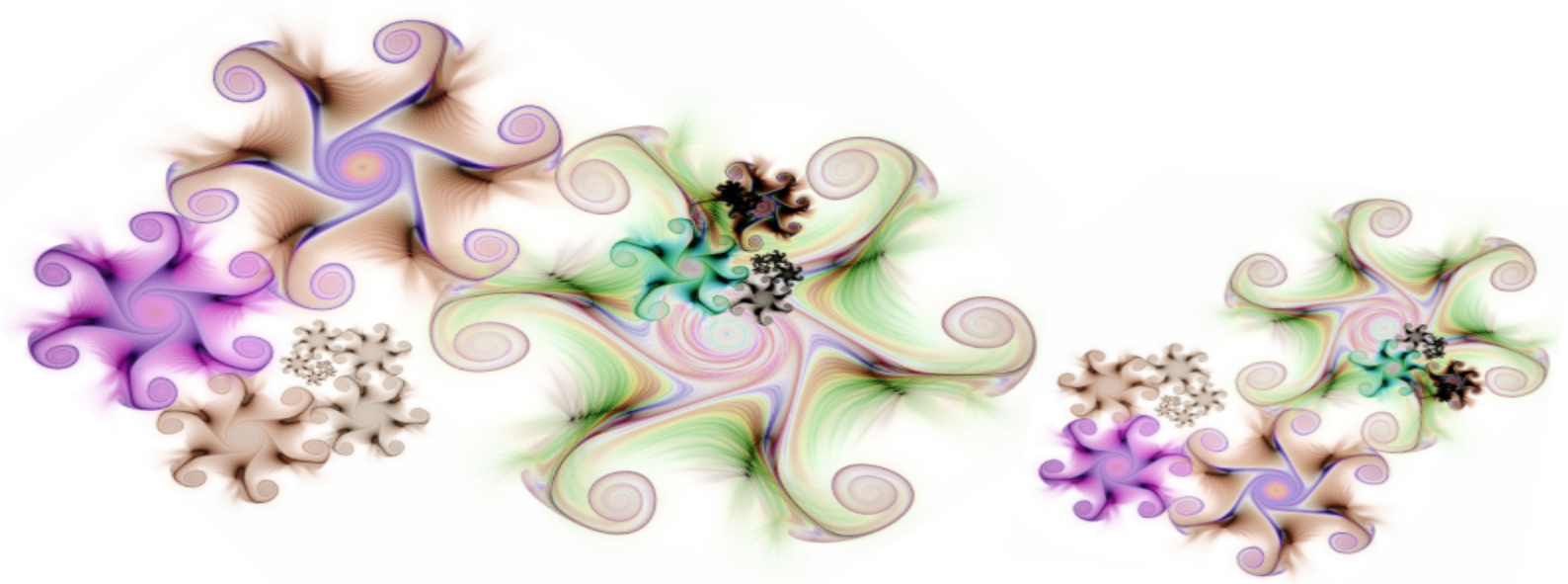
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Iztapalapa

Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/melrom ISSN: 2007-7874

Ciencias Básicas e Ingeniería CBI



# *Análisis geométrico de superficies: una introducción elemental*

Josué Meléndez Sánchez
Eduardo Rodríguez Romero

## 7° Coloquio del Departamento de Matemáticas UAM-I

Del 27 al 31 de enero de 2025

Universidad Autónoma Metropolitana

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo


**Directorio**

**Gustavo Pacheco López**
**Rector General.**

**Verónica Medina Bañuelos**
**Rectora Unidad Iztapalapa.**

**Román Linares Romero**
**Director de CBI, UAM-Iztapalapa.**

**Raúl Montes de Oca Machorro**
**Jefe del Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa.**

**Coordinador Editorial**
**Mario Pineda Ruelas**
mpr@xanum.uam.mx

**Comité Editorial**

Elsa Baez Juárez
ebaez@cua.uam.mx

Jorge R. Bolaños Servín
jrbs@xanum.uam.mx

Shirley Bromberg Silverstein
stbsster@gmail.com

Judith Campos Cordero
judith@ciencias.unam.mx

Martín Celli Siboni,
cell@xanum.uam.mx

Pedro L. del Ángel Rodríguez
luis@cimat.mx

Begoña Fernández
bff@ciencias.unam.mx

Silvia Gavito Ticozzi
sgt@correo.azc.uam.mx

L. Héctor Juárez Valencia
hect@xanum.uam.mx

Jorge A. León Vázquez
jleon@ctrl.cinvestav.mx

Roberto Quezada Batalla
roqb@xanum.uam.mx

Edith Corina Sáenz Valadez
ecsv@ciencias.unam.mx

Martha L. Shaid Sandoval Miranda
marlisha@gmail.com

Ekaterina Todorova
todorova@cimat.mx

Luis Miguel Villegas Silva
villegas63@gmail.com

---

Editor web Pedro Iván Blanco Boa
ivanblc@gmail.com

Diseño logo Michael Rivera Arce
Portada revista dibujo Miryam Mielke



MIXBA'AL. Vol. 16, No. 1, enero-diciembre de 2025, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Alcaldía Tlalpan, C.P. 14387, CDMX, México y Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, No. 186, Col. Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Tel. 5804 4658. Página electrónica de la revista: http://mat.izt.uam.mx/mat/ index.php/revistamixba-al. Correos electrónicos: mixbaal2009@gmail.com, mixb@xanum.uam.mx. Coordinador Editorial Mario Pineda Ruelas. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No. 04-2023-07031 1572300-102, ISSN5 2007-7874, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número Mario Pineda Ruelas, Departamento de Matemáticas, edificio AT, oficina 318. División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco No. 186,Colonia Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Fecha de última modificación 30 de agosto de 2025. Tamaño del archivo 121.3 MB.



Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.

# 7º COLOQUIO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

del 27 al 31 de enero del 2025, Unidad Iztapalapa de la UAM, Ciudad de México

Departamento de Matemáticas
UAM IZTAPALAPA

Posgrado de Matemáticas
UAM IZTAPALAPA

## Taller 1: Análisis de datos con un enfoque bayesiano

Autor: Dr. Asael Fabian Martínez Martínez

## Taller 2: Un breve recorrido por la teoría de prerradicales y sus retículas

Autores: Dr. Rogelio Fernández-Alonso, Dra. Silvia Gavito Ticozzi, Dra. Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda

## Taller 3: Resultados del cálculo y álgebra lineal relevantes en modelos y aplicaciones

Autor: Dr. Lorenzo Héctor Juárez

## Taller 4: Análisis geométrico de superficies: una introducción elemental

Autores: Dr. Josué Melendez y M. en C. Eduardo Rodríguez Romero

## Taller 5: Una introducción a los torneos y sus generalizaciones

Autores: Dr. Ilán Goldfeder Ortiz y Dra. Nahid Yelene Javier Nol

## Taller 6: Del cero al quantum: un viaje por el mundo de los códigos

Autores: Dr. Jorge Bolaños Servín, Dra. Yuriko Pitones Amaro y Dr. Josué Rios Cangas

## Taller 7: Introducción a la teoría de juegos epistémica

Autor: Dr. Rubén Becerril Borja

## Taller 8: Cómo contar más allá del infinito y para qué sirve. Inducción transfinita y algunas aplicaciones

Autor: Dr. Rodrigo Hernández Gutiérrez

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Iztapalapa

Ciencias Básicas e Ingeniería CBI

7° Coloquio del Departamento de Matemáticas UAM-I 2025
Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa CDMX.

# Introducción

Este trabajo es una breve introducción al análisis geométrico de superficies, una disciplina que combina cálculo y álgebra lineal para estudiar la geometría de ciertos objetos bidimensionales en $\mathbb{R}^3$. Nuestra exposición comienza definiendo qué es una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y estableciendo algunas nociones básicas relacionadas tales como la diferenciabilidad de funciones en superficies, el plano tangente y la primera forma fundamental.

Después pasamos al cálculo intrínseco de la superficie, donde presentamos el mapeo de Gauss y el operador de forma. A partir de esto obtenemos un forma de derivar *desde el punto de vista* de la superficie, llamada la derivada covariante, cuya construcción queda plasmada en la famosa fórmula de Gauss. A partir de esto introducimos los operadores gradiente, hessiano, divergencia y laplaciano en una superficie, además de algunas propiedades de ellos.

Finalmente, ya con toda esta herramienta, enunciamos y demostramos las fórmulas integrales de Minkowski, presentando las pruebas con suficiente detalle. Debido a la brevedad del curso, tuvimos que seleccionar una lista muy corta de ejemplos para ilustrar los ejemplos y resultados del manuscrito, y dado que la guía y objetivo final de estas notas fueron las fórmulas de Minkowski, decidimos incluir sólo los ejemplos que serían de utilidad para sus demostraciones.

Josué Meléndez Sánchez, Eduardo Rodríguez Romero
jms@xanum.uam.mx, err29072019@gmail.com
Departamento de Matemáticas
UAM-Iztapalapa

# Índice general

**Introducción** III

**1. Explorando las superficies regulares** 1
- 1.1. Superficies regulares . . . 1
- 1.2. Funciones y curvas suaves . . . 4
- 1.3. Plano tangente . . . 7
- 1.4. Derivadas direccionales y diferencial . . . 8
- 1.5. Vectores normales y aplicación de Gauss . . . 10
- 1.6. Operador de forma . . . 11
- 1.7. Primera forma fundamental . . . 13

**2. Cálculo intrínseco y operadores diferenciales** 15
- 2.1. Campos vectoriales y tensoriales . . . 15
- 2.2. Derivada covariante . . . 16
- 2.3. Extensiones locales y derivada covariante en $\mathbb{R}^3$ . . . 19
- 2.4. Gradiente . . . 20
- 2.5. Hessiano . . . 23
- 2.6. Divergencia y laplaciano . . . 25

**3. Fórmulas de Minkowski** 27
- 3.1. Enunciados y pruebas . . . 27

**Bibliografía** 29

# Capítulo 1

# Explorando las superficies regulares

La geometría diferencial es la rama de las matemáticas que estudia los aspectos geométricos del mundo basándose en las técnicas del cálculo y álgebra lineal. En esencia, esto significa usar objetos lineales, como rectas y planos, para medir la geometría de objetos más complejos, como curvas y superficies, usando como puente la brillante técnica de los límites. El concepto central de esta exposición es el de *superficie regular*, con el que podemos modelar objetos o fenómenos del universo que pueden determinarse por medio de dos coordenadas, como la representación de cada ubicación sobre la superficie terrestre usando las coordenadas geográficas latitud y longitud.

En este capítulo presentamos una introducción rápida a las superficies regulares en $\mathbb{R}^3$, enfocándonos en las consecuencias y ejemplos que nos serán útiles en el siguiente capítulo. Aunque rápida, hay suficientes detalles en la presentación de los temas para ayudar a vislumbrar los métodos e ideas que validan los conceptos y proposiciones de esta teoría.

## 1.1 Superficies regulares

Comenzamos directamente con la definición de superficie regular, en seguida explicaremos el porqué de las condiciones que la componen. Cabe aclarar que usamos los términos *suave* y *diferenciable* de manera intercambiable para referirnos a la clase $C^\infty$ de diferenciabilidad.

*Definición* 1.1. Una **superficie regular** en $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para cada $p \in S$, existen un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ que contiene a $p$ y una función $\varphi\colon \Omega \to U \cap S$ que va de un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ al abierto relativo $U \cap S$, los cuales satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ es suave.

(ii) $\varphi\colon \Omega \to U \cap S$ es un homeomorfismo.

(iii) Para cada $(u, v) \in \Omega$, la diferencial $d\varphi_{(u,v)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

Una función $\varphi$ como arriba es llamada una **parametrización** de $S$ alrededor de $p$.

Por simplicidad usaremos el término *superficie* para referirnos a una superficie regular. Respecto a esto, es importante aclarar primero la terminología de las condiciones de la Definición 1.1 antes de explicar por qué se piden. La condición (ii) significa que se satisfacen tres propiedades:

- $\varphi$ *es continua.* Esto no hay que comprobarlo, ya que es consecuencia de la condición (i).
- $\varphi$ *es inyectiva.* Hay que mostrar que $\varphi$ tiene una inversa $\varphi^{-1}\colon U\cap S\to\Omega$.
- $\varphi^{-1}$ *es continua.* Para esto es suficiente verificar que $\varphi^{-1}=F|_{U\cap S}$ para alguna función continua $F\colon U\to\mathbb{R}^2$.

Respecto a la condición (iii), normalmente pensamos en la *matriz jacobiana* de $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$:

$$\mathrm{J}_\varphi(u,v)=\begin{bmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(u,v)\end{bmatrix}.$$

Así pues $d\varphi_{(u,v)}$ es inyectiva si y sólo si las columnas de $\mathrm{J}_\varphi(u,v)$ son linealmente independientes.

Dicho esto, la importancia de tener una parametrización $\varphi\colon\Omega\to U\cap S$ radica en que podemos llevar las propiedades algebraicas y analíticas de $\mathbb{R}^2$ a $S$ *localmente*. Por ejemplo, $\varphi$ nos permite:

- Especificar de manera única cada $p\in U\cap S$ con dos coordenadas cartesianas $(u,v)\in\Omega$ mediante la función suave $\varphi(u,v)=p$. Esto nos permite expresar *numéricamente* cualquier objeto definido en $S$ a través de las coordenadas $(u,v)$. Es por esto que también llamamos a $\varphi$ un *sistema de coordenadas* en $S$.
- Aproximar localmente a $S$ con un *plano tangente* cerca de cada $p\in U\cap S$, que es consecuencia de la condición (iii). Esto es esencial para poder definir *vectores normales* en $S$, los cuales serán de gran utilidad para medir *curvatura* sobre $S$.
- Supongamos que tenemos otra parametrización $\psi\colon\Theta\to V\cap S$ alrededor de $p$. Si consideramos $W=U\cap V$, entonces la función de *cambio de coordenadas* dada por

  $$\psi^{-1}\circ\varphi\colon\varphi^{-1}(W\cap S)\to\psi^{-1}(W\cap S)$$

  es un *difeomorfismo*, lo cual significa que es suave, invertible y su inversa $\varphi^{-1}\circ\psi$ es suave. La condición (ii) es necesaria para demostrar este resultado, el cual es crucial porque nos permite cambiar de un sistema de coordenadas a otro de forma consistente. Como veremos a lo largo del trabajo, es esta propiedad la que nos permite *determinar* cualquier objeto en $S$ a través de su *representación numérica* en cualquier sistema de coordenadas en $S$.

*Ejemplo* 1.2. El objeto bidimensional más natural es el plano. Sea $\Pi\subset\mathbb{R}^3$ el plano definido por la ecuación $ax+by+cz=d$. Consideremos el caso $c\neq 0$, es decir, cuando $\Pi$ no es un plano vertical. Dado $(x,y,z)\in\Pi$, podemos despejar la coordenada $z$ como $z=\frac{-ax-by+d}{c}$, de modo que si consideramos la función inyectiva $\varphi\colon\mathbb{R}^2\to\Pi$ definida por

$$\varphi(u,v)=\left(u,v,\frac{-au-bv+d}{c}\right),$$

entonces $\varphi$ es una parametrización de $\Pi$ alrededor de $(x,y,z)$. En efecto, observe que:

(i) $\varphi$ es suave en $\mathbb{R}^2$.

(ii) Si $\pi\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ es la proyección $\pi(x,y,z)=(x,y)$, la cual es continua, entonces $\varphi^{-1}=\pi|_\Pi$.

(iii) Las columnas de la matriz jacobiana

$$\mathrm{J}_{\varphi}(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c} \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes.

Como $\varphi(\mathbb{R}^2) = \Pi$, entonces $\varphi$ parametriza globalmente a $\Pi$. Notemos que si $c = 0$, entonces $a \neq 0$ o $b \neq 0$, así que podemos proceder de manera similar.

*Ejemplo* 1.3. Consideremos la esfera de radio $r > 0$ descrita por

$$\mathbb{S}^2_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

Dado $(x,y,z) \in \mathbb{S}^2_r$, debemos tener que alguna de sus coordenadas no es cero. Si $z \neq 0$, podemos obtener $z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, de modo que al considerar el disco abierto

$$\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < r^2\},$$

y las funciones inyectivas $\varphi^+_z, \varphi^-_z : \Omega \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\varphi^+_z(u,v) = \left(u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}\right), \quad \varphi^-_z(u,v) = \left(u, v, -\sqrt{r^2 - u^2 - v^2}\right),$$

obtenemos que $\varphi^+_z(\Omega) = U^+_z \cap \mathbb{S}^2_r$ y $\varphi^-_z(\Omega) = U^-_z \cap \mathbb{S}^2_r$, donde

$$U^+_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\} \quad \text{y} \quad U^-_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$$

(ver Figura 1.1 para una descripción gráfica de este hecho). Además:

(i) $\varphi^{\pm}_z$ es suave en $\Omega$.

(ii) $(\varphi^{\pm}_z)^{-1} = \pi|_{U^{\pm}_z \cap \mathbb{S}^2_r}$, donde $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es la proyección $\pi(x,y,z) = (x,y)$.

(iii) Las columnas de la matriz jacobiana

$$\mathrm{J}_{\varphi^{\pm}_z}(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\mp u}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}} & \frac{\mp v}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}} \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes.

Por tanto las funciones $\varphi^{\pm}_z\colon \Omega \to U^{\pm}_z \cap \mathbb{S}^2_r$ son parametrizaciones de $\mathbb{S}^2_r$ alrededor de cada $(x,y,z)$ tal que $z \neq 0$. Los casos en que $x \neq 0$ o $y \neq 0$ se tratan de manera similar.

*Ejemplo* 1.4. Dada una superficie $S$, decimos que un subconjunto $A \subset S$ es un *abierto* de $S$ si existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que $A = U \cap S$. Como ejemplo tenemos la imagen $\varphi(\Omega)$ de una parametrización $\varphi\colon \Omega \to U \cap S$.

Cualquier abierto $U \cap S$ de una superficie $S$ es, a su vez, una superficie. De hecho $U \cap S$ hereda las parametrizaciones $\varphi$ de $S$ al restringir su dominio $\Omega$ a un abierto $\Omega' \subset \Omega$ tal que $\varphi(\Omega') \subset U \cap S$. Debido a esto, $U \cap S$ comparte los *objetos locales* de $S$, esto es, aquellos definidos en términos de sus parametrizaciones.

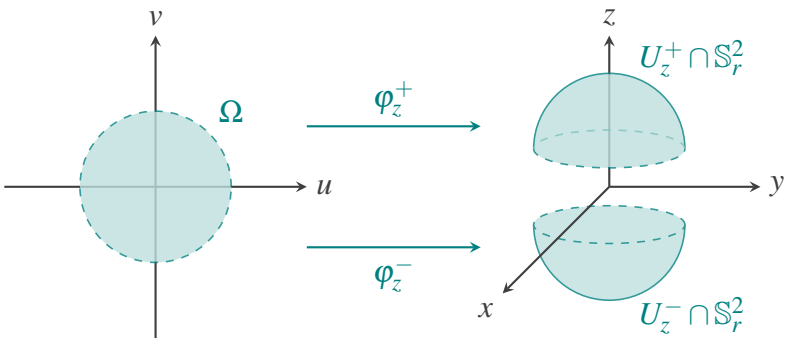



Figura 1.1: El abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ deformado por las funciones $\varphi_z^{\pm}$.

## 1.2 Funciones y curvas suaves

Dada una superficie $S$, definimos qué significa que una función $f\colon S \to \mathbb{R}$ sea suave.

*Definición* 1.5. Sea $S$ una superficie. Decimos que $f\colon S \to \mathbb{R}$ es **suave** si para cada $p \in S$, existe una parametrización $\varphi\colon \Omega \to U \cap S$ alrededor de $p = \varphi(u,v)$ tal que $f \circ \varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es suave en $(u,v)$.

Esta definición de diferenciabilidad es legítima porque no depende de la parametrización elegida: observe que si $f \circ \varphi$ es suave, entonces $f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$ también es suave para cualquier otra parametrización $\psi\colon \Theta \to V \cap S$, ya que el cambio de coordenadas $\varphi^{-1} \circ \psi$ es un difeomorfismo. Al conjunto de funciones suaves $f\colon S \to \mathbb{R}$ lo denotamos por $C^\infty(S)$.

*Observación* 1.6. Es natural adaptar la definición anterior a funciones del tipo $X\colon S \to \mathbb{R}^3$, que usaremos con frecuencia más adelante. De hecho no es difícil verificar que $X = (X_1, X_2, X_3)$ es suave si y sólo si cada $X_i\colon S \to \mathbb{R}$ es suave.

Otro concepto importante es el de *curva*, que es una función $\alpha\colon I \to S$, donde $I$ es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. La imagen $\alpha(I)$ es llamada la *traza* de $\alpha$. También establecemos un criterio de diferenciabilidad para curvas.

*Definición* 1.7. Sea $S$ una superficie. Decimos que $\alpha\colon I \to S$ es **suave** si para cada $t \in I$, existen un subintervalo abierto $J \subset I$ y una parametrización $\varphi\colon \Omega \to U \cap S$ alrededor de $\alpha(t)$, tales que $\alpha(J) \subset U \cap S$ y la curva plana $\varphi^{-1} \circ \alpha\colon J \to \mathbb{R}^2$ es suave en $t$.

A partir de aquí, siempre que consideremos una curva $\alpha$ asumimos que es suave (la diferenciabilidad de $\alpha$ tampoco depende de la parametrización elegida).

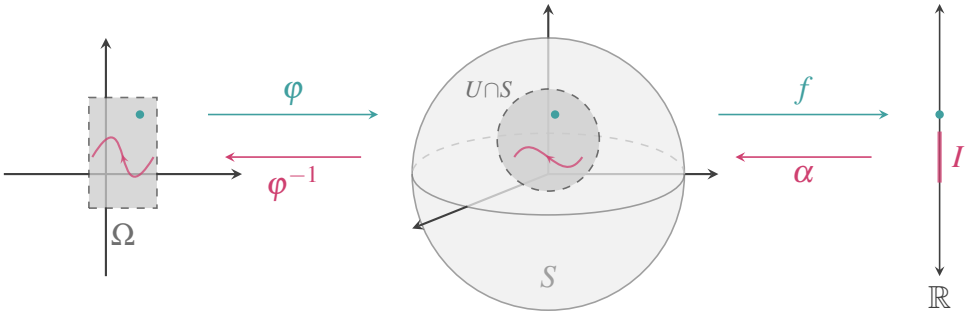



Figura 1.2: La diferenciabilidad de $f$ y $\alpha$ expresada en términos de $\varphi\colon \Omega \to U \cap S$.

*Ejemplo* 1.8. Sean $S$ una superficie y $q \in \mathbb{R}^3$. Consideramos una versión modificada de la función distancia respecto a $q$: sea $f\colon S \to \mathbb{R}$ definida por $f(p) = \frac{1}{2}\|p-q\|^2$ (ver Figura 1.3).

Consideremos una parametrización $\varphi\colon \Omega \to U \cap S$ de $S$ alrededor de $p = \varphi(u,v)$. Entonces la expresión de $f$ respecto a $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ está dada por

$$\mathrm{f}(u,v) = f(\varphi(u,v)) = \frac{1}{2}\|\varphi(u,v) - q\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\big(\varphi_i(u,v) - q_i\big)^2, \quad q = (q_1, q_2, q_3),$$

la cual es suave debido a que cada $\varphi_i$ es suave.

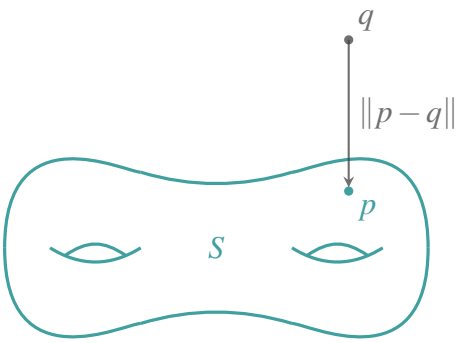



Figura 1.3: Función distancia respecto a $q \in \mathbb{R}^3$.

*Ejemplo* 1.9. Sea $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ un plano arbitrario con vector normal unitario $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$. Dado $q \in \Pi$ fijo, definimos la función $h\colon S \to \mathbb{R}$ por

$$h(p) = \|p-q\|\cos\theta = \langle p-q, \mathbf{n}\rangle, \quad \text{donde } \theta = \measuredangle(p-q, \mathbf{n}).$$

Note $h(p)$ mide la distancia (con signo) de $p$ al plano $\Pi$ (ver Figura 1.4). La expresión de $h$ respecto a una parametrización $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ es

$$\mathrm{h}(u,v) = h(\varphi(u,v)) = \langle \varphi(u,v) - q, \mathbf{n}\rangle = \sum_{i=1}^{3}\big(\varphi_i(u,v) - q_i\big)n_i, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3),$$

implicando que $h$ es suave.

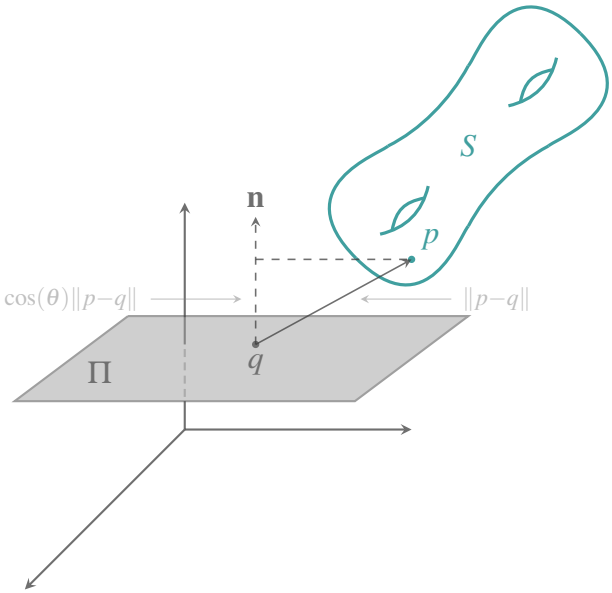



Figura 1.4: Función distancia respecto $\Pi \subset \mathbb{R}^3$.

*Ejemplo* 1.10. Dado $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ fijo, consideremos la curva $\alpha\colon (0,\pi) \to \mathbb{S}^2_r$ dada por

$$\alpha(t) = (r\cos(\theta_0)\operatorname{sen}(t), r\operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(t), r\cos(t)),$$

cuya traza es un meridiano en $\mathbb{S}^2_r$ (ver Figura 1.5). Recordemos del Ejemplo 1.3 que la inversa de la parametrización $\varphi_z^{\pm}$ es la proyección $\pi(x,y,z) = (x,y)$, donde $(x,y,z) \in U_z^{\pm} \cap \mathbb{S}^2_r$. Por ejemplo, si restringimos $\alpha$ al subintervalo abierto $(0, \frac{\pi}{2})$, entonces la traza de $\alpha$ está contenida en $U_z^{+} \cap \mathbb{S}^2_r$ y la expresión de $\alpha$ respecto a $\varphi_z^{+}$ es

$$\pi(\alpha(t)) = (r\cos(\theta_0)\operatorname{sen}(t), r\operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(t)),$$

que es una curva suave y cuya traza es una recta.

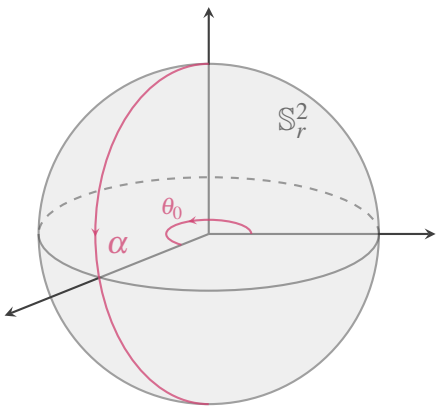



Figura 1.5: Meridiano descrito por $\alpha$.

# 1.3

# Plano tangente

Ahora mostramos el importante rol que cumplen las curvas suaves en una superficie.

*Definición* 1.11. Sean $S$ una superficie y $p \in S$. Un **vector tangente** a $S$ en $p$ es la derivada $\alpha'(0) \in \mathbb{R}^3$ de alguna curva $\alpha\colon I \to S$ tal que $\alpha(0) = p$.

**Proposición 1.12.** *Sean $S$ un superficie y $p \in S$, y denotamos por $T_pS$ al conjunto de vectores tangentes a $S$ en $p$. Entonces $T_pS \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio vectorial de dimensión 2.*

*Demostración.* Vamos a mostrar que $T_pS = d\varphi_{(u,v)}(\mathbb{R}^2)$, donde $\varphi\colon \Omega \to U \cap S$ es cualquier parametrización alrededor de $p = \varphi(u,v)$. Esto será suficiente ya que al ser inyectiva la diferencial $d\varphi_{(u,v)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, se sigue que $d\varphi_{(u,v)}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ es un subespacio vectorial de dimensión 2.

Sea $\alpha'(0) \in T_pS$, donde $\alpha\colon I \to S$ es una curva que satisface $\alpha(0) = p$. Entonces $\beta(t) = (\varphi^{-1} \circ \alpha)(t)$ es una curva plana que es suave en 0, así que al usar la regla de la cadena obtenemos

$$\alpha'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0) = d\varphi_{(u,v)}(\beta'(0)) \quad \Rightarrow \quad \alpha'(0) \in d\varphi_{(u,v)}(\mathbb{R}^2).$$

Ahora consideremos $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $\beta(t) = (at+u, bt+v)$. Entonces $\beta(0) = (u,v)$ y $\beta'(0) = (a,b)$, por lo que al considerar la curva suave $\alpha = \varphi \circ \beta$ en $S$, tenemos que $\alpha(0) = p$ y

$$d\varphi_{(u,v)}(a,b) = (\varphi \circ \beta)'(0) = \alpha'(0) \quad \Rightarrow \quad d\varphi_{(u,v)}(a,b) \in T_pS.$$

□

*Definición* 1.13. El espacio vectorial $T_pS$ es llamado el **plano tangente** de $S$ en $p$.

Sea $\varphi\colon \Omega \to U \cap S$ una parametrización alrededor de $p = \varphi(u,v)$. Dado que $d\varphi_{(u,v)}$ es inyectiva, tenemos que $d\varphi_{(u,v)}$ mapea cualquier base de $\mathbb{R}^2$ en una base de $T_pS$. En particular, la base canónica $\{(1,0),(0,1)\}$ es mapeada a la base compuesta por los vectores

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_p := d\varphi_{(u,v)}(1,0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u,v)\right),$$
$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)_p := d\varphi_{(u,v)}(0,1) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v), \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v), \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u,v)\right).$$

Resulta que la representación de un vector $\mathbf{v} \in T_pS$ en esta base está en términos de la derivada de la curva plana $(\varphi^{-1} \circ \alpha)(t) = (a(t), b(t))$, donde $\alpha\colon I \to S$ satisface $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. En efecto, al usar la regla de la cadena obtenemos

$$\mathbf{v} = \alpha'(0) = (\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \alpha)'(0) = d\varphi_{(u,v)}(a'(0), b'(0)) = a'(0)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_p + b'(0)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)_p.$$

*Ejemplo* 1.14. Usando la parametrización global del plano $\Pi$ del Ejemplo 1.2, obtenemos que $T_p\Pi$ está generado por los vectores

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_p = \left(1,0,-\frac{a}{c}\right), \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)_p = \left(0,1,-\frac{b}{c}\right),$$

donde $p = \varphi(u,v)$. De hecho, si consideramos el producto punto $\langle , \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{n} = (a,b,c)$, obtenemos que $\left\langle \mathbf{n}, (\frac{\partial \varphi}{\partial u})_p \right\rangle = \left\langle \mathbf{n}, (\frac{\partial \varphi}{\partial v})_p \right\rangle = 0$, y por ende $T_p\Pi = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$.

*Ejemplo* 1.15. Usando las parametrizaciones de la esfera $\mathbb{S}^2_r$ del Ejemplo 1.3, deducimos que $T_p\mathbb{S}^2_r$ está generado por los vectores

$$\left(\frac{\partial \varphi_z^{\pm}}{\partial u}\right)_p = \left(1,0,\frac{\mp u}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}}\right), \quad \left(\frac{\partial \varphi_z^{\pm}}{\partial v}\right)_p = \left(0,1,\frac{\mp v}{\sqrt{r^2-u^2-v^2}}\right),$$

donde $p = \varphi_z^{\pm}(u,v)$. De esto no es difícil deducir que $\left\langle p, (\frac{\partial \varphi_z^{\pm}}{\partial u})_p \right\rangle = \left\langle p, (\frac{\partial \varphi_z^{\pm}}{\partial v})_p \right\rangle = 0$, y por tanto $T_p\mathbb{S}^2_r = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \mathbf{v} \rangle = 0\}$.

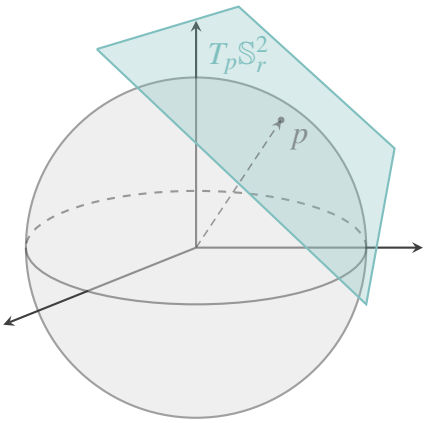



Figura 1.6: Plano tangente en $\mathbb{S}^2_r$.

*Ejemplo* 1.16. Dado un subconjunto abierto $U \cap S$, tenemos que $T_p(U \cap S) = T_pS$ para todo $p \in U \cap S$ (ver Ejemplo 1.4).

## 1.4 Derivadas direccionales y diferencial

En esta sección extendemos las nociones de derivada direccional y diferencial de una función al contexto de superficies. Recordemos que para una función suave $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la *derivada direccional* de $f$ en $p$ respecto al vector $\mathbf{v}$ está dada por

$$\mathbf{v}_p(f) = \frac{d}{dt} f(t\mathbf{v}+p)\Big|_{t=0}. \tag{1.1}$$

En el contexto de superficies, usamos curvas suaves para extender la idea en (1.1). Por simplicidad, en la siguiente definición consideramos curvas $\alpha\colon I \to S$ tales que $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$.

*Definición* 1.17. Sean $S$ una superficie, $p \in S$ y $f \in C^\infty(S)$. Definimos la **derivada direccional** de $f$ respecto a $\mathbf{v} \in T_pS$ como

$$\mathbf{v}(f) = \frac{d}{dt} f(\alpha(t))\Big|_{t=0},$$

donde $\alpha$ es una curva en $S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

*Observación* 1.18. En esencia, podemos considerar un vector tangente $\mathbf{v} \in T_pS$ como un operador de funciones suaves, esto es, $\mathbf{v}\colon C^\infty(S) \to \mathbb{R}$ asigna a cada $f \in C^\infty(S)$ la derivada direccional $\mathbf{v}(f) \in \mathbb{R}$. También es natural adaptar la definición anterior al caso de funciones $X\colon S \to \mathbb{R}^3$. De hecho si escribimos $X = (X_1, X_2, X_3)$, no es difícil mostrar que

$$\mathbf{v}(X) = (\mathbf{v}(X_1), \mathbf{v}(X_2), \mathbf{v}(X_3)).$$

La derivada direccional $\mathbf{v}(f)$ no depende de la curva elegida, ya que si consideramos una parametrización $\varphi\colon \Omega \to U \cap S$ alrededor de $p = \varphi(u,v)$, y las correspondientes *expresiones* de $f$ y $\alpha$ respecto a $\varphi$, es decir, las funciones $f \circ \varphi = \mathrm{f}$ y $\varphi^{-1} \circ \alpha = (a,b)$, entonces

$$\mathbf{v}(f) = \frac{d}{dt} f(\alpha(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi)\left[(\varphi^{-1} \circ \alpha)(t)\right]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\mathrm{f}(a(t), b(t))\Big|_{t=0}.$$

De esta manera, al usar la regla de la cadena y evaluar en $t = 0$, obtenemos

$$\mathbf{v}(f) = a'(0)\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial u}(u,v) + b'(0)\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial v}(u,v),$$

lo cual muestra que $\mathbf{v}(f)$ depende únicamente de las derivadas parciales de $\mathrm{f}$ en $(u,v)$ y de la representación de $\mathbf{v} = a'(0)(\frac{\partial \varphi}{\partial u})_p + b'(0)(\frac{\partial \varphi}{\partial v})_p$ en la base $\left\{(\frac{\partial \varphi}{\partial u})_p, (\frac{\partial \varphi}{\partial v})_p\right\}$ de $T_pS$. De hecho

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)_p(f) = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial u}(u,v), \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)_p(f) = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial v}(u,v),$$

de ahí que $\mathbf{v}(f) = \left[a'(0)(\frac{\partial \varphi}{\partial u})_p + b'(0)(\frac{\partial \varphi}{\partial v})_p\right](f)$.

Lo que sigue son algunas propiedades importantes de la derivada direccional que pueden verificarse directamente.

**Proposición 1.19.** *Sean $S$ una superficie, $p \in S$ y $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pS$. Dados cualesquiera $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^\infty(S)$, tenemos que:*

(a) $(\mathbf{v} + \mathbf{w})(f) = \mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f)$.

(b) $(\lambda \mathbf{v})(f) = \lambda \mathbf{v}(f)$.

(c) $\mathbf{v}(f + g) = \mathbf{v}(f) + \mathbf{v}(g)$.

(d) $\mathbf{v}(fg) = g(p)\mathbf{v}(f) + f(p)\mathbf{v}(g)$.

Ahora podemos extender la diferencial al contexto de superficies de manera natural: así como para el caso euclidiano, la diferencial de $f$ será la forma de condensar todas las derivadas direcciones $f$ en una única transformación lineal.

*Definición* 1.20. Sean $S$ una superficie, $p \in S$ y $f \in C^\infty(S)$. Definimos la **diferencial** de $f$ en $p$ como la transformación lineal $df_p \colon T_pS \to \mathbb{R}$ dada por $df_p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(f)$.

*Observación* 1.21. Los incisos (a) y (b) de la Proposición 1.19 garantizan la linealidad de $df_p$. Además, definimos la diferencial de una función $X \colon S \to \mathbb{R}^3$ de manera análoga: como la transformación lineal $dX_p \colon T_pS \to \mathbb{R}^3$ dada por $dX_p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(X)$.

## 1.5 Vectores normales y aplicación de Gauss

Una de las aplicaciones más importantes del espacio tangente $T_pS$ es que podemos definir la noción de *vector normal*.

*Definición* 1.22. Sean $S$ una superficie y $p \in S$. Decimos que un vector $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ es **normal** a $S$ en $p$ si $\mathbf{n}$ es ortogonal a $T_pS$, es decir, si $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v} \in T_pS$.

Como veremos en la siguiente sección, los vectores normales nos serán útiles para medir curvatura en $S$. Para usarlos, sin embargo, necesitamos vectores normales definidos en al menos un abierto $U \cap S$, de ahí la siguiente definición.

*Definición* 1.23. Sea $S$ una superficie.

(a) Un **campo vectorial normal unitario** en $U \cap S$ es una función suave $N \colon U \cap S \to \mathbb{R}^3$ que asigna a cada $p \in U \cap S$ un vector unitario $N(p)$ normal a $S$ en $p$.

(b) Diremos que $S$ es **orientable** si existe un campo vectorial normal unitario $N$ definido en todo $S$. Al elegir un tal campo $N$, decimos que $S$ está **orientada** respecto a $N$, y la función $N \colon S \to \mathbb{R}^3$ es llamada la **aplicación de Gauss** de $S$.

*Ejemplo* 1.24. Del Ejemplo 1.14 tenemos que el vector $\mathbf{n} = (a, b, c)$ es normal al plano $\Pi$ en cada $p \in \Pi$. Entonces $N(p) = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$ es una campo vectorial normal unitario en $\Pi$.

*Ejemplo* 1.25. Del Ejemplo 1.15 podemos deducir que el vector unitario $N(p) = \frac{p}{r}$ es normal a $\mathbb{S}^2_r$ en $p$. Entonces $N$ es un campo vectorial normal unitario en $\mathbb{S}^2_r$.

*Ejemplo* 1.26. En general, dada una parametrización $\varphi\colon \Omega \to U \cap S$, el producto cruz de $\mathbb{R}^3$ nos permite construir un vector normal unitario a $S$ en cada $p \in U \cap S$ mediante la fórmula

$$N(p) = \frac{(\frac{\partial \varphi}{\partial u})_p \times (\frac{\partial \varphi}{\partial v})_p}{\left\| (\frac{\partial \varphi}{\partial u})_p \times (\frac{\partial \varphi}{\partial v})_p \right\|},$$

donde $\left\{(\frac{\partial \varphi}{\partial u})_p, (\frac{\partial \varphi}{\partial v})_p\right\}$ es la base de $T_pS$ asociada a $\varphi$. La función inducida $N\colon U \cap S \to \mathbb{R}^3$ es entonces un campo vectorial normal unitario en $U \cap S$.

# 1.6 Operador de forma

Concluimos este capítulo definiendo el *operador de forma* de una superficie, del cual se desprenden los importantes conceptos de *curvatura de Gauss* y *curvatura media*. En lo que sigue $\mathbb{S}^2$ es la esfera unitaria (de radio $r = 1$).

Sea $S$ una superficie orientada respecto a $N\colon S \to \mathbb{R}^3$. Dados $p \in S$ y $\mathbf{v} \in T_pS$, tenemos que $dN_p(\mathbf{v}) = (N \circ \alpha)'(0)$, donde $\alpha$ es una curva en $S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Notemos que como $N(p)$ es unitario para todo $p \in S$, entonces la imagen $N(S)$ está contenida en $\mathbb{S}^2$. Así pues $\beta = N \circ \alpha$ es una curva en $\mathbb{S}^2$ tal que $\beta(0) = N(p)$, y por ende $\beta'(0) = dN_p(\mathbf{v}) \in T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, lo cual muestra que $dN_p\colon T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Más aún, como $T_pS$ y $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ tienen el mismo vector normal $N(p)$, se sigue que $T_pS = T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, y por tanto $dN_p$ es un endomorfismo de $T_pS$.

Resulta que $dN_p$ es útil para la medir curvatura de $S$, lo cual puede intuirse de la siguiente discusión. Sabemos que $T_pS$ es una *buena aproximación lineal* de $S$ cerca de $p$, y que el vector $N(p)$ es normal a $T_pS$ para todo $p \in S$. De esto concluimos que el cambio en los valores del vector $N$ a lo largo de una curva $\alpha$ es un indicador directo de cómo se está curvando $S$ a lo largo de $\alpha$.

Respecto a esto último, si suponemos que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, entonces el vector $dN_p(\mathbf{v}) = (N \circ \alpha)'(0)$ es la derivada direccional de $N$ en $p$ respecto a $\mathbf{v}$, es decir, $dN_p(\mathbf{v})$ mide la tasa de cambio de $N$ en $p$ en la dirección de $\mathbf{v}$. Por lo tanto, concluimos que $dN_p(\mathbf{v})$ es un indicador directo del cambio en la curvatura de $S$ cerca de $p$ en la dirección de $\mathbf{v}$.

En consecuencia, está justificada la idea de que $dN_p$ contiene información importante sobre la *forma* de $S$, de ahí la siguiente definición.

*Definición* 1.27. Sea $S$ una superficie orientada respecto a $N\colon S \to \mathbb{R}^3$. Dado $p \in S$, el endomorfismo $A_p = -dN_p$ de $T_pS$ es llamado el **operador de forma** de $S$ en $p$.

*Observación* 1.28. En la Definición 1.27 asumimos que $S$ es orientable por simplicidad, ya que para definir $A_p$ basta considerar un campo vectorial normal unitario $N$ en un abierto $U \cap S$.

Resulta que el operador de forma (también conocido como el *endomorfismo de Weingarten*) es un operador simétrico, que significa

$$\langle A_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, A_p(\mathbf{w}) \rangle \quad \text{para todo } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pS,$$

de lo cual podemos concluir que:

- Los valores propios de $A_p$, que denotamos por $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$, son números reales.

- Existe una base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de $T_pS$ compuesta por vectores propios de $A_p$, los cuales diagonalizan a $A_p$.

Recordemos que $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$ determinan la acción de $A_p$, ya que si $\mathbf{v} \in T_pS$, podemos escribir $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ para algunas constantes $a, b$, y por ende

$$A_p(\mathbf{v}) = aA_p(\mathbf{e}_1) + bA_p(\mathbf{e}_2) = a\kappa_1(p)\mathbf{e}_1 + b\kappa_2(p)\mathbf{e}_2.$$

Lo anterior significa que $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$ son los factores de escalamiento en las direcciones $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ que alteran a $\mathbf{v}$ al aplicarle la transformación $A_p$.

Hasta ahora hemos visto que $A_p(\mathbf{v})$ es un indicador de la curvatura de $S$ en $p$ en la dirección $\mathbf{v} \in T_pS$, y que $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$ determinan el valor de $A_p(\mathbf{v})$. Por lo tanto, no debe sorprendernos la siguiente lista de conceptos, en la que **det** y **tr** denotan el determinante y la traza, respectivamente, de una transformación lineal.

*Definición* 1.29. Sean $S$ una superficie y $p \in S$. Definimos

(a) Las **curvaturas principales** de $S$ en $p$ como los valores propios $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$ de $A_p$.

(b) Las **direcciones principales** de $S$ en $p$ como los vectores propios $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ de $A_p$ asociados a $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$, respectivamente.

(c) La **curvatura de Gauss** de $S$ en $p$ como $K(p) = \det(A_p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p)$.

(d) La **curvatura media** de $S$ en $p$ como $H(p) = \dfrac{\operatorname{tr}(A_p)}{2} = \dfrac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}$.

(e) La **curvatura normal** de $S$ en $p$ respecto al vector unitario $\mathbf{v} \in T_pS$ como

$$K(p, \mathbf{v}) = \langle A_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle.$$

Observe que las curvaturas normales de $S$ respecto a las direcciones principales son exactamente las curvaturas principales de $S$. De hecho, si $\kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$, entonces $\kappa_1(p) \leq K(p, \mathbf{v}) \leq \kappa_2(p)$ para todo $\mathbf{v} \in T_pS$ unitario. En efecto, como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base ortonormal de $T_pS$, podemos escribir $\mathbf{v} = \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}(\theta)\mathbf{e}_2$ donde $\theta = \measuredangle(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1) \in [0, \pi]$. Luego

$$\begin{aligned} K(p, \mathbf{v}) &= \langle A_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle A_p(\cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}(\theta)\mathbf{e}_2), \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}(\theta)\mathbf{e}_2 \rangle \\ &= \kappa_1(p)\cos^2(\theta) + \kappa_2(p)\operatorname{sen}^2(\theta), \end{aligned}$$

de lo cual se desprende que $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$ son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de la función $f(\theta) = \kappa_1(p)\cos^2(\theta) + \kappa_2(p)\operatorname{sen}^2(\theta)$.

# 1.7 Primera forma fundamental

Hasta ahora la idea de medir distancias dentro de $S$ no ha sido considerada, lo cual es necesario si queremos hablar de geometría en $S$. Lo que queremos es una métrica que sea consistente con la forma de $S$, esto es, que la distancia entre dos puntos $p, q \in S$ tenga en cuenta únicamente cómo están de cerca con respecto a $S$. No es difícil convencerse de que la métrica usual de $\mathbb{R}^3$ no es una buena idea si queremos una métrica de este tipo, ya que el segmento de recta que une a $p$ y $q$ no tiene porque estar contenido en $S$.

Sin embargo, resulta que si restringimos el producto punto $\langle , \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ al plano tangente $T_pS$ de una superficie $S$, entonces, con ayuda de la derivada covariante que definiremos en el siguiente capítulo, podemos construir una métrica en $S$ consistente con su forma. En esencia, la idea consiste en usar las curvas $\alpha$ en $S$ que se comportan como "*líneas rectas*" en $S$, y con esto nos referimos a que tienen *aceleración cero* respecto a $S$ (de la misma forma en que las líneas rectas en $\mathbb{R}^3$ se caracterizan por tener aceleración cero). Resulta que estas curvas, llamadas *geodésicas*, tienen la propiedad de *minimizar distancia* respecto a $S$.

Debido al tiempo limitado que tenemos para este curso, no abordamos este tema en estas notas, pero debido a su relevancia para la geometría de superficies, es necesario mencionar al menos el concepto de primera forma fundamental.

*Definición* 1.30. Dada una superficie $S$, la *primera forma fundamental* de $S$ es la correspondencia que asigna a cada $p \in S$ la restricción $\langle , \rangle : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ del producto punto $\langle , \rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

Por simplicidad usamos la misma notación $\langle , \rangle$ para la primera forma fundamental de $S$ y el producto punto en $\mathbb{R}^3$. Como es de esperarse, podemos representar numéricamente a $\langle , \rangle$ a través de una parametrización $\varphi \colon \Omega \to U \cap S$. Para esto, sean $p = \varphi(u,v)$ y $\left\{ (\frac{\partial \varphi}{\partial u})_p, (\frac{\partial \varphi}{\partial v})_p \right\}$ la base de $T_pS$ asociada a $\varphi$. Entonces consideramos las funciones suaves $E, F, G \colon \Omega \to \mathbb{R}$ dadas por

$$E(u,v) = \left\langle (\tfrac{\partial \varphi}{\partial u})_p, (\tfrac{\partial \varphi}{\partial u})_p \right\rangle, \quad F(u,v) = \left\langle (\tfrac{\partial \varphi}{\partial u})_p, (\tfrac{\partial \varphi}{\partial v})_p \right\rangle, \quad G(u,v) = \left\langle (\tfrac{\partial \varphi}{\partial v})_p, (\tfrac{\partial \varphi}{\partial v})_p \right\rangle, \tag{1.2}$$

Por tanto, si escribimos $\mathbf{v} = a_1(\frac{\partial \varphi}{\partial u})_p + b_1(\frac{\partial \varphi}{\partial v})_p$ y $\mathbf{w} = a_2(\frac{\partial \varphi}{\partial u})_p + b_2(\frac{\partial \varphi}{\partial v})_p$, deducimos que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= a_1 a_2 \left\langle (\tfrac{\partial \varphi}{\partial u})_p, (\tfrac{\partial \varphi}{\partial u})_p \right\rangle + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \left\langle (\tfrac{\partial \varphi}{\partial u})_p, (\tfrac{\partial \varphi}{\partial v})_p \right\rangle + b_1 b_2 \left\langle (\tfrac{\partial \varphi}{\partial v})_p, (\tfrac{\partial \varphi}{\partial v})_p \right\rangle \\ &= a_1 a_2 E(u,v) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) F(u,v) + b_1 b_2 G(u,v) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Las funciones descritas en (1.2) son los *coeficientes* de $\langle , \rangle$ respecto a $\varphi$, y la matriz

$$\mathrm{I}(p) = \begin{bmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{bmatrix}$$

es la *matriz de coeficientes* de $\langle , \rangle$ asociada a $\varphi$.

# Capítulo 2

# Cálculo intrínseco y operadores diferenciales

La idea de *cálculo intrínseco* en una superficie $S$ hace referencia a una forma de derivar desde el *punto de vista* de $S$, idea que queda plasmada en la construcción de la *derivada covariante*. En esencia, la derivada covariante de $S$ nos permite considerar el análogo a las derivadas de segundo orden del cálculo usual.

El objetivo de este capítulo es introducir la noción de derivada covariante y algunos operadores diferenciales clásicos, algunos de los cuales dependen de la derivada covariante. Comenzamos presentando los conceptos de campo vectorial y tensorial en superficies, que serán los objetos centrales de este capítulo. Después introducimos la derivada covariante de campos vectoriales y campos tensoriales, así como el gradiente, hessiano y laplaciano de una función suave, usando para este último la noción de divergencia de un campo vectorial. Por último, presentamos una versión del teorema de la divergencia, que será usada en la demostración de las fórmulas de Minkowski en el capítulo final.

## 2.1 Campos vectoriales y tensoriales

*Definición* 2.1. Sea $S$ una superficie. Un **campo vectorial suave** en $S$ es una función suave $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ tal que $X(p) \in T_pS$ para todo $p \in S$.

Denotamos por $\mathfrak{X}(S)$ al conjunto de campos vectoriales suaves en $S$. También omitimos el término *suave* en este contexto y usamos por simplicidad la notación $X_p = X(p)$.

*Observación* 2.2. También consideramos campos vectoriales *locales* en $S$, que serán campos vectoriales definidos en un abierto de $S$. Un ejemplo de esto son los *campos vectoriales coordenados* $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ asociados a una parametrización $\varphi\colon \Omega \to U \cap S$, que asignan a cada $p \in U \cap S$ los vectores $(\frac{\partial \varphi}{\partial u})_p, (\frac{\partial \varphi}{\partial v})_p \in T_pS$. Por tanto, dado $X \in \mathfrak{X}(S)$, podemos escribir $X = A\frac{\partial \varphi}{\partial u} + B\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ para algunas funciones suaves $A, B$ en $U \cap S$. Decimos que $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\}$ es un *marco coordenado* en $U \cap S$.

Así como ocurre con un vector $\mathbf{v} \in T_pS$, podemos ver un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(S)$ como un operador de funciones suaves: dada $f \in C^\infty(S)$, tenemos que $X$ induce la función $Xf \in C^\infty(S)$

dada por $Xf(p) = X_p(f)$, es decir, $Xf$ asigna a cada $p$ la derivada direccional de $f$ respecto a $X_p$.

Ahora presentamos la noción de campo tensorial, la cual será de utilidad más adelante. El lector podrá notar la similitud con el concepto de campo vectorial que acabamos de dar.

*Definición* 2.3. Sea $S$ una superficie. Un **campo tensorial suave** en $S$ es una correspondencia $L$ que asigna a cada $p \in S$ un endomorfismo $L_p : T_pS \to T_pS$, la cual satisface la siguiente condición de suavidad:

($\star$) Para cada $X \in \mathfrak{X}(S)$, la función $LX : S \to \mathbb{R}^3$ dada por $LX(p) = L_p(X_p)$ es suave.

Como ejemplo tenemos el campo tensorial $A$ que asigna a cada $p \in S$ el operador de forma $A_p : T_pS \to T_pS$ de $S$ en $p$. Además, así como los hicimos con los campos vectoriales, usualmente omitimos el término *suave* para referirnos a un campo tensorial suave $L$.

En la condición ($\star$) viene implícito que $L$ induce, para cada $X \in \mathfrak{X}(S)$, un nuevo campo vectorial $LX$ en $S$, ya que $LX(p) = L_p(X_p) \in T_pS$ para todo $p \in S$. Por lo tanto, $L$ induce una función $L : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$, la cual es *lineal* según la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.** *Sean $S$ una superficie y $L$ un campo tensorial en $S$. Entonces la función inducida $L : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$ satisface lo siguiente para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ y $f \in C^\infty(S)$:*

(1) $L(X+Y) = LX + LY$.

(2) $L(fX) = fLX$.

De hecho lo recíproco también es cierto: si $L : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$ es una función que satisface (1) y (2), y consideramos la correspondencia $L$ que asigna a cada $p \in S$ el endomorfismo $L_p : T_pS \to T_pS$ dado por $L_p(\mathbf{v}) = (LX)_p$, donde $X \in \mathfrak{X}(S)$ es tal que $X_p = \mathbf{v}$, entonces $L$ es un campo tensorial en $S$. Para verificar esto, primero tenemos que mostrar que $L_p$ está bien definida, es decir, que $L_p(\mathbf{v})$ no depende del campo vectorial $X$ que satisface $X_p = \mathbf{v}$. Consideremos entonces $Y \in \mathfrak{X}(S)$ tal que $Y_p = \mathbf{v}$ y un marco coordenado $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\}$ en $U \cap S$, donde $\mathbf{v} = a(\frac{\partial \varphi}{\partial u})_p + b(\frac{\partial \varphi}{\partial v})_p$. Si escribimos

$$X = A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad Y = A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + B_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

entonces de (a) y (b) obtenemos

$$LX = A_1 L(\frac{\partial \varphi}{\partial u}) + B_1 L(\frac{\partial \varphi}{\partial v}), \quad LY = A_2 L(\frac{\partial \varphi}{\partial u}) + B_2 L(\frac{\partial \varphi}{\partial v}),$$

y como $A_1(p) = A_2(p) = a$ y $B_1(p) = B_2(p) = b$, se sigue que $LX_p = LY_p$. También es directo deducir de (a) y (b) que $L_p$ es lineal y que $L$ satisface ($\star$).

## 2.2 Derivada covariante

Sea $X : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial en $S$. Si consideramos la diferencial $dX_p : T_pS \to \mathbb{R}^3$, no tenemos garantizado que $dX_p(\mathbf{v}) \in T_pS$ para todo $\mathbf{v} \in T_pS$, como sí ocurría con la diferencial $dN_p$

del mapeo de Gauss $N$. Para arreglar este problema, consideramos la proyección de $dX_p(\mathbf{v})$ sobre $T_pS$, que es la componente que describe la tasa de cambio de $X$ desde el *punto de vista* de $S$.

Sea $N\colon U\cap S\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial normal unitario en $U\cap S$, donde escribimos $N(p)=N_p$. Dados $X\in\mathfrak{X}(S)$ y $\mathbf{v}\in T_pS$, consideramos la proyección ortogonal de $dX_p(\mathbf{v})$ sobre $N_p$, esto es,

$$\operatorname{proy}_{N_p}(dX_p(\mathbf{v}))=\langle dX_p(\mathbf{v}),N_p\rangle N_p.$$

De este modo

$$dX_p(\mathbf{v})-\operatorname{proy}_{N_p}(dX_p(\mathbf{v}))=dX_p(\mathbf{v})-\langle dX_p(\mathbf{v}),N_p\rangle N_p\in T_pS.$$

Más aún, si consideramos una curva $\alpha$ en $S$ tal que $\alpha(0)=p$ y $\alpha'(0)=\mathbf{v}$, y si definimos $f(t)=\langle X_{\alpha(t)},N_{\alpha(t)}\rangle=0$, entonces

$$f'(t)=\langle dX_{\alpha(t)}(\alpha'(t)),N_{\alpha(t)}\rangle+\langle X_{\alpha(t)},dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\rangle=0,$$

así que al evaluar en $t=0$ obtenemos

$$0=\langle dX_p(\mathbf{v}),N_p\rangle+\langle X_p,dN_p(\mathbf{v})\rangle=\langle dX_p(\mathbf{v}),N_p\rangle-\langle X_p,A_p(\mathbf{v})\rangle,$$

es decir, $\langle dX_p(\mathbf{v}),N_p\rangle=\langle X_p,A_p(\mathbf{v})\rangle$. La discusión anterior motiva la siguiente definición.

*Definición* 2.5. Sean $S$ una superficie y $N\colon U\cap S\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial normal unitario en $U\cap S$. Dado $X\in\mathfrak{X}(S)$, definimos la **derivada covariante** de $X$ respecto a $\mathbf{v}\in T_pS$ como

$$\nabla_{\mathbf{v}}X=dX_p(\mathbf{v})-\langle X_p,A_p(\mathbf{v})\rangle N_p\in T_pS. \tag{2.1}$$

Por lo tanto la descomposición de $dX_p(\mathbf{v})$ respecto a $T_pS$ y $N_p$ queda como

$$dX_p(\mathbf{v})=\nabla_{\mathbf{v}}X+\langle X_p,A_p(\mathbf{v})\rangle N_p, \tag{2.2}$$

que es conocida como la *ecuación de Gauss*.

**Proposición 2.6.** *Sea $S$ una superficie. Entonces para cualesquiera $X,Y\in\mathfrak{X}(S)$ y $\mathbf{v},\mathbf{w}\in T_pS$ se cumple lo siguiente:*

(a) $\nabla_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}X=\nabla_{\mathbf{v}}X+\nabla_{\mathbf{w}}X$.

(b) $\nabla_{\lambda\mathbf{v}}X=\lambda\nabla_{\mathbf{v}}X$ *para todo* $\lambda\in\mathbb{R}$.

(c) $\nabla_{\mathbf{v}}(X+Y)=\nabla_{\mathbf{v}}X+\nabla_{\mathbf{v}}Y$.

(d) $\nabla_{\mathbf{v}}(fX)=\mathbf{v}(f)X_p+f(p)\nabla_{\mathbf{v}}X$ *para todo* $f\in C^\infty(S)$.

(e) $\mathbf{v}\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_{\mathbf{v}}X,Y_p\rangle+\langle X_p,\nabla_{\mathbf{v}}Y\rangle$.

También podemos ver a la derivada covariante como un operador $\nabla\colon\mathfrak{X}(S)\times\mathfrak{X}(S)\to\mathfrak{X}(S)$ que asigna a la pareja de campos vectoriales $(X,Y)$ el campo vectorial $\nabla(X,Y)=\nabla_XY$ dado por

$$(\nabla_XY)_p:=\nabla_{X_p}Y=dY_p(X_p)-\langle Y_p,A_p(X_p)\rangle N_p. \tag{2.3}$$

De esto es natural esperar la siguiente proposición para el operador $\nabla$, análoga a la Proposición 2.6.

**PROPOSICIÓN 2.7.** *Sea $S$ una superficie. La derivada covariante $\nabla\colon \mathfrak{X}(S)\times\mathfrak{X}(S)\to\mathfrak{X}(S)$ satisface lo siguiente para cualesquiera $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(S)$ y $f\in C^\infty(S)$:*

(a) $\nabla_{X+Y}Z=\nabla_X Z+\nabla_Y Z$.

(b) $\nabla_{fX}Y=f\nabla_X Y$.

(c) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$.

(d) $\nabla_X(fY)=X(f)Y+f\nabla_X Y$.

(e) $X(\langle Y,Z\rangle)=\langle\nabla_X Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_X Z\rangle$.

De la derivada covariante $\nabla$ obtenemos una derivada covariante de campos tensoriales $\nabla^*$.

*DEFINICIÓN 2.8.* Sean $S$ una superficie y $L$ un campo tensorial en $S$. Definimos la **derivada covariante** de $L$ respecto a $X\in\mathfrak{X}(S)$ como el campo tensorial $\nabla^*_X L\colon \mathfrak{X}(S)\to\mathfrak{X}(S)$ definido por

$$\nabla^*_X L(Y)=\nabla_X(LY)-L(\nabla_X Y).$$

$\nabla^*_X L$ induce un endomorfismo $(\nabla^*_X L)_p\colon T_pS\to T_pS$ definido por $(\nabla^*_X L)_p(\mathbf{w})=\big(\nabla^*_X L(Y)\big)_p$, donde $Y\in\mathfrak{X}(S)$ es tal que $Y_p=\mathbf{w}$. También usamos por simplicidad la notación $\nabla^*_{\mathbf{v}}L=(\nabla^*_X L)_p$, donde $\mathbf{v}=X_p$. Ahora bien, como $\nabla^*_{\mathbf{v}}L\colon T_pS\to T_pS$ es un endomorfismo, podemos considerar su traza $\operatorname{tr}(\nabla^*_{\mathbf{v}}L)$, que resulta ser la derivada direccional de la traza de $L$ respecto a $\mathbf{v}$.

**PROPOSICIÓN 2.9.** *Sean $S$ una superficie y $L$ un campo tensorial en $S$. Si consideramos la función suave $\operatorname{tr}L\colon S\to\mathbb{R}$ definida por $\operatorname{tr}L(p)=\operatorname{tr}(L_p)$, entonces la traza de $\nabla^*_{\mathbf{v}}L$ está dada por*

$$\operatorname{tr}(\nabla^*_{\mathbf{v}}L)=\mathbf{v}(\operatorname{tr}L).$$

De hecho, si consideramos $X\in\mathfrak{X}(S)$ y la función inducida $\operatorname{tr}(\nabla^*_X L)\colon S\to\mathbb{R}$ dada por $\operatorname{tr}(\nabla^*_X L)(p)=\operatorname{tr}(\nabla^*_{X_p}L)$, entonces se cumple que

$$\operatorname{tr}(\nabla^*_X L)=X(\operatorname{tr}L).$$

Concluimos con una aplicación de la derivada covariante de campos tensoriales, la cual expresa en lenguaje tensorial las ecuaciones de Codazzi-Mainardi para superficies (ver el Teorema 8.1 de [6]).

**PROPOSICIÓN 2.10.** *Sea $S$ una superficie. Las ecuaciones de Codazzi-Mainardi de $S$ son equivalentes a que para todo $X,Y\in\mathfrak{X}(S)$ se satisfaga*

$$\nabla^*_X A(Y)=\nabla^*_Y A(X).$$

# 2.3

# Extensiones locales y derivada covariante en $\mathbb{R}^3$

Para lo que viene será útil expresar la diferenciabilidad de $f$ en $S$ en términos de la diferenciabilidad de una *extensión local* $\bar{f}$ de $f$ (omitimos la prueba del siguiente resultado debido a los detalles técnicos que contiene).

**Proposición 2.11.** *Sean $S$ una superficie y $f\colon S \to \mathbb{R}$ una función. Entonces $f$ es suave en $S$ si y sólo si para cada $p \in S$ existen una abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ que contiene a $p$ y una función suave $\bar{f}\colon U \to \mathbb{R}$ tales que $f = \bar{f}\big|_{U\cap S}$.*

Más aún, la diferencial de $f$ puede expresarse en términos de la *derivada total* de una extensión local $\bar{f}$. Más explícitamente, recordemos que la derivada total de una función suave $\bar{f}\colon U \to \mathbb{R}$ en $p \in U$ es la única transformación lineal que satisface

$$\lim_{\mathbf{v}\to 0} \frac{\bar{f}(\mathbf{v}+p) - \bar{f}(p) - D\bar{f}_p(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = 0, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Es por esto que $D\bar{f}_p$ se considera la *mejor aproximación lineal* de $\bar{f}$ en $p$. Del límite anterior podemos deducir que $D\bar{f}_p(\mathbf{v})$ es igual a la derivada direccional de $\bar{f}$ en $p$ respecto a $\mathbf{v}$, esto es,

$$D\bar{f}_p(\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\bar{f}(t\mathbf{v}+p)\bigg|_{t=0},$$

Dicho esto, dados $p \in S$, $\mathbf{v} \in T_pS$ y una curva $\alpha$ en $S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, tenemos

$$df_p(\mathbf{v}) = (f\circ\alpha)'(0) = (\bar{f}\circ\alpha)'(0) = D\bar{f}_p(\mathbf{v}).$$

La discusión anterior puede extenderse al contexto de campos vectoriales definidos en $S$. Para esto, recordemos que un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ es una función suave $\bar{X}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. La derivada total de $\bar{X}$ se define de manera análoga a través del límite

$$\lim_{\mathbf{v}\to 0} \frac{\left\|\bar{X}(\mathbf{v}+p) - \bar{X}(p) - D\bar{X}_p(\mathbf{v})\right\|}{\|\mathbf{v}\|} = 0,$$

obteniendo también las derivadas direccionales de $\bar{X}$ como

$$D\bar{X}_p(\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\bar{X}(t\mathbf{v}+p)\bigg|_{t=0}.$$

En este contexto también usamos la notación $\bar{X}(p) = \bar{X}_p$.

Así pues, usando las funciones coordenadas de un campo vectorial $X\colon S \to \mathbb{R}^3$, podemos mostrar que $X$ puede verse como la restricción $\bar{X}|_{U\cap S}$ de una extensión $\bar{X}$ en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, y que $dX_p(\mathbf{v}) = D\bar{X}_p(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in T_pS$. Más aún, si consideramos el campo vectorial inducido $dX(Y)\colon S \to \mathbb{R}^3$ dado por $dX(Y)_p = dX_p(Y_p)$, entonces la identidad $dX_p(\mathbf{v}) = D\bar{X}_p(\mathbf{v})$ induce la extensión local $D\bar{X}(\bar{Y})$ de $dX(Y)$ dada por $D\bar{X}(\bar{Y})_p = D\bar{X}_p(\bar{Y}_p)$.

También conviene introducir la noción de derivada covariante en $\mathbb{R}^3$, la cual está en términos de la derivada total $D$. Dados dos campos vectoriales $\bar{X},\bar{Y}$ en $\mathbb{R}^3$, definimos el operador $D$ que asigna a $(\bar{X},\bar{Y})$ el campo vectorial $D(\bar{X},\bar{Y}) = D_{\bar{X}}\bar{Y}$ dado por

$$(D_{\bar{X}}\bar{Y})_p = D\bar{Y}(\bar{X})_p = D\bar{Y}_p(\bar{X}_p).$$

También podemos considerar la derivada covariante de $\bar{Y}$ en $p$ respecto a $\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^3$ definiendo $D_{\mathbf{v}_p}\bar{Y} = (D_{\bar{X}}\bar{Y})_p$, donde $\bar{X}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ que satisface $\bar{X}_p = \mathbf{v}_p$.

En este contexto, la derivada covariante $\nabla$ de una superficie $S$ y la derivada covariante $D$ de $\mathbb{R}^3$ están relacionadas por la identidad

$$\nabla_X Y = D_{\bar{X}}\bar{Y} - \langle Y, AX\rangle N, \tag{2.4}$$

donde $\bar{X},\bar{Y}$ son extensiones locales de $X,Y \in \mathfrak{X}(S)$. Por lo tanto, la ecuación de Gauss queda como

$$D_{\bar{X}}\bar{Y} = \nabla_X Y + \langle Y, AX\rangle N.$$

## 2.4 Gradiente

La unicidad que se afirma en la siguiente definición está garantizada por el conocido Teorema de Representación de Riesz de álgebra lineal.

*DEFINICIÓN* 2.12. Sean $S$ una superficie, $p \in S$ y $f \in C^\infty(S)$. Definimos el **gradiente** de $f$ en $p$ como el único vector $\nabla f(p) \in T_pS$ que satisface

$$df_p(\mathbf{v}) = \langle \nabla f(p), \mathbf{v}\rangle \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in T_pS.$$

Esto induce naturalmente el campo vectorial gradiente $\nabla f$ dado por la regla $p \mapsto \nabla f(p)$. De hecho $\nabla f$ satisface

$$Xf = \langle \nabla f, X\rangle \quad \text{para cualquier } X \in \mathfrak{X}(S).$$

Ahora expresamos $\nabla f$ en coordenadas locales.

**PROPOSICIÓN 2.13.** *Sean $S$ una superficie y $\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\}$ un marco coordenado en $U \cap S$. Si $f \in C^\infty(S)$, entonces*

$$\nabla f = \left(\frac{Gf_u - Ff_v}{EG - F^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \left(\frac{Ef_v - Ff_u}{EG - F^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

*donde $f_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(f)$, $f_v = \frac{\partial\varphi}{\partial v}(f)$, y $E,F,G$ son los coeficientes de $\langle\,,\rangle$ respecto a $\varphi$.*

*Demostración.* Escribiendo $\nabla f = a\frac{\partial\varphi}{\partial u} + b\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ para algunas funciones $a,b\colon U \cap S \to \mathbb{R}$, tenemos

$$f_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(f) = \left\langle \nabla f, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right\rangle = aE + bF,$$
$$f_v = \frac{\partial\varphi}{\partial v}(f) = \left\langle \nabla f, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\rangle = aF + bG,$$

que escribimos en notación matricial como

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u \\ f_v \end{bmatrix},$$

De esto deducimos

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_u \\ f_v \end{bmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_u \\ f_v \end{bmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{bmatrix} Gf_u - Ff_v \\ Ef_v - Ff_u \end{bmatrix}.$$

□

*Ejemplo* 2.14. Consideremos el plano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ y la parametrización global $\varphi(u,v) = (u,v,0)$ de $S$. Entonces $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1,0,0)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0,1,0)$, y por tanto $E = 1$, $F = 0$ y $G = 1$. Luego, para cualquier $f \in C^\infty(S)$, tenemos

$$\nabla f = f_u \frac{\partial \varphi}{\partial u} + f_v \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left( \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial u}, \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial v}, 0 \right), \quad \text{donde } \mathrm{f} = f \circ \varphi.$$

*Ejemplo* 2.15. Dado $r > 0$ fijo, consideremos el cilindro $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$ y la parametrización $\varphi(\theta,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ de $S$. Entonces

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (-r\,\mathrm{sen}(\theta), r\cos(\theta), 0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = (0,0,1),$$

lo cual implica que $E = r^2$, $F = 0$ y $G = 1$, y por ende para cualquier $f \in C^\infty(S)$ tenemos

$$\nabla f = \frac{f_\theta}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + f_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left( -\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{r} \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \theta}, \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial z} \right), \quad \text{donde } \mathrm{f} = f \circ \varphi.$$

A partir de aquí usamos la notación más simple $\nabla f(p) = \nabla f_p$.

**Proposición 2.16.** *El operador gradiente $\nabla$ en una superficie $S$ satisface las siguientes propiedades para cualesquiera $f, g \in C^\infty(S)$:*

**(a)** $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

**(b)** $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

**(c)** $\nabla(h \circ f) = h'(f)\nabla f$, *donde* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función suave.*

**(d)** *Dado un abierto conexo $U \cap S$, tenemos que $\nabla f_p = 0$ para todo $p \in U \cap S$ si y sólo si $f$ es constante en $U \cap S$.*

*Demostración.* Para el inciso (a), notemos que como $d(f+g)_p = df_p + dg_p$, se sigue que

$$d(f+g)_p(\mathbf{v}) = df_p(\mathbf{v}) + dg_p(\mathbf{v}) = \langle \nabla f_p, \mathbf{v} \rangle + \langle \nabla g_p, \mathbf{v} \rangle = \langle \nabla f_p + \nabla g_p, \mathbf{v} \rangle, \qquad (2.5)$$

lo cual implica que $\nabla(f+g)_p = \nabla f_p + \nabla g_p$ por la unicidad de $\nabla(f+g)_p$ respecto a (2.5).

Las pruebas de (b) y (c) son similares a la de (a) usando las fórmulas

$$d(fg)_p = g(p)df_p + f(p)dg_p,$$
$$d(h\circ f)_p = h'(f(p))df_p.$$

Para (d) observemos que la suficiencia es evidente. Así pues, supongamos que $\nabla f_p = 0$ para todo $p \in U \cap S$, lo cual implica $df_p(\mathbf{v}) = \langle \nabla f_p, \mathbf{v}\rangle = 0$ para cada $\mathbf{v} \in T_pS$. Consideremos una parametrización $\boldsymbol{\varphi}\colon \Omega \to V \cap S$ alrededor de $p = \boldsymbol{\varphi}(u,v)$ tal que $\Omega$ es un abierto conexo y $V \cap S \subset U \cap S$. Si denotamos por $\langle\,,\rangle^*$ al producto punto en $\mathbb{R}^2$ y $\nabla(f\circ\boldsymbol{\varphi})_{(u,v)}$ denota el gradiente usual en $\mathbb{R}^2$ de $f\circ\boldsymbol{\varphi}$ en $(u,v)$, entonces para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$\langle \nabla(f\circ\boldsymbol{\varphi})_{(u,v)}, \mathbf{v}\rangle^* = d(f\circ\boldsymbol{\varphi})_{(u,v)}(\mathbf{v}) = df_p\big(d\boldsymbol{\varphi}_{(u,v)}(\mathbf{v})\big) = 0,$$

y por ende $\nabla(f\circ\boldsymbol{\varphi})_{(u,v)} = 0$ para todo $(u,v) \in \Omega$. Sabemos del cálculo usual que esto implica que $f\circ\boldsymbol{\varphi}$ es constante en $\Omega$, y como $\boldsymbol{\varphi}$ es inyectiva, $f$ debe ser constante en $V \cap S$.

Este argumento muestra que si elegimos $p_0 \in U \cap S$ y consideramos el conjunto

$$A = (f|_{U\cap S})^{-1}(f(p_0)) = \{p \in U \cap S : f(p) = f(p_0)\},$$

entonces $A$ es abierto. Además es claro que $A$ es cerrado y no vacío, y al ser $U \cap S$ conexo, debemos tener $A = U \cap S$. □

Cabe esperar que $\nabla f$ pueda expresarse en términos del gradiente en $\mathbb{R}^3$ de una extensión local $\bar{f}$. Si denotemos por $\operatorname{grad}$ al operador gradiente en $\mathbb{R}^3$, y si $(x,y,z)$ son las coordenadas en $\mathbb{R}^3$, entonces el gradiente de $\bar{f}$ en $p \in \mathbb{R}^3$ es

$$\operatorname{grad}\bar{f}_p = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(p), \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(p), \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(p)\right).$$

Por otro lado, observemos que cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ puede descomponerse como $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\top + \mathbf{v}^\perp$, donde $\mathbf{v}^\top$ y $\mathbf{v}^\perp$ son las componentes tangente y ortogonal de $\mathbf{v}$ respecto a $T_pS$, respectivamente. Dicho esto, $\operatorname{grad} F_p$ puede descomponerse como

$$\operatorname{grad}\bar{f}_p = (\operatorname{grad}\bar{f}_p)^\top + (\operatorname{grad}\bar{f}_p)^\perp,$$

de ahí que para todo $\mathbf{v} \in T_pS$ se cumpla

$$df_p(\mathbf{v}) = D\bar{f}_p(\mathbf{v}) = \langle \operatorname{grad}\bar{f}_p, \mathbf{v}\rangle = \left\langle (\operatorname{grad}\bar{f}_p)^\top, \mathbf{v}\right\rangle.$$

Como $\nabla f_p$ es el único vector en $T_pS$ que satisface $df_p(\mathbf{v}) = \langle \nabla f_p, \mathbf{v}\rangle$ para todo $\mathbf{v} \in T_pS$, entonces

$$\nabla f_p = (\operatorname{grad}\bar{f}_p)^\top = \operatorname{grad}\bar{f}_p - (\operatorname{grad}\bar{f}_p)^\perp = \operatorname{grad}\bar{f}_p - \langle \operatorname{grad}\bar{f}_p, N_p\rangle N_p, \tag{2.6}$$

donde $N$ es un campo vectorial normal unitario en $U \cap S$. Como consecuencia el campo vectorial $\operatorname{grad}\bar{f} - \langle \operatorname{grad}\bar{f}, \bar{N}\rangle \bar{N}$ es una extensión local de $\nabla f$, donde $\bar{N}$ es una extensión local de $N$.

# 2.5 Hessiano

*Definición* 2.17. Sean $S$ una superficie, $p \in S$ y $f \in C^\infty(S)$. Definimos el **hessiano** de $f$ en $p$ como la forma bilineal $\nabla^2 f_p \colon T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ dada por

$$\nabla^2 f_p(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \langle \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla f), \mathbf{w} \rangle, \quad \mathbf{v},\mathbf{w} \in T_pS.$$

También podemos extender el hessiano de $f$ a campos vectoriales por medio de la función $\nabla^2 f \colon \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \to C^\infty(S)$ definida por $(X,Y) \mapsto \nabla^2 f(X,Y)$, donde

$$\nabla^2 f(X,Y)(p) = \left\langle \left(\nabla_X(\nabla f)\right)_p, Y_p \right\rangle,$$

que escribimos de forma compacta como $\nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle$.

Si recordamos que la derivada covariante $\nabla_{\mathbf{v}} Y$ de $Y \in \mathfrak{X}(S)$ respecto a $\mathbf{v} \in T_pS$ puede escribirse como $\nabla_{\mathbf{v}} Y = (\nabla_X Y)_p$, donde $X \in \mathfrak{X}(S)$ es tal que $X_p = \mathbf{v}$ (ver ecuación (2.3)), entonces para $\mathbf{v},\mathbf{w} \in T_pS$ y $X,Y \in \mathfrak{X}(S)$ tales que $X_p = \mathbf{v}$ y $Y_p = \mathbf{w}$, tenemos

$$\nabla^2 f_p(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \langle \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla f), \mathbf{w} \rangle = \left\langle \left(\nabla_X(\nabla f)\right)_p, Y_p \right\rangle = \nabla^2 f(X,Y)(p).$$

Así como ocurrió con $\nabla f$, podemos expresar $\nabla^2 f$ en términos del hessiano en $\mathbb{R}^3$ de una extensión local $\bar{f}$. Para esto vale la pena recordar el operador hessiano en $\mathbb{R}^3$: si $\bar{f} \colon U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función suave, la *matriz hessiana* de $F$ en $p \in \mathbb{R}^3$ es

$$\mathrm{H}_{\bar{f}}(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x \partial z}(p) \\ \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y^2}(p) & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial y \partial z}(p) \\ \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z \partial x}(p) & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z \partial y}(p) & \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z^2}(p) \end{bmatrix}.$$

Entonces el hessiano de $\bar{f}$ en $p$ es la forma bilineal $\operatorname{hess} \bar{f}_p \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\operatorname{hess} \bar{f}_p(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{v}\, \mathrm{H}_{\bar{f}}(p)\, \mathbf{w}^T.$$

la cual puede escribirse de manera análoga a la Definición 2.17 usando el producto punto $\langle , \rangle$ y la derivada covariante $D$ de $\mathbb{R}^3$ como sigue:

$$\operatorname{hess} \bar{f}_p(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \left\langle D_{\mathbf{v}}(\operatorname{grad} \bar{f}), \mathbf{w} \right\rangle.$$

También podemos usar campos vectoriales para escribir $\operatorname{hess} \bar{f} = \langle D_X(\operatorname{grad} F), Y \rangle = X\, \mathrm{H}_{\bar{f}}\, Y$.

Habiendo dado el contexto necesario, lo siguiente es expresar $\nabla^2 f$ en términos de $\operatorname{hess} \bar{f}$. Sean $X,Y \in \mathfrak{X}(S)$ y $\bar{X},\bar{Y}$ extensiones locales de $X,Y$, y sea $N$ un campo vectorial normal unitario local en $S$ y $\bar{N}$ una extensión local de $N$. Usando que $\operatorname{grad} \bar{f} - \left\langle \operatorname{grad} \bar{f}, \bar{N} \right\rangle \bar{N}$ es una extensión local de

$\nabla f$, se sigue de (2.4) que

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(X,Y) &= \langle \nabla_X(\nabla f), Y\rangle \\ &= \left\langle D_{\bar{X}}\left(\operatorname{grad}\bar{f} - \left\langle \operatorname{grad}\bar{f},\bar{N}\right\rangle \bar{N}\right) - \langle \nabla f, AX\rangle N, Y\right\rangle \\ &= \left\langle D_{\bar{X}}(\operatorname{grad}\bar{f}),\bar{Y}\right\rangle - \left\langle \operatorname{grad}\bar{f},\bar{N}\right\rangle \langle D_{\bar{X}}\bar{N}, Y\rangle \\ &= \operatorname{hess}\bar{f}(\bar{X},\bar{Y}) - \left\langle \operatorname{grad}\bar{f}, N\right\rangle \langle D\bar{N}(\bar{X}), Y\rangle \\ &= \operatorname{hess}\bar{f}(\bar{X},\bar{Y}) - \left\langle \operatorname{grad}\bar{f}, N\right\rangle \langle dN(X), Y\rangle \\ &= \operatorname{hess}\bar{f}(\bar{X},\bar{Y}) + \left\langle \operatorname{grad}\bar{f}, N\right\rangle \langle AX, Y\rangle .\end{aligned} \tag{2.7}$$

**PROPOSICIÓN 2.18.** *Sean $S$ una superficie y $f \in C^\infty(S)$. Entonces el hessiano de $f$ satisface las siguientes propiedades para cualesquiera $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(S)$:*

(a) $\nabla^2 f(X+Y,Z) = \nabla^2 f(X,Z) + \nabla^2 f(Y,Z)$.

(b) $\nabla^2 f(gX,Y) = g\nabla^2 f(X,Y)$, *donde* $g \in C^\infty(S)$.

(c) $\nabla^2 f(X,Y) = \nabla^2 f(Y,X)$.

*Demostración.* Los incisos (a) y (b) se deducen fácilmente de la linealidad de la derivada covariante (respecto al primer argumento), del gradiente de $f$ y de la métrica $\langle , \rangle$. Para demostrar (c), observemos primero que el hessiano de una extensión $\bar{f}$ es simétrica, es decir, que $\operatorname{hess}\bar{f}(\bar{X},\bar{Y}) = \operatorname{hess}\bar{f}(\bar{Y},\bar{X})$ para cualesquiera campos vectoriales $\bar{X},\bar{Y}$ en $\mathbb{R}^3$, lo cual es consecuencia de la igualdad de las derivadas parciales mixtas. Dicho esto, sabemos de (2.7) que

$$\nabla^2 f(X,Y) = \operatorname{hess}\bar{f}(\bar{X},\bar{Y}) + \left\langle \operatorname{grad}\bar{f}, N\right\rangle \langle AX, Y\rangle ,$$

y como $\langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle$, se sigue que

$$\nabla^2 f(X,Y) = \operatorname{hess}\bar{f}(\bar{Y},\bar{X}) + \left\langle \operatorname{grad}\bar{f}, N\right\rangle \langle X, AY\rangle = \nabla^2 f(Y,X).$$

□

*EJEMPLO* 2.19. Consideremos la función $f(p) = \frac{1}{2}\|p-q\|^2$ del Ejemplo 1.8. Notemos que la función $\bar{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\bar{f}(p) = \frac{1}{2}\|p-q\|^2$ es una extensión de $f$. Además

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\bar{f}_p &= p-q, \\ \operatorname{hess}\bar{f}_p(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle , \quad \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (2.6) y (2.7) concluimos que

$$\begin{aligned}\nabla f_p &= p - q - \left\langle p-q, N_p\right\rangle N_p, \\ \nabla^2 f_p(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + \left\langle p-c, N_p\right\rangle \langle A_p(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle , \quad \mathbf{v},\mathbf{w} \in T_pS.\end{aligned}$$

*EJEMPLO* 2.20. Consideremos la función $h(p) = \langle p-q, \mathbf{n}\rangle$ del Ejemplo 1.9. Entonces la función $\bar{h}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\bar{h}(p) = \langle p-q,\mathbf{n}\rangle$ es una extensión de $h$. Notemos que $\operatorname{grad}\bar{h}_p = \mathbf{n}$, por lo que $\nabla h_p = \mathbf{n} - \left\langle \mathbf{n}, N_p\right\rangle N_p$. Además, como $\operatorname{hess}\bar{h}_p(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0$, tenemos que

$$\nabla^2 h_p(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \left\langle \operatorname{grad}\bar{h}_p, N_p\right\rangle \langle A_p(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle = \left\langle \mathbf{n}, N_p\right\rangle \langle A_p(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle .$$

# 2.6

# Divergencia y laplaciano

Las fórmulas de Minkowski son dos fórmulas integrales clásicas para superficies compactas que se obtienen como una aplicación del famoso Teorema de la divergencia, de ahí la importancia de los conceptos que definimos a continuación.

*Definición* 2.21. Sean $S$ una superficie, $p \in S$ y $X \in \mathfrak{X}(S)$. Definimos la **divergencia** de $X$ en $p$ por $\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}(\nabla X_p)$, donde $\nabla X_p \colon T_pS \to T_pS$ es la transformación lineal definida por $\nabla X_p(v) = \nabla_v X$.

Observe que la Proposición 2.6 garantiza la linealidad de $\nabla X_p \colon T_pS \to T_pS$. Además, la función $\nabla X$ que asocia a cada $p \in S$ el endomorfismo $\nabla X_p \colon T_pS \to T_pS$ es un campo tensorial en $S$.

Notemos que la función asociada $\operatorname{div} X \colon S \to \mathbb{R}$ dada por $p \mapsto \operatorname{div} X(p)$ es suave. Además, si $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base ortonormal de $T_pS$, obtenemos que

$$\operatorname{div} X(p) = \langle \nabla X_p(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1 \rangle + \langle \nabla X_p(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2 \rangle = \langle (\nabla_{\mathbf{e}_1} X)_p, \mathbf{e}_1 \rangle + \langle (\nabla_{\mathbf{e}_2} X)_p, \mathbf{e}_2 \rangle .$$

Ahora podemos definir el laplaciano de una función suave.

*Definición* 2.22. Sean $S$ una superficie, $p \in S$ y $f \in C^\infty(S)$. Definimos el **laplaciano** de $f$ en $p$ como $\Delta f(p) = \operatorname{div}(\nabla f)(p)$.

Naturalmente tenemos la función suave inducida $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) \colon S \to \mathbb{R}$, la cual está relacionada con el hessiano $\nabla^2 f$ por medio de la fórmula

$$\Delta f = \langle \nabla_{\mathbf{e}_1}(\nabla f), \mathbf{e}_1 \rangle + \langle \nabla_{\mathbf{e}_2}(\nabla f), \mathbf{e}_2 \rangle = (\nabla^2 f)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + (\nabla^2 f)(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2), \tag{2.8}$$

donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es un marco ortonormal en $S$. Tenemos otra fórmula útil sobre el laplaciano de $f$.

**Proposición 2.23.** *Sean $S$ una superficie y $f, g \in C^\infty(S)$. Entonces*

$$\operatorname{div}(g \nabla f) = \langle \nabla g, \nabla f \rangle + g \Delta f.$$

Finalmente enunciamos el Teorema de la divergencia, que será crucial para la prueba de las fórmulas de Minkowski.

**Teorema 2.24.** *Sea $S$ una superficie compacta y orientable. Si $X \in \mathfrak{X}(S)$, entonces*

$$\int_S \operatorname{div} X(p) \, \mathrm{d}p = 0,$$

*donde $\mathrm{d}p$ denota el elemento de área de $S$. En particular*

$$\int_S \Delta f(p) \, \mathrm{d}p = 0 \quad \textit{para cada } f \in C^\infty(S).$$

# Capítulo 3

# Fórmulas de Minkowski

El objetivo final de estas notas son un par de fórmulas integrales demostradas por H. Minkowski en [8] en 1903. Las versiones que presentamos aquí son ecuaciones integrales sobre una superficie $S$ orientable y compacta (sin frontera) que involucran la curvatura de Gauss y la curvatura media de $S$. A continuación presentamos una demostración elemental y detallada de las fórmulas basada únicamente en la teoría desarrollada en los capítulos anteriores.

## 3.1 Enunciados y pruebas

Cabe recordar que cuando consideramos cualquier campo vectorial $X$, estamos usando la notación simplificada $X(p) = X_p$.

**Teorema 3.1** (Fórmulas de Minkowski). *Sea $S$ una superficie compacta y orientada respecto a $N\colon S \to \mathbb{R}^3$. Para cada $q \in \mathbb{R}^3$ fijo, tenemos*

$$\int_S \big(1 + H(p)\,\langle p-q, N_p\rangle\big)\,\mathrm{d}p = 0, \tag{3.1}$$

$$\int_S \big(H(p) + K(p)\,\langle p-q, N_p\rangle\big)\,\mathrm{d}p = 0, \tag{3.2}$$

*donde $H$ es la curvatura media y $K$ es la curvatura de Gauss de $S$.*

*Prueba de* (3.1). Consideremos la función $f(p) = \frac{1}{2}\|p-q\|^2$ del Ejemplo 1.8. Dado un vector unitario $\mathbf{v} \in T_pS$, tenemos que

$$\nabla^2 f_p(\mathbf{v},\mathbf{v}) = 1 + \langle A_p(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle\,\langle p-q, N_p\rangle = 1 + K(p,\mathbf{v})\,\langle p-q, N_p\rangle\,.$$

Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base ortonormal de $T_pS$ compuesta por los vectores propios de $A_p$. Como $K(p,\mathbf{e}_i) =$

$\kappa_i(p)$, se sigue de (2.8) que

$$\begin{aligned}\Delta f(p) &= \nabla^2 f_p(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) + \nabla^2 f_p(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)\\ &= 1+\kappa_1(p)\left\langle p-q, N_p\right\rangle + 1+\kappa_2(p)\left\langle p-q,N_p\right\rangle\\ &= 2+\left(\kappa_1(p)+\kappa_2(p)\right)\left\langle p-q,N_p\right\rangle\\ &= 2\left(1+\frac{\kappa_1(p)+\kappa_2(p)}{2}\left\langle p-q,N_p\right\rangle\right).\end{aligned}$$

Como $H(p)=\frac{\kappa_1(p)+\kappa_2(p)}{2}$, la conclusión se sigue al integrar sobre $S$ y aplicar el Teorema de la divergencia. □

En lo que sigue aún consideramos la función $f(p)=\frac{1}{2}\|p-c\|^2$ del Ejemplo 1.8.

*Prueba de* (3.2). Consideremos la función $g\colon S\to\mathbb{R}$ dada por $g(p)=\left\langle p-c,N_p\right\rangle$. Sabemos que $dg_p(\mathbf{v})=\frac{d}{dt}g(\alpha(t))\big|_{t=0}$, donde $\alpha$ satisface $\alpha(0)=p$ y $\alpha'(0)=\mathbf{v}$. Entonces

$$\frac{d}{dt}g(\alpha(t))=\frac{d}{dt}\left\langle\alpha(t),N_{\alpha(t)}\right\rangle=\left\langle\alpha'(t),N_{\alpha(t)}\right\rangle+\left\langle\alpha(t)-c,dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\right\rangle,$$

de ahí que

$$dg_p(\mathbf{v})=\left\langle\mathbf{v},N_p\right\rangle+\left\langle p-c,dN_p(\mathbf{v})\right\rangle=-\left\langle p-c,A_p(\mathbf{v})\right\rangle.$$

Por otro lado, del Ejemplo 2.19 tenemos que

$$p-c=\nabla f_p+\left\langle p-c,N_p\right\rangle N_p$$

que al sustituirlo en la ecuación anterior nos lleva a que

$$dg_p(\mathbf{v})=-\left\langle\nabla f_p,A_p(\mathbf{v})\right\rangle=\left\langle-A_p(\nabla f_p),\mathbf{v}\right\rangle\quad\Rightarrow\quad\nabla g_p=-A_p(\nabla f_p),$$

que puede escribirse como $\nabla g=-A(\nabla f)$. De esto podemos concluir que

$$\nabla^*_X A(\nabla f)=\nabla_X(A(\nabla f))-A(\nabla_X(\nabla f))=-\nabla_X(\nabla g)-A(\nabla_X(\nabla f)),$$

implicando $\nabla_X(\nabla g)=-\nabla^*_X A(\nabla f)-A(\nabla_X\nabla f)$. Además, por la Proposición 2.10, sabemos que $\nabla^*_X A(\nabla f)=\nabla^*_{\nabla f}A(X)$, de ahí que

$$\nabla_X(\nabla g)=-\nabla^*_{\nabla f}A(X)-A(\nabla_X(\nabla f)).$$

Por lo tanto, si consideramos $p\in S$ y $\mathbf{v}\in T_pS$, obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 g_p(\mathbf{v},\mathbf{v}) &= \langle\nabla_{\mathbf{v}}(\nabla g),\mathbf{v}\rangle\\ &= -\left\langle(\nabla^*_{\nabla f}A)_p(\mathbf{v}),\mathbf{v}\right\rangle-\left\langle A_p(\nabla_{\mathbf{v}}(\nabla f)),\mathbf{v}\right\rangle\\ &= -\left\langle(\nabla^*_{\nabla f}A)_p(\mathbf{v}),\mathbf{v}\right\rangle-\left\langle\nabla_{\mathbf{v}}(\nabla f),A_p(\mathbf{v})\right\rangle\\ &= -\left\langle(\nabla^*_{\nabla f}A)_p(\mathbf{v}),\mathbf{v}\right\rangle-\nabla^2 f_p(\mathbf{v},A_p(\mathbf{v})).\end{aligned}$$

Además, del Ejemplo 2.19 concluimos que

$$\nabla^2 f_p(\mathbf{v},A_p(\mathbf{v})) = \langle \mathbf{v},A_p(\mathbf{v})\rangle + \langle A_p(\mathbf{v}),A_p(\mathbf{v})\rangle\, g(p) = K(p,\mathbf{v}) + \|A_p(\mathbf{v})\|^2 g(p),$$

que al sustituirlo en la ecuación anterior nos lleva a que

$$\nabla^2 g_p(\mathbf{v},\mathbf{v}) = -\left\langle (\nabla^*_{\nabla f}A)_p(\mathbf{v}),\mathbf{v}\right\rangle - K(p,\mathbf{v}) - \|A_p(\mathbf{v})\|^2 g(p).$$

En particular

$$\nabla^2 g_p(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i) = -\left\langle (\nabla^*_{\nabla f}A)_p(\mathbf{e}_i),\mathbf{e}_i\right\rangle - \kappa_i(p) - \|A_p(\mathbf{e}_i)\|^2 g(p),$$

y sumando sobre $i=1,2$ obtenemos la siguiente expresión de $\Delta g(p)$:

$$\begin{aligned}
\Delta g(p) =& \nabla^2 g_p(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) + \nabla^2 g_p(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)\\
=& -\left\langle (\nabla^*_{\nabla f}A)_p(\mathbf{e}_1),\mathbf{e}_1\right\rangle - \left\langle (\nabla^*_{\nabla f}A)_p(\mathbf{e}_2),\mathbf{e}_2\right\rangle\\
& - \kappa_1(p) - \kappa_2(p) - \left(\kappa_1(p)^2 + \kappa_2(p)^2\right) g(p)\\
=& -\operatorname{tr}\left((\nabla^*_{\nabla f}A)_p\right) - 2\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) - \left(4\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)^2 - 2\kappa_1\kappa_2\right) g(p)\\
=& -\operatorname{tr}\left((\nabla^*_{\nabla f}A)_p\right) - 2H(p) - 2\left(2H(p)^2 - K(p)\right) g(p).
\end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\operatorname{tr}\left((\nabla^*_{\nabla f}A)_p\right) = \langle \nabla f_p, \nabla(\operatorname{tr}A)_p\rangle = \left\langle \nabla f_p, 2\nabla\left(\tfrac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)_p\right\rangle = 2\langle \nabla f_p, \nabla H_p\rangle.$$

implicando que

$$\Delta g(p) = -2\left[\langle \nabla f_p, \nabla H_p\rangle + H(p) + \left(2H(p)^2 - K(p)\right) g(p)\right]. \tag{3.3}$$

Además, de la Proposición 2.23 tenemos que

$$\operatorname{div}(H\nabla f)(p) = \langle \nabla H_p, \nabla f_p\rangle + H(p)\Delta f(p),$$

pero en la prueba de la ecuación (3.1) también mostramos que

$$\Delta f(p) = 2\left(1 + H(p)\langle p-c, N_p\rangle\right) = 2\left(1 + H(p)g(p)\right),$$

así que al combinar las ecuaciones obtenemos

$$\langle \nabla H_p, \nabla f_p\rangle = \operatorname{div}(H\nabla f)(p) - 2H(p)\left(1 + H(p)g(p)\right).$$

Por lo tanto, la ecuación (3.3) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\Delta g(p) &= -2\left[\langle \nabla f_p, \nabla H_p\rangle + H(p) + \left(2H(p)^2 - K(p)\right) g(p)\right]\\
&= -2\left[\operatorname{div}(H\nabla f)(p) - 2H(p)\left(1 + H(p)g(p)\right) + H(p) + \left(2H(p)^2 - K(p)\right) g(p)\right]\\
&= -2\left[\operatorname{div}(H\nabla f)(p) - H(p) - K(p)g(p)\right].
\end{aligned}$$

que al integrarse sobre $S$ y aplicarle el Teorema de la divergencia nos lleva a la ecuación (3.2). □

# Bibliografía


[1] do Carmo M., Differential Geometry of Curves & Surfaces: Revised & Updated Second Edition, *Dover*, Mineola, NY, 2016.

[2] Palmas O., Reyes J., Curso de geometría diferencial, Parte 1. Superficies y curvas, UNAM, *Facultad de Ciencias*, Ciudad de México, 2005.

[3] Palmas O., Reyes J., Curso de geometría diferencial, Parte 2. Geometría intrínseca de las superficies, UNAM, *Facultad de Ciencias*, Ciudad de México, 2012.

[4] Alías L., Geometric analysis and global geometry of surfaces: an elementary introduction (Spanish), XIV Escola de Geometria Diferencial, *Inst. Mat. Pura Apl. (IMPA)*, Rio de Janeiro, 2006.

[5] Montiel S., Ros A., Curves and surfaces, translated and updated from the 1998 Spanish edition by the authors, Graduate Studies in Mathematics, 69, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 2005 R. Soc. Mat. Esp., Madrid, 2005.

[6] Tu L., Differential geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes, Graduate Texts in Mathematics, 275, *Springer*, Cham, 2017.

[7] Ticozzi F., Viola L., Quantum Markovian subsystems: invariance, attractivity, and control, *IEEE Trans. Automat. Control* **53**, 2048-2063, (2008).

[8] H. Minkowski, Volumen und Oberfläche, Math. Ann. **57** (1903), no. 4, 447–495.