por $H \cup K$) y $H \wedge K = H \cap K$. Además, $\mathbf{1}_{Sub(G)} = G$ y $\mathbf{0}_{Sub(G)} = \{0\}$.

(c) Sean R un anillo con identidad y M un $\mathrm{R}-$módulo izquierdo (derecho). El conjunto $Sub_{\mathrm{R}}(M)$, de todos los submódulos izquierdos (derechos) de M forma una retícula, ordenada por la contención de submódulos, denotada "$\leq$". Dados L y N submódulos de M, $L \vee N = L + N = \langle L \cup N \rangle$ (el submódulo generado por $L \cup N$) y $L \wedge N = L \cap N$. En este caso, $\mathbf{1}_{Sub_{\mathrm{R}}(M)} = M$ y $\mathbf{0}_{Sub_{\mathrm{R}}(M)} = \{0\}$.

(d) Todo conjunto totalmente ordenado o cadena es una retícula.

Ejemplo 1.48. No necesariamente, tiene que haber elemento mayor o menor. Por ejemplo, $(\mathbb{N}, \leq)$ es una retícula, su elemento menor es el 0 y no tiene elemento mayor.

Definición 1.49. Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ una retícula con elemento mayor $\mathbf{1}_{\mathcal{L}}$ y elemento menor $\mathbf{0}_{\mathcal{L}}$. Un elemento $a \in \mathcal{L}$ se llama **átomo** (respectivamente, **coátomo**) si $a \neq \mathbf{0}_{\mathcal{L}}$ (respectivamente, $a \neq \mathbf{1}_{\mathcal{L}}$) y no existe $b \in \mathcal{L}$ tal que $\mathbf{0}_{\mathcal{L}} \prec b \prec a$ (respectivamente, $a \prec b \prec \mathbf{1}_{\mathcal{L}}$).

Observación 1.50. Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ una retícula.

(a) Si $a, b \in \mathcal{L}$ y $a \preceq b$, entonces $a \vee b = b$ y $a \wedge b = a$.

(b) $a \wedge b = b \wedge a$ para todo $a, b \in \mathcal{L}$.

(c) $a \vee b = b \vee a$ para todo $a, b \in \mathcal{L}$.

(d) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ para todo $a, b, c \in \mathcal{L}$.

(e) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \vee c$ para todo $a, b, c \in \mathcal{L}$.

(f) $(a \vee b) \wedge a = (a \wedge b) \vee a = a$ para todo $a, b \in \mathcal{L}$.

Observación 1.51. Sea $(\mathcal{L}, \leq)$ una retícula. Si $a, b \in L$ y $a \leq b$, entonces, para cada $c \in \mathcal{L}$:

$$a \vee (c \wedge b) \leq (a \vee c) \wedge b.$$

En efecto, notemos que $a \vee (c \wedge b) \leq b$ ya que $a \leq b$ y $c \wedge b \leq b$. También $a \vee (c \wedge b) \leq a \vee c$ debido a que $a \leq a \vee c$ y $c \wedge b \leq a \vee c$. Por lo tanto, $a \vee (c \wedge b) \leq (a \vee c) \wedge b$.

Definición 1.52. Sean $(\mathcal{L}, \leq)$ una retícula y $B \subseteq \mathcal{L}$. Decimos que B es una **subretícula de** $\mathcal{L}$ si para cada par $b, b' \in B$ se satisface que $inf_{\mathcal{L}}\{b, b'\} \in B$ y $sup_{\mathcal{L}}\{b, b'\} \in B$.

Dada $(\mathcal{L}, \preceq)$ una retícula y $B \subseteq \mathcal{L}$. Notemos que B es una subretícula si y sólo si $(B, \preceq_{|B})$ es una retícula, donde $\preceq_{|B}$ es la restricción del orden de $(\mathcal{L}, \preceq)$ a B.

Definición 1.53. Sean $(\mathcal{L}, \preceq, \vee, \wedge)$ y $(\mathcal{L}', \leq, \vee', \wedge')$ retículas.[3] Una función $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ es un **morfismo de retículas** si para todo $a, b \in \mathcal{L}$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$ y $f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$. Si, además, f es una función biyectiva, entonces f es un **isomorfismo de retículas**. En este último caso, se dice que $(\mathcal{L}, \preceq, \vee, \wedge)$ y $(\mathcal{L}', \leq, \vee', \wedge')$ son isomorfas.

Observación 1.54. (a) Cada morfismo de retículas en un morfismo de orden.

(b) El inverso de un isomorfismo de retículas es también un isomorfismo de retículas.

(c) No todo morfismo de orden preserva supremos e ínfimos. Por ejemplo, consideremos el morfismo de orden $f : (\mathbb{N}^+, |) \to (\mathbb{N}^+, \leq)$ con $f(n) = n$ y observemos que $4 \vee_| 9 = (4, 9) = 36$ y $4 \vee_{\leq} 9 = 4$. De donde, $36 = f(4 \vee_| 9) \neq f(4) \vee_{\leq} f(9) = 4$.

Definición 1.55. Decimos que una retícula $(\mathcal{L}, \preceq)$ es **completa**, si se satisface que todo subconjunto $S \subseteq \mathcal{L}$ tiene supremo e ínfimo; esto es, existen $\bigvee S$ y $\bigwedge S$.

Observación 1.56. Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ una retícula completa, entonces existen $\mathbf{0}_{\mathcal{L}}$ y $\mathbf{1}_{\mathcal{L}}$. Más aún, $\mathbf{0}_{\mathcal{L}} = \bigvee \emptyset$ y $\mathbf{1}_{\mathcal{L}} = \bigwedge \emptyset$.

Observación 1.57. Sea $(\mathcal{L}, \leq)$ un copo tal que todo $S \subseteq \mathcal{L}$ tiene ínfimo (supremo) en $\mathcal{L}$. Entonces, $(\mathcal{L}, \leq)$ es una retícula completa.

Observación 1.58. En una retícula completa $(\mathcal{L}, \leq)$, un subconjunto $B \subseteq \mathcal{L}$ es una **subretícula completa** si para cada $X \subseteq B$ se satisface $\bigwedge_{\mathcal{L}}(X), \bigvee_{\mathcal{L}} \in B$.

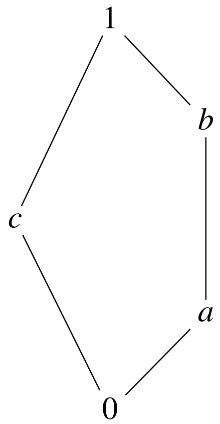
Definición 1.59. Decimos que una retícula $(\mathcal{L}, \preceq)$ es **modular** si para cada $a, b \in \mathcal{L}$ tal que $a \leq b$ y para cada $c \in L$ se satisface que $a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$.

Ejemplo 1.60. (a) Toda cadena es una retícula modular.

(b) Para cualquier grupo abeliano G, su retícula de subgrupos $Sub(G)$ es modular.

Ejemplo 1.61. La siguiente retícula, llamada "Pentágono", no es modular.

[3] Para evitar confusiones, en esta definición distinguimos mediante la notación a los supremos e ínfimos de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$.



Retícula Pentágono

Más aún, una retícula es modular si y sólo si no contiene una subretícula de cinco elementos isomorfa al pentágono.

Observación 1.62. Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ una retícula. Las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $(\mathcal{L}, \leq)$ es modular.

(b) $\forall a,b,c \in \mathcal{L}\,(a \leq b\ \ \&\ \ a \wedge c = b \wedge c\ \ \&\ \ a \vee c = b \vee c \Rightarrow a = b)$.

Definición 1.63. Una retícula completa $(\mathcal{L}, \preceq)$ es **superiormente continua** si para todo $a \in A$ y $X \subseteq \mathcal{L}$ dirigido[4] se satisface que $a \wedge \bigvee X = \bigvee\{a \wedge x \mid x \in X\}$.

Observación 1.64. (a) A una retícula completa, modular y superiormente continua, le llamaremos **idioma**, ya que nos permite tener ün lenguaje"para comunicar las ideas en nuestra investigación que relacionan situaciones de categorías de módulos, con técnicas reticulares y en contextos categóricos más generales.

(b) Cabe mencionar que, en inglés, el término dado por Harold Simmons en su investigación es "*idiom*", que se puede traducir como "modismo"; pero también como "lenguaje" para expresar una idea en un contexto específico.

Ejemplo 1.65. Sean R un anillo con identidad y M un R−módulo izquierdo (derecho). La retícula $(Sub_{\mathrm{R}}(M), \leq)$ de todos los submódulos izquierdos (derechos) de M es una retícula completa, modular y superiormente continua. Dados una familia de subóduos $\{L_i\}_{i\in I}$,

$$\bigvee_{i\in I} L_i = \sum_{i\in I} L_i \qquad \bigwedge_{i\in I} L_i = \bigcap_{i\in I} L_i.$$

$$\mathbf{1}_{Sub_{\mathrm{R}}(M)} = M \text{ y } \mathbf{0}_{Sub_{\mathrm{R}}(M)} = \{0\}.$$

Es así que $Sub_R(M)$ es también llamado el **idioma de submódulos** del módulo M.

[4]es decir, X es un conjunto no vacío, junto con una relación binaria reflexiva y transitiva, que cumple que cada par de sus elementos tiene una cota superior

Ejemplo 1.66. Ahora, consideremos

$$Sub^{fi}(M) := \{N \mid N \text{ es un } R\text{−submódulo totalmente invariante de } M\},$$

la subretícula de $(Sub_{\mathrm{R}}(M), \leq)$ que consta de los submódulos totalmente invariantes de M. [5]

De hecho, $Sub^{fi}(M)$ e un idioma, estudiado en la teoría de R−módulos; y más aún, relevante en el estudio de los prerradicales que abordaremos en el siguiente capítulo.

Definición 1.67. Una **categoría abeliana de Grothendieck**, $\mathcal{G}$, es una categoría abeliana con un generador, tiene coproductos directos arbitrarios, y que satisface el axioma AB5:

(*) Para cada $X \in \mathcal{G}$ y para cada subobjeto $Y \leq X$, y cualquier familia dirigida $\{X_i\}_{i \in I}$ de subobjetos de X, se satisface que $\sum_{i \in I} X_i \cap Y = \sum_{i \in I} (X_i \cap Y)$.

Ejemplo 1.68. En vista de [3, Proposition 3.2.2], sabemos que para cualquier subobjeto X de una categoría abeliana de Grothendieck, $\mathcal{G}$, se satisfaque que $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}(X)$, la colección de de subobjetos de X, junto con el orden dado por la relación de "subobjeto", resulta ser una retícula completa, modular y superiormente continua; esto es, un ïdioma."

Definición 1.69. Una retícula $(\mathcal{L}, \preceq)$ es **distributiva** si para todo $a \in \mathcal{L}$ y $b, c \in \mathcal{L}$ se satisface que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. (Equivalentemente, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.)

Definición 1.70. Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ una retícula con elemento mayor $\mathbf{1}_{\mathcal{L}}$ y elemento menor $\mathbf{0}_{\mathcal{L}}$. Dados $a, b \in \mathcal{L}$, se dice que a es un **complemento** de b si $a \vee b = \mathbf{1}_{\mathcal{L}}$ y $a \wedge b = \mathbf{0}_{\mathcal{L}}$. Decimos que $(\mathcal{L}, \preceq)$ es una retícula **complementada** si todos sus elementos tienen complemento.

Definición 1.71. Sea $(\mathcal{L}, \preceq)$ una retícula con elemento mayor $\mathbf{1}_{\mathcal{L}}$ y elemento menor $\mathbf{0}_{\mathcal{L}}$. Se dice que $(\mathcal{L}, \preceq)$ es **booleana** si es distributiva y complementada.

El ejemplo por antonomasia de retícula booleana es el que se presenta en el Ejemplo 1.46, (a). No es difícil constatar que en una retícula booleana cada elemento tiene un único complemento.

Definición 1.72. Una retícula completa $(\mathcal{L}, \preceq)$es un **marco** si para todo $a \in A$ y $X \subseteq A$, se satisface que $a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$.

Un ejemplo clásico e importante de marco es el siguiente:

Ejemplo 1.73. Consideremos X un espacio topológico y $\mathcal{O}(X) = \{U \subseteq X \mid U \text{es abierto}\}$. Tomando la contención de conjuntos, tenemos que $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ es un marco; donde

$$\bigvee \{U_i\}_{i \in I} = \bigcup \{U_i\}_{i \in I}, \quad \bigwedge \{U_i\}_{i \in I} = Int\left(\bigcap \{U_i\}_{i \in I}\right).$$

[5] Sea N un submódulo de M. Decimos que N es un submódulo totalmente invariante de M si satisface que para todo endomorfismo, $f : M \to M$, $f(N) \subseteq N$. Dado que en inglés estos módulos son llamados "fully invariant", se suele usar la notación $N \leq_{fi} M$.

Producto de retículas

Muchas retículas importantes pueden ser representadas de manera más conveniente como combinaciones aritméticas de retículas más pequeñas si se usa una generalización de las operaciones suma, producto y exponenciación. Nosotros nos restringiremos a hablar de las dos últimas.

Definición 1.74. Dadas dos retículas $\langle L, \leq, \vee_L, \wedge_L \rangle$ y $\langle L', \leq', \vee_{L'}, \wedge_{L'} \rangle$,[6] se define el **producto** $L \times L'$ como el conjunto:

$$L \times L' := \{(a, a') \mid a \in L,\, a' \in L'\}.$$

Si definimos el orden " $\preceq$ " en $L \times L'$ como:

$$(a, a') \preceq (b, b') \Leftrightarrow (a \leq b \;\text{ y }\; a' \leq' b'),$$

resulta que $\langle L \times L', \preceq \rangle$ es un *copo*. Más aún, se tiene que $L \times L'$ es una retícula, con el supremo y el ínfimo dados, de manera natural, por:

(1) $(a, a') \vee (b, b') = (a \vee_L b,\, a' \vee_{L'} b')$.

(2) $(a, a') \wedge (b, b') = (a \wedge_L b,\, a' \wedge_{L'} b')$.

La definición anterior se puede generalizar para el producto de n retículas, $L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n$, con $n \geq 1$. En caso de que $L_i = L$ para cada $i = 1, \ldots, n$, denotamos al producto de retículas $L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n$ por L^n. Más aún, la definición de producto de retículas se extiende de manera natural para una familia $\{L_i\}_{i \in I}$ de retículas. En este último caso, denotamos por $\prod_{i \in I} L_i$ al producto de los elementos de dicha familia.

1.3 Generación y cogeneración de módulos

En esta sección consideramos algunos preliminares que serán útiles en el siguiente capítulo. Los detalles pueden ser consultados en [4]. En adelante, **R** y S denotan anillos asociativos con identidad.

Definición 1.75. Sea $\mathcal{U}$ una clase de **R**-módulos. Decimos que un módulo M está **generado** por la clase $\mathcal{U}$ si existe una familia $\{U_\lambda\}_{\lambda \in A}$ en $\mathcal{U}$ y un epimorfismo

$$\bigoplus_A U_\lambda \to M \to 0$$

para algún conjunto A. En este caso, decimos $\mathcal{U}$ genera a M.

Decimos que la clase $\mathcal{U}$ **genera finitamente** a M, si existe un epimorfismo

$$\bigoplus_{i=1}^{n} U_i \to M \to 0$$

con $U_i \in \mathcal{U}$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

[6] Para evitar confusiones, en esta definición distinguimos mediante la notación a los supremos e ínfimos de L y L'.

Observación 1.76. Sea U un $\mathrm{R}-$módulo y consideremos $\mathcal{U}=\{U\}$. En este caso, decimos que $\mathcal{U}$ *genera* a un módulo M si existe un epimorfismo

$$U^{(A)} \to M \to 0$$

para algún conjunto A, donde $U^{(A)}$ denota al coproducto directo de $|A|$ copias de U.

Dualmente, se tiene el concepto de cogeneración de módulos vía una clase de módulos dada.

Definición 1.77. Sea $\mathcal{U}$ una clase de R-módulos. En este caso $\mathcal{U}$ cogenera a M.

Decimos que un módulo M está **cogenerado** por la clase $\mathcal{U}$ si existe una familia $\{U_\lambda\}_{\lambda\in A}$ en $\mathcal{U}$ y un monomorfismo

$$0 \to M \to \prod_A U_\lambda$$

para un conjunto A. Decimos que la clase $\mathcal{U}$ **cogenera finitamente** a M, si existe un monomorfismo

$$0 \to M \to \prod_{i=1}^{n} U_i$$

con $U_i \in \mathcal{U}$ para cada $i=1,...,n$.

Observación 1.78. Si $\mathcal{U}=\{U\}$ entonces U **cogenera** a M si existe un monomorfismo

$$0 \to M \to U^A$$

para algún conjunto A.

Notación 1.79. (a) La clase de todos los módulos que están generados por $\mathcal{U}$ se denota por $Gen(\mathcal{U})$ Además, $FGen(\mathcal{U})$ denota la clase de módulos finitamente generados por $\mathcal{U}$.

(b) La clase de todos los módulos que están cogenerados por $\mathcal{U}$ se denota por $Cog(\mathcal{U})$. Similarmente, $FCog(\mathcal{U})$ denotará la clase de módulos finitamente cogenerados por $\mathcal{U}$.

Ejemplo 1.80. (Generando módulos)

(a) Consideremos el anillo R, visto como $\mathrm{R}-$módulo. Tomando la clase $\mathcal{U}:=\{R\}$, del hecho que para cada $R-$módulo M existe un epimorfismo $R^{(X)} \to M \to 0$, para algún conjunto X; podemos concluir que *R es un generador en su categoría de $R-$módulos izquierdos.*

(b) (Estructura de los grupos abelianos finitamente generados) Es conocido que si G es un grupo abeliano finitamente generado, entonces existen enteros no negativos $r,s_1,...,s_m$ tales que G es isomorfo al grupo:

$$G \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{s_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{s_m}$$

esto es la clase de grupos abelianos finitamente generados es la clase $FGen(\mathbb{Z},\{\mathbb{Z}_n|n=2,3,...\})$.

Ejemplo 1.81. (Cogenerando módulos)

(a) Si M es un grupo abeliano *libre de torsión*, existe un monomorfismo $M \to \mathbb{Q}^M$; como $\mathbb{Z}-$módulos, M es cogerado por $\mathbb{Q}$. Por otro lado si A es un conjunto, entonces cualquier subgrupo de $\mathbb{Q}^A$ es libre de torsión. Por lo tanto los grupos abelianos libres de torsión son precisamente los grupos abelianos cogenerados por $\mathbb{Q}$.

(b) Si $\mathcal{U} = \{\mathbb{Z}_n | n > 1\}$ entonces $Gen(\mathcal{U})$ es la clase de grupos abelianos de torsión; mientras que $\mathrm{Cog}(\mathcal{U})$ es la clase de grupos abelianos libres de torsión. En efecto, $\mathbb{Q}$ es un cogenerador para la clase de grupos abelianos libres de torsión, también es sencillo observar que el grupo $G = \bigoplus_{n>1} \mathbb{Z}_n$ es un generador para la clase de grupos abelianos de torsión.

Proposición 1.82. *[4] Sea $\mathcal{U}$ una clase de* $\mathrm{R}-$*módulos. Las siguientes condiciones se satisfacen*

(a) *$Gen(\mathcal{U})$ es cerrada bajo isomorfismos, módulos cociente y sumas directas arbitrarias.*

(b) *$Cog(\mathcal{U})$ es cerrada bajo isomorfismos, submódulos y productos directos arbitrarios.*

1.3.1 Módulos y anillos semisimples

Recordemos que un R-módulo izquierdo T no trivial es llamado **simple** si sus únicos submódulos son $\{0\}$ y T. Se denotará por $\mathcal{S}$ la clase de módulos simples y por $\mathrm{R}-simp$ a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos izquierdos simples.[7]

Definición 1.83. Sean M un $\mathrm{R}-$módulo, A un conjunto y $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de submódulos simples de M. Si M es la suma directa de esta familia, entonces $M = \bigoplus_A T_\alpha$ es una descomposición semisimple de M. Un módulo M es semisimple si tiene una descomposición semisimple.

Proposición 1.84. *Sea M es un* R-*módulo izquierdo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *M es semisimple*

(b) *M está generado por modulos simples.; esto es, $M \in Gen(\mathrm{R}-simp)$.*

Así, concluimos que $Gen(\mathcal{S}) = Gen(\mathrm{R}-simp)$ es la clase generada por todos los módulos simples; y por lo tanto, la clase de todos los módulos semisimples es cerrada bajo submódulos, módulos cociente y suma directa arbitraria.

Proposición 1.85. *(Lema de Schur)*
Sean $S, T \in \mathrm{R}-Mod$ y sea $f : S \to T$ un R-homomorfismo distinto de cero.

(1) Si S es simple, entonces f es un monomorfismo.

(2) Si T es simple, entonces f es un epimorfismo.

[7] Es un hecho bien conocido que existe una correspondencia biunívoca entre las clases de isomorfismo de R-módulos simples y la clase de ideales izquierdos máximos de R. Si elegimos exactamente un representante de cada clase de isomorfismo de R-módulos simples, obtenemos un conjunto completo e irredundante.

(3) *Si tanto S como T son simples, entonces f es un isomorfismo.*

Una propiedad distinguida de $\mathrm{R}-simp$, cuya prueba es inmediata a partir del Lema de Schur, es que sus elementos son "homológicamente independientes"; es decir, dados $S, T \in R$-simp, $S \neq T$, se cumple que $\mathrm{Hom}_R(S,T) = 0$.

DEFINICIÓN 1.86. Decimos que un anillo R es *simple* si sus únicos ideales son 0 y R. Se dice que R es *semisimple izquierdo* si el módulo regular ${}_RR$ es semisimple. De manera análoga se definen los anillos semisimples derechos.

OBSERVACIÓN 1.87. Si R es un anillo semisimple izquierdo, entonces R es una suma de un número finito de ideales izquierdos simples o mínimos, pues los submódulos de ${}_RR$ son sus ideales izquierdos y R es un anillo con 1. Se sigue de lo anterior que $|R\text{-simp}| = n$ para algún $n \geq 1$.

PROPOSICIÓN 1.88. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

(a) *R es simple y artiniano izquierdo.*

(b) *R es simple y artiniano derecho.*

(c) *R es simple y ${}_RR$ es semisimple.*

(d) *R es simple y R_R es semisimple.*

TEOREMA 1.89. *(Wedderburn-Artin)*
Un anillo R es semisimple izquierdo (derecho) si, y sólo si, es un producto directo finito de anillos simples artinianos izquierdos (derechos).

OBSERVACIÓN 1.90. Como consecuencia del Teorema de Wedderburn-Artin, todo anillo semisimple izquierdo es semisimple derecho. En vista de ello, se omite el apelativo "izquierdo" y "derecho" al hacer referencia a dichos anillos.

COROLARIO 1.91. *Todo anillo semisimple es artiniano izquierdo (derecho).*

Si bien todo anillo semisimple resulta artiniano, en algunos textos se suele llamar a estos anillos *semisimples artinianos* para distinguirlos de otras interpretaciones.

PROPOSICIÓN 1.92. *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *R es semisimple.*

(b) *Todo R-módulo es semisimple.*

(c) *Toda sucesión exacta corta se escinde.*

(d) *Todo R-módulo es inyectivo.*

(e) *Todo R-módulo es proyectivo.*

(f) $R \cong \prod_{i=1}^{m} \mathbb{M}_{n_i}(D_i)$, *donde D_i es anillo con división y $n_i \geq 1$ para cada $i = 1, \ldots, m$.*

Observación 1.93. La condición (f) de la proposición anterior es el famoso Teorema de Estructura de Wedderburn-Artin.

Capítulo 2

Prerradicales

En la década de los años sesenta, J. M. Maranda introdujo los conceptos de prerradical y radical; y en esta misma década, S. E. Dickson comenzó el estudio de las teorías de torsión en una categoría abeliana, demostrando que este concepto es equivalente a la noción de radical idempotente en el sentido de Maranda y estableció una correspondencia biyectiva entre las teorías de torsión hereditarias y los radicales exactos izquierdos.

2.1 Motivación: ejemplos en álgebra

2.1.1 La torsión de un grupo abeliano.

Sea G un grupo abeliano. Para cada $x \in G$, denotamos por $o(x)$ al orden de x. Denotamos por $t(G) := \{x \in G \mid o(x) < \infty\}$, al conjunto de elementos de G que tienen orden finito.

Proposición 2.1. *Sea G un grupo abeliano, entonces $t(G)$ es un subgrupo de G.*

Demostración. Sean $x, y \in G$ tales que $o(x) = n$ y $o(y) = m$. Luego, por ser G abeliano, sabemos que $(xy)^{nm} = x^n y^m = 0_G$. De donde, xy también tiene orden finito. Esto es, $t(G)$ es cerrado bajo la operación de G.

Finalmente, dado $x \in t(G)$, con $o(x) = n$, notemos que $x^{n-1}x = xx^{n-1} = x^n = 0_G$. Por lo tanto, x^{n-1} es el inverso de x respecto de la operación en G y está en $t(G)$. □

Definición 2.2. Sea G un grupo abeliano. El subgrupo $t(G)$ es llamado el **subgrupo de torsión de G**.

Definición 2.3. Sea G un grupo abeliano.

(a) Decimos que G es un **grupo de torsión** si se satisface $t(G) = G$.

(b) Decimos que G es un **grupo libre de torsión** si se satsiface que $t(G) = \{0_G\}$.

Ejemplo 2.4. (a) Sea $n \geq 2$ un número natural, entonces $(\mathbb{Z}_n, +)$ es un grupo de torsión.

(b) $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ y $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ son grupos libres de torsión.

Proposición 2.5. *Sea $f\colon G \to H$ un morfismo de grupos abelianos. Entonces, $f(t(G)) \subseteq t(H)$.*

Demostración. Sea $x \in t(G)$ y $n = o(x)$, el orden de x. Luego, por ser f un morfismo de grupos, sabemos que $o(f(x))$ divide al $o(x)$. En particular, esto nos dice que $o(f(x))$ es finito. Por lo tanto, $f(x) \in t(H)$. □

Notemos que a partir de las observaciones anteriores tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Sea $\mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$ la categoría de grupos abelianos. Tomar la torsión de cada grupo abeliano, induce un funtor aditivo*

$$t\colon \mathbb{Z} - \mathrm{Mod} \to \mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$$

tal que para cada grupo abeliano G, $t(G)$ es el subrupo de torsión de G; y para cada morfismo de grupos abelianos, $f\colon G \to H$, $t(f) := f|_{t(G)}\colon t(G) \to t(H)$.

2.1.2 Multiplicar un ideal por un ideal bilateral.

Sea R un anillo con identidad e I un ideal bilateral de R. Dado M un R$-$módulo izquierdo, se define IM, el conjunto de todas las sumas finitas $\sum r_i x_i$ donde $ri \in I$, $x_i \in M$. Notemos que IM es un submódulo izquierdo de M.

Ejemplo 2.7. Sea n un entero positivo fijo. Para un grupo abeliano G, $nG = \{ng \mid g \in G\}$ es un subgrupo de G. Ahora, para cualquier morfismo de grupos abelianos $\varphi\colon G \to H$, se tiene que $\varphi(nG) \subseteq nH$.

Proposición 2.8. *Sea $f\colon M \to N$ un morfismo de $R-$módulos e I un ideal bilateral. Entonces, $f(IM) \leq IN$.*

Demostración. Sea $m = \sum_{i \in F, F\, finito} r_i x_i \in IM$. Entonces, aplicando f obtenemos $f(m) = \sum_{i \in F} r_i f(x_i)$. Luego, $f(m) \in If(M) \subseteq IN$, para cada $m \in IM$. □

2.1.3 Trazas y Rechazos

Sea $\mathfrak{U}$ una clase de módulos y M un módulo. Se define la *traza de M respecto a $\mathfrak{U}$* como:

$$Tr_{\mathfrak{U}}(M) = \sum \{\Im(h) \mid h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(U, M), U \in \mathfrak{U}\}$$

Y el *rechazo de M respecto a $\mathcal{U}$*; está definido como:

$$Rej_{\mathcal{U}}(M) = \bigcap\{\mathrm{Ker}h \mid h \in \mathrm{Hom_R}(M,U), U \in \mathcal{U}\}.$$

Observe que aunque la clase $\mathcal{U}$ no necesariamente es un conjunto, los subconjuntos de M, $Tr_{\mathcal{U}}(M)$ y $Rej_{\mathcal{U}}(M)$ están bien definidos en M, esto es, $Tr_{\mathcal{U}}(M) \leq M$ y $Rej_{\mathcal{U}}(M) \leq M$.

Proposición 2.9. *[4] Sea $\mathcal{U}$ una clase de módulos, M un módulo. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(1) $Tr_{\mathcal{U}}(M)$ es el mayor submódulo L de M generado por $\mathcal{U}$.

(2) $Rej_{\mathcal{U}}(M)$ es el menor submódulo K de M tal que M/K está cogenerado por $\mathcal{U}$.

Proposición 2.10. *[4] Sean M un módulo y $\mathcal{U}$ una clase de módulos. Si $K \leq M$, entonces:*

(1) $K = Tr_{\mathcal{U}}(M)$ si y solo si $Tr_{\mathcal{U}}(M) \leq K$ y $Tr_{\mathcal{U}}(K) = K$.

(2) $K = Rej_{\mathcal{U}}(M)$ si y sólo si $K \leq Rej_{\mathcal{U}}(M)$ y $Rej_{\mathcal{U}}(M/K) = 0$

entonces $Tr_{\mathcal{U}}(Tr_{\mathcal{U}}(M)) = Tr_{\mathcal{U}}(M)$ y $Rej_{\mathcal{U}}(M/Rej_{\mathcal{U}}(M)) = 0$.

Proposición 2.11. *[4] Sea $\mathcal{U}$ una clase de módulos, M un módulo. Si N es un módulo y $f : M \to N$ es un homomorfismo, entonces*

$$f(Tr_{\mathcal{U}}(M)) \leq Tr_{\mathcal{U}}(N) \text{ y } f(Rej_{\mathcal{U}}(M)) \leq Rej_{\mathcal{U}}(N)$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N & M \arrow[r, "f"] & N \\
Tr_{\mathcal{U}}(M) \arrow[u] \arrow[r, "f|_{Tr_{\mathcal{U}}(M)}"'] & Tr_{\mathcal{U}}(N) \arrow[u] & Rej_{\mathcal{U}}(M) \arrow[u] \arrow[r, "f|_{Rej_{\mathcal{U}}(M)}"'] & Rej_{\mathcal{U}}(N) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.12. *[4] Sea $\mathcal{U}$ una clase de módulos, M un módulo. Entonces:*

(1) $\mathcal{U}$ genera a M si y sólo si $Tr_{\mathcal{U}}(M) = M$.

(2) $\mathcal{U}$ cogenera a M si y sólo si $Rej_{\mathcal{U}}(M) = 0$.

2.1.4 El zoclo y el radical

A continuación, recordamos que el zoclo (en inglés, "*socle*") de un módulo M es el mayor submódulo de M generado por la clase de módulos simples $\mathcal{S}$, esto es, el mayor submódulo semisimple de M.

Definición 2.13. Sea M es un $R-$módulo izquierdo y $\mathcal{S}$ la clase de módulos simples. Se define y se denota el **zoclo de M** como:

$$\mathrm{soc}(M) = \sum\{f(T) \mid f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(T,M), T \in \mathcal{S}\} = Tr_{\mathcal{S}}(M)$$

.

Observación 2.14. Un módulo M es semisimple si y sólo si $M = \mathrm{soc}(M)$. En efecto, $M \in Gen(\mathcal{S})$ si y sólo si $Tr_{\mathcal{S}}(M) = M$, que por definición $Tr_{\mathcal{S}}(M) = \mathrm{soc}(M)$.

Observación 2.15. Sea M un $\mathrm{R}-$módulo y $K \leq M$. Entonces, $\mathrm{soc}(K) = K \cap \mathrm{soc}(M)$. En particular, $\mathrm{soc}(\mathrm{soc}(M)) = \mathrm{soc}(M)$.

Proposición 2.16. *[4] Sean M y N $R-$módulos izquierdos y $f\colon M \to N$ un morfismo de $R-$módulos. Entonces,*

$$f(\mathrm{soc}(M)) \leq \mathrm{soc}(N).$$

Como ya lo hemos mencionado, $\mathrm{soc}(M)$ es el mayor submódulo de M generado por por la clase $\mathcal{S}$ de todos los R-módulos simples. Ahora, veremos que para cada módulo M el Radical de Jacobson es el menor submódulo K de M tal que M/K está cogenerado por $\mathcal{S}$.

Definición 2.17. Sea M un $\mathrm{R}-$módulo izquierdo. Se define el **Radical de Jacobson de M** como el rechazo de M respecto a $\mathcal{S}$, y se denota por:

$$\mathrm{rad}(M) = \bigcap\{\mathrm{Ker} h \mid h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(M,T), T \in \mathcal{S}\} = Rej_{\mathcal{S}}(M).$$

Observación 2.18. Sea M un $\mathrm{R}-$módulo izquierdo. Recordemos que L un submódulo de M, es máximo si y sólo si M/L es un módulo simple. Se puede demostrar que

$$\mathrm{rad}(M) = \bigcap\{L \leq M \mid M/L \in \mathcal{S}\}.$$

Observación 2.19. Sea M un R-módulo izquierdo, entonces $\mathrm{rad}(M) = 0$ si y sólo si M está cogenerado por la clase de módulos simples $\mathcal{S}$. En particular, si M es semisimple, entonces $\mathrm{rad}(M) = 0$.

Observación 2.20. Para cada módulo M se satisface que $\mathrm{rad}(M) = Rej_{(\prod_{\mathcal{S}} S)}(M) = Rej_{(\bigoplus_{\mathcal{S}} S)}(M) = \bigcap_{S \in \mathcal{S}} Rej_S(M)$.

Proposición 2.21. *Sean M y N $R-$módulos izquierdos y $f\colon M \to N$ momorfismo de* $\mathrm{R}-$*módulos.. Entonces:*

$$f(\mathrm{rad}(M)) \leq \mathrm{rad}(N).$$

Demostración. Como $\mathrm{rad}(M) = Rej_{\mathcal{S}}(M)$ por 2.11 se sigue que $f(\mathrm{rad}(M)) = f(Rej_{\mathcal{S}}(M)) \leq Rej_{\mathcal{S}}(N) = \mathrm{rad}(N)$. □

2.2 Prerradicales

En esta sección presentamos un panorama general sobre la teoría de prerradicales. Para mayores detalles en los resultados y proposiciones, se sugiere consultar, por ejemplo, [7] y [19].

Definición 2.22. Un **prerradical** r en la categoría R−Mod es decir r es un funtor $r\colon$ R−Mod $\to$ R−Mod tal que:

(a) Para cada $M \in$ R−Mod, $r(M) \leq M$.

(b) Para cada morfismo de $R-$módulos, $f\colon M \to N$, $f(r(M)) \leq r(N)$.

El morfismo de $R-$módulos inducido $r(f)\colon r(M) \to r(N)$ es la restricción y correstricción de f a $r(M)$ y $r(N)$, respectivamente, $r(f) = f|_{r(M)}$.

Observación 2.23. Recordando la definición de subfuntor, 1.26, se puede verificar que $r\colon$ R−Mod $\to$ R−Mod es prerradical si y sólo si es subfuntor del funtor identidad $1_{\mathrm{R-Mod}}\colon$ R−Mod $\to$ R−Mod.

$$\iota\colon r \to 1_{\mathrm{R-Mod}}$$

Para cada $M \in$ R−Mod, $\iota_M\colon r(M) \to M$ es el morfismo de inclusión de $R-$módulos de $r(M)$ en M. Esto es, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} r(M) \arrow[r, hook, "\iota_M"] \arrow[d, "r(f)"'] & M \arrow[d, "f"] \\ r(N) \arrow[r, hook, "\iota_N"] & N \end{tikzcd}$$

Los ejemplos presentados en la sección previa de este capítulo resultan ser prerradicales.

Proposición 2.24. *Si $r \in R-pr$ y sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia en $R-Mod$ entonces:*

(a) $r(\bigoplus_I M_i) = \bigoplus_I r(M_i)$.

(b) $r(\prod_I M_i) \leq \prod_I r(M_i)$.

2.2.1 Estructura reticular de $\mathrm{R}-pr$

La clase de todos los prerradicales es parcialmente ordenada si se define el orden parcial: $r_1 \preceq r_2$ si y solo si $r_1(M) \leq r_2(M)$ para cada $M \in$ R−Mod. Si adicional I una clase de índices se define para cada familia de prerradicales $\{r_i\}_{i\in I}$, la menor cota superior $\bigvee_I r_i$ y la mayor cota inferior $\bigwedge_I r_i$, para cada $M \in$ R$-$Mod:

$$\left[\bigvee_I r_i\right](M) = \sum_I r_i(M)$$

y

$$\left[\bigwedge_I r_i\right](M) = \bigcap_I r_i(M)$$

Se denotará por $R - pr$ a la colección de todos los prerradicales parcialmente ordenados. Si $M \in$ R$-$Mod, $r_i(M) \leq M$ para cada $i \in I$, entonces $\{r_i(M) | i \in I\}$ es un conjunto. En efecto resulta R $- pr$ una gran retícula completa, ya que los submódulos $\sum_I r_i(M)$ y $\bigcap_I r_i(M)$ están bien definidos. Aquí, el término "gran” indica que, en general, R $- pr$ puede no ser un conjunto, al ser un prerradical una asignación entre clases.[1]

Proposición 2.25. *(Ley modular) Sean $r, s, t \in$ R $- pr$, tal que $r \preceq s$, entonces:*

$$r \vee (s \wedge t) = s \wedge (r \vee t).$$

2.2.2 Operaciones en R $- pr$

Observación 2.26. Recordemos que por el Teorema de la Correspondencia en R$-$módulos, dado N un submódulo de un módulo M, el epimorfismo canónico $\pi_N : M \to M/N$ induce un isomorfismo de retículas entre $Sub_{\mathrm{R}}(M/N)$ y $Sub_{\mathrm{R}}(M)/N := \{L \leq M \mid N \subseteq L\}$. De manera particular, dados $\sigma, \tau \in$ R $- pr$ y M un módulo, consideremos el módulo cociente $\dfrac{M}{\sigma(M)}$, aplicando τ, obtenemos $\tau\left(\dfrac{M}{\sigma(M)}\right)$ un submódulo de $\dfrac{M}{\sigma(M)}$. Por la correspondencia antes mencionada, existe un único submódulo L de M tal que $\sigma(M) \leq L$ y $\dfrac{L}{\sigma(M)} \cong \tau\left(\dfrac{M}{\sigma(M)}\right)$. Este submódulo L, es el que denotaremos por $(\sigma : \tau)(M)$ en el iniciso (b) de la siguiente definición.

Definición 2.27. Para cada $\sigma, \tau \in$ R $- pr$ se definen las siguientes operaciones:

(a) El **producto de prerradicales,** $\sigma \cdot \tau$, dado por la composición de funtores. Esto es, $\sigma \cdot \tau := \sigma \circ \tau$. Para cada $M \in$ R$-$Mod, $\sigma \cdot \tau(M) = \sigma(\tau(M))$.

(b) El **coproducto de prerradicales,** $(\sigma : \tau)$, tal que para cada $M \in$ R$-$Mod se satisface que $\dfrac{(\sigma : \tau)(M)}{\sigma(M)} = \tau\left(\dfrac{M}{\sigma(M)}\right)$.

Definición 2.28. Un prerradical σ es **idempotente** si $\sigma \cdot \sigma = \sigma$ y σ es llamado **radical** si $\sigma : \sigma = \sigma$.

[1] Este último aspecto será abordado en la sección final de estas notas.

2.3

Prerradicales alfa y omega

En esta secci{on, mencionamos nociones y resultados de prerradicales que forman parte de las investigaciones de Raggi, Ríos, Signoret, Fernández-Alonso y Rincón. Dos clases de prerradicales muy distinguidos son los prerradicales alfa y omega, cuya definición se presenta enseguida.

Definición 2.29. Sean $M \in$ R$-$Mod y N un submódulo totalmente invariante de M. Se definen los prerradicales $\alpha_N^M :$ R$-$Mod $\to$ R$-$Mod y $\omega_N^M :$ R$-$Mod $\to$ R$-$Mod,

$$\alpha_N^M(K) = \sum\{f(N) | f \in Hom(M,K)\}$$

y

$$\omega_N^M(K) = \bigcap\{f^{-1}(N) | f \in Hom(K,M)\}$$

para cada $K \in$ R$-$Mod.

Proposición 2.30. *Sea $\sigma \in R-pr$, $M \in R-mod$ y N es submódulo totalmente invariante de M. Entonces $\sigma(M) = N$ si y sólo si, $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$.*

Observación 2.31. Dada una clase $\mathfrak{U}$ de módulos, se satisface:

$$Tr_{\mathfrak{U}}(K) = \sum_{M \in \mathfrak{U}} \alpha_M^M(K) = \left[\bigvee_{\mathfrak{U}} \alpha_M^M\right](K)$$

y

$$Rej_{\mathfrak{U}}(K) = \bigcap_{M \in \mathfrak{U}} \omega_0^M(K) = \left[\bigwedge_{\mathfrak{U}} \omega_0^M\right](K)$$

Proposición 2.32. *Para cada $\sigma \in R-pr$, se tiene*

(a) $\sigma = \bigvee\{\alpha_{\sigma(M)}^M | M \in R-Mod\}$.

(b) $\sigma = \bigwedge\{\omega_{\sigma(M)}^M | M \in R-Mod\}$.

Una propiedad relevante de la (gran) retícula de prerradicales sobre un anillo es que es atómica y coatómica. De hecho,

1. $\left\{\alpha_S^{ES} \mid S \in \text{R}-simp\right\}$ es el conjunto de átomos de R$-pr$.

2. $\left\{\omega_I^R \mid I \text{ es un ideal máximo de } R\right\}$ es el conjunto de coátomos de R$-pr$.

A continuación, se presentan la caracterizaciones de los prerradicales idempotentes y los radicales en términos de los prerradicales alfa y omega.

Proposición 2.33. *Sea $\sigma \in \mathrm{R}-pr$ entonces:*

(a) α_M^M *es idempotente para cada $M \in R-Mod$. Además; σ es idempotente si y solo si* $\sigma = \bigvee\{\alpha_M^M | \sigma(M) = M, M \in R-Mod\}$.

(b) ω_0^M *es radical para cada $M \in R-Mod$. Además, σ es radical si y solo si* $\sigma = \bigwedge\{\omega_0^M | \sigma(M) = 0, M \in R-Mod\}$.

Proposición 2.34. *Sean $\{M_\gamma\}_{\gamma\in I}$ y $\{N_\gamma\}_{\gamma\in I}$ dos familias de módulos tales que para cada $\gamma \in I$, $N_\gamma \leq M_\gamma$. Sean $N = \bigoplus_{\gamma\in I} N_\gamma$, $M = \bigoplus_{\gamma\in I} M_\gamma$, $N^{'} = \prod_{\gamma\in I} N_\gamma$ y $M^{'} = \prod_{\gamma\in I} M_\gamma$.*

(a) *Si N es un submódulo totalmente invariante de M, entonces para cada $\gamma \in I$, N_γ es un submódulo totalmente invariante de M_γ y $\alpha_N^M = \bigvee_{\gamma\in I} \alpha_{N_\gamma}^{M_\gamma}$*

(b) *Si $N^{'}$ es un submódulo totalmente invariante de $M^{'}$, entonces para cada $\gamma \in I$, N_γ es un submódulo totalmente invariante de M_γ y $\omega_{N^{'}}^{M^{'}} = \bigwedge_{\omega\in I} \omega_{N_\gamma}^{M_\gamma}$*

Prerradicales y cambio de anillos

Concluimos esta sección presentando ciertas propiedades sobre prerradicales y cambio de anillos, las cuales figuran en ([6]), ([7]), ([16]) y ([18]). Antes, se recuerda la definición de equivalencia de Morita.

Definición 2.35. Dados dos anillos R y S, se dice que son **Morita equivalentes** si las categorías $\mathrm{R}-Mod$ y $S-Mod$ son equivalentes.

Sea R un anillo y sea $n \geq 1$. Denotamos por $\mathbb{M}_n(R)$ al anillo de matrices de $n\times n$ con coeficientes en R. Es bien conocido que R y $\mathbb{M}_n(R)$ constituyen un ejemplo de anillos equivalentes según Morita. La equivalencia de Morita preserva sucesiones exactas cortas (que se escinden), productos y sumas directas, módulos proyectivos e inyectivos, generadores y cogeneradores, monomorfismos (esenciales) y epimorfismos (superfluos), cápsulas inyectivas, módulos simples, artinianos y noetherianos, finitamente (co)generados e inescindibles. Adicionalmente, las retículas de prerradicales sobre anillos Morita-equivalentes resultan ser isomorfas, como lo afirma el siguiente resultado.

Proposición 2.36. *Si R y S son anillos Morita-equivalentes, entonces $\mathrm{R}-pr$ y $S-pr$ son (grandes) retículas isomorfas.*

El resultado anterior fue generalizado por R. Fernández Alonso y Janeth Magaña como sigue:

Teorema 2.37. *Todo par adjunto $\langle F, G\rangle : R$-Mod $\longrightarrow S$-Mod induce una conexión de Galois $\langle\varphi,\psi\rangle : \mathrm{R}-pr \longrightarrow S-pr$.*

Teorema 2.38. *Un homomorfismo suprayectivo de anillos $R \longrightarrow S$ induce una asignación inyectiva $S - pr \longrightarrow \mathrm{R} - pr$ que preserva el orden.*

Teorema 2.39. *Un funtor $F : R$-Mod $\longrightarrow S$-Mod que es pleno, inyectivo en objetos y que preserva inclusiones induce una asignación inyectiva $\mathrm{R} - pr \longrightarrow S - pr$ que preserva el orden.*

Finalmente, se presenta la descripción de la retícula de prerradicales en el caso de una descomposición de anillos.

Proposición 2.40. *Sea R un anillo. Si $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$, entonces R-pr es una (gran) retícula isomorfa al producto de las (grandes) retículas $\mathrm{R}_i - pr$.*

2.4 Algunos ejemplos de retículas de prerradicales

En esta sección incluimos una breve lista de ejemplos de anillos cuyas retículas de prerradicales han sido parcial o completamente descritas, es decir, anillos para los cuales preguntas como algunas de las siguientes han sido respondidas:

1. ¿Es $\mathrm{R} - pr$ distributiva?, ¿es booleana?
2. ¿Cómo son ciertos elementos distinguidos de $\mathrm{R} - pr$?
3. ¿Es $\mathrm{R} - pr$ un conjunto finito? De ser así, ¿cuántos elementos tiene?
4. Más aún, ¿es $\mathrm{R} - pr$ un conjunto?

Con relación a esta última pregunta, se introduce un poco de terminología. Se dice que un anillo R es **$\mathfrak{p}$-pequeño** si $\mathrm{R} - pr$ es un conjunto. De lo contrario, se dice que R es **$\mathfrak{p}$-grande** .

Anillos $\mathfrak{p}$-pequeños

Dentro de la clase de anillos $\mathfrak{p}$-pequeños, destacan los anillos semisimples (en particular, los anillos con división). El siguiente teorema, que aparece en ([21]), caracteriza a dichos anillos en términos de su retícula de prerradicales.

Teorema 2.41. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

(a) *R es semisimple.*

(b) $\mathrm{R} - pr$ *es una retícula booleana, con 2^n elementos, donde $n = |\mathrm{R} - simp|$.*

La idea central de la prueba del teorema anterior consiste verificar que existe un isomorfismo de retículas $\phi : P(\mathrm{R} - simp) \longrightarrow \mathrm{R} - pr$; a saber, $\phi(A) = \bigvee_{S \in A} \alpha_S^S$ para cada $A \subseteq \mathrm{R} - simp$.

A continuación, se presenta el diagrama de Hasse de la retícula de prerradicales sobre un anillo semisimple R tal que $\mathrm{R}-simp = \{S_1, S_2, S_3\}$. Nótese que, en este caso, los átomos son de la forma α_S^S, con $S \in \mathrm{R}-simp$.

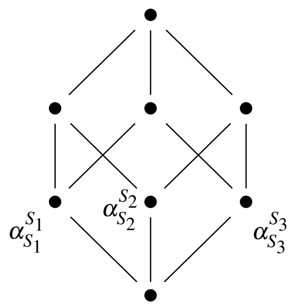


Diagrama de Hasse de $\mathrm{R}-pr$, con R semisimple y $|\mathrm{R}-simp| = 3$

El siguiente caso a considerar es el de los anillos $\mathbb{Z}_{p^n}$, con $n \geq 1$ y p un primo. Es bien conocido que todo $\mathbb{Z}_{p^n}$-módulo es isomorfo a una suma directa de ideales de $\mathbb{Z}_{p^n}$. Por consiguiente, en virtud de la Proposición 2.24, el comportamiento de los prerradicales sobre $\mathbb{Z}_{p^n}$ está completamente determinado por su valor sobre los ideales de este anillo

$$0 \subset p^{n-1}\mathbb{Z}_{p^n} \subset \cdots \subset p\mathbb{Z}_{p^n} \subset \mathbb{Z}_{p^n}.$$

Denotemos por $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n$ a la cadena de ideales de $\mathbb{Z}_{p^n}$, donde, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $I_k := p^{n-k}\mathbb{Z}_{p^n} \cong \mathbb{Z}_{p^k}$.

Una propiedad notable de la retícula de prerradicales $\mathbb{Z}_{p^n} - pr$ es la que se presenta enseguida:

Proposición 2.42. *Sean $\sigma \in \mathbb{Z}_{p^n} - pr$ y $0 \leq m \leq n-1$. Si $\sigma(I_m) = I_k$ para alguna $0 \leq k \leq n-1$, entonces:*

$$\sigma(I_{m+1}) = I_k, \quad \text{o bien} \quad \sigma(I_{m+1}) = I_{k+1}.$$

Como consecuencia de los hechos antes mencionados, $\mathbb{Z}_{p^n} - pr$ resulta ser isomorfa a una retícula de sucesiones binarias de longitud n, $B_n := \{0,1\}^n$, tal que para cada $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in B_n$, se tiene:

- *Orden:* $a \leq b$ si, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \leq \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$.

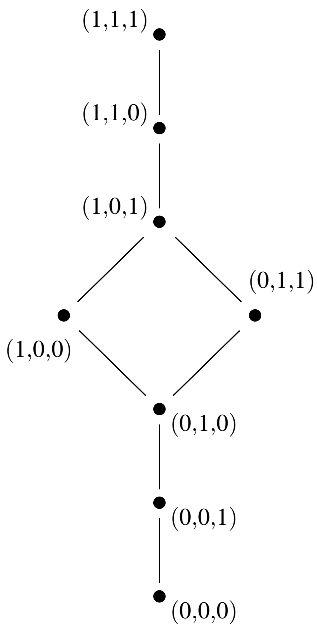
- *Supremo:* $a \vee b = (c_1, \ldots, c_n)$, donde $c_1 := \text{máx}\{a_1, b_1\}$ y para cada $k \in \{2, \ldots, n\}$,

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{si } \text{máx}\left\{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i\right\} = \text{máx}\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k} b_i\right\}; \\ 1, & \text{si } \text{máx}\left\{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i\right\} \neq \text{máx}\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k} b_i\right\}. \end{cases}$$

- *Ínfimo:* $a \wedge b = (d_1, \ldots, d_n)$, donde $d_1 := \text{mín}\{a_1, b_1\}$ y, para cada $k \in \{2, \ldots, n\}$,

$$d_k = \begin{cases} 0, & \text{si } \text{mín}\left\{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i\right\} = \text{mín}\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k} b_i\right\}; \\ 1, & \text{si } \text{mín}\left\{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k-1} b_i\right\} \neq \text{mín}\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i, \sum\limits_{i=1}^{k} b_i\right\}. \end{cases}$$

En la siguiente figura se muestra la retícula de prerradicales sobre $\mathbb{Z}_{p^3}$, donde cada prerradical se identifica con una sucesión binaria de longitud 3.[2]



$$\mathbb{Z}_{p^3} - pr$$

Los anillos $\mathbb{Z}_{p^n}$ constituyen un ejemplo distinguido de una clase más general de anillos, llamados **locales uniseriales**, los cuales se caracterizan por el hecho de que su retícula de ideales izquierdos (y derechos) es una cadena finita

$$0 = J^n < J^{n-1} < \cdots < J^2 < J < R,$$

donde J es el radical de Jacobson de R. Esta cadena coincide con la serie de composición de R (de longitud n).

El siguiente teorema forma parte del artículo ([15]).

Teorema 2.43. *Si R un anillo local uniserial con serie de composición de longitud n, entonces* $\mathrm{R} - pr$ *es una retícula distributiva, finita, de cardinalidad 2^n.*

Por último, nos referiremos a los anillos artinianos de ideales principales principales.

Un anillo R se dice **artiniano de ideales principales** si existen $k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ y anillos locales uniseriales $L_1, L_2, \ldots, L_k$ tales que

$$R \cong \mathbb{M}_{n_1}(L_1) \times \mathbb{M}_{n_2}(L_2) \times \cdots \times \mathbb{M}_{n_k}(L_k).$$

En virtud de las proposiciones 2.36 y 2.40, se tiene el siguiente corolario.

[2] Para los detalles, favor de ver [19].

Corolario 2.44. *Si R es un anillo artiniano de ideales principales, entonces* $\mathrm{R}-pr$ *es una retícula distributiva, finita, tal que* $|\mathrm{R}-pr| = 2^m$ *para algún* $m \in \mathbb{N}$.

De hecho, en [14] , se prueba la siguiente caracterización de los anillos artinianos de ideales principales en el caso conmutativo.

Proposición 2.45. *Para un anillo conmutativo R, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *R es artiniano de ideales principales.*

(b) $\mathrm{R}-pr$ *es una retícula finita.*

Cabe mencionar que en la literatura aparecen más clases de anillos cuyas retículas de prerradicales se han estudiado[3] (si bien, a diferencia de los ejemplos previos, aún no se han descrito completamente). Un aspecto de interés consiste en determinar si dichas retículas están en correspondencia uno a uno (o no) con un conjunto, es decir, si son *grandes* retículas. Abordaremos esta última condición, de manera sucinta, en la siguiente subsección.

Anillos $\mathfrak{p}$-grandes

Dado un anillo R, como ya se ha mencionado, $\mathrm{R}-pr$ resulta ser una gran retícula completa (más precisamente, se trata de un gran idioma, al ser, además, una gran retícula modular y superiormente continua), donde el adjetivo “gran” enfatiza que, en general, $\mathrm{R}-pr$ puede no ser un conjunto.[4] Al respecto, a principios de este siglo, el Dr. Francisco Raggi conjeturó que $\mathbb{Z}-pr$ debía ser una de tales retículas. Esta conjetura fue confirmada como consecuencia de un artículo de Fay, Oxford, Walls, de 1982 (véase ([11])). En dicho artículo se construye una cadena de prerradicales (de hecho, radicales) sobre $\mathbb{Z}$ que está en correspondencia biunívoca con la clase de los ordinales, es decir, empleando la terminología introducida al inicio de esta sección, se prueba que $\mathbb{Z}$ es $\mathfrak{p}$-grande. Emulando la técnica presentada en este último trabajo, en ([13]), se proveen nuevos ejemplos de anillos $\mathfrak{p}$-grandes que guardan cierta similitud con el anillo de los enteros (específicamente, cumplen las propiedades de ser hereditarios y numerables), entre los cuales se encuentran los siguientes:

(a) $\mathbb{Z}_{(p)}$, las localizaciones del anillo de los enteros por un primo p.

(b) $\mathcal{O}_K$, el anillo de enteros de un campo numérico K (extensión finita $K/\mathbb{Q}$).

(c) $\Lambda \oplus \mathbb{Z}a$, donde $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}j \oplus \mathbb{Z}k$ y $a = \frac{1+i+j+k}{2}$, también conocido como el anillo de los cuaterniones enteros o el anillo de Hurwitz.

(d) $R = K[x]$, el anillo de polinomios en una indeterminada con coeficientes en K, con K un campo numerable.

Posteriormente, en ([18]), se agregan los siguientes anillos $\mathfrak{p}$-grandes a la lista anterior:

(e) $K[x]$, con K un campo arbitrario.

[3]varios de ellos, ejemplos clásicos dentro de la teoría de representaciones
[4]Específicamente, $\mathrm{R}-pr$ resulta ser un *conglomerado reticular*.

(f) Para cada $n \geq 2$, la K-álgebra[5] libre asociativa generada por las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $K\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, con K un campo arbitrario, también conocida como la K-álgebra de polinomios en n variables no conmutativas.

(g) Para cada $n \geq 2$, la K-álgebra de matrices triangulares $K\mathbb{K}_n \cong \begin{pmatrix} K & 0 \\ K^n & K \end{pmatrix}$, con K un campo arbitrario.

En efecto, en el caso del inciso (e), el bosquejo de la prueba es el siguiente. Sean F/K una extensión de campos y Λ una K-álgebra. Consideremos los siguientes funtores:

- $(\_)^F : \Lambda\text{-Mod} \longrightarrow \Lambda \otimes_K F\text{-Mod}$, tal que $(M)^F = M \otimes_K F$ y $(f)^F = f \otimes_K id_F$.
- $G_\iota : \Lambda \otimes_K F\text{-Mod} \longrightarrow \Lambda\text{-Mod}$, inducido por el homomorfismo canónico de anillos $\iota : \Lambda \longrightarrow \Lambda \otimes_K F$ tal que $\lambda \longmapsto \lambda \otimes_K 1_F$.

En un artículo de Kasjan del 2001 (véase [20]), se verifica que $\langle (\_)^F, G_\iota \rangle : \Lambda\text{-Mod} \longrightarrow \Lambda \otimes_K F\text{-Mod}$ es un par adjunto, de donde, en vista del Teorema 2.37, $\langle (\_)^F, G_\iota \rangle$ induce una conexión de Galois $\langle \varphi, \psi \rangle : \Lambda - pr \longrightarrow \Lambda \otimes_K F - pr$. Adicionalmente, $\varphi : \Lambda\text{-pr} \longrightarrow \Lambda \otimes_K F\text{-pr}$ es inyectiva. En particular, si $\Lambda = K[x]$, entonces resulta que $\Lambda \otimes_K F \cong F[x]$ como K-álgebras; esto es, existe una asignación inyectiva $\varphi' : K[x]\text{-pr} \longrightarrow F[x]\text{-pr}$.
Como consecuencia de lo anterior, si K es un campo arbitrario y k es el campo primo de K, entonces, como k es numerable, $k[x] - pr$ no es conjunto y existe una asignación inyectiva $k[x]\text{-pr} \longrightarrow K[x]\text{-pr}$. Esta última asignación fuerza a que $K[x] - pr$ tampoco sea un conjunto. Por tanto, para cualquier campo K, $K[x]$ es $\mathfrak{p}$-grande.

Por su parte, en el caso de los incisos (f) y (g), existen homomorfismos suprayectivos de anillos:

- $K\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \longrightarrow K[x]$
- $\begin{pmatrix} K & 0 \\ K^n & K \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} K & 0 \\ K^2 & K \end{pmatrix}$

que, por el Teorema 2.38, inducen asignaciones inyectivas que preservan el orden:

- $K[x] - pr \longrightarrow K\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle - pr$
- $K\mathbb{K}_2 - pr \longrightarrow \begin{pmatrix} K & 0 \\ K^n & K \end{pmatrix} - pr$

Luego, puesto que tanto $K[x]$ como $K\mathbb{K}_2$ son $\mathfrak{p}$-grandes (en el segundo caso, como consecuencia del Teorema 2.39), las asignaciones inyectivas antes anotadas obligan a que $K\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ y $K\mathbb{K}_n$ también sean $\mathfrak{p}$-grandes.

Es oportuno destacar que los últimos ejemplos de anillos $\mathfrak{p}$-grandes (y otros que se presentan en ([18])) corresponden a **álgebras de tipo de representación infinito**. Dado un campo K, una K-álgebra Λ se dice de *tipo de representación finito* si existe un número finito de clases de isomorfismo de Λ-módulos izquierdos inescindibles[6] finitamente generados. En caso contrario, se dice que Λ es de *tipo de representación infinito*. Este indicio sugiere la plausibilidad de la conjetura que se formula a continuación:

[5] Recordemos que, dado un campo K, una K-álgebra es un anillo A que tiene una estructura de K-espacio vectorial compatible con el producto de A.

[6] es decir, módulos M cuyos únicos sumandos directos son 0 y M

Las siguientes condiciones son equivalentes para una K-álgebra Λ:

(a) Λ es de tipo de representación infinito.

(b) Λ es $\mathfrak{p}$-grande.

Si bien la conjetura anterior resulta ser cierta en el caso conmutativo y en ciertos contextos más restringidos,[7] aún no se sabe si es cierta en el caso general.[8]

[7] como es el caso de las álgebras de grupo KG, con K un campo y G un grupo finito, cuyas retículas de prerradicales son estudiadas en ([17])

[8] Para ser más precisos, la implicación (b) $\Rightarrow$ (a) se cumple, ya que las K-álgebras de tipo de representación finito son álgebras de Artin y estas útimas resultan ser $\mathfrak{p}$-pequeñas.

Bibliografía

[1] S. Abramsky, S. Vickers *Quantales, observational logic and process semantics.* Mathematical Structures in Computer Science, 3(02), 161. [161-227] (1993). https://doi.org/10.1017/S096012950000018

[2] J. Adámek, H. Herrlich, G. E. Strecker *Abstract and Concrete Categories, The Joy of Cats.* Originally published at John Wiley and Sons, 1990. Newest edition by the authors, http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/17/tr17.pdf

[3] T. Albu *Topics in Lattice Theory with Applications to Rings, Modules and Categories Lecture Notes, Escola de Algebra, XXIII Brazilian Algebra Meeting, Maringa, Parana, Brasil, 2014, 80 pages.*

[4] F. W. Anderson, K. R. Fuller. *Rings and Categories of Modules.* Springer-Verlag, 1975.

[5] P. Beshenov *Introducción al lenguaje funtorial.* Notas de curso. Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018. https://cadadr.org/teaching/san-salvador/2018-06-categorias/categorias.pdf

[6] L. Bican, P. Jambor, T. Kepka, P. Nemec. *Preradicals.* Comment. Math. Univ. Carolinae, 15(1), [75-83] (1974).

[7] L. Bican, T. Kepka, P. Nemec *Rings, Modules, and Preradicals* . Volumen 75 de Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series. Books on Demand, 1982.

[8] P. Bland *Rings and Their Modules*. De Gruyter Textbook, 2011.

[9] G. Calugareanu *Lattice Concepts of Modules Theory.* Kluwer Academic Publisher, Holand, 2000.

[10] G. Grätzer *Lattice Theory: Foundation.* Springer Basel 2011.

[11] T.H. Fay, E.P. Oxford, G.L. Walls. *Preradicals in abelian groups*. Houston J. Math, 8(1), [39-52] (1982).

[12] R. Fernández-Alonso. *De la teoría de Galois a las taorías de torsión*. Miscelánea Matemática, 53, [23-32] (2011).

[13] R. Fernández-Alonso, H. Chimal-Dzul, S. Gavito. *A class of rings for which the lattice of preradicals is not a set.* Int. Electron. J. Algebra, 9 [38-60] (2011).

[14] R. Fernández-Alonso, D. Herbera. *Finite lattices of preradicals over finite representation type rings*. Int. Electron. J. Algebra, 21, [103-120] (2017).

[15] R. Fernández Alonso, S. Gavito *The lattice of preradicals over local uniserial rings.* J. Algebra Appl. 5(6), [731-746] (2006).

[16] R. Fernández-Alonso y J. Magaña. *Galois connections between lattices of preradicals induced by adjoint pairs between categories of modules*. Appl. Categ. Structures 24(3), [241-268] (2016).

[17] R. Fernández Alonso, B. Mercado y S. Gavito *Preradicals Over Some Group Algebras.* Algebras and Representation Theory, 27, [1221,1235] (2024).

[18] R. Fernández-Alonso, J. E. Pérez-Terrazas y S. Gavito. *On the connection between the representation type of an algebra and its lattice of preradicals*. Comm. Algebra Appl. 46(1), [176-190] (2018).

[19] S. Gavito Ticozzi *Las retículas de prerradicales sobre los anillos* $\mathbb{Z}_{p^n}$. Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas. Posgrado de Matemáticas, UAM-Iztapalapa.

[20] S. Kasjan. *Base field extensions and generic modules over finite dimensional algebras.* Arch. Math., 77, [155-162] (2001).

[21] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, C. Signoret, R. Fernández Alonso. *The lattice structure of preradicals.* Comm. Algebra, 30(3), [1533-1544] (2002).

[22] J. J. Rotman *An Introduction to homological algebra*. Second edition. Universitext (2009).

[23] V. Santiago Vargas. *Elementos de algebra homológica en categorías abelianas y el Teorema de Inmersión en la categoría de grupos abelianos* . Tesis de Licenciatura UNAM (2007).

[24] B Stenström *Rings of quotients*. Springer (1975).

[25] F. Vilchis *Tesis de Licenciatura.* Facultad de Ciencias, UNAM.