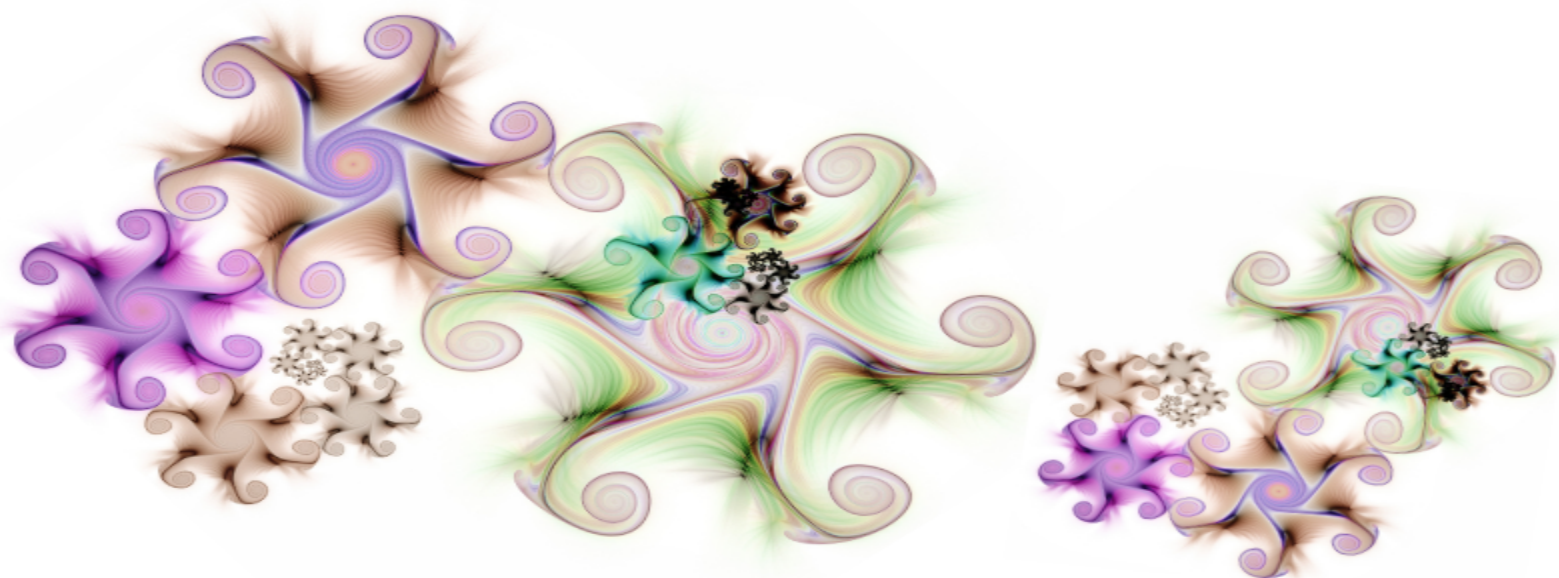




Una breve introducción a los torneos y sus generalizaciones

Ilán A. Goldfeder
Nahid Yelene Javier Nol

**7° COLOQUIO DEL DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICAS UAM-I**

Del 27 al 31 de enero de 2025

Universidad Autónoma Metropolitana



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Directorio

Gustavo Pacheco López
Rector General.

Verónica Medina Bañuelos
Rectora Unidad Iztapalapa.

Román Linares Romero
Director de CBI, UAM-Iztapalapa.

Raúl Montes de Oca Machorro
Jefe del Departamento de Matemáticas,
UAM-Iztapalapa.

Coordinador Editorial
Mario Pineda Ruelas
mpr@xanum.uam.mx

Comité Editorial

Elsa Baez Juárez
ebaez@cua.uam.mx

Jorge R. Bolaños Servín
jrbs@xanum.uam.mx

Shirley Bromberg Silverstein
stbsster@gmail.com

Judith Campos Cordero
judith@ciencias.unam.mx

Martín Celli Siboni,
celli@xanum.uam.mx

Pedro L. del Ángel Rodríguez
luis@ciemat.mx

Begoña Fernández
bff@ciencias.unam.mx

Silvia Gavito Ticozzi
sgt@correo.azc.uam.mx

L. Héctor Juárez Valencia
hect@xanum.uam.mx

Jorge A. León Vázquez
jleon@ctrl.cinvestav.mx

Roberto Quezada Batalla
roqb@xanum.uam.mx

Edith Corina Sáenz Valadez
ecsv@ciencias.unam.mx

Martha L. Shaid Sandoval Miranda
marlisha@gmail.com

Ekaterina Todorova
todorova@ciemat.mx

Luis Miguel Villegas Silva
villegas63@gmail.com

Editor web Pedro Iván Blanco Boa
ivanblc@gmail.com

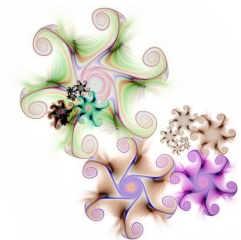
Diseño logo Michael Rivera Arce
Portada revista dibujo Miryam Mielke

MIXBA'AL. Vol. 16, No. 1, enero-diciembre de 2025, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Alcaldía Tlalpan, C.P. 14387, CDMX, México y Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, No. 186, Col. Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Tel. 5804 4658. Página electrónica de la revista: <http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revistamixba-al>.

Correos electrónicos: mixbaal2009@gmail.com, mixb@xanum.uam.mx. Coordinador Editorial Mario Pineda Ruelas. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No. 04-2023-07031 1572300-102, ISSN5 2007-7874, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número Mario Pineda Ruelas, Departamento de Matemáticas, edificio AT, oficina 318. División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco No. 186, Colonia Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Fecha de última modificación 30 de agosto de 2025. Tamaño del archivo 121.3 MB.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor responsable de la publicación.

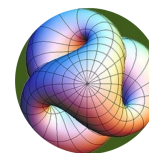
Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Universidad Autónoma Metropolitana.



7º COLOQUIO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

del 27 al 31 de enero del 2025, Unidad
Iztapalapa de la UAM,
Ciudad de México

*Departamento de
Matemáticas*
UAM IZTAPALAPA



Posgrado de
Matemáticas
UAM IZTAPALAPA



TALLER 1: ANÁLISIS DE DATOS CON UN ENFOQUE BAYESIANO

AUTOR: DR. ASael FABIAN MARTÍNEZ MARTÍNEZ

TALLER 2: UN BREVE RECORRIDO POR LA TEORÍA DE PRERRADICALES Y SUS RETÍCULAS

AUTORES: DR. ROGELIO FERNÁNDEZ-ALONSO, DRA. SILVIA GAVITO TICOZZI,
DRA. MARTHA LIZBETH SHAID SANDOVAL MIRANDA

TALLER 3: RESULTADOS DEL CÁLCULO Y ÁLGEBRA LINEAL RELEVANTES EN MODELOS Y APLICACIONES

AUTOR: DR. LORENZO HÉCTOR JUÁREZ

TALLER 4: ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE SUPERFICIES: UNA INTRODUCCIÓN ELEMENTAL

AUTORES: DR. JOSUÉ MELENDEZ Y M. EN C. EDUARDO RODRÍGUEZ ROMERO

TALLER 5: UNA INTRODUCCIÓN A LOS TORNEOS Y SUS GENERALIZACIONES

AUTORES: DR. ILÁN GOLDFEDER ORTIZ Y DRA. NAHID YELENE JAVIER NOL

TALLER 6: DEL CERO AL QUANTUM: UN VIAJE POR EL MUNDO DE LOS CÓDIGOS

AUTORES: DR. JORGE BOLAÑOS SERVÍN, DRA. YURIKO PITONES AMARO Y DR. JOSUÉ RIOS CANGAS

TALLER 7: INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS EPISTÉMICA

AUTOR: DR. RUBÉN BECERRIL BORJA

TALLER 8: CÓMO CONTAR MÁS ALLÁ DEL INFINITO Y PARA QUÉ SIRVE. INDUCCIÓN TRANSFINITA Y ALGUNAS APLICACIONES

AUTOR: DR. RODRIGO HERNÁNDEZ GUTIÉRREZ



7° Coloquio del Departamento de Matemáticas UAM-I 2025
Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa CDMX.

Introducción

Imaginemos que tenemos una lista de tareas por realizar. Para cualesquiera dos de esas tareas, preferimos realizar una o la otra, sin admitir empates. ¿Existirá una forma de llevar a cabo las tareas de forma tal que prefiramos la primera tarea sobre la segunda, la segunda sobre la tercera y así sucesivamente? La respuesta es sí y es factible hallar dicho orden. Ésa y muchas otras preguntas pueden modelarse a través de digráficas, en particular, con torneos. En el presente texto damos una breve introducción al tema.

Dr. Ilán A. Goldfeder y Dra. Nahid Yelene Javier Nol
ilan@xanum.uam.mx, nahid@xanum.uam.mx
Departamento de Matemáticas
UAM-Iztapalapa

Índice general

Introducción	iii
1. Una introducción a los torneos y sus generalizaciones	1
1.1. Nociones básicas	1
1.1.1. Clases de digráficas	2
1.1.2. Subdigráficas	3
1.1.3. Torneos regulares	3
1.1.4. Conexidad	5
1.1.5. Operaciones de digráficas	5
1.2. Dominación	6
1.3. Recorridos en torneos	8
1.3.1. Hamiltonicidad	8
1.3.2. Torneos irreducibles	9
1.3.3. Torneos transitivos	12
1.4. Generalizaciones de los torneos	13
Bibliografía	15

Capítulo 1

Una introducción a los torneos y sus generalizaciones

En el presente texto abordaremos un tipo especial de digráficas, ricas en estructura: los torneos. Una gráfica dirigida (o digráfica) consiste de un conjunto finito y no vacío de elementos llamados *vértices* y un conjunto finito de pares ordenados de vértices distintos llamados *flechas*.

Un torneo es una digráfica en la que entre cualquier par de vértices existe exactamente una flecha. Podemos ver a los torneos como un sistema de todos contra todos de manera competitiva, generalmente deportiva, donde cualesquiera dos competidores se enfrentan una única vez, cumpliéndose siempre la condición de que debe haber un ganador y un perdedor. Entre las aplicaciones de los torneos está el estudio de la dominación en sociedades animales, redes y comunicaciones, poblaciones y votaciones, por mencionar algunas.

Estudiaremos estructuras básicas, como son trayectorias y ciclos con características especiales en torneos; propiedades de simetría que nos llevarán a los conceptos de torneos regulares y semirregulares y a una familia de generalizaciones de los torneos, los torneos multipartitos.

1.1

Nociones básicas

Definiremos los principales conceptos que aparecerán en este texto; para cualquier noción no definida, puede consultarse [3].

Una *gráfica dirigida* (o *digráfica*) D está compuesta por un conjunto $V(D)$, finito y no vacío, cuyos elementos llamamos *vértices* (o *nodos* en algunos contextos), y un conjunto de parejas ordenadas de vértices distintos, $A(D)$, que constituyen las *flechas* de la digráfica. Normalmente, la digráfica se denota como $D = (V(D), A(D))$. La figura 1.1 presenta un ejemplo de una digráfica. El número de vértices en $V(D)$ se denomina *orden* de la digráfica, mientras que el número de flechas en $A(D)$ es su *tamaño*. Dados dos vértices u y v , si $(u, v) \in A(D)$, lo solemos denotar como $uv \in A(D)$ o, simplemente, $u \rightarrow v$.

Dado un par de vértices u y v en D , si existe una flecha $u \rightarrow v$, decimos que u es un *invecino* de v y que v es un *exvecino* de u . Decimos que los vértices u y v son *adyacentes* si existe al menos una flecha entre ellos, ya sea $u \rightarrow v$ o $v \rightarrow u$. El conjunto de exvecinos (resp. invecinos) de un vértice u en la digráfica D se denomina *exvecindad* (resp. *invecindad*) de u y se denota por $N_D^+(u)$ (resp. $N_D^-(u)$). Cuando no hay ambigüedad sobre la digráfica a la que se hace referencia, simplemente

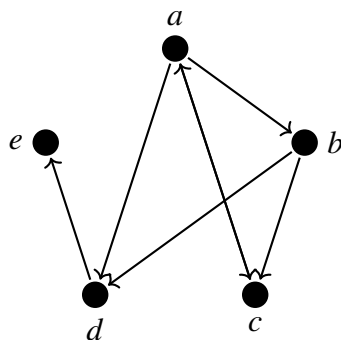


Figura 1.1: Ejemplo de una digráfica

se usa $N^+(u)$ (resp. $N^-(u)$). La cantidad de elementos en la exvecindad (resp. invecindad) de un vértice u se conoce como el *exgrado* (resp. *ingrado*) de u , y se denota como $d_D^+(u)$ (resp. $d_D^-(u)$).

Dados dos subconjuntos U y V de los vértices de una digráfica D , definimos $(U, V) = \{u \rightarrow v : u \in U, v \in V \text{ y } uv \in A(D)\}$. Cuando $(U, V) = U \times V$, decimos que U *domina* a V y lo denotamos por $U \rightarrow V$. Si además $(V, U) = \emptyset$, lo denotamos como $U \mapsto V$.

Una digráfica se dice *regular* si para todo $u \in V(D)$ se cumple que $d_D^+(u) = d_D^-(u)$. Asimismo, se dice que es *semirregular* si $|d_D^+(u) - d_D^-(u)| = 1$.

Dados dos vértices en una digráfica D , puede ocurrir que no haya flechas entre ellos, puede existir una flecha, ya sea $u \rightarrow v$ o $v \rightarrow u$ o, incluso, pueden existir ambas flechas, $u \leftrightarrow v$. Cuando sólo existe $u \rightarrow v$ o $v \rightarrow u$, pero no ambas, decimos que la flecha es *asimétrica*. Si todas las flechas de D son asimétricas, decimos que la digráfica es *orientada*.

Dadas dos digráficas D y F , decimos que D y F son *isomorfas* si existe una función biyectiva $\varphi: V(D) \rightarrow V(F)$ tal que para $u, v \in V(D)$, $u \rightarrow v$ en D si y sólo si $\varphi(u) \rightarrow \varphi(v)$ en F . Lo denotamos como $D \cong F$.

En las definiciones anteriores y posteriores, cuando no haya posibilidad de duda, en la notación podemos intercambiar el conjunto de vértices de una digráfica o estructura por la digráfica en sí y en el caso de conjuntos unitarios de vértices, omitiremos las llaves.

TEOREMA 1. *Dada una digráfica D de tamaño m , se tiene que*

$$\sum_{v \in V(D)} d_D^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d_D^-(v) = m.$$

1.1.1

Clases de digráficas

Un *torneo* es una digráfica en la que entre cualquier par de vértices hay exactamente una flecha, véase la figura 1.2. Una digráfica *semicompleta* es aquella en la que entre cualquier par de vértices existe al menos una flecha en alguno de los dos sentidos. Claramente, todo torneo es una digráfica semicompleta, pero no al revés.

Una digráfica D es *multipartita* o *k-partita*, para un entero k con $k \geq 3$, si existe una partición $V_1, V_2, \dots, V_k$ de sus vértices, las *partes* de la partición, tales que no hay flechas entre vértices de la misma parte. Cuando $k = 2$, usualmente decimos que la digráfica es *bipartita*.

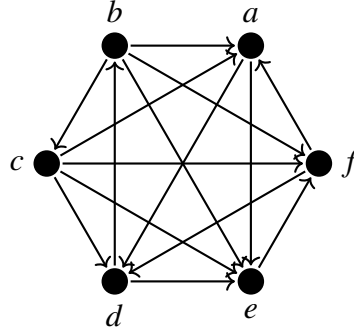


Figura 1.2: Ejemplo de un torneo de orden 6

Un *torneo multipartito* o *torneo k -partito* es una digráfica k -partita, para un entero k con $k \geq 2$, en la que entre cualquier par de vértices en partes distintas hay exactamente una flecha y una *digráfica multipartita semicompleta* o *digráfica k -partita semicompleta* es una digráfica k -partita, para un entero k con $k \geq 2$, en la que entre cualquier par de vértices en partes distintas hay al menos una flecha. Notemos que todo torneo (resp., digráfica multipartita) es un torneo multipartito (resp., una digráfica multipartita semicompleta) en la que cada parte consta de un solo vértice. Para el caso $k = 2$, se les llama *torneo bipartito* y *digráfica bipartita semicompleta*, respectivamente.

Una digráfica D es *transitiva* si para cualesquiera tres vértices distintos u, v y w , si $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow w$ entonces $u \rightarrow w$. Una digráfica es *casitransitiva* si para cualesquiera tres vértices distintos u, v y w , si $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow w$ entonces u y w son adyacentes.

1.1.2

Subdigráficas

Dadas dos digráficas D y F , decimos que F es una *subdigráfica* de D si $V(F) \subseteq V(D)$ y $A(F) \subseteq A(D)$. Más aún, si F es isomorfa a una subdigráfica F' de D , también decimos que F es subdigráfica de D .

Dadas una digráfica D y S un conjunto de vértices de D , la *subdigráfica inducida* por S en D es la digráfica $D[S]$ con conjunto de vértices S tal que para $u, v \in S$, $u \rightarrow v$ en $D[S]$ si y sólo si $u \rightarrow v$ en D .

1.1.3

Torneos regulares

Recordemos que un torneo T es regular si satisface que para todo vértice v en T se cumple $d^-(v) = d^+(v)$ y es semirregular cuando satisface que $|d_D^+(u) - d_D^-(u)| = 1$. En consecuencia, un torneo regular satisface que $|V(T)| = 2n + 1$ y un torneo semirregular cumple que $|V(T)| = 2n$. La figura 1.3 muestra un ejemplo de un torneo regular de orden nueve. Las subdigráficas inducidas de los torneos también son torneos, ¿por qué? En el ejemplo de la figura 1.3, para todo vértice v de T se tiene que $T[N^+(v)]$ y $T[N^-(v)]$ son torneos transitivos de orden cuatro. ¿Existirán torneos tal que las subdigráficas inducidas $T[N^+(v)]$ y $T[N^-(v)]$ sean torneos regulares?, ¿qué características tienen estos torneos? Los torneos regulares son una clase de digráficas que tienen

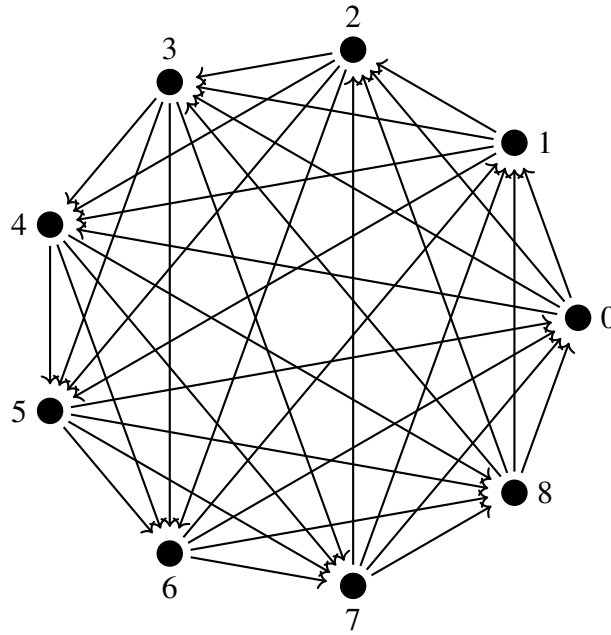


Figura 1.3: Torneo regular de orden 9

propiedades y estructuras bien conocidas. Ahora, ¿qué pasa con los torneos semirregulares? De esos torneos sabemos mucho menos.

El problema de determinar cuando dos digráficas son isomorfas es complicado inclusive para torneos. La tabla 1.1 muestra el número de torneos que hay de orden n , con $2 \leq n \leq 10$, donde $2^{|A(T)|}$ corresponde al número total de posibles torneos de orden n , mientras que la última columna muestra el número de clases de isomorfismo [12].

n	$ A(T) = \frac{n(n-1)}{2}$	$2^{ A(T) }$	Núm. torneos no isomorfos
2	1	2	1
3	3	8	2
4	6	64	4
5	10	1024	12
6	15	2^{15}	56
7	21	2^{21}	456
8	28	2^{28}	6880
9	36	2^{36}	191536
10	45	2^{45}	9733056

Tabla 1.1: Torneos no isomorfos de orden n con $2 \leq n \leq 10$

1.1.4

Conexidad

Dada una digráfica D , una *semitrayectoria* es una sucesión $P = v_0 v_1 \cdots v_k$ de vértices distintos de la digráfica tal que v_i y v_{i+1} son adyacentes para todo i en $\{0, 1, \dots, k-1\}$ y una *trayectoria* es una semitrayectoria $P = v_0 v_1 \cdots v_k$ tal que $v_i \rightarrow v_{i+1}$ para todo i en $\{0, 1, \dots, k-1\}$, también se les llama $v_0 v_k$ -semitrayectoria o $v_0 v_k$ -trayectoria, respectivamente. Un *semiciclo* es una sucesión $C = v_0 v_1 \cdots v_{k-1} v_0$, con $k \geq 3$, en la que $v_0 v_1 \cdots v_{k-1}$ es una semitrayectoria y los vértices v_{k-1} y v_0 son adyacentes y un *ciclo* es un semiciclo $C = v_0 v_1 \cdots v_{k-1} v_0$ en el que existe la flecha $v_i \rightarrow v_{i+1}$, para todo i en $\{0, 1, \dots, k-1\}$ y en donde los subíndices se toman módulo k . En todos los casos, la longitud del recorrido es k . Dados tres vértices u , v y w , si P es una uv -trayectoria y Q es una vw -trayectoria, la *concatenación* PQ es la trayectoria resultante de recorrer primero P y luego Q .

Dada una semitrayectoria o semiciclo $P = v_0 v_1 \cdots v_k$, para i y j en $\{0, 1, \dots, k\}$, con $i < j$, $P[v_i, v_j]$ denota la semitrayectoria $v_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} v_j$ (los subíndices se toman módulo k en el caso de que sea un semiciclo).

Una digráfica D es *conexa* si entre cualquier par de vértices existe una semitrayectoria, es *unilateralmente conexa* si entre cualquier par de vértices, digamos u y v , existe una uv -trayectoria o una vu -trayectoria y es *fuertemente conexa* (o simplemente *fuerte*) si existen tanto una uv -trayectoria como una vu -trayectoria.

Dada una digráfica D , una *componente fuertemente conexa*, *componente fuerte* o, simplemente, *componente* de D es cualquier subdigráfica maximal fuertemente conexa de D . Una digráfica es fuerte si y sólo si tiene una componente fuertemente conexa.

1.1.5

Operaciones de digráficas

Dadas una digráfica D con conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ y digráficas $D_1, \dots, D_n$, la *composición* $D[D_1, \dots, D_n]$ es la digráfica cuyo conjunto de vértices es $\cup_{i=1}^n (V(D_i) \times \{i\})$ y dados dos vértices (w, i) y (z, j) en la composición, la flecha $(w, i) \rightarrow (z, j)$ está si y sólo si

- $i = j$ y $w \rightarrow z$ en D_i o
- $v_i \rightarrow v_j$ en D .

Dada una digráfica D , consideremos sus componentes fuertemente conexas, digamos $D_1, D_2, \dots, D_k$. La *condensación* de D , denotada por $\mathcal{C}(D)$ es la digráfica que se obtiene al «comprimir» cada componente en un vértice y hay una flecha entre dos vértices en la condensación si entre las componentes correspondientes hay al menos una flecha. Formalmente, los vértices de la condensación son $\{D_1, D_2, \dots, D_k\}$ y, dados dos vértices D_i y D_j en la condensación, existe $D_i \rightarrow D_j$ en la condensación si y sólo si $(D_i, D_j) \neq \emptyset$ en D .

Ejercicios

1. Prueba el teorema 1.

2. Encuentra todos los posibles torneos de orden menor o igual a cuatro salvo isomorfismos. ¿Cuál de estos torneos son fuertemente conexos?
3. Encuentra un torneo de orden seis que no sea transitivo y que no tenga ciclos de longitud mayor que tres.
4. Prueba que en cualquier torneo, existe un vértice v que se puede alcanzar a partir de cualquier otro vértice mediante una trayectoria de longitud a lo más dos.
5. Da un ejemplo de un torneo de orden siete en el que todo vértice es un rey.
6. Prueba que todo torneo fuerte de orden al menos cuatro posee dos vértices u y v tales que tanto $T - u$ como $T - v$ son fuertes.
7. Prueba que una digráfica es fuertemente conexa si y sólo si toda flecha de la digráfica está en un ciclo.
8. Prueba que la digráfica de condensación de cualquier digráfica no es fuertemente conexa.

1.2

Dominación

Los torneos son estructuras que se comportan bastante bien, por ejemplo consideremos un torneo de orden n y un vértice v y supongamos que sabemos cual es el exgrado de v , es decir $d^+(v)$, entonces siempre podemos conocer el ingrado de v , esto es $d^-(v) = n - 1 - d^+(v)$, porque el número de flechas que empiezan y terminan en v es $n - 1$.

El *vector de exgrados* de un torneo T de orden n es una n -tupla ordenada $(s_1, s_2, \dots, s_n)$. Generalmente asumimos que los vértices del torneo T están etiquetados de tal forma que $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$. Así, los exgrados de los vértices del torneo T tienen valores entre 0 y $n - 1$ y la suma de todos los exgrados de los n vértices sería $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, este número es el número total de flechas de un torneo.

¿Será cierto que si un vector de exgrados satisface dicho coeficiente binomial, dicho vector representa un torneo?

Por ejemplo: considere el vector de exgrados $1, 1, 1, 2, 5, 5, 6$, el cual satisface $1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 5 + 6 = \binom{7}{2}$. Fijémonos en los vértices que tienen exgrado 1 y 2, entre estos vértices solo hay 5 flechas, lo cual es incorrecto porque debe haber $\binom{4}{2} = 6$ flechas.

Así, tenemos condiciones necesarias para una sucesión creciente de exgrados $s_1, s_2, \dots, s_n$ para que sea un vector de exgrados de un torneo

$$s_1 + s_2 + \dots + s_k \geq \binom{k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = \binom{n}{2}$$

Un *rey* en una digráfica es un vértice que alcanza a todo vértice mediante una trayectoria de longitud uno o dos. Ejemplo: considere la digráfica D de la figura 1.4, los vértices d y e son

reyes en D . El vértice d alcanza al vértice e en un paso y a los vértices a, b y c en dos pasos. El vértice e alcanza a los vértices a, b y c en un paso y al vértice d en dos pasos. Los vértices a, b y c no son reyes. Dado que el vértice a alcanza al vértice c en tres pasos, el vértice b alcanza al vértice e en tres pasos, mientras que el vértice c alcanza al vértice b en tres pasos. Entre las

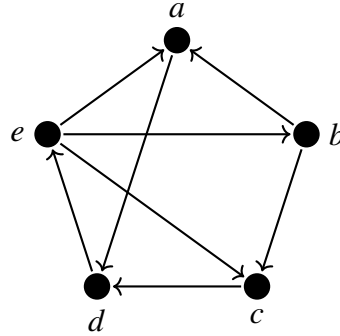


Figura 1.4: Los vértices e y d son reyes de la digráfica

aplicaciones de los torneos tenemos el estudio de la dominación en sociedades animales. En 1953 Hyman G. Landau [10], sociólogo-matemático, dio a conocer algunos de estos resultados con un enfoque matemático. Más tarde, en 1980, Stephen B. Maurer en [11] dio resultados de dominación en sociedades de animales particularmente en gallinas, lo hizo con una orientación hacia la biología. Cabe destacar que los resultados que muestra Maurer en [11] lo hace con ilustraciones sumamente atractivas. Los teoremas que se dan a continuación son de reyes en torneos.

TEOREMA 2 (Landau [10]). *Todo torneo tiene un rey.*

Un *emperador* en una digráfica es un vértice que alcanza a los otros vértices en exactamente un paso. Considere enteros, $n \geq k \geq 1$, decimos que un (n, k) torneo es un torneo con n vértices y k reyes. El siguiente teorema caracteriza cuando un torneo tiene un único rey.

TEOREMA 3 (Maurer [11]). *Un torneo T tiene un único rey si y sólo si el rey es un emperador.*

TEOREMA 4 (Maurer [11]). *Para los enteros positivos n y k con $n \geq k$, existe un (n, k) torneo con las siguientes excepciones: $k = 2$ con n arbitraria y $n = k = 4$.*

1.3

Recorridos en torneos

1.3.1

Hamiltonicidad

Hay dos clases de estructuras particularmente de interés: las trayectorias y los ciclos hamiltonianos. Una trayectoria o ciclo es *hamiltoniano* si recorre todos los vértices de la digráfica. Cuando una digráfica posee un ciclo (resp. trayectoria) hamiltoniano, decimos que es *hamiltoniana* (resp. *trazable*). En 1934, László Rédei probó que todo torneo es trazable.

Sería interesante pensar en la siguiente pregunta ¿cuándo podemos dibujar una gráfica orientada no necesariamente cerrada? tal que cada flecha se trace exactamente una vez y en la dirección de inicio a fin.

TEOREMA 5 (Rédei [15]). *Todo torneo posee una trayectoria hamiltoniana.*

Demostración. Procederemos por contradicción, consideremos una trayectoria $P = v_0 v_1 \cdots v_k$ de longitud máxima en un torneo T y supongamos que no es hamiltoniana, por lo que existe un vértice x de T que no está en P . Por ser torneo, v_0 y x son adyacentes. Si $x \rightarrow v_0$ entonces xP es trayectoria de longitud mayor que P , lo que es una contradicción; por lo tanto, tenemos la flecha $v_0 \rightarrow x$. De forma similar, v_k y x son adyacentes. Si existe la flecha $v_k \rightarrow x$ entonces Px sería una trayectoria de longitud mayor; por lo tanto, tenemos la flecha $x \rightarrow v_k$. De esto se sigue que el conjunto $S = \{i : x \rightarrow v_i\}$ es no vacío; además, observemos que 0 no está en S . Por el principio del buen orden, sea i_0 el elemento mínimo de S . Por la definición de S , tenemos que $v_{i_0-1} \rightarrow x$ y, así, $P[v_0, v_{i_0-1}]xP[v_{i_0}, v_k]$ es una trayectoria de longitud mayor que P (véase la figura 1.5), lo que es una contradicción. Por lo tanto, P es una trayectoria hamiltoniana. $\square$

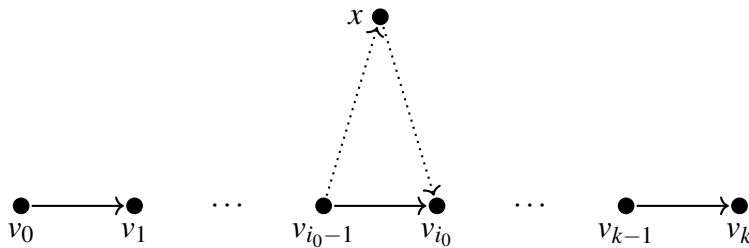


Figura 1.5: Inserción de un vértice en una trayectoria

Posteriormente, Paul Camion probó que todo torneo fuerte es hamiltoniano.

TEOREMA 6 (Camion [5]). *Todo torneo fuerte es hamiltoniano.*

Años más tarde, John Wesley Moon probó un resultado aún más fuerte. Una digráfica de orden

n es *pancíclica* si posee ciclos de todas las longitudes posibles, es decir, posee un ciclo de longitud k para toda k en $\{3, 4, \dots, n\}$ y una digráfica es *pancíclica en vértices* si para todo vértice u de la digráfica, existe un ciclo de longitud k , con k en $\{3, 4, \dots, n\}$, que pase por u . Moon probó que todo torneo fuerte es pancíclico en vértices.

TEOREMA 7 (Moon [13]). *Todo torneo fuerte es pancíclico en vértices.*

Demostración. Consideremos un torneo fuertemente conexo. Primero probemos que todo vértice está en un triángulo (es decir, en un ciclo de longitud tres). Tomemos un vértice u y consideremos su exvecindad, $N_D^+(u)$, y su invecindad, $N_D^-(u)$. Notemos que todo vértice en T diferente de u está en $N_D^+(u)$ o en $N_D^-(u)$, por ser torneo. Más aún, tenemos que $N_D^-(u) \rightarrow u \rightarrow N_D^+(u)$. Si no hubiese ninguna flecha de algún vértice en $N_D^-(u)$ a algún vértice en $N_D^+(u)$ (es decir, si tuviésemos que $N_D^-(u) \mapsto N_D^+(u)$), entonces no habría forma de llegar de ningún vértice en $N_D^+(u)$ a ningún vértice en $N_D^-(u)$ y la digráfica no sería fuertemente conexa, lo que es una contradicción. Por lo tanto, existen un vértice v en $N_D^-(u)$ y un vértice w en $N_D^+(u)$ tales que $w \rightarrow v$. Así, $uwvu$ es un triángulo que pasa por u .

Ahora, consideremos un que u está contenido en un ciclo de longitud k , con k en $\{3, 4, \dots, n-1\}$ y donde n es el orden del torneo, digamos $C = v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_0$ con $u = v_0$, y probemos que existe un ciclo de longitud $k+1$ que pasa por u . Para esto, consideraremos dos casos: (i) para todo vértice x en $V(D) \setminus V(C)$, $(x, V(C)) = \emptyset$ o $(V(C), x) = \emptyset$ o (ii) existe un vértice y en $V(D) \setminus V(C)$ tal que $(y, V(C)) \neq \emptyset$ y $(V(C), y) \neq \emptyset$.

Primero veamos el caso (i). Notemos que por ser torneo, la condición $(x, V(C)) = \emptyset$ es equivalente a $C \mapsto x$ y $((V(C), x) = \emptyset$ es equivalente a $x \mapsto C$. Definamos $I = \{x: x \mapsto C\}$ y $O = \{x: C \mapsto x\}$. De forma similar a como hicimos en el caso de los triángulos, por ser fuertemente conexa debe existir un vértice v en I y un vértice w en O tales que $w \rightarrow v$. Por la definición de I y O , tenemos que existen las flechas $v_0 \rightarrow w$ y $v \rightarrow v_2$. Así, la sucesión $v_0 w v v_2 v_3 \dots v_{k-1} v_0$ es un ciclo de longitud $k+1$ que pasa por u , que es lo que queríamos.

Ahora supongamos el caso (ii), digamos que y es un vértice tal que $(y, V(C)) \neq \emptyset$ y $(V(C), y) \neq \emptyset$; por lo tanto, para algún v_i se tiene la flecha $v_i \rightarrow y$. Sin pérdida de generalidad, podemos reetiquetar los vértices para que $i = 0$. De forma similar a la prueba del teorema 5, tenemos que $S = \{i: y \rightarrow v_i\}$ es no vacío, sea i_0 el primer elemento de S . Así, tendríamos la flecha $v_{i_0-1} \rightarrow y$ y $C[v_{i_0}, v_{i_0-1}] y v_{i_0}$ es un ciclo de longitud $k+1$ que pasa por u .

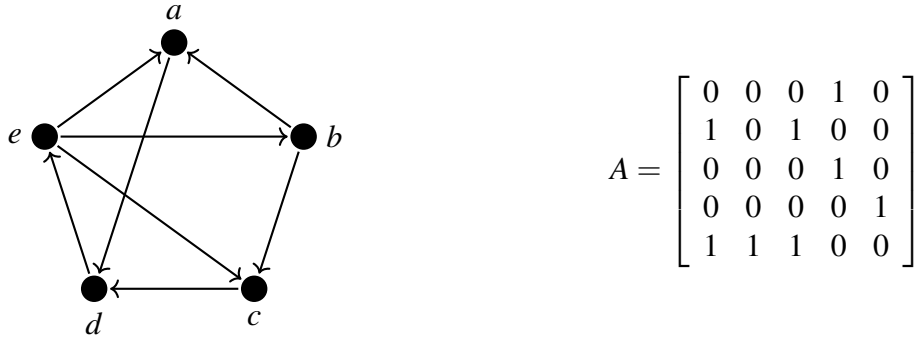
Por lo tanto, para cualquier vértice u y cualquier entero k , con k en $\{3, 4, \dots, n\}$, existe un ciclo de longitud k que pasa por u . $\square$

COROLARIO 8. *Un torneo es fuerte si y sólo si es hamiltoniano.*

1.3.2

Torneos irreducibles

Dado un torneo T de orden n diremos que es *reducible* si es posible hacer una partición de sus vértices en dos subconjuntos no vacíos U y V tal que se tienen las flechas de $u \rightarrow v$ para todo $u \in U$ y $v \in V$. Diremos que el torneo T es *irreducible* si no es reducible. Determinar si un torneo es reducible es sencillo, si consideramos el vector de exgrados $s_1, s_2, \dots, s_n$ del torneo T y

Figura 1.6: Digráfica D y su matriz de adyacencia

$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$, entonces el torneo es reducible si y sólo si se satisface la ecuación

$$\sum_{i=1}^k s_i = \binom{k}{2},$$

para $k \leq n$.

Dada una digráfica D podemos construir su matriz de adyacencia $A(D)$, esta es de tamaño $n \times n$ donde las entradas a_{ij} se definen por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe una flecha del vértice } v_i \text{ al vértice } v_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Veamos un ejemplo, considere la digráfica de la figura 1.6 de la izquierda, entonces esta digráfica tendrá como matriz de adyacencia la matriz A de la figura 1.6.

Una matriz A de tamaño $n \times n$, con entradas ceros y unos, es la matriz de adyacencia de un torneo si satisface que

$$A + A^T = J - I. \quad (1.1)$$

Donde A^T denota la matriz A transpuesta, I denota la matriz identidad de tamaño $n \times n$ y J denota una matriz cuadrada cuyas entradas son unos. La matriz A es combinatoriamente asimétrica, es decir cada entrada de la diagonal es 0 y una entrada $a_{ij} = 1$ si y sólo si $a_{ji} = 0$ con $i \neq j$ para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Además, el rango de una matriz de un torneo de orden n (sobre el campo de los números reales) es al menos $n - 1$. Las matrices de los torneos han sido estudiadas ampliamente de hecho a partir de la ecuación 1.1 se tienen varias propiedades. Por ejemplo, si A es una matriz de un torneo, entonces también lo es A^T y toda submatriz principal de A . Si un torneo T de orden n es reducible y sus exgrados $s_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ están en orden no decreciente, entonces la matriz de adyacencia del torneo T tiene la estructura:

$$A = \begin{bmatrix} A_U & 0 \\ 1 & A_V \end{bmatrix}$$

Donde A_U y A_V son matrices de los torneos dados por los subconjuntos no vacíos U y V que se obtienen de la definición de torneo reducible. Todo torneo reducible tiene una única descomposición en subtorneos irreducibles $T^1, T^2, \dots, T^m$ tal que todo vértice de T^i le pega a todo vértice de T^j con $1 \leq i \leq j \leq m$.

El siguiente resultado demostrado por Rado en 1943 caracteriza a los torneos irreducibles.

TEOREMA 9 (Moon [13]). *Un torneo T de orden n es fuerte si y sólo si es irreducible.*

El teorema 7 está relacionado con el siguiente resultado:

TEOREMA 10 (Moon [13]). *Todo vértice de un torneo T de orden n irreducible está contenido en algún k -ciclo para $k = 3, 4, \dots, n$.*

A partir de la matriz de adyacencia de una digráfica se pueden analizar algunos conceptos de álgebra lineal. Por lo que necesitamos algunas definiciones. Una *matriz de permutación* P es aquella que tiene las mismas filas de la matriz identidad, pero el orden de estas puede cambiar y una matriz A de 0 y 1 de orden n es reducible si existe una matriz de permutación P de orden n tal que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix},$$

donde B_1 y B_3 son matrices cuadradas no vacías, P^T denota la transpuesta de T . Si la matriz de permutación no existe, entonces A es irreducible. La matriz A es irreducible si y sólo si la digráfica es fuerte. Denotamos al número de 3-ciclos en un torneo T por $C(T)$.

PROPOSICIÓN 11 (Moon [13]). *Sea A la matriz de un torneo de orden n con vector de exgrados $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$ y un torneo asociado T . Entonces*

$$\begin{aligned} c(T) &= \binom{n}{3} - \sum_{i=1}^n \binom{s_i}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} - \frac{s^T s}{2}. \end{aligned}$$

Demostración. Para cada tripleta de vértices tenemos lo siguiente o bien los vértices forman un ciclo o bien existe un único vértice que les pega a los otros dos vértices. Como el vértice i tiene exgrado s_i , entonces hay exactamente $\binom{s_i}{2}$ tripletas que contienen a i y dos de los vértices a los que le pega el vértice i . Por lo que tenemos $\sum_{i=1}^n \binom{s_i}{2}$ tripletas que no forman un ciclo y exactamente

$$\binom{n}{3} - \sum_{i=1}^n \binom{s_i}{2}$$

tripletras que forman un C_3 . Luego,

$$\sum_{i=1}^n \binom{s_i}{2} = \frac{1}{2} \left(s^T s - \binom{n}{2} \right)$$

y el resultado se sigue. □

Se han investigado ciertas propiedades sobre los valores propios de las matrices de los torneos. Brauer y Gentry en 1968 [4] demostraron la siguiente proposición, pero primero definiremos al *radio espectral* de una matriz cuadrada A como:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es un valor propio de } A\}.$$

PROPOSICIÓN 12. Sea A una matriz de un torneo de orden n y sea λ un valor propio de A . Entonces

$$-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq \frac{n-1}{2}.$$

Más aún, $\operatorname{Re}(\lambda) = \frac{n-1}{2}$ si y sólo si $\lambda = \frac{n-1}{2}$ y M es una matriz de un torneo regular.

Así, la proposición anterior nos da una cota superior para el radio espectral de la matriz de un torneo. Más resultados de este tipo pueden consultarse en [17].

1.3.3

Torneos transitivos

Recordemos que una digráfica es transitiva si para cualesquiera tres vértices distintos u, v y w , si $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow w$ entonces $u \rightarrow w$.

TEOREMA 13. Salvo isomorfismos, solo hay un torneo acíclico.

Demostración. Toda digráfica acíclica tiene un ordenamiento acíclico (orden topológico), renombramos a sus vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$ tal que solo existen las flechas $v_i \rightarrow v_j$ con $i < j$.

En un torneo acíclico sabemos cuales flechas existen, todas las posibles flechas $v_i \rightarrow v_j$ con $i < j$. Entonces solo hay un posible torneo acíclico que podríamos obtener. Esto es salvo isomorfismos, porque el paso de renombrar a los vértices respecto al ordenamiento acíclico es exactamente un isomorfismo de gráficas dirigidas. □

Los torneos transitivos tienen una estructura bastante simple. Considere un torneo transitivo T_n con vector de grados $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ con $s_i < s_j$ donde $i < j$. El siguiente teorema 14 da algunas propiedades de los torneos transitivos.

TEOREMA 14 (Moon [13]). Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. T_n es transitivo.
2. El vértice v_j domina al vértice v_i si y sólo si $i < j$.
3. T_n tiene un vector de grados $(0, 1, \dots, n-1)$.
4. El vector de grados de T_n satisface la identidad:

$$\sum_{i=1}^n s_i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

5. T_n no contiene ciclos.
6. T_n contiene exactamente $\binom{n}{k+1}$ trayectorias de longitud k , si $1 \leq k \leq n-1$.
7. T_n contiene exactamente $\binom{n}{k}$ subtorneos transitivos T_k , si $1 \leq k \leq n$.

Así, para todo n , existe un único torneo transitivo T_n salvo isomorfismos.

Es sabido que cualquier torneo con n vértices tiene un subtorneo transitivo con al menos $\log_2 n$ vértices. A pesar de que los torneos transitivos tienen una estructura bastante simple, sería interesante saber de qué torneos (no transitivos) son subdigráficas. Dicho problema está relacionado con la conjetura planteada por Erdős y Moser [6].

CONJETURA 15 (ERDŐS Y MOSER [6]). Para todo entero positivo k existe un torneo T de orden $n = 2^{k-1} - 1$ que no contiene un torneo transitivo de orden k .

Reid y Parker demostraron en [16] que dicha conjetura es falsa para $k = 5$, es decir, no hay un torneo (no transitivo) de orden 15 que contenga un torneo transitivo de orden cinco. Además, probaron que todo torneo con 14 vértices contiene un subtorneo transitivo de orden cinco. También demostraron que existe un torneo de orden 13 que no tiene un subtorneo transitivo de orden cinco. En [14], Neumann-Lara dio una prueba más corta que la demostración dada originalmente por Reid y Parker. El problema abierto consiste en determinar el mínimo orden $h(k) = n$ de un torneo T que contenga un subtorneo transitivo de orden k .

Ejercicios

1. Demuestra que la condensación de cualquier torneo es un torneo transitivo.
2. Prueba que si un torneo (no necesariamente fuerte) tiene un ciclo de longitud k entonces también tiene ciclos de todas las longitudes entre 3 y k .

1.4

Generalizaciones de los torneos

Muchos problemas relacionados con digráficas —como encontrar trayectorias y ciclos hamiltonianos— son, en general, problemas **NP**-completos. No obstante, en la clase de los torneos dichos problemas, así como muchos otros, son solubles en tiempo polinomial. Sin embargo, los torneos son una clase muy particular (y, en cierto sentido, restrictiva) de digráficas, una con muchas flechas. De manera natural surge la pregunta: ¿son necesarias *tantas* flechas? La respuesta es no, existen varias clases de digráficas que generalizan o extienden los torneos y que preservan varias de sus propiedades interesantes.

Dos familias de tales digráficas son los torneos bipartitos y los torneos k -partitos, con $k \geq 3$. Pese a que ambas familias se definen de forma similar, se abordan de forma diferente. Mientras que los torneos bipartitos no admiten ciclos de longitud impar, los torneos k -partitos, con $k \geq 3$, admiten ciclos de longitud par e impar.

Un *factor de ciclos* en una digráfica D es una colección de ciclos $C_1, \dots, C_k$ ajenos en vértices tales que $V(C_1), \dots, V(C_k)$ forman una partición del conjunto de los vértices de la digráfica. Un *casi-factor de ciclos* de una digráfica es una colección $P, C_1, \dots, C_k$, con a lo más una trayectoria P junto con los ciclos $C_1, \dots, C_k$, mutuamente ajenos en vértices y cuyos conjuntos de vértices forman una partición de los vértices de la digráfica.

La siguiente es una caracterización de la existencia de trayectorias y ciclos hamiltonianos en torneos bipartitos. Para torneos k -partitos, con $k \geq 3$, no se conoce una caracterización.

TEOREMA 16 ([7], [9]). *Un torneo bipartito es trazable si y sólo si posee un casi-factor de ciclos.*

TEOREMA 17 ([8], [9]). *Un torneo bipartito es hamiltoniano si y sólo si es fuertemente conexo posee un factor de ciclos.*

La prueba es independiente a la presentada por Gutin y por Häggkvist y Manoussakis.

Demostración. La ida es clara, por lo que probaremos el regreso; consideremos un torneo bipartito fuertemente conexo con un factor de ciclos, sea $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$. Supondremos que el factor de ciclos es mínimo y mostraremos que existe un factor con un menor número de ciclos. Consideraremos dos casos: (i) existen dos ciclos del factor, C_p y C_q , tales que tanto (C_p, C_q) como (C_q, C_p) son no vacíos y (ii) para cualquier par de ciclos distintos del factor, digamos C_p y C_q , (C_p, C_q) o (C_q, C_p) es vacío (observemos que, por ser torneo bipartito, no puede pasar que ambos sean vacíos).

Primero, supongamos el caso (i) y sean C_p y C_q con $(C_p, C_q) \neq \emptyset$ como $(C_q, C_p) \neq \emptyset$. Tomemos $C_p = (u_0, u_1, \dots, u_{r-1}, u_0)$ y $C_q = (v_0, v_{s-1}, v_{s-2}, \dots, v_1, v_0)$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que la longitud de C_p es mayor que o igual a la longitud de C_q . Notemos que hemos etiquetado los vértices del ciclo C_q en el sentido inverso, es decir, tenemos las flechas $v_{i+1} \rightarrow v_i$, para todo i en $\{0, 1, \dots, s-1\}$ y donde los subíndices los tomamos módulo s .

Ahora, analizaremos cómo se comportan las flechas entre los ciclos C_p y C_q . Consideremos una flecha $u_i \rightarrow v_j$ de C_p a C_q . Por ser un torneo bipartito, los vértices u_{i+1} y v_{j+1} son adyacentes; si tuviésemos la flecha $v_{j+1} \rightarrow u_{i+1}$ entonces $C = C_q[u_{i+1}, u_i]C_p[v_j, v_{j+1}]u_i$ es un ciclo cuyo conjunto de vértices es $V(C_p) \cup V(C_q)$ y tendríamos que $(\mathcal{C} \setminus \{C_p, C_q\}) \cup \{C\}$ es un factor de ciclos de la digráfica con menos elementos que $\mathcal{C}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, si existe la flecha $u_i \rightarrow v_j$, existe la flecha $u_{i+1} \rightarrow v_{j+1}$ y, recursivamente, existe la flecha $v_{i+t} \rightarrow u_{j+t}$, donde los subíndices se toman módulo r y s , respectivamente. De forma análoga (pero en el sentido opuesto), sabemos que existe una flecha $v_{j'} \rightarrow u_{i'}$ y tendríamos todas las flechas de la forma $v_{j'+t} \rightarrow u_{i'+t}$, donde los subíndices se toman módulo s y r respectivamente.

Lo anterior muestra que, si consideramos la flecha $u_i \rightarrow v_j$, entre C_p y v_j hay flechas en ambos sentidos. De forma similar a como hicimos en la prueba del teorema 5, podemos encontrar un entero a en $\{0, 1, \dots, r-1\}$ tal que $u_a \rightarrow v_j \rightarrow u_{a+2}$, donde tomamos los subíndices módulo r . Sin pérdida de generalidad, supongamos que tenemos $u_0 \rightarrow v_0 \rightarrow u_2$. Así, el recorrido

$$u_0 v_0 v_{s-1} u_1 u_2 v_2 v_1 u_3 u_4 \cdots u_{s-3} u_{s-2} v_{s-2} v_{s-3} u_{s-1} u_s \cdots u_{r-1} u_0$$

es un ciclo que recorre tanto C_p como C_q , lo que contradice la minimalidad del factor de ciclos.

Ahora, supongamos el caso (ii). Por lo tanto, entre cualquier par de ciclos del factor, digamos C_p y C_q , tenemos que (C_p, C_q) o (C_q, C_p) es vacío. Definimos D^* como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $\mathcal{C}$ y dados dos vértices de D^* , digamos C_p y C_q , tenemos la flecha $C_p \rightarrow C_q$ si y sólo si $(C_q, C_p) = \emptyset$. Notemos que D^* es un torneo y, ya que D es fuertemente conexa, se sigue que D^* también lo es; por el teorema 8, se sigue que posee un ciclo hamiltoniano. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $C_1 C_2 \cdots C_k C_0$ es un ciclo hamiltoniano. Tomemos $C_i = u_0^i u_1^i \cdots u_{r_i-1}^i u_0^i$, donde r_i es la longitud del ciclo C_i y tal que todos los u_0^j , con j en $\{1, \dots, k\}$, están en la misma parte

de la partición. Ya que $C_j \rightarrow C_{j+1}$, con j en $\{1, 2, \dots, k\}$ y tomando j módulo k , se sigue que $(C_{j+1}, C_j) = \emptyset$ y por ser torneo bipartito, tenemos la flecha $u_0^j \rightarrow u_1^{j+1}$. Así,

$$u_1^1 u_2^1 \cdots u_{r_1-1}^1 u_0^1 u_1^2 u_2^2 \cdots u_{r_2-1}^2 u_0^2 \cdots u_1^k u_2^k \cdots u_{r_k-1}^k u_0^k u_1^1$$

es un ciclo hamiltoniano de D , lo que es una contradicción.

Por lo tanto, D es hamiltoniana. □

Otra familia de digráfica surgió al considerar una noción *local* de ser un torneo. Una digráfica orientada es un *torneo local* si para todo vértice u , las subdigráficas inducidas por $N_D^+(u)$ y $N_D^-(u)$ son torneos. Su comportamiento con respecto a la existencia de trayectorias y ciclos hamiltonianos es similar a la de los torneos.

TEOREMA 18 ([2]). *Un torneo local es trazable si y sólo si es conexo.*

TEOREMA 19 ([2]). *Un torneo local es hamiltoniano si y sólo si es fuertemente conexo.*

La última familia que mencionaremos son las digráficas casitransitivas. Una digráfica orientada es *casitransitiva* siempre que dados cualesquiera tres vértices diferentes u , v y w , si $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow w$ entonces u y w son adyacentes. También para esta familia de digráficas se conoce una caracterización para la existencia de trayectorias y ciclos hamiltonianos, sin embargo, requiere de otros resultados por lo que no la enunciaremos.

Finalmente, es interesante hacer notar que la intersección de los torneos locales y las digráficas casitransitivas son precisamente los torneos.

Conclusiones

Los torneos y sus generalizaciones constituyen familias de digráficas con una estructura particularmente rica, ampliamente estudiada en la literatura. Gracias a sus propiedades, resultan especialmente útiles para modelar y resolver problemas concretos en distintas áreas.

Bibliografía

- [1] Ticozzi F., Viola L., Quantum Markovian subsystems: invariance, attractivity, and control, *IEEE Trans. Automat. Control* **53**, 2048–2063, (2008).
- [2] Bang-Jensen, J., Locally semicomplete digraphs: a generalization of tournaments, *J. Graph Theory* **14**(3), 371–390, (1990).
- [3] Bang-Jensen, J., Gutin, G., *Digraphs: Theory, algorithms and applications*, Springer Monographs in Mathematics, 2^a ed, Springer-Verlag, 2009.
- [4] Brauer, A., Gentry, I., On the characteristic roots of tournament matrices, *Bull. Amer. Math. Soc* **74**, 1133–1135, (1968).
- [5] Camion, P., Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **249**, 2151–2152, (1959).
- [6] Erdős, P. and Moser, L., On the representation of directed graphs as unions of ordering, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, **9**, 125–132, (1964)
- [7] Gutin, G. M., Criterion for complete bipartite digraphs to be Hamiltonian, *Vestsī Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, **1**, 109–110, (1984)
- [8] Gutin, G. M., Effective characterization of complete bipartite digraphs having Hamiltonian paths, *Kibernetika (Kiev)*, **4**, 124–125, (1985).
- [9] Häggkvist, R. and Manoussakis, Y., Cycles and paths in bipartite tournaments with spanning configurations, *Combinatorica*, **9**, 33–38, (1989).
- [10] Landau, H. G., On dominance relations and the structure of animal societies. III. The condition for a score structure, *Bull. Math. Biophys.*, **15**, 143–148, (1953).
- [11] Maurer, Stephen B., The king chicken theorems, *Math. Mag.*, **53**, 67–80, (1980).
- [12] McKay, B., *Combinatorial Data*, <https://users.cecs.anu.edu.au/bdm/data/>
- [13] Moon, J. W., Topics on tournament, New York, (1968).
- [14] Neumann-Lara, V., A short proof of a theorem of Reid and Parker on tournaments, *Graphs Combin.*, **10**, no. 4 363–366, (1994).
- [15] Rédei, L., Ein kombinatorischer Satz, *Acta Litt. Sci. Szeged*, **7**, 39–43, (1934).

- [16] Reid, K. B., Parker, E.T., Disproof of a conjecture of Erdős and Moser on tournaments, *J. combinatorial Theory*, **9**, 225–238, (1970).
- [17] Shader, B.L., On tournaments matrices, *Linear Algebra Appl.*, 162-164, 335–368, (1992).