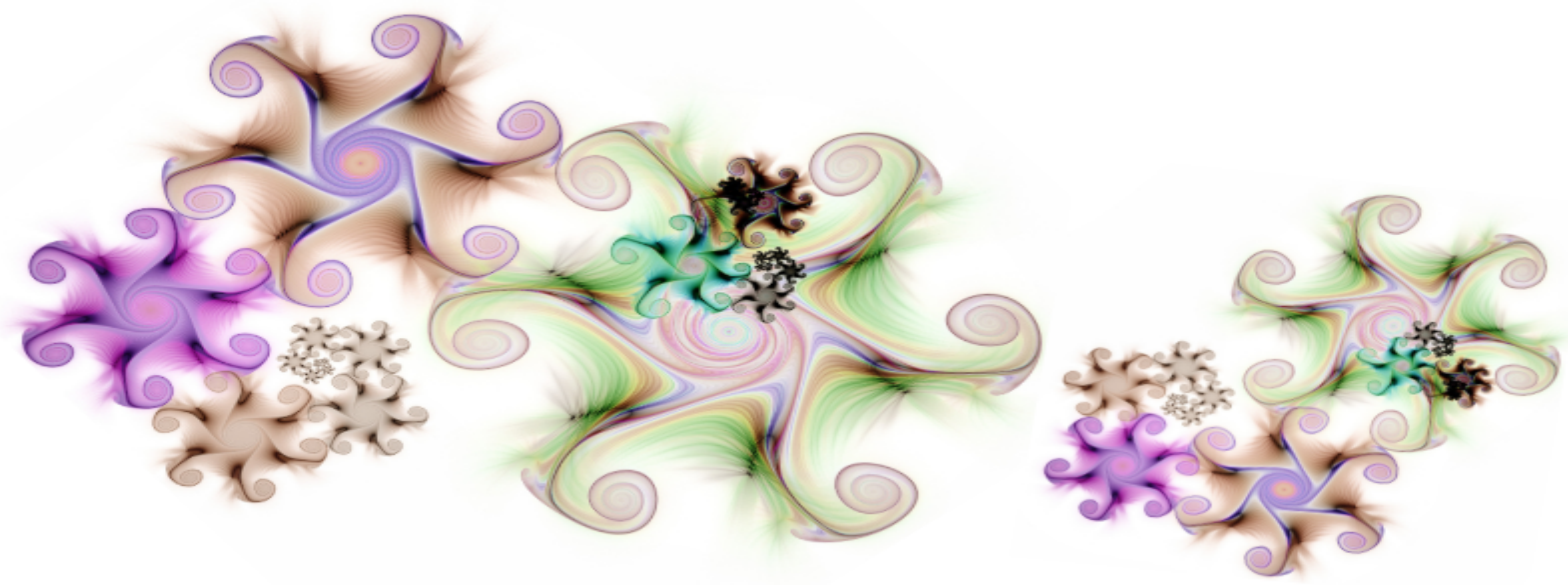
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Iztapalapa

Ciencias Básicas e Ingeniería CBI

Mixba'al
Revista Metropolitana de Matemáticas
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/rubebec
ISSN: 2007-7874



Introducción a la teoría de juegos epistémica

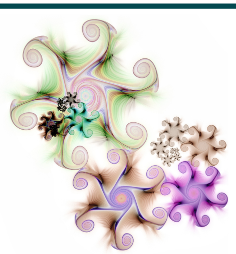
Rubén Becerril Borja

7° Coloquio del Departamento de Matemáticas UAM-I

Del 27 al 31 de enero de 2025

Universidad Autónoma Metropolitana

MIXBA'AL. Vol. 16, No. 1, enero-diciembre de 2025, es una publicación anual de la Universidad Autónoma Metropolitana a través de la Unidad Iztapalapa, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Departamento de Matemáticas. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Ex Hacienda San Juan de Dios, Alcaldía Tlalpan, C.P. 14387, CDMX, México y Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, No. 186, Col. Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Tel. 5804 4658. Página electrónica de la revista: http://mat.izt.uam.mx/mat/index.php/revistamixba-al. Correos electrónicos: mixbaal2009@gmail.com, mixb@xanum.uam.mx. Coordinador Editorial Mario Pineda Ruelas. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo de Título No. 04-2023-07031 1572300-102, ISSN5 2007-7874, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número Mario Pineda Ruelas, Departamento de Matemáticas, edificio AT, oficina 318. División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco No. 186,Colonia Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09340, CDMX, México. Fecha de última modificación 30 de agosto de 2025. Tamaño del archivo 121.3 MB.



7o COLOQUIO DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

del 27 al 31 de enero del 2025, Unidad
Iztapalapa de la UAM,
Ciudad de México

Departamento de Matemáticas
UAM IZTAPALAPA

Posgrado de
Matemáticas
UAM IZTAPALAPA

Taller 1: Análisis de datos con un enfoque bayesiano

Autor: Dr. Asael Fabian Martínez Martínez

Taller 2: Un breve recorrido por la teoría de prerradicales y sus retículas

Autores: Dr. Rogelio Fernández-Alonso, Dra. Silvia Gavito Ticozzi,
Dra. Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda

Taller 3: Resultados del cálculo y álgebra lineal relevantes en modelos y aplicaciones

Autor: Dr. Lorenzo Héctor Juárez

Taller 4: Análisis geométrico de superficies: una introducción elemental

Autores: Dr. Josué Melendez y M. en C. Eduardo Rodríguez Romero

Taller 5: Una introducción a los torneos y sus generalizaciones

Autores: Dr. Ilán Goldfeder Ortiz y Dra. Nahid Yelene Javier Nol

Taller 6: Del cero al quantum: un viaje por el mundo de los códigos

Autores: Dr. Jorge Bolaños Servín, Dra. Yuriko Pitones Amaro y Dr. Josué Rios Cangas

Taller 7: Introducción a la teoría de juegos epistémica

Autor: Dr. Rubén Becerril Borja

Taller 8: Cómo contar más allá del infinito y para qué sirve. Inducción transfinita y algunas aplicaciones

Autor: Dr. Rodrigo Hernández Gutiérrez

Introducción

Una de las ramas de las Matemáticas que nació y se ha desarrollado durante el último siglo ha sido la Teoría de Juegos. Algunos problemas relacionados a ésta se habían estudiado en el siglo XIX cuando Cournot [5] y Bertrand [1] estudiaron la competencia entre empresas, uno permitiendo que las empresas eligieran las cantidades a producir y el otro permitiendo que las empresas eligieran el precio de los bienes. Ya en el siglo XX, Zermelo [14], Borel [2], [3], [4] y von Neumann [7] estudian algunos juegos lúdicos, incluso considerando las ideas de lo que se conoce como el valor de un juego, estrategias maximín, y elecciones aleatorizadas o estrategias mixtas. Todas estas ideas se establecerían de manera fundamental en el libro de von Neumann y Morgenstern [8].

Debido a sus orígenes es que esta teoría lleva este nombre, pero en realidad se puede aplicar para entender cualquier situación donde dos o más individuos mediante las elecciones que realizan afectan el resultado obtenido de interactuar en esta situación. El resultado que se obtenga también depende de cómo es que consideramos que son estos individuos, y una hipótesis muy fuerte es que consideramos que los individuos son perfectamente racionales, es decir, que prefieren maximizar su utilidad ante todo, y que pueden razonar acerca de lo que hacen los otros individuos pensando que también prefieren maximizar su utilidad.

Aquí es donde se abre una vertiente acerca de la forma en la que deben razonar los individuos. Por una parte, algunos autores trataron de considerar situaciones donde los individuos tratan de maximizar la utilidad de la sociedad al no ser egoístas, pero es fácil ver que en esta situación no siempre se tiene una solución. Sin embargo, Nash en un artículo de dos páginas [6] muestra que siempre es posible encontrar una solución a dichos juegos si se consideran estrategias mixtas, como había hecho Borel algunas décadas antes. Dichas soluciones ahora se conocen como equilibrios de Nash. A partir de esto, la teoría de juegos se consideró útil e importante para estudiar, ya que, entre muchas otras aplicaciones, es utilizada ampliamente en la Economía, pues permite estudiar situaciones donde se tienen algunas empresas que están compitiendo, muy a la Cournot o a la Bertrand.

La teoría de juegos clásica que nació a partir del resultado de Nash es la que se ha trabajado mayormente en la última mitad del siglo XX. Sin embargo, algunos años después se observaría que el concepto de equilibrio de Nash es un tanto restrictivo e impone que cualesquiera dos jugadores deben razonar acerca de un tercer jugador de exactamente la misma forma, cosa que puede sonar un tanto irreal, por lo que se empezó a estudiar la posibilidad de definir soluciones para un juego de otra forma, y es aquí donde nace la teoría de juegos epistémica. Los conceptos fundamentales que revisaremos en este taller aparecen en el artículo de Tan y Werlang [13], aunque anteriormente Bernheim [1] y Pearce [9] dan algunas ideas de este razonamiento bajo hipótesis que después se pudieron eliminar. Dado que esta variante de la teoría de juegos es muy reciente, gran parte de lo que se ha desarrollado se encuentra en artículos. El libro de Perea [10] es actualmente el único publicado, y el que se utiliza como referencia principal de esta monografía. Otro libro de Perea [11] que está en proceso de publicación se enfoca más en otros conceptos desarrollados considerando solamente la creencia común en racionalidad, pero es otra referencia para entrar a la teoría de juegos epistémica. Algunos otros libros se encuentran en proceso de escritura y publicación por otros autores, pero a la fecha del coloquio no se pueden consultar.

Esta monografía se escribió con la intención de que más personas conozcan la existencia de la teoría de juegos, y más aún, la existencia de la teoría de juegos epistémica, que por su novedad todavía no se ha dado a conocer a un público más general. Espero que sea de utilidad hacia este fin y que lleve a que muchas personas usen estas herramientas para mejorar su razonamiento en la vida cotidiana, o incluso se interesen a estudiar problemas relacionados con la teoría de juegos.

Rubén Becerril Borja
ruben@xanum.uam.mx
Departamento de Matemáticas
UAM-Iztapalapa

Índice general

Capítulo 1

Creencia común en racionalidad

En muchas situaciones de la vida cotidiana necesitamos tomar decisiones, y en algunos casos el resultado que se obtiene no depende solamente de nuestra decisión, sino también de las decisiones que toman otras personas. En la mayoría de dichas situaciones, no es posible hacer que los demás elijan de forma que sea conveniente para nosotros, dado que ellos también desean realizar su elección para obtener un resultado favorable para ellos.

Matemáticamente, una situación de este tipo es un **juego**, mientras que los individuos involucrados se llaman **jugadores**. La razón de esta terminología se debe a que muchos ejemplos utilizados cuando se empezó a desarrollar la teoría de juegos eran juegos lúdicos: piedra, papel o tijeras; ajedrez; gato, etcétera, para los cuales se puede observar que hay individuos que toman decisiones que afectan el curso del juego y su resultado final, y que en este caso, cuando un individuo gana, el otro pierde, por lo que sus decisiones se oponen entre sí. Esto último no es necesario, ya que es posible tener situaciones donde los individuos buscan cooperar, pero por alguna razón no pueden ponerse de acuerdo de antemano para tomar las decisiones.

1.1 Juegos y equilibrios

Definición 1.1. Un **juego** consiste al menos de una tripleta $(I, (C_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ donde

- $I = \{1, 2, \ldots, N\}$ es un conjunto finito de **jugadores**.
- Para cada jugador $i \in I$, C_i es el conjunto de **decisiones** o **elecciones** del jugador i.
- Para cada jugador $i \in I$, $u_i\colon\ \times_{i=1}^{N} C_i \to \mathbb{R}$ es la **función de utilidad** del jugador i, que considera las elecciones de todos los jugadores para determinar la ganancia del jugador i.

Dentro de dichos juegos la manera en la que los jugadores toman decisiones es al considerar que hacen los otros jugadores y a partir de esto, tratar de maximizar la utilidad que pueden alcanzar. Dado que cada jugador solamente puede modificar directamente la decisión que toma, todos los jugadores estarían satisfechos si una vez que todos han tomado una decisión, ninguno de ellos preferiría cambiar de decisión suponiendo que los demás no cambian su decisión. Por ejemplo, tenemos el siguiente juego.

Ejemplo 1.2. Dos amigos quieren decidir entre ir a ver una obra teatral o una película. Andrés prefiere ir al teatro y Bárbara prefiere ir al cine. Sin embargo, ambos detestan ir solos a cualquiera de los dos lugares, ya que prefieren estar acompañados. Para no discutir, deciden que a las 5 de la tarde cada uno irá a alguno de los dos lugares.

En este caso tenemos que el juego tiene dos jugadores, cada uno de los cuales tiene las posibles decisiones "ir al cine" o "ir al teatro".

Debido a las preferencias que tienen Andrés y Bárbara, consideraremos que cada jugador obtiene 2 unidades de utilidad si van a su lugar preferido acompañados, 1 unidad de utilidad si van al lugar que no prefieren acompañados, y 0 unidades de utilidad si van a cualquier lugar sin compañía. Éstas serán sus funciones de utilidad.

Sin embargo, aunque podríamos describirlas enlistando las posibles parejas de decisiones, por ejemplo:

$$u_{\text{Andrés}}(\text{Teatro}_{\text{Andrés}}, \text{Teatro}_{\text{Bárbara}}) = 2$$
$$u_{\text{Andrés}}(\text{Teatro}_{\text{Andrés}}, \text{Cine}_{\text{Bárbara}}) = 0$$

en muchas ocasiones será más útil describirlas mediante tablas (o mediante matrices como se hace en la teoría de juegos clásica, aunque ese enfoque no nos da una ventaja para la manipulación de estas utilidades), como se muestra a continuación:

$u_{\text{Andrés}}$	**Teatro**	**Cine**
Teatro	2	0
Cine	0	1

$u_{\text{Bárbara}}$	**Teatro**	**Cine**
Teatro	1	0
Cine	0	2

donde en la esquina superior izquierda se denota a que jugador corresponde la tabla, en los renglones se ponen las decisiones del jugador correspondiente y en las columnas las decisiones del otro jugador.

Si razonamos un poco acerca de las posibles parejas de decisiones que se pueden formar observamos que las parejas $(\text{Teatro}_{\text{Andrés}}, \text{Teatro}_{\text{Bárbara}})$ y $(\text{Cine}_{\text{Andrés}}, \text{Cine}_{\text{Bárbara}})$ son tales que ningún jugador prefiere cambiar su decisión suponiendo que el otro jugador se mantiene en la misma decisión. Por ejemplo, para la primera pareja, Andrés recibe 2 unidad de utilidad, que son más que las 0 unidades que recibiría si cambiara su decisión a Cine. Por otra parte, Bárbara recibe 1 unidad de utilidad, y aunque ella preferiría que tanto ella como Andrés cambiaran a Cine, dado que ella solamente puede controlar su decisión, no le conviene cambiarla a Cine, ya que recibiría 0 unidades de utilidad. Algo similar ocurre para la otra pareja.

Por otro lado, si consideramos las otras dos parejas

$$(\text{Teatro}_{\text{Andrés}}, \text{Cine}_{\text{Bárbara}}) \text{ y } (\text{Cine}_{\text{Andrés}}, \text{Teatro}_{\text{Bárbara}})$$

los jugadores tienen incentivos a cambiar de decisión.

Ejercicio 1. Justifica el que los jugadores prefieran cambiar de decisión si se encuentran en las parejas de decisiones $(\text{Teatro}_{\text{Andrés}}, \text{Cine}_{\text{Bárbara}})$ y $(\text{Cine}_{\text{Andrés}}, \text{Teatro}_{\text{Bárbara}})$.

Observación 1.3. Las unidades que se asignaron en el ejemplo anterior para la utilidad son arbitrarias. Dependiendo de la situación que se esté modelando esto puede o no afectar el estudio de la situación, por lo que se tiene que tener cuidado al considerar las funciones de utilidad que se utilizan, o bien, al interpretar los resultados que se obtienen.

En caso de que todos los jugadores prefieran quedarse en las decisiones que tomaron en vez de cambiar de decisión, diremos que esa pareja es un **equilibrio**, dado que ningún jugador tiene incentivos de modificar la situación en la que se encuentran. Por completez, enunciaremos lo anterior de forma matemática, aunque en general lo pensaremos como hemos hecho anteriormente.

Definición 1.4. Dado un juego con N jugadores, diremos que la N-ada $c^* = (c_1^*, c_2^*, \ldots, c_N^*)$ con $c_i^* \in C_i$ para todo $i \in I$ es un **equilibrio** si para cada $i \in I$

$$u_i(c^*) \geq u_i((c_i', c_{-i}^*))$$

para cualquier otra $c_i' \in C_i$, donde entendemos por (c_i', c_{-i}^*) a la N-ada obtenida al considerar c^* y sustituir la decisión c_i^* del jugador i por la decisión c_i' manteniendo las decisiones de los otros jugadores.

Dichos equilibrios son las soluciones que se buscan en la teoría de juegos clásica. Sin embargo, es bien sabido que no todos los juegos tienen equilibrios, como se puede observar si pensamos en el siguiente juego que todos hemos jugado alguna vez.

Ejemplo 1.5. Andrés y Bárbara deciden jugar piedra, papel o tijeras y apostar 1 peso, de forma que el que gane se lleva un peso, mientras que si es un empate, ninguno tiene que pagar.

En este caso, si razonamos un poco, podemos ver que sin importar en cual de las parejas comencemos, siempre alguno de los jugadores prefiere cambiar de decisión. Por lo tanto, no existe un equilibrio como se definió anteriormente para este juego.

Ejercicio 2. Muestra que si empezamos en las parejas

$$(\text{Piedra}_{\text{Andrés}}, \text{Papel}_{\text{Bárbara}}) \text{ y } (\text{Tijeras}_{\text{Andrés}}, \text{Tijeras}_{\text{Bárbara}})$$

hay al menos un jugador que prefiere cambiar de decisión. Además muestra que aun si permitiéramos al jugador en desacuerdo cambiar su decisión y formar una nueva pareja de decisiones, en esta nueva pareja hay al menos un jugador que prefiere cambiar su decisión, y que este proceso se puede continuar realizando sin fin.

Debido a esto, en la teoría de juegos clásica se introduce el concepto de estrategias mixtas y se modifica la definición de equilibrio para incluir dichas estrategias mixtas. En nuestro caso, esto no es necesario, ya que razonamos de una forma diferente en la teoría de juegos epistémica.

1.2 Creencia en la racionalidad del oponente

Para realizar este razonamiento, consideraremos que cada jugador i tiene un conjunto de tipos T_i que son versiones de dicho jugador, las cuales razonan de diferente manera. En el ejemplo 1.2, podríamos considerar un tipo para Andrés que decide ir al Teatro y otro tipo para Andrés que decide ir al Cine, mientras que podemos tener también tipos correspondientes para Bárbara.

No necesariamente debe haber tipos para cada jugador que correspondan a cada una de sus posibles decisiones. Más adelante veremos que en muchas ocasiones podemos obviar algunos ya que no afectan el análisis que se realice de los juegos.

Es útil pensar en tipos para cada jugador debido a la forma en la que cada jugador razonará acerca de los otros jugadores, y la forma en la que esto justificará si una decisión se puede tomar o no. Para explicar esto, utilizaremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6. Andrés y Bárbara irán a una fiesta, para lo cual deben decidir de qué color se vestirán. Andrés prefiere azul a verde, verde a rojo y rojo a amarillo, pero detesta vestirse del mismo color que Bárbara.

Por otra parte, Bárbara prefiere rojo a amarillo, amarillo a azul y azul a verde, y también detesta vestirse del mismo color que Andrés.

En este caso, para modelar el problema, asignaremos utilidad 4 a la elección más preferida y 0 a la menos preferida.

¿Cómo podemos justificar la decisión de Andrés de elegir alguno de los colores en particular? Observemos primero que la única situación donde no se viste de color azul es si considera posible que Bárbara se vista de azul. Aquí es donde es útil la existencia de los tipos, ya que si Andrés cree que Bárbara es del tipo que elegiría vestirse de amarillo, entonces esto justifica que él decida vestirse de azul. Notemos que si Andrés cree que Bárbara es del tipo que elegiría vestirse de verde, o de rojo, también es justificación suficiente para su elección.

¿Puede Andrés justificar elegir vestirse de verde? Sí, ya que si Andrés considera que Bárbara es del tipo que elegiría vestirse de azul, entonces él definitivamente no quiere usar azul, y su mejor opción en este caso es usar verde.

La forma de describir este comportamiento por parte de Andrés es considerar que tiene una **creencia**, la cual a cada elección y tipo posible de Andrés le asigna una elección y tipo posible de Bárbara.

Definición 1.7. Dado un juego, para cada jugador i y cada tipo $t_i \in T_i$, podemos definir una **creencia** como una función $b_i \colon T_i \to \Delta(C_{-i} \times T_{-i})$, donde en la imagen estamos considerando todas las posibles distribuciones de probabilidad con soporte en $C_{-i} \times T_{-i}$.

La razón por la que en la imagen no solamente se consideran elecciones y tipos de los oponentes, sino distribuciones de probabilidad, es debido a que necesitamos flexibilidad adicional en la forma de razonar acerca de los oponentes ya que no tenemos la certeza de que los oponentes decidirán exactamente una de sus posibles decisiones, pues podrían estar pensando en dos o más de ellas.

Definición 1.8. Dado un juego, decimos que r_i es una **decisión** o **elección aleatorizada** de i si $r_i \in \Delta C_i$.

El que los jugadores puedan considerar que sus oponentes hacen elecciones aleatorizadas nos permite justificar que Andrés también puede ir a la fiesta vestido de rojo. Las cuatro posibilidades para Bárbara ya se utilizaron en la justificación de azul y verde para Andrés, por lo que no funcionarían para justificar rojo. Sin embargo, si creemos que Bárbara con probabilidad 0.6 elegirá ir de azul y con probabilidad 0.4 elegirá ir de verde (es decir, Bárbara realiza una elección aleatorizada), entonces

- Si Andrés decide ir de color rojo, dado que cree que Bárbara no elige ir de rojo, obtendría una utilidad de 2.
- Si Andrés decide ir de color azul, entonces con probabilidad 0.6 elige el mismo color que Bárbara, por lo que en ese caso obtendría utilidad 0, mientras que con probabilidad 0.4 elige un color diferente a Bárbara y obtendría utilidad 4. Por lo tanto, su utilidad esperada es
$$0.6(0) + 0.4(4) = 1.6$$
- Si Andrés decide ir de color verde, entonces con probabilidad 0.6 elige un color diferente a Bárbara y obtiene utilidad 3, mientras que con probabilidad 0.4 elige el mismo color que Bárbara por lo que obtiene utilidad 0. Así su utilidad esperada es
$$0.6(3) + 0.4(0) = 1.8$$
- Finalmente, si Andrés elige ir de color amarillo, en ningún caso elige el mismo color que Bárbara por lo que obtiene utilidad 1.

Dado que elegir rojo nos da la mayor utilidad esperada, entonces Andrés puede justificar ir vestido de rojo a la fiesta.

Notemos que estamos considerando el concepto de utilidad esperada el cual, como una esperanza, multiplica la utilidad obtenida por la probabilidad de que se elija cierta combinación de elecciones para todos los jugadores.

Definición 1.9. La **utilidad esperada** del jugador i dado que elige c_i, es del tipo t_i y tiene la creencia b_i está dada por
$$U_i(c_i, t_i, b_i) = \sum_{(c_{-i}, t_{-i}) \in C_{-i} \times T_{-i}} u_i(c_i, c_{-i}) b_i(t_i)(c_{-i}, t_{-i})$$

Por último, notaremos que no es posible para Andrés justificar el uso de amarillo. Una forma de hacer eso es considerar dos casos. Si Andrés creyera que Bárbara elige azul con probabilidad menor a 0.5, entonces incluso si Andrés eligiera azul, obtendría una utilidad esperada de al menos
$$0.5(4) = 2$$
mientras que si Andrés eligiera amarillo, a lo más podría obtener una utilidad esperada de 1. Por otra parte, si Andrés creyera que Bárbara elige azul con probabilidad mayor a 0.5, entonces Andrés podría elegir verde y obtener una utilidad esperada de al menos
$$0.5(3) = 1.5$$

que es mayor a la utilidad esperada que obtendría de elegir amarillo, que a lo más es 1.

Ésta sería la forma en la que razona Andrés, y esto nos dará la pauta para definir aquellas decisiones que se pueden justificar.

Definición 1.10. Dado un juego y una creencia b_i para el jugador i que es del tipo t_i, diremos que una decisión c_i^* es **óptima** si

$$U_i(c_i^*, t_i, b_i) \geq U_i(c_i, t_i, b_i)$$

para cualquier otra $c_i \in C_i$.

Por otra parte, diremos que c_i^* es **racional** para el jugador i si existe alguna creencia b_i para la cual c_i^* es óptima.

La diferencia entre si c_i^* es óptima o racional es que en el primer caso ya conocemos la creencia b_i para la cual se maximiza la utilidad esperada, mientras que en el segundo caso solamente sabemos que existe dicha creencia, pero no la hemos fijado. En muchos casos se utilizan ambos términos de forma intercambiable, pero hacemos notar esta diferencia.

Podemos analizar la situación de Bárbara de forma similar y observar que en su caso, las elecciones rojo, amarillo y azul son racionales, mientras que verde no lo es.

Ejercicio 3. Muestra que las elecciones rojo, amarillo y azul son racionales para Bárbara y que la elección verde no es racional.

Regresando a la forma en la que razonó Andrés para justificar su elección de azul, dijimos que una posibilidad era si el creía que Bárbara era del tipo que elegía ir vestida de verde. Al menos en la mente de Andrés, esto tiene sentido, sin embargo, si él razona a un nivel mayor de profundidad y se pone en los zapatos de Bárbara, se dará cuenta de que Bárbara jamás elegiría ir vestida de verde ya que no es una elección racional. Por lo tanto, Andrés no puede justificar su decisión creyendo que Bárbara elegiría verde.

Ahora notamos que no basta solamente con justificar la decisión de cada individuo, sino que también debemos razonar acerca de las elecciones que justifican la decisión de cada individuo. Más aún, también debemos razonar acerca de las decisiones que justifican las elecciones que justifican la decisión de cada individuo. Y así sucesivamente una infinidad de niveles. Además de esto, notemos que en cada uno de los níveles en los que se razona debemos considerar solamente elecciones que sean racionales, de otra forma, sabemos que el jugador correspondiente no tomaría esa decisión. Esto nos lleva a la siguiente definición, que será central en nuestra discusión.

Definición 1.11. Dado un juego, y una creencia b_i para el jugador i que es del tipo t_i, decimos que t_i **cree en la racionalidad de los oponentes** si $b_i(t_i)(c_{-i}, t_{-i}) > 0$ solamente cuando c_{-i} consiste de elecciones racionales para cada uno de los oponentes de i cuando son del tipo correspondiente en t_{-i}. En este caso, también decimos que b_i **expresa creencia en la racionalidad de los oponentes**.

1.3 Modelos epistémicos

Como podemos observar, la interacción entre creencias y tipos es muy importante, pero no es parte de lo que define al juego, sino de lo que nos permite analizarlo. Dado que el marco en el que analizamos el juego puede cambiar y darnos diferentes perspectivas, codificamos este concepto.

Definición 1.12. Dado un juego, definimos un **modelo epistémico** como la pareja $((T_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I})$ de clases de tipos y creencias.

De esta forma, dependiendo del modelo epistémico será el comportamiento del juego. Este modelo epistémico además permite describir de forma compacta la manera en la que interactúan las diferentes creencias para justificar algunas de las elecciones que realizan los jugadores.

Para el ejemplo que hemos trabajado, un posible modelo epistémico sería

$$T_{\text{Andrés}} = \{t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}, t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}\}$$
$$T_{\text{Bárbara}} = \{t^{\text{rojo}}_{\text{Bárbara}}, t^{\text{amarillo}}_{\text{Bárbara}}\}$$

$$b_{\text{Andrés}}(t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}) = (\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Bárbara}})$$
$$b_{\text{Andrés}}(t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}) = (\text{azul}, t^{\text{amarillo}}_{\text{Bárbara}})$$

$$b_{\text{Bárbara}}(t^{\text{rojo}}_{\text{Bárbara}}) = (\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}})$$
$$b_{\text{Bárbara}}(t^{\text{amarillo}}_{\text{Bárbara}}) = (\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}})$$

Observamos varias cosas. Primero, no necesariamente en nuestro modelo epistémico se tienen que considerar tipos para todas las posibles elecciones de cada jugador. Segundo, al escribir por ejemplo

$$b_{\text{Andrés}}(t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}) = (\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Bárbara}})$$

estamos diciendo que para justificar que Andrés elija el color azul, dado que Andrés es del tipo que elegiría azul, él cree que Bárbara eligirá rojo y es del tipo que elegiría el color rojo con probabilidad 1. En otras palabras, sería más correcto escribir

$$b_{\text{Andrés}}(t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}})(\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Bárbara}}) = 1$$

pero la notación utilizada tendrá ventajas cuando consideremos creencias donde las probabilidades no sean 1, y también tiene ventajas cuando se definen otros conceptos de razonamiento en la teoría de juegos epistémica (éstos no se definirán en esta monografía, pero si se trabajan en la bibliografía que se tiene al final).

Tercero, notemos que una creencia dentro de un modelo epistémico no necesariamente debe creer que un oponente elige la opción que sería óptima para su tipo. Por ejemplo, tenemos que

$$b_{\text{Andrés}}(t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}) = (\text{azul}, t^{\text{amarillo}}_{\text{Bárbara}})$$

donde Andrés cree que Bárbara elige azul y es del tipo que elegiría amarillo. Claro está, aunque esto no causa problemas con la definición de un modelo epistémico, está diciendo que Andrés justifica su elección verde pensando en que Bárbara elegirá azul a pesar de que ella es del tipo para el que amarillo es la elección óptima. Esto llevará a que Andrés no pueda justificar su elección cuando razona acerca de la elección de Bárbara, por lo que el modelo epistémico que nos sirva para razonar acerca de un juego, deberá considerar solamente parejas de elecciones y tipos en las que la elección sea óptima para el tipo correspondiente.

Cuarto, en el modelo presentado, también tenemos que podríamos tener creencias que no justifican adecuadamente una elección para un jugador, como

$$b_{\text{Bárbara}}(t^{\text{amarillo}}_{\text{Bárbara}}) = (\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}})$$

la cual no funciona para justificar que Bárbara elija amarillo. Aunque estas creencias son posibles, tampoco son adecuadas para el modelo epistémico que nos permita estudiar el juego. De esta manera, ya tenemos algunas ideas de lo que no debería de aparecer en nuestro modelo epistémico.

Ahora bien, construir dicho modelo epistémico no es necesariamente tan fácil. De hecho, utilizaremos un método gráfico para ayudarnos a traducir lo que podemos observar en el juego a dicho modelo epistémico. Para ello, dado que sabemos que solamente consideraremos modelos donde la elección sea óptima para el tipo que elegiría dicha elección, podemos pensar solamente en términos de elecciones. Luego, dibujamos las siguientes columnas, correspondientes a cada una de las elecciones posibles para cada jugador.

$$\begin{array}{ccc}
(\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}) & (\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Bárbara}}) & (\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}) \\[2em]
(\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}) & (\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Bárbara}}) & (\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}) \\[2em]
(\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Andrés}}) & (\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Bárbara}}) & (\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Andrés}}) \\[2em]
(\text{amarillo}, t^{\text{amarillo}}_{\text{Andrés}}) & (\text{amarillo}, t^{\text{amarillo}}_{\text{Bárbara}}) & (\text{amarillo}, t^{\text{amarillo}}_{\text{Andrés}})
\end{array}$$

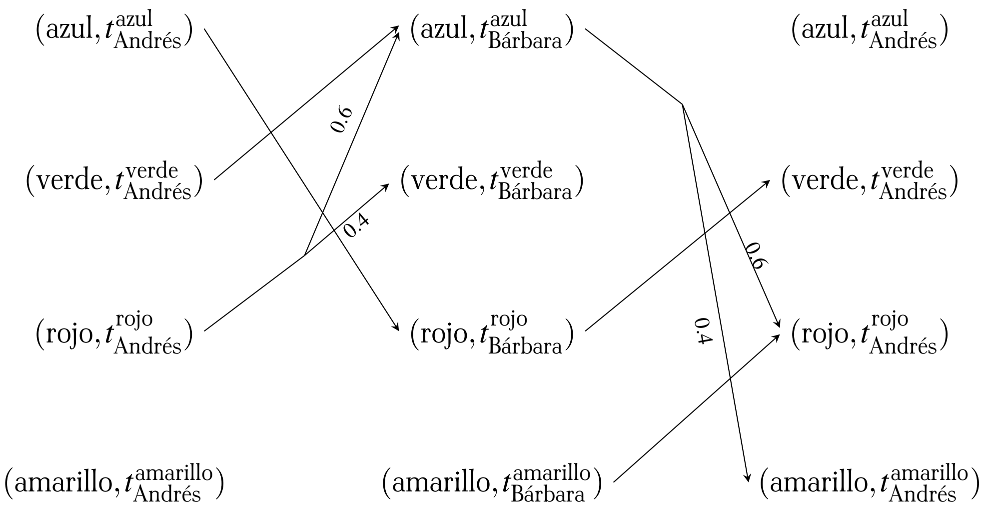
Luego dibujaremos flechas las cuales partirán de cada elección que se puede justificar para cada jugador hacia la elección del oponente que justifica dicha elección. Por ejemplo, la elección verde de Andrés se puede justificar si Bárbara elige azul. Por lo cual tendríamos

$$
\begin{tikzcd}
(\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}) & (\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Bárbara}}) & (\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}) \\
(\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}) \arrow[ur] & (\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Bárbara}}) & (\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}) \\
(\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Andrés}}) & (\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Bárbara}}) & (\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Andrés}}) \\
(\text{amarillo}, t^{\text{amarillo}}_{\text{Andrés}}) & (\text{amarillo}, t^{\text{amarillo}}_{\text{Bárbara}}) & (\text{amarillo}, t^{\text{amarillo}}_{\text{Andrés}})
\end{tikzcd}
$$

Y hacemos lo mismo para las otras justificaciones que encontramos anteriormente. Notemos que por ejemplo, para la elección azul de Andrés, habían varias elecciones de Bárbara que la justificaban. Aunque podríamos dibujar todas, basta solamente con dibujar una. Observaremos más adelante que es importante saber cuál dibujar para obtener el modelo epistémico deseado, pero por el momento no nos preocuparemos por eso, ya que tendremos un algoritmo que nos diga cuál se dibujará. Por lo tanto, podríamos tener un modelo epistémico como el siguiente

$$
\begin{tikzcd}
(\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}) \arrow[ddr] & (\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Bárbara}}) & (\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}) \\
(\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}) \arrow[ur] & (\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Bárbara}}) & (\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}) \\
(\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Andrés}}) & (\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Bárbara}}) \arrow[ur] & (\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Andrés}}) \\
(\text{amarillo}, t^{\text{amarillo}}_{\text{Andrés}}) & (\text{amarillo}, t^{\text{amarillo}}_{\text{Bárbara}}) \arrow[ur] & (\text{amarillo}, t^{\text{amarillo}}_{\text{Andrés}})
\end{tikzcd}
$$

En el caso de la elección rojo de Andrés, habíamos visto que se necesitaba una creencia donde asignábamos probabilidad positiva a más de una elección de Bárbara, y lo mismo ocurre para justificar la elección azul de Bárbara. En estos casos, la forma de dibujar estas flechas es al dividirlas y notar la probabilidad que asignamos a cada elección en la creencia.



De esta manera, tenemos una forma gráfica de representar las elecciones y las justificaciones correspondientes. Claro está, la representación anterior no es única ya que para algunas elecciones de ambos jugadores existen otras flechas que se pueden dibujar.

1.4 Creencia común en racionalidad

Hay más de lo que se ve a primera vista en esta representación, y por esto es que es extremadamente útil. Recordemos que al final queremos justificar en cada nivel de razonamiento las elecciones realizadas por cada individuo. Esto lo podemos enunciar formalmente de la siguiente manera.

Definición 1.13. Dado un modelo epistémico $((T_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I})$:

- Decimos que un tipo t_i **expresa creencia en racionalidad al nivel 1** si t_i cree en la racionalidad de los oponentes.
- Decimos que un tipo t_i **expresa creencia en racionalidad al nivel 2** si t_i asigna probabilidad positiva en la creencia b_i solamente a tipos de los oponentes que expresan creencia en racionalidad al nivel 1.
- Decimos que un tipo t_i **expresa creencia en racionalidad al nivel 3** si t_i asigna probabilidad positiva en la creencia b_i solamente a tipos de los oponentes que expresan creencia en racionalidad al nivel 2.
- En general, decimos que un tipo t_i **expresa creencia en racionalidad al nivel** k si t_i asigna probabilidad positiva en la creencia b_i solamente a tipos de los oponentes que expresan creencia en racionalidad al nivel $k-1$.

Definición 1.14. Dado un modelo epistémico $((T_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I})$ decimos que t_i **expresa creencia común en racionalidad** si expresa creencia en racionalidad al nivel k para toda $k \in \mathbb{N}$.

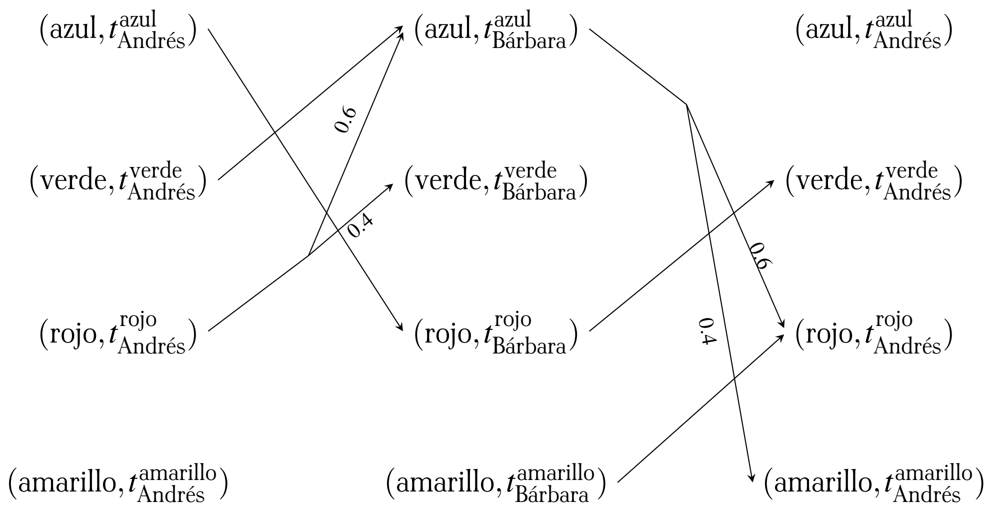
Observación 1.15. Hemos de notar que si un tipo t_i expresa creencia en racionalidad al nivel k esto no implica que necesariamente exprese creencia en racionalidad a todos los niveles menores que k. De hecho observaremos que esto ocurre para algunos tipos en el ejemplo que hemos estado trabajando, por lo que para que un tipo exprese creencia común en racionalidad, debemos mostrar claramente que expresa creencia en racionalidad para cada nivel.

El concepto de **creencia común en racionalidad** será el concepto de razonamiento que utilizaremos, y a partir de éste podemos definir lo que consideraremos como una solución para un juego.

Definición 1.16. Dado un juego, una elección $c_i \in C_i$ para el jugador i es una elección que se puede **hacer racionalmente bajo creencia común en racionalidad** si existe algún modelo epistémico $((T_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I})$ tal que existe un tipo t_i que expresa creencia común en racionalidad y para el cual c_i es óptima.

De esta forma, para cada jugador las soluciones posibles de un juego consistirán precisamente de aquellas elecciones que se pueden hacer racionalmente bajo creencia común en racionalidad.

La utilidad del modelo gráfico para encontrar dichas soluciones es debido a que, suponiendo que elegimos las flechas de manera adecuada, podemos observar de una sola vez todos los niveles en que tenemos que razonar y ver si podemos justificar alguna elección. Regresando a la gráfica final de nuestro ejemplo:



tenemos por ejemplo que podemos empezar en la elección azul para Andrés, la cual se justifica pensando que Bárbara elegirá rojo.

Posteriormente tenemos que la elección rojo de Bárbara se justifica pensando que Bárbara cree que Andrés elegirá verde. Así, el tipo de Andrés $t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}$ expresa creencia en racionalidad al nivel 1.

A continuación, tenemos que la elección verde de Andrés se justifica si Andrés cree que Bárbara elegirá azul. Por lo tanto, el tipo $t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}$ expresa creencia en racionalidad al nivel 2.

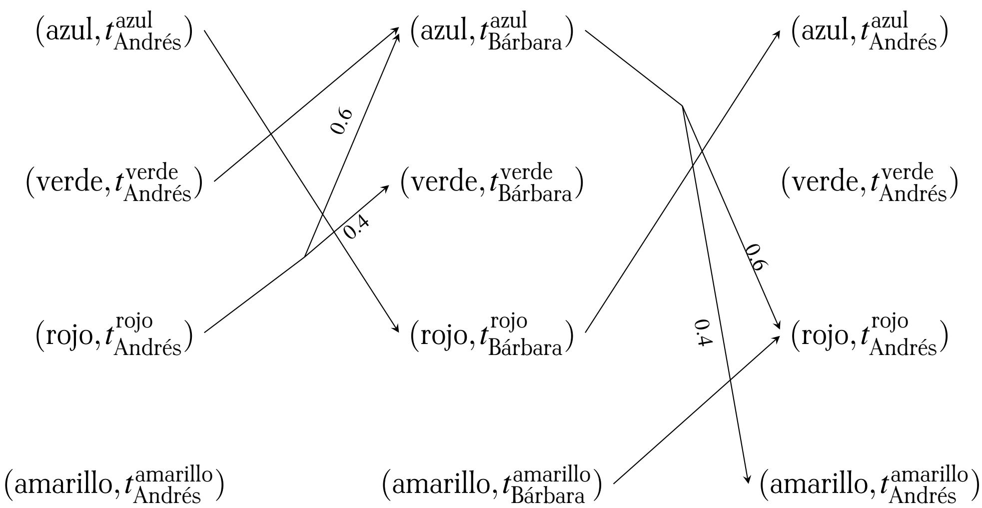
Luego, tenemos que la elección azul de Bárbara se justifica si Bárbara cree que Andrés elegirá rojo con probabilidad 0.6 y amarillo con probabilidad 0.4. Por lo tanto, el tipo $t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}$ expresa creencia en racionalidad al nivel 3.

Sin embargo, aunque podemos justificar la elección rojo para Andrés, no es posible justificar la elección amarillo para Andrés, por lo que $t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}$ **no** expresa creencia en racionalidad al nivel 4.

Ahora si, por ejemplo, justificáramos incorrectamente la elección amarillo de Andrés cuando Bárbara elige rojo (por decir algo, con lo cual imaginamos que existe una flecha desde amarillo de Andrés a rojo de Bárbara), entonces $t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}$ expresaría creencia en racionalidad al nivel 5, a pesar de que sigue sin expresar creencia en racionalidad al nivel 4.

Ejercicio 4. Muestra que para esta gráfica, ninguna de las elecciones expresa creencia común en racionalidad.

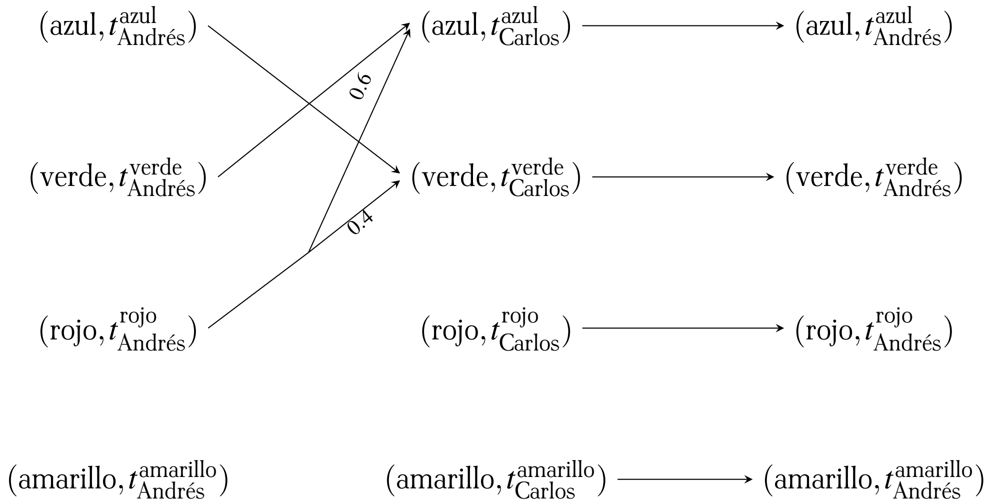
De hecho, tenemos que la gráfica que elegimos no era la más adecuada. Deberíamos de haber dibujado la siguiente gráfica



en la cual tendríamos que la elección azul de Andrés expresa creencia común en racionalidad, mientras que la elección rojo de Bárbara también expresa creencia común en racionalidad.

Ejemplo 1.17. Supongamos que ahora Andrés quiere ir a otra fiesta con Carlos. Andrés sigue teniendo la misma función de utilidad, mientras que Carlos prefiere rojo a amarillo, amarillo a azul y azul a verde, pero lo que prefiere sobre todo es ir del mismo color que Andrés, con lo cual esto último le dará una utilidad de 5, mientras que si no coincide, entonces los colores dan utilidades de 4 a 1, respectivamente.

Para este ejemplo, el razonamiento de Andrés para justificar sus elecciones es exactamente el mismo que con Bárbara, pero ahora vemos que Carlos puede justificar todas sus elecciones si cree que Andrés elegirá el mismo color que él. De esta forma, una gráfica correspondiente a este ejemplo sería



En este caso, podemos observar que Andrés puede elegir azul, verde y rojo bajo creencia común en racionalidad. Carlos por su parte, también puede elegir azul, verde y rojo bajo creencia común en racionalidad.

Ejercicio 5. Muestra que la elección azul de Andrés expresa creencia en racionalidad para todos los niveles k.

1.5

Algoritmos

Una forma de observar la creencia común en racionalidad mediante la gráfica es al observar que estamos en un ciclo, lo cual ocurre si empezamos en las elecciones azul o verde de Andrés (lo mismo para Carlos). Si en cambio, empezamos en la elección rojo de Andrés, vemos que jamás regresamos de nuevo a dicha elección, pero eso no es importante. Lo que importa es que eventualmente, las elecciones que se utilizan para justificar deben estar dentro de algún ciclo (no necesariamente el mismo), y que en ningún momento llegamos a una elección que no tenga flechas de salida.

Sin embargo, la pregunta natural es: ¿cómo encontramos estos diagramas?, y ¿cómo sabemos que no hay algún otro diagrama para el cuál alguna otra elección se pueda realizar bajo creencia común en racionalidad? Para ello, tenemos dos resultados que enunciaremos.

Teorema 1.18. *Consideremos un juego con una cantidad finita de jugadores y una cantidad finita de elecciones para cada jugador, entonces siempre es posible construir un modelo epistémico no vacío para dicho juego tal que todo tipo del modelo exprese creencia común en racionalidad y donde toda creencia del modelo asigne probabilidad positiva solamente a tipos que aparecen en el modelo epistémico (y a sus correspondientes elecciones).*

Antes de enunciar el segundo resultado, definimos lo que es una elección estrictamente dominada.

Definición 1.19. Dado un juego, decimos que una elección $c_i \in C_i$ del jugador i está **estrictamente dominada** por otra elección aleatorizada $r_i \in \Delta C_i$ si tenemos que

$$u_i(r_i, c_{-i}) > u_i(c_i, c_{-i})$$

para cualquier combinación de elecciones c_{-i} de los oponentes de i.

Observemos que estamos considerando elecciones aleatorizadas para dominar a la elección c_i, pero cualquier elección c_i es una elección aleatorizada en la cuál se asigna probabilidad 1 a c_i, por lo que estamos considerando también dominar estrictamente mediante elecciones sin aleatorizar. Ahora sí podemos enunciar el algoritmo que se utilizará para obtener las elecciones que se pueden realizar bajo creencia común en racionalidad.

Teorema 1.20 (Algoritmo de eliminación iterada de elecciones estrictamente dominadas).

1. *Dado el juego original, para cada jugador se eliminan las elecciones que son estrictamente dominadas, con lo cual obtenemos un juego reducido donde los conjuntos de elecciones para cada jugador i ahora son $C_i^1 \subseteq C_i$. Las elecciones en cada conjunto C_i^1 son aquellas que son racionales para el jugador i.*

2. *Dado el juego reducido del paso anterior, para cada jugador se eliminan las elecciones que son estrictamente dominadas, con lo cual obtenemos un nuevo juego reducido donde los conjuntos de elecciones para cada jugador i ahora son $C_i^2 \subseteq C_i^1$. Las elecciones en cada conjunto C_i^2 son aquellas que expresan creencia en racionalidad al nivel 1.*

3. *Dado el juego reducido del paso anterior, para cada jugador se eliminan las elecciones que son estrictamente dominadas, con lo cual obtenemos un nuevo juego reducido donde los conjuntos de elecciones para cada jugador i ahora son $C_i^3 \subseteq C_i^2$. Las elecciones en cada conjunto C_i^3 con aquellas que expresan creencia en racionalidad al nivel 2.*

El proceso continúa hasta que ya no hay elecciones estrictamente dominadas para ningún jugador. Las elecciones que sobreviven en cada uno de los conjuntos del juego reducido final son exactamente aquellas que se pueden realizar bajo creencia común en racionalidad.

Aunque no demostraremos estos resultados, podemos observar que el algoritmo siempre da al menos una elección para cada jugador, y esto es debido a que nunca podemos eliminar todas las elecciones, ya que si en algún momento queda exactamente una elección, ya no tenemos forma de dominarla estrictamente mediante otra elección; y en cualquier momento que tengamos más de una elección no podemos eliminar todas, ya que esto implicaría que en algún momento alguna elección dominó y fue dominada estrictamente por otra elección, lo cual no es posible.

Ahora aplicaremos el algoritmo a los ejemplos 1.6 y 1.17. Empezamos por el ejemplo 1.6, donde las utilidades de Andrés en forma de tabla son

$u_{\text{Andrés}}$	**azul**	**verde**	**rojo**	**amarillo**
azul	0	4	4	4
verde	3	0	3	3
rojo	2	2	0	2
amarillo	1	1	1	0

y las utilidades de Bárbara son

$u_{\text{Bárbara}}$	**azul**	**verde**	**rojo**	**amarillo**
azul	0	2	2	2
verde	1	0	1	1
rojo	4	4	0	4
amarillo	3	3	3	0

Si aplicamos el algoritmo, observamos que la elección amarillo de Andrés está estrictamente dominada por ejemplo por la elección aleatorizada donde con probabilidad 0.5 Andrés elige azul y con probabilidad 0.5 elige verde. De forma similar, para Bárbara la elección verde está estrictamente dominada por la elección aleatorizada donde con probabilidad 0.5 elige rojo y con probabilidad 0.5 elige amarillo. De esta forma, el juego se reduce a las siguientes tablas para cada jugador

$u_{\text{Andrés}}$	**azul**	**rojo**	**amarillo**
azul	0	4	4
verde	3	3	3
rojo	2	0	2

$u_{\text{Bárbara}}$	**azul**	**verde**	**rojo**
azul	0	2	2
rojo	4	4	0
amarillo	3	3	3

En el segundo paso, la elección rojo de Andrés está estrictamente dominada por su elección verde, mientras que para Bárbara la elección azul está estrictamente dominada por su elección amarillo. Eliminando las elecciones estrictamente dominadas tenemos las siguientes tablas reducidas

$u_{\text{Andrés}}$	**rojo**	**amarillo**
azul	4	4
verde	3	3

$u_{\text{Bárbara}}$	**azul**	**verde**
rojo	4	4
amarillo	3	3

Por último, observamos que para Andrés la elección verde está estrictamente dominada por la elección azul, y para Bárbara la elección amarillo está estrictamente dominada por la elección rojo. Las tablas finales para cada jugador son

$u_{\text{Andrés}}$	**rojo**
azul	4

$u_{\text{Bárbara}}$	**azul**
rojo	4

Por lo tanto, Andrés solamente puede elegir azul y Bárbara solamente puede elegir rojo bajo creencia común en racionalidad. A partir de estas tablas es que se construye la gráfica y mediante la gráfica se construye el modelo epistémico. De hecho, dado que solamente hay una elección para cada jugador, basta con que la gráfica sea la siguiente

$$(\text{azul}, t_{\text{Andrés}}^{\text{azul}}) \longrightarrow (\text{rojo}, t_{\text{Bárbara}}^{\text{rojo}}) \longrightarrow (\text{azul}, t_{\text{Andrés}}^{\text{azul}})$$

de la cual podemos obtener el siguiente modelo epistémico

$$T_{\text{Andrés}} = \{t_{\text{Andrés}}^{\text{azul}}\}$$
$$T_{\text{Bárbara}} = \{t_{\text{Bárbara}}^{\text{rojo}}\}$$

$$b_{\text{Andrés}}(t_{\text{Andrés}}^{\text{azul}}) = (\text{rojo}_{\text{Bárbara}}, t_{\text{Bárbara}}^{\text{rojo}})$$
$$b_{\text{Bárbara}}(t_{\text{Bárbara}}^{\text{rojo}}) = (\text{azul}_{\text{Andrés}}, t_{\text{Andrés}}^{\text{azul}})$$

el cual es suficiente para nuestros propósitos.

Ahora para el ejemplo 1.17, las utilidades de Andrés son exactamente las mismas

$u_{\text{Andrés}}$	**azul**	**verde**	**rojo**	**amarillo**
azul	0	4	4	4
verde	3	0	3	3
rojo	2	2	0	2
amarillo	1	1	1	0

mientras que las de Carlos son

u_{Carlos}	**azul**	**verde**	**rojo**	**amarillo**
azul	5	2	2	2
verde	1	5	1	1
rojo	4	4	5	4
amarillo	3	3	3	5

Al igual que en el ejemplo anterior, amarillo está estrictamente dominado para Andrés por la elección aleatorizada donde con probabilidad 0.5 elige azul y con probabilidad 0.5 elige verde.

Para Carlos, sin embargo, ninguna de las elecciones está estrictamente dominada. Así, las tablas del juego reducido después del paso 1 del algoritmo son

$u_{\text{Andrés}}$	**azul**	**verde**	**rojo**	**amarillo**
azul	0	4	4	4
verde	3	0	3	3
rojo	2	2	0	2

u_{Carlos}	**azul**	**verde**	**rojo**
azul	5	2	2
verde	1	5	1
rojo	4	4	5
amarillo	3	3	3

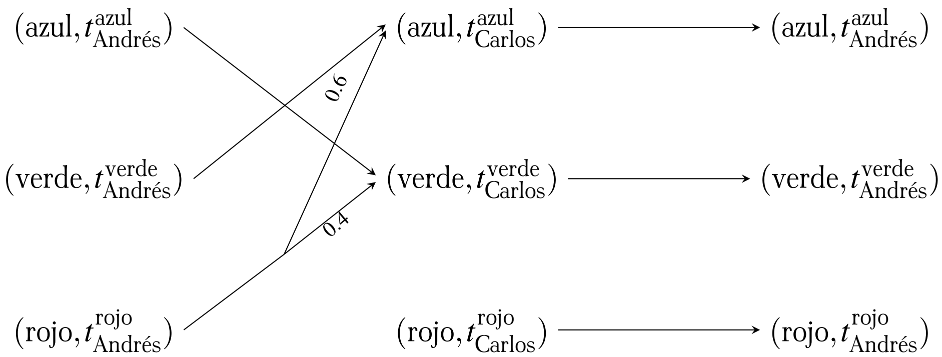
En el segundo paso, Andrés no tiene elecciones estrictamente dominadas. Para Carlos la elección amarillo está estrictamente dominada por la elección rojo. Por lo tanto, las tablas del juego reducido son

$u_{\text{Andrés}}$	**azul**	**verde**	**rojo**
azul	0	4	4
verde	3	0	3
rojo	2	2	0

u_{Carlos}	**azul**	**verde**	**rojo**
azul	5	2	2
verde	1	5	1
rojo	4	4	5

Ya no hay más elecciones estrictamente dominadas, por lo que el algoritmo termina. Así, Andrés puede elegir azul, verde y rojo bajo creencia común en racionalidad, mientras que Carlos también puede elegir azul, verde y rojo bajo creencia común en racionalidad.

La gráfica que nos sirve para describir lo obtenido anteriormente es



y el modelo epistémico relacionado sería

$$T_{\text{Andrés}} = \{t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}, t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}, t^{\text{rojo}}_{\text{Andrés}}\}$$
$$T_{\text{Carlos}} = \{t^{\text{azul}}_{\text{Carlos}}, t^{\text{verde}}_{\text{Carlos}}, t^{\text{rojo}}_{\text{Carlos}}\}$$

$$b_{\text{Andrés}}(t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}) = (\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Carlos}})$$
$$b_{\text{Andrés}}(t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}) = (\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Carlos}})$$
$$b_{\text{Andrés}}(t^{\text{rojo}}_{\text{Andrés}}) = 0.6(\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Carlos}}) + 0.4(\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Carlos}})$$

$$b_{\text{Carlos}}(t^{\text{azul}}_{\text{Carlos}}) = (\text{azul}, t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}})$$
$$b_{\text{Carlos}}(t^{\text{verde}}_{\text{Carlos}}) = (\text{verde}, t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}})$$
$$b_{\text{Carlos}}(t^{\text{rojo}}_{\text{Carlos}}) = (\text{rojo}, t^{\text{rojo}}_{\text{Andrés}})$$

1.6 Ejercicios adicionales

Ejercicio 6. Ahora Andrés quiere ir a otra fiesta, pero esta vez con Diana. Andrés sigue teniendo las mismas utilidades que antes, y Diana tiene exactamente las mismas utilidades que Andrés. ¿Qué elecciones pueden realizar Andrés y Diana bajo creencia común en racionalidad?

Ejercicio 7. Supongamos que estudias piano, y en dos semanas tienes un examen importante, para el cual te pueden pedir que toques alguna de tres posibles piezas: una pieza fácil de Mozart, una pieza moderadamente difícil de Chopin y una pieza muy difícil de Rajmáninov. Durante el examen, el jurado seleccionará dos de esas piezas para que las interpretes, pero no sabes cuáles. Tras darte una calificación por cada una de las piezas que te pidan tocar, tu calificación será el promedio de lo que obtuviste en ambas.

Dado que solamente te quedan dos semanas, decides que cada semana te enfocarás en una de las piezas. De esta forma, podrías practicar dos de las piezas, una en cada semana, o bien, solamente una pieza durante las dos semanas. Supongamos que la calificación que obtienes por la pieza de Mozart al dedicarle x semanas es

$$4 + 3\sqrt{x}$$

minetras que la calificación que obtienes por la pieza de Chopin al dedicarle x semanas es

$$4 + 2.5x$$

y por último, la calificación que obtienes por la pieza de Rajmáninov al dedicarle x semanas es

$$4 + 1.5x^2$$

Tu utilidad es exactamente la calificación que obtienes.

Además, sabes que el jurado prefiere oír a Chopin que a Rajmáninov y Rajmáninov a Mozart, por lo que sus utilidades al escuchar esas piezas (las interpretes bien o mal) son 3, 2 y 1 respectivamente. Sin embargo, el jurado obviamente también obtiene una utilidad dependiendo de qué tan bien toques cada pieza, que es exactamente igual a la calificación que obtienes en tu examen.

1. Escribe en forma de tabla las posibles utilidades que obtendrías y que obtendría el jurado.

2. ¿Cuáles elecciones son racionales para ti? Para cada elección racional, encuentra una creencia para la que dicha elección sea óptima. Para cada elección irracional, encuentra una elección que la domine estrictamente.

3. ¿Cuáles elecciones son racionales para el jurado? Para cada elección racional, encuentra una creencia para la que dicha elección sea óptima. Para cada elección irracional, encuentra una elección que la domine estrictamente.

4. Construye la gráfica correspondiente que muestra las creencias que encontraste en el inciso anterior.

5. Utiliza el algoritmo de eliminación iterada de elecciones estrictamente dominadas para encontrar las elecciones que tanto tú como el jurado pueden realizar bajo creencia común en racionalidad.

6. Construye el modelo epistémico correspondiente para el cual existe un tipo para cada elección óptima, el cual exprese creencia común en racionalidad.

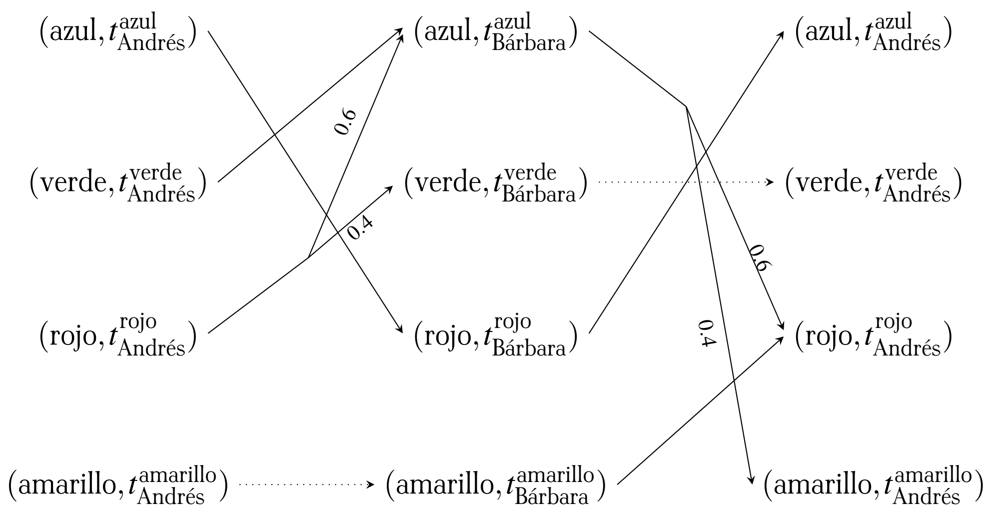
Capítulo 2

Jerarquías de creencias simples

Las soluciones que se obtienen mediante creencia común en racionalidad están relacionadas con las soluciones que se encuentran como equilibrios en la teoría de juegos clásica. De hecho, se puede observar que nosotros consideramos más soluciones como posibles, ya que las hipótesis que se piden para un equilibrio son más restrictivas.

2.1 Jerarquías de creencias

Como vimos anteriormente, las gráficas que obtenemos tienen mucha más información de la que se ve a primera vista. De hecho, nos dan lo que se conoce como la jerarquía de creencias, que nos dice la forma en la que los jugadores razonan acerca de los oponentes en cada nivel. Si regresamos a la gráfica del ejemplo 1.6



y nos fijamos en el tipo de Andrés $t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}$ podemos observar que

1. Andrés cree que Bárbara elegirá rojo.

2. Andrés cree que Bárbara cree que Andrés elegirá azul.

3. Andrés cree que Bárbara cree que Andrés cree que Bárbara elegirá rojo.

4. Andrés cree que Bárbara cree que Andrés cree que Bárbara cree que Andrés elegirá azul.

y así sucesivamente.

Por otra parte, si nos fijamos en el tipo $t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}$ tenemos que

1. Andrés cree que Bárbara elegirá azul.

2. Andrés cree que Bárbara cree que Andrés elegirá con probabilidad 0.6 rojo y con probabilidad 0.4 amarillo.

3. Andrés cree que Bárbara cree con probabilidad 0.6 que Andrés cree que Bárbara elegirá con probabilidad 0.6 azul y con probabilidad 0.4 verde, y con probabilidad 0.4 que Andrés cree que Bárbara elegirá amarillo.

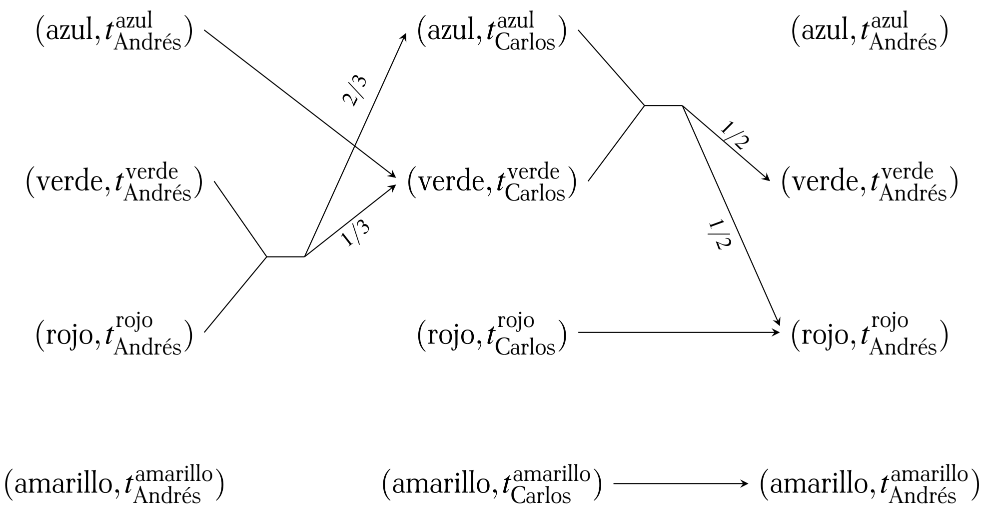
4. Andrés cree que Bárbara cree con probabilidad 0.6 que Andrés cree con probabilidad 0.6 que Bárbara cree que Andrés elegirá con probabilidad 0.6 rojo y con probabilidad 0.4 amarillo, y con probabilidad 0.4 que Bárbara cree que Andrés elegirá verde, y con probabilidad 0.4 que Andrés cree que Bárbara cree que Andrés elegirá rojo.

y así sucesivamente.

Lo que obtuvimos anteriormente son las jerarquías de creencias de los tipos $t^{\text{azul}}_{\text{Andrés}}$ y $t^{\text{verde}}_{\text{Andrés}}$, respectivamente. Sin embargo, hay una gran diferencia entre las dos jerarquías obtenidas. En el primer caso, podemos notar que sin importar a que nivel estemos, Andrés siempre cree que Bárbara elegirá rojo, y Bárbara siempre cree que Andrés elegirá azul. En el segundo caso, Andrés originalmente cree que Bárbara elegirá azul, pero dos niveles más adelante, Andrés cree que con probabilidad $(0.6)(0.6) = 0.36$ Bárbara elegirá azul, con probabilidad $(0.6)(0.4) = 0.24$ Bárbara elegirá verde y con probabilidad 0.4 elegirá amarillo. De igual forma, Bárbara no cree lo mismo acerca de Andrés en el segundo y el cuarto nivel.

Cuando se tienen las mismas creencias para todos los jugadores involucrados sin importar el nivel en el que nos encontremos, decimos que la jerarquía de creencias que se tiene es **simple**. En el primer caso la jerarquía sí es simple, mientras que en el segundo caso no lo es.

Regresando al ejemplo 1.17, y considerando ahora la siguiente gráfica



donde tenemos que los tipos $t_{\text{Andrés}}^{\text{verde}}$ y $t_{\text{Andrés}}^{\text{rojo}}$ de Andrés creen ambos que con probabilidad $2/3$ Carlos elegirá azul y con probabilidad $1/3$ elegirá verde; mientras que los tipos $t_{\text{Carlos}}^{\text{azul}}$ y $t_{\text{Carlos}}^{\text{verde}}$ creen ambos que con probabilidad $1/2$ Andrés elegirá verde y con probabilidad $1/2$ elegirá rojo.

La jerarquía que se obtiene para el tipo $t_{\text{Andrés}}^{\text{verde}}$ es

1. Andrés cree con probabilidad $2/3$ que Carlos elegirá azul y con probabilidad $1/3$ que Carlos elegirá verde.

2. Andrés cree con probabilidad $2/3$ que Carlos cree con probabilidad $1/2$ que Andrés elegirá verde y con probabilidad $1/2$ que Andrés elegirá rojo, y con probabilidad $1/3$ que Carlos cree con probabilidad $1/2$ que Andrés elegirá verde y con probabilidad $1/2$ que Andrés elegirá rojo.

3. Andrés cree con probabilidad $2/3$ que Carlos cree con probabilidad $1/2$ que Andrés cree con probabilidad $2/3$ que Carlos elegirá azul y con probabilidad $1/3$ que Carlos elegirá verde, y con probabilidad $1/2$ que Andrés cree con probabilidad $2/3$ que Carlos elegirá azul y con probabilidad $1/3$ que Carlos elegirá verde, y con probabilidad $1/3$ que Carlos cree con probabilidad $1/2$ que Andrés cree con probabilidad $2/3$ que Carlos elegirá azul y con probabilidad $1/3$ que Carlos elegirá verde, y con probabilidad $1/2$ que Andrés cree con probabilidad $2/3$ que Carlos elegirá azul y con probabilidad $1/3$ que Carlos elegirá verde.

y así sucesivamente. Como se puede ver, se complica mucho el seguir todos los caminos en el tercer nivel, y no intentaremos escribir el cuarto nivel de la jerarquía. Sin embargo, podemos ver que en el primer nivel Andrés cree que Carlos elige azul con probabilidad $2/3$ y verde con probabilidad $1/3$. Para el tercer nivel, Andrés cree que Carlos cree que Andrés cree que Carlos elegirá azul con probabilidad

$$(2/3)(1/2)(2/3)+(2/3)(1/2)(2/3)+(1/3)(1/2)(2/3)+(1/3)(1/2)(2/3)=2/3$$

y verde con probabilidad

$$(2/3)(1/2)(1/3)+(2/3)(1/2)(1/3)+(1/3)(1/2)(1/3)+(1/3)(1/2)(1/3)=1/3$$

Es decir, tanto el primer nivel como el tercero tienen la misma creencia. Algo similar se puede ver en el caso de Carlos para el segundo y cuarto nivel. Por lo tanto, la jerarquía obtenida para $t_{\text{Andrés}}^{\text{verde}}$ es simple.

Ejercicio 8. Muestra que el segundo y cuarto nivel de Carlos son generados por la misma creencia.

Ejemplo 2.1. Supongamos que hoy viernes Eduardo está en su clase de Biología, y su profesor le dice que realizará un examen sorpresa algún día de la próxima semana. Eduardo sabe que necesita estudiar al menos dos días para poder pasar el examen, y que, una vez que empiece a estudiar, no dejará de hacerlo hasta que ocurra el examen, si no se le olvidará lo que ya estudió. Por ello, debe decidir cuál día empezará a estudiar.

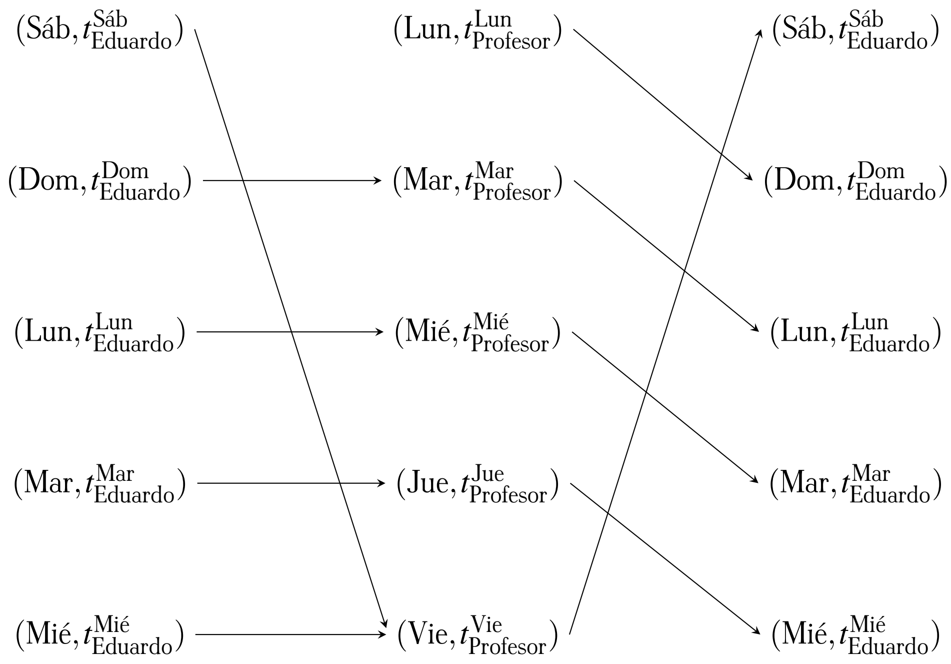
Supongamos que la función de utilidad de Eduardo se incrementa en 5 unidades si pasa el examen, mientras que cada día adicional que estudia decrece su utilidad en 1 unidad. Además, si estudia 6 días o más en total, recibe 4 unidades adicionales de utilidad ya que obtendría un examen perfecto. Por otra parte el profesor recibe 5 unidades de utilidad si Eduardo reprueba el examen y por cada día adicional que estudia Eduardo, recibe 1 unidad adicional.

Las utilidades para cada uno de los individuos son

u_{Eduardo}	**Lun**	**Mar**	**Mié**	**Jue**	**Vie**
Sáb	3	2	1	0	3
Dom	-1	3	2	1	0
Lun	0	-1	3	2	1
Mar	0	0	-1	3	2
Mié	0	0	0	-1	3

u_{Profesor}	**Sáb**	**Dom**	**Lun**	**Mar**	**Mié**
Lun	2	6	5	5	5
Mar	3	2	6	5	5
Mié	4	3	2	6	5
Jue	5	4	3	2	6
Vie	6	5	4	3	2

A partir de esto, podemos generar el siguiente diagrama



En este caso, podemos observar que la jerarquía correspondiente a los tipos $t_{\text{Eduardo}}^{\text{Sáb}}$ y $t_{\text{Profesor}}^{\text{Vie}}$ es simple.

En el caso de este último ejemplo, podemos ver que no es posible eliminar ninguna de las elecciones mediante creencia común en racionalidad, por lo que todas las elecciones se pueden realizar tanto para Eduardo como para el profesor bajo este concepto de razonamiento.

2.2 Jerarquías de creencias simples y equilibrios

Como ya hemos dicho anteriormente, solamente aquellas elecciones cuyos tipos asociados tengan una jerarquía de creencias simples son aquellas que forman equilibrios en la teoría de juegos clásica. Por ello, para poder asegurar que los tipos anteriormente mencionados son los únicos a los que les corresponde una jerarquía de creencias simples, suponiendo que cada tipo solamente cree en una elección del otro jugador, utilizaremos algunas herramientas de la teoría clásica.

Definición 2.2. Dado un juego, decimos que una elección $c_i \in C_i$ está **débilmente dominada** por otra elección $c_i' \in C_i$ si

$$u_i(c_i', c_{-i}) \geq u_i(c_i, c_{-i})$$

para toda $c_{-i} \in C_{-i}$ y al menos existe un c_{-i} tal que la desigualdad es estricta.

Teorema 2.3 (Algoritmo de eliminación de elecciones débilmente dominadas).

1. *Dado el juego original, para cada jugador se eliminan las elecciones débilmente dominadas, con lo cual tenemos un juego reducido.*

2. *Dado el juego reducido del paso anterior, para cada jugador se eliminan las elecciones débilmente dominadas, con lo cual obtenemos un nuevo juego reducido.*

3. *Dado el juego reducido del paso anterior, para cada jugador se eliminan las elecciones débilmente dominadas, con lo cual obtenemos un nuevo juego reducido.*

El proceso continúa hasta que ya no se pueden eliminar elecciones. Aquellas elecciones que sobreviven son algunas de las que forman equilibrios.

Notemos dos cosas: primero, el algoritmo descrito anteriormente es muy dependiente de la forma en la que se eliminan las elecciones, por lo que puede llevar a diferentes juegos reducidos finales. Cada uno de estos juegos finales puede mostrar diferentes equilibrios, lo cual está bien. Segundo, como se menciona, no todos los equilibrios aparecen mediante este algoritmo, por lo que hay que tener cuidado de revisar si es que algunos otros equilibrios se omitieron si la meta es encontrar todos los equilibrios.

En el caso de nuestro ejemplo, tenemos que Miércoles está débilmente dominada por Sábado para Eduardo, por lo que la podemos eliminar en ambas tablas. Así, el primer juego reducido es

u_{Eduardo}	**Lun**	**Mar**	**Mié**	**Jue**	**Vie**
Sáb	3	2	1	0	3
Dom	-1	3	2	1	0
Lun	0	-1	3	2	1
Mar	0	0	-1	3	2

u_{Profesor}	**Sáb**	**Dom**	**Lun**	**Mar**
Lun	2	6	5	5
Mar	3	2	6	5
Mié	4	3	2	6
Jue	5	4	3	2
Vie	6	5	4	3

En este juego reducido podemos observar que Jueves está estrictamente dominada por Viernes para el profesor, por lo que la eliminamos en ambas tablas. El segundo juego reducido es

u_{Eduardo}	**Lun**	**Mar**	**Mié**	**Vie**
Sáb	3	2	1	3
Dom	−1	3	2	0
Lun	0	−1	3	1
Mar	0	0	−1	2

u_{Profesor}	**Sáb**	**Dom**	**Lun**	**Mar**
Lun	2	6	5	5
Mar	3	2	6	5
Mié	4	3	2	6
Vie	6	5	4	3

En este juego reducido podemos ver que Martes está estrictamente dominada por Sábado para Eduardo, por lo que el tercer juego reducido es

u_{Eduardo}	**Lun**	**Mar**	**Mié**	**Vie**
Sáb	3	2	1	3
Dom	−1	3	2	0
Lun	0	−1	3	1

u_{Profesor}	**Sáb**	**Dom**	**Lun**
Lun	2	6	5
Mar	3	2	6
Mié	4	3	2
Vie	6	5	4

Ahora tenemos que Miércoles está estrictamente dominada por Viernes para el profesor, por lo que el cuarto juego reducido es

u_{Eduardo}	**Lun**	**Mar**	**Vie**
Sáb	3	2	3
Dom	−1	3	0
Lun	0	−1	1

u_{Profesor}	**Sáb**	**Dom**	**Lun**
Lun	2	6	5
Mar	3	2	6
Vie	6	5	4

Luego tenemos que Lunes está estrictamente dominada por Sábado para Eduardo, por lo que el quinto juego reducido es

u_{Eduardo}	**Lun**	**Mar**	**Vie**
Sáb	3	2	3
Dom	−1	3	0

u_{Profesor}	**Sáb**	**Dom**
Lun	2	6
Mar	3	2
Vie	6	5

Dado este juego reducido, observamos que Martes está estrictamente dominada por Viernes para el profesor, por lo que el sexto juego reducido es

u_{Eduardo}	**Lun**	**Vie**
Sáb	3	3
Dom	-1	0

u_{Profesor}	**Sáb**	**Dom**
Lun	2	6
Vie	6	5

Ya casi terminamos, puesto que en este juego reducido, observamos que Domingo está estrictamente dominada por Sábado para Eduardo, por lo que el séptimo juego reducido es

u_{Eduardo}	**Lun**	**Vie**
Sáb	3	3

u_{Profesor}	**Sáb**
Lun	2
Vie	6

Por último, en este juego reducido observamos que Lunes está estrictamente dominada por Viernes para el profesor, por lo que el octavo y último juego reducido es

u_{Eduardo}	**Vie**
Sáb	3

u_{Profesor}	**Sáb**
Vie	6

Por lo tanto, uno de los posibles equilibrios para este juego ocurre cuando Eduardo elige empezar a estudiar el sábado y el profesor decide aplicar el examen el viernes, que coincide con los tipos que tenían jerarquía de creencia simple.

Hemos de observar que ese no es el único equilibrio del juego, pero para encontrar los otros equilibrios necesitamos dos resultados de la teoría clásica.

Teorema 2.4. *Dado un juego, si un equilibrio está formado por elecciones aleatorizadas $(r_1^*, \ldots, r_N^*)$, entonces para todo jugador i se cumple que*

$$U_i(r_i^*, r_{-i}^*) = U_i(c_i, r_{-i}^*)$$

para toda $c_i \in C_i$ tal que en la elección aleatorizada r_i^* se elige c_i con probabilidad positiva.

Corolario 2.5. *Dado un juego, si un equilibrio está formado por elecciones aleatorizadas $(r_1^*, \ldots, r_N^*)$, entonces para todo jugador i se cumple que*

$$U_i(c_i, r_{-i}^*) = U_i(c_i', r_{-i}^*)$$

donde tanto c_i como c_i' son elecciones que se eligen con probabilidad positiva en la elección aleatorizada r_i^*.

En otras palabras, dado un equilibrio formado por elecciones aleatorizadas, cada jugador es indiferente a reemplazar su elección aleatorizada por cualquiera de las elecciones que aparece con probabilidad positiva dentro de la misma. Nótese que no estamos diciendo que esta nueva elección forma parte de un equilibrio, solamente que da la misma utilidad que el equilibrio.

A partir del resultado anterior podemos encontrar los otros equilibrios, observando que para Eduardo, las únicas elecciones que tiene sentido considerar con probabilidad positiva son Sábado y Miércoles, ya que en caso de que el profesor elija Viernes, sería indiferente entre ambas, y le dan mayor utilidad que las otras elecciones posibles.

Por una parte, veamos que para cualquier otra aleatorización que pudiera elegir Eduardo, él no sería indiferente sin importar lo que elija el profesor.

Por otra parte, para que esta aleatorización tenga oportunidad de ser equilibrio del juego, necesitamos que el profesor elija Viernes. Supongamos que Eduardo asigna probabilidad p a elegir Sábado y probabilidad $1-p$ a elegir Miércoles. Entonces dado esto, el profesor obtendría las siguientes utilidades esperadas para cada una de sus posibles elecciones:

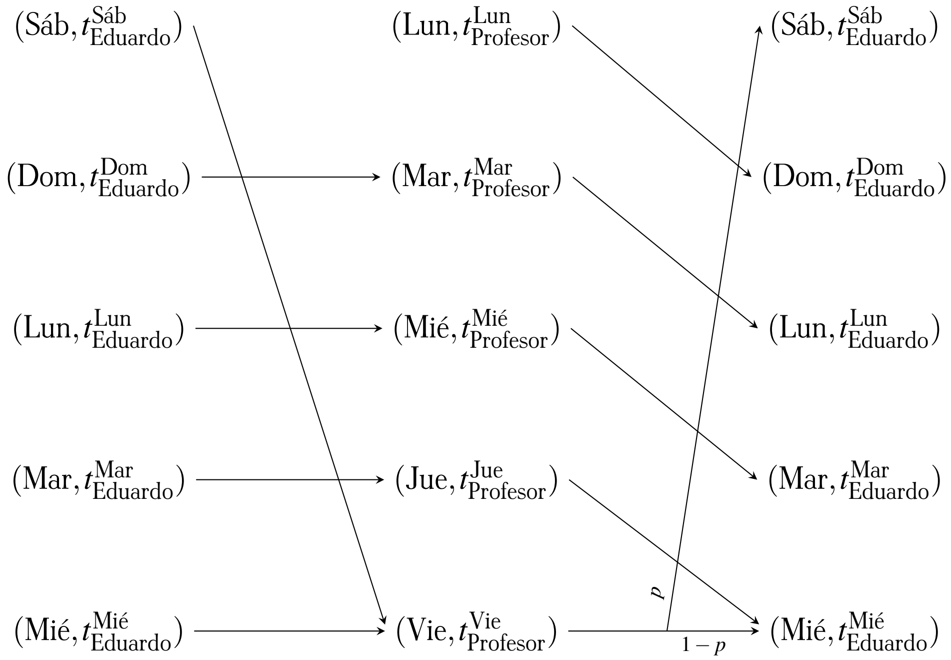
$$\begin{gathered}2p+5(1-p)\\3p+5(1-p)\\4p+5(1-p)\\5p+6(1-p)\\6p+2(1-p)\end{gathered}$$

donde la última corresponde a que el profesor elija Viernes, y esta debe ser mayor que las demás, por lo que se deben cumplir las desigualdades

$$\begin{aligned}6p+2(1-p)&\geq 2p+5(1-p)\\6p+2(1-p)&\geq 3p+5(1-p)\\6p+2(1-p)&\geq 4p+5(1-p)\\6p+2(1-p)&\geq 5p+6(1-p)\end{aligned}$$

las cuales se cumplen si $p\geq\frac{4}{5}$. De esta forma, todos los equilibrios ocurren cuando Eduardo aleatoriza entre Sábado y Miércoles con probabilidad p y $1-p$ donde $\frac{4}{5}\leq p\leq 1$ y el profesor elige Viernes.

Para cada uno de estos equilibrios, la gráfica que se utilizaría es



2.3 Ejercicios adicionales

Ejercicio 9. Fernando y Gabriela irán a una fiesta, a la cual no saben si asistir o no, y en caso de asistir, no saben qué color de vestimenta utilizar. Supongamos que tanto Fernando como Gabriela solamente pueden elegir entre blanco y negro, y que Fernando detesta ir del mismo color que Gabriela, pero Gabriela prefiere sobre todo ir del mismo color que Fernando. Además, tanto Fernando como Gabriela solamente se divertirán en la fiesta si ambos están ahí.

Por lo tanto, las utilidades de Fernando son: quedarse en casa le da una utilidad de 2 unidades; si va a la fiesta y Gabriela llega utilizando un color diferente, obtiene 3 unidades de utilidad; y en cualquier otro caso su utilidad es 0.

Las utilidades de Gabriela son similares: quedarse en casa le da una utilidad de 2 unidades; si va a la fiesta y Fernando llega utilizando el mismo color que ella, obtiene 3 unidades de utilidad; y en cualquier otro caso su utilidad es 0.

1. Modela la situación, escribiendo las utilidades para Fernando y Gabriela en forma de tabla.

2. Encuentra las elecciones que pueden realizar Fernando y Gabriela bajo creencia común en racionalidad y dibuja la gráfica correspondiente.

3. ¿Cuáles de los tipos que se encuentran en tu gráfica tienen una jerarquía de creencias simple? ¿Cuáles son los equilibrios de este juego?

Ejercicio 10. Supongamos que habrá una reunión de la preparatoria a la cual asistirán 30 exalumnos. Para no tener que nombrarlos a todos, los enumeramos del 1 al 30. Cada uno de los estudiantes i tenía una persona favorita que es $i+1$ y una persona odiada que es $i-1$, y suponemos que esto es cíclico, por lo que la persona favorita de 30 es 1, y la persona odiada de 1 es 30.

Para cada alumno, la utilidad que obtiene aumenta en 3 unidades si asiste su persona favorita y decrece en 3 unidades si asiste su persona odiada. La asistencia de los otros alumnos no le afecta.

Cada alumno puede decidir entre asistir a la fiesta o quedarse en casa. Si algún alumno se queda en casa, su utilidad obtenida es de 2 unidades.

1. Explica por qué asistir o quedarse en casa se pueden elegir bajo creencia común en racionalidad para todos los alumnos.

2. ¿Qué pasaría si alguno de los alumnos no tuviera una persona favorita?

3. Supongamos que tienes el siguiente modelo epistémico

$$T_i = \{t_i^{\text{Asistir}}, t_i^{\text{Quedarse}}\}$$

$$\begin{aligned} b_i(t_i^{\text{Asistir}}) &= ((\text{Asistir}, t_{i+1}^{\text{Asistir}}), (\text{Quedarse}, t_{i+2}^{\text{Quedarse}}), \ldots, (\text{Quedarse}, t_{i+29}^{\text{Quedarse}})) \\ b_i(t_i^{\text{Quedarse}}) &= ((\text{Quedarse}, t_{i+1}^{\text{Quedarse}}), \ldots, (\text{Quedarse}, t_{i+29}^{\text{Quedarse}})) \end{aligned}$$

¿Cuáles tipos de este modelo tienen una jerarquía de creencia simples? ¿Cuáles son los equilibrios de este juego?

Bibliografía

[1] J. Bertrand (1883). “Théorie mathématique de la richesse sociale”. *Journal des Savants*, **67**, 499–508.

[2] É. Borel (1921). “La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique”. *Comptes Rendus Hebdomadaire des Séances de l’Academie des Sciences*, **173**, 1304–1308. (Traducido al inglés: L. J. Savage (1953). “The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels”. *Econometrica*, **21**, 97–100).

[3] É. Borel (1924). *Eléments de la Théorie des Probabilités*, Hermann, 204–221. (Traducido al inglés: L. J. Savage (1953). “On games that involve chance and the skill of players”, *Econometrica*, **21**, 101–115).

[4] É. Borel (1927). “Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche er la théorie générale du jeu. *Comptes Rendus Hebdomadaire des Séances de l’Academie des Sciences*, **184**, 52–54. (Traducido al inglés: L. J. Savage (1953). “On systems of linear forms of skew symmetric determinant and the general theory of play”. *Econometrica*, **21**, 116–117).

[5] A. A. Cournot (1838). *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, Hachette. (Traducido al inglés: (1897). *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, Macmillan).

[6] J. F. Nash (1950). “Equilibrium points in N-person games”. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **36**, 48–49.

[7] J. von Neumann (1928). “Zur Theorie der Gesellschaftsspiele”. *Mathematische Annalen*, **100**, 295–320. (Traducido al inglés: S. Bargmann (1959). “On the theory of games of strategy”. *Contributions to the Theory of Games, Vol. IV*, editado por A. W. Tucker y R. D. Luce, Princeton University Press, 13–43).

[8] J. von Neumann, O. Morgenstern (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.

[9] D. Pearce (1984). “Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection”. *Econometrica*, **52**, 1029–1050.

[10] A. Perea (2012). *Epistemic Game Theory: Reasoning and Choice*. Cambridge University Press.

[11] A. Perea, *From Decision Theory to Game Theory: Reasoning about Decisions of Others*. Cambridge University Press. Pre-print disponible en
`https://www.epicenter.name/Perea/book-epistemic-game-theory-ii.html`

[12] S. Tadelis (2013). *Game Theory: An Introduction*. Princeton University Press.

[13] T. Tan y S. R. C. Werlang (1988). "The Bayesian foundations of solution concepts of games", *Journal of Economic Theory*, **45**, 370–391.

[14] E. Zermelo (1913). "Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels", *Proceedings Fifth International Congress of Mathematicians*, **2**, 501–504.