



UNA NOTA SOBRE ÁRBOLES BIPLANARES

ELSA PATRICIA OMAÑA PULIDO Y EDUARDO RIVERA CAMPO

RESUMEN. Estudiamos una variante de la gráfica de árboles biplanares definida por Figueroa y Fresán-Figueroa [Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 26 (2020)] y damos demostraciones elementales de que la gráfica de árboles biplanares es conexa y de que el diámetro y el radio de ésta es $2n - 5$ y $n - 2$, respectivamente, en donde $n \geq 3$ es el número de vértices.

1. INTRODUCCIÓN

Dado un conjunto de puntos P en el plano, una *gráfica topológica* G con conjunto de vértices P es una gráfica simple dibujada en el plano en la que las aristas son curvas simples con extremos en P . En una gráfica topológica cualquier par de aristas se intersectan en a lo más un punto que es un vértice en común, o un punto en el que las dos aristas se cruzan. Dos gráficas topológicas G y H son *debilmente isomorfas* si G y H son isomorfas como gráficas abstractas, y son tales que dos aristas uv y xy se cruzan en G si y sólo si las aristas correspondientes se cruzan en H .

Una gráfica topológica H es subgráfica topológica (o simplemente subgráfica) de una gráfica topológica G si H se obtiene del dibujo de G borrando las aristas y los vértices de G que no pertenecen a H . Un *árbol generador* de una gráfica G es una subgráfica H de G conexa, sin ciclos y que contiene a todos los vértices de G .

Una *gráfica geométrica* es una gráfica topológica G en la que sus aristas son segmentos de recta. Una gráfica geométrica es *gráfica convexa* si su conjunto de vértices P es el conjunto de vértices de un polígono convexo.

Claramente todas las gráficas convexas completas con el mismo número de vértices son debilmente isomorfas entre si. Esto nos permite pensar en cualquier gráfica convexa completa con n vértices como la gráfica G_n cuyos n vértices v_1, v_2, \dots, v_n son los vértices de un polígono regular y que están ordenados cíclicamente como en la figura 1.

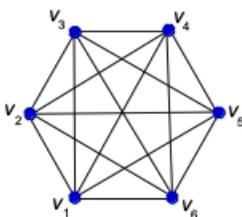


FIGURA 1. G_6

La gráfica G_n tiene el máximo número posible de cruces $\binom{n}{2}$, entre todas las gráficas topológicas con n vértices. Otra familia de gráficas topológicas con esa propiedad (ahora llamadas *gráficas torcidas*) fue descubierta por Harborth y Mengersen [2]. Una gráfica topológica completa G con $n \geq 3$ vértices v_1, v_2, \dots, v_n es *gráfica torcida* si

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C05.

Palabras clave. Árbol Biplanar, Gráfica Topológica, Gráfica Convexa, Gráfica Torcida.

dos aristas $v_i v_j$ y $v_s v_t$ (con $i < j$ y $s < t$) se cruzan si y sólo si $i < s < t < j$ o $s < i < j < t$.

Denotamos por T_n a la gráfica torcida con vértices v_1, v_2, \dots, v_n sobre una recta horizontal en la que las aristas están dibujadas como en la figura 2.

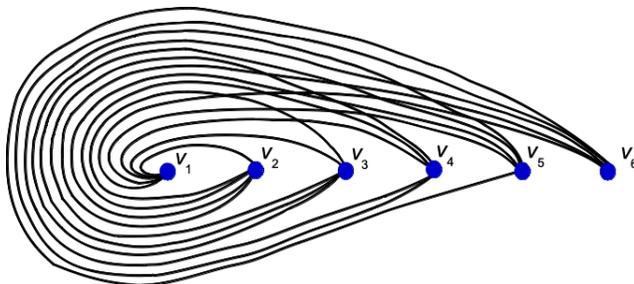


FIGURA 2. La gráfica torcida T_6 .

También es claro que toda gráfica torcida con $n \geq 3$ vértices es debilmente isomorfa a la gráfica T_n .

El estudio de las gráficas torcidas y su relación con las gráficas convexas surgió con el siguiente resultado de Pach *et al.* [3].

TEOREMA 1. *Existe una constante c tal que toda gráfica topológica completa con n vértices contiene una subgráfica con $m = \log^{1/8} n$ vértices que es debilmente isomorfa a C_m o a T_m .*

Sea $n \geq 3$ un entero. De acuerdo a Figueroa y Fresán-Figueroa [1], un árbol abstracto R con n vértices v_1, v_2, \dots, v_n es *árbol biplanar* si los correspondientes árboles generadores R' y R'' de G_n y T_n , respectivamente, son árboles planos. Ver figura 3.

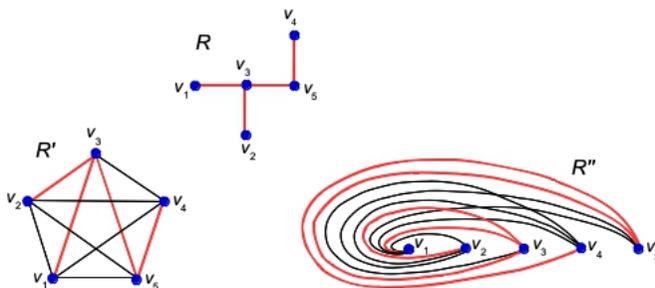


FIGURA 3. Árbol biplanar R .

Para cada entero $n \geq 3$ sea F_n la gráfica topológica con vértices v_1, v_2, \dots, v_n sobre una línea horizontal en la que las aristas están dibujadas como en la figura 4.

Decimos que dos aristas $e = v_i v_j$ y $f = v_s v_t$ de F_n están anidadas si $i < s < t < j$ o $s < i < j < t$, ver figura 5 (derecha). Notemos que dos aristas $e = v_i v_j$ y $f = v_s v_t$ de F_n se cruzan si $i < s < j < t$ o $s < i < t < j$.

Sea G una subgráfica de G_n . La subgráfica correspondiente G' de F_n es tal que dos aristas $v_i v_j$ y $v_s v_t$ se cruzan en G si y sólo si las correspondientes aristas se cruzan en G' . Asimismo si H es subgráfica de T_n , entonces la subgráfica correspondiente H' de

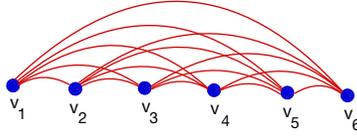


FIGURA 4. F_6 .

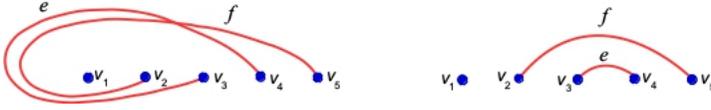


FIGURA 5. e y f se cruzan en H (izquierda) y están anidadas en H' (derecha).

F_n es tal que dos aristas $v_i v_j$ y $v_s v_t$ se cruzan en H si y sólo si las correspondientes aristas están anidadas en H' . Ver figura 5.

De esta forma los árboles biplanares corresponden a los árboles generadores de F_n que no tienen pares de aristas que se cruzan y no tienen pares de aristas anidadas. Figueroa y Fresán-Figueroa [1] dieron una caracterización geométrica de los árboles biplanares con $n \geq 3$ vértices. Ver sección 2.

En el mismo trabajo Figueroa y Fresán-Figueroa definieron la *gráfica de árboles biplanares* \mathcal{B}_n como la gráfica abstracta en la que los vértices son los árboles biplanares con n vértices y en la que dos árboles R y S son adyacentes si existen aristas r de R y s de S tales que $S = (R - r) + s$, ver figura 6.

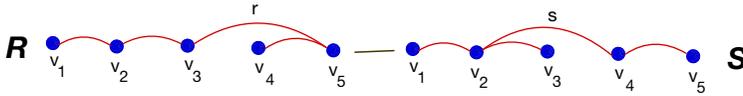


FIGURA 6. R y S son adyacentes en \mathcal{B}_5 .

Figueroa y Fresán-Figueroa demostraron que \mathcal{B}_n siempre es conexa, que tiene radio igual a $n - 2$ y diámetro igual a $2n - 5$.

En su definición de adyacencia en \mathcal{B}_n , Figueroa y Fresán-Figueroa permiten que las dos aristas r y s que se intercambian para obtener S de R se crucen o estén anidadas en F_n . Por ejemplo: las aristas r y s de la figura 6 se cruzan en F_5 . En este trabajo consideramos la subgráfica $\overline{\mathcal{B}}_n$ de \mathcal{B}_n en la que dos árboles R y S son adyacentes si S se obtiene de R sustituyendo una arista r de R por una arista s de S , en donde las aristas r y s no se cruzan ni están anidadas en F_n . El propósito de este trabajo es dar demostraciones elementales de que $\overline{\mathcal{B}}_n$ es conexa y de que el radio y el diámetro de $\overline{\mathcal{B}}_n$ también son iguales $n - 2$ y a $2n - 5$, respectivamente.

2. CONEXIDAD DE $\overline{\mathcal{B}}_n$ Y COTAS SUPERIORES PARA RADIO Y DIÁMETRO DE $\overline{\mathcal{B}}_n$

La siguiente caracterización de los árboles biplanares fue dada por Figueroa y Fresán-Figueroa [1]. Nosotros basamos nuestras demostraciones en esa caracterización.

Sea R un árbol biplanar con $n \geq 3$ vértices v_1, v_2, \dots, v_n . Como R es un árbol, existe una única trayectoria $v_1 = w_0, w_1, \dots, w_l = v_n$ (llamada *cuerpo de R*) que une v_1 con v_n en R .

Ya que el árbol R no tiene pares de aristas anidadas en F_n , entonces para $t = 0, 1, \dots, l - 1$, R no tiene aristas $v_i v_j$ con v_i y v_j entre w_t y w_{t+1} .

Por otro lado R no tiene pares de aristas que se cruzan en G_n por lo que para $t = 0, 1, \dots, l - 1$, todo vértice v_i , entre w_t y w_{t+1} unicamente es adyacente en R a w_t o a w_{t+1} .

Por lo anterior para $t = 1, 2, \dots, l$, existen enteros no negativos a_t y b_t tales que los vértices $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+a_t}$ son adyacentes a w_t en R y los vértices $v_{s-b_t}, v_{s-(b_t-1)}, \dots, v_{s-1}$ son adyacentes a w_{t+1} en R , en donde $w_t = v_r$ y $w_{t+1} = v_s$. Ver figura 7

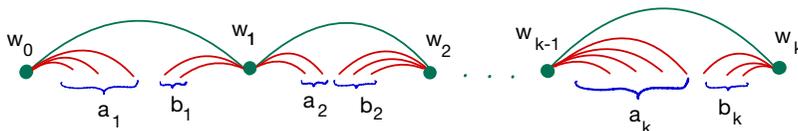


FIGURA 7. Árbol biplanar

Para $n \geq 3$ sea P_n el árbol biplanar con aristas $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$. Ver figura 8.

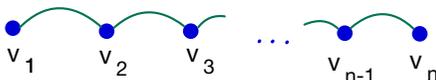


FIGURA 8. P_n .

Para cualquier par de árboles biplanares R y S denotamos por $d(R, S)$ la distancia de R a S en $\overline{\mathcal{B}}_n$.

Sea R un árbol biplanar con $n \geq 3$ vértices. Denotamos por $k(R)$ al número de vértices en el cuerpo de R y por $m(R)$ al entero no negativo $n - k(R)$.

LEMA 2. Para todo árbol biplanar R con $n \geq 3$ vértices, $d(R, P_n) \leq m(R)$.

Demostración. Si $m(R) = 0$, entonces $k(r) = n$ lo cual implica $R = P_n$. Continuamos la demostración por inducción matemática en $m(R)$ suponiendo que para cierto entero $l \geq 0$ se cumple $d(Q, P_n) \leq m(Q)$ si Q es árbol biplanar con n vértices tal que $m(Q) = l$.

Sea R un árbol biplanar con n vértices tal que $m(R) = l + 1$. Sea $v_1 = w_0, w_1, \dots, w_{k(R)-1} = v_n$ el cuerpo de R . Como $k(R) = n - m(R) < n$ podemos escoger t tal que el número de vértices $a_t + b_t$, entre w_t y w_{t+1} , es mayor que cero. Sin perder generalidad suponemos $a_t > 0$.

Sea $Q = (R - w_t w_{t+1}) + v_{r+a_t} w_{t+1}$, en donde $w_t = v_r$. Ver figura 9 para el caso $b_t = 0$ y figura 10 para el caso $b_t > 0$.

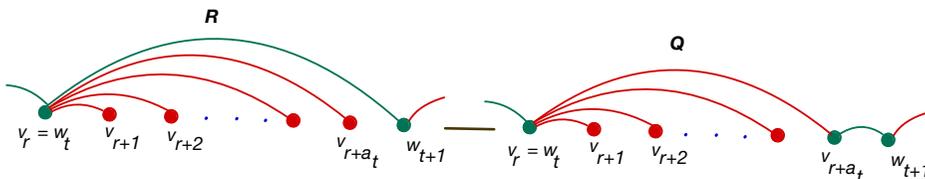


FIGURA 9. Caso $b_t = 0$

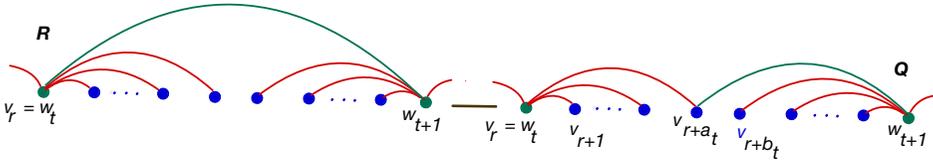


FIGURA 10. Caso $b_t > 0$.

En ambos casos Q es un árbol biplanar pues satisface las condiciones en la caracterización de éstos. Notemos que Q tiene n vértices y es tal que $m(Q) = m(R) - 1 = l$ pues las aristas $w_t v_{r+a_t}$ y $v_{r+a_t} w_{t+1}$ están en el cuerpo de Q . Por la hipótesis de inducción $d(Q, P_n) \leq m(Q)$.

Las aristas intercambiadas $w_t w_{t+1}$ y $v_{r+a_t} w_{t+1}$ tienen un vértice en común por lo que ni se cruzan ni están anidadas en F_n . Por lo tanto R y Q son adyacentes en $\overline{\mathcal{B}}_n$. Entonces:

$$\begin{aligned} d(R, P_n) &\leq d(R, Q) + d(Q, P_n) \\ &\leq 1 + m(Q) \\ &= m(R) \end{aligned}$$

□

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 3. *Para todo entero $n \geq 3$, la gráfica $\overline{\mathcal{B}}_n$ es conexa y tiene radio $Rad(\overline{\mathcal{B}}_n)$ a lo más $n - 2$.*

Demostración. Por el lema 2, para todo árbol biplanar R con n vértices, existe una trayectoria en $\overline{\mathcal{B}}_n$ que une R con P_n . Esto implica que $\overline{\mathcal{B}}_n$ es conexa. Sea R un árbol biplanar con $n \geq 3$ vértices. Como $k(R) \geq 2$, necesariamente $m(r) \leq n - 2$. Por el lema 2, $d(R, P_n) \leq n - 2$ por lo que $Rad(\overline{\mathcal{B}}_n) \leq n - 2$. □

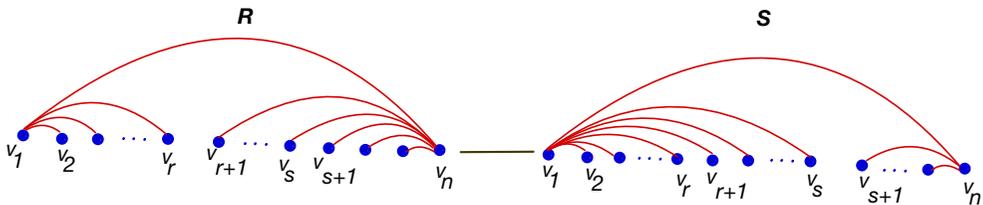
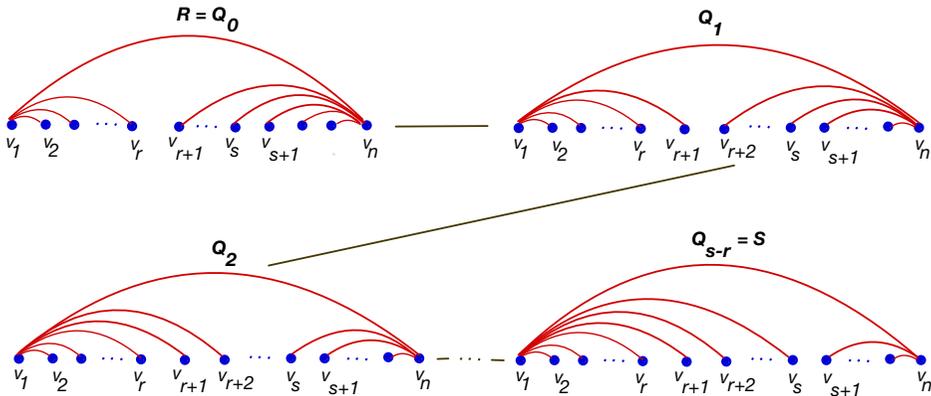
Sean R y S árboles bipanares con vértices $v_1, v_2, \dots, v_n, n \geq 3$. Entonces

$$\begin{aligned} d(R, S) &\leq d(R, P_n) + d(P_n, S) \\ &\leq m(R) + m(S) \\ &\leq (n - 2) + (n - 2) \\ &= 2n - 4 \end{aligned}$$

Supongamos $d(R, S) = 2n - 4$. Por lo anterior $m(R) = n - 2$ y $m(S) = n - 2$, de donde $k(R) = 2$ y $k(S) = 2$; esto implica que el cuerpo de R y de S consta de la arista $v_1 v_n$. Entonces existen enteros $1 \leq r \leq n$ y $1 \leq s \leq n$ tales que R contiene a las aristas $v_1 v_i$ con $i = 2, 3, \dots, r$ y a las aristas $v_j v_n$ con $j = r + 1, r + 2, \dots, n - 1$ y S contiene a las aristas $v_1 v_i$ con $i = 2, 3, \dots, s$ y a las aristas $v_j v_n$ con $j = s + 1, s + 2, \dots, n - 1$. Sin perder generalidad suponemos $r < s$. Ver figura 11.

Una pareja a la vez, intercambiamos primero la arista $v_{r+1} v_n$ y la arista $v_1 v_{r+1}$; posteriormente, si $s > r + 1$, intercambiamos la arista $v_{r+2} v_n$ y la arista $v_1 v_{r+2}$ y así sucesivamente hasta intercambiar la arista $v_s v_n$ y la arista $v_1 v_s$. Aquí también cada par de aristas intercambiadas tienen un vértice en común lo cual implica que no se cruzan ni están anidadas.

De esta manera obtenemos una sucesión de árboles bipanares $R = Q_0, Q_1, \dots, Q_{s-r} = S$ tal que Q_{i+1} es adyacente a Q_i en $\overline{\mathcal{B}}_n$ para $i = 0, 1, \dots, s - r - 1$. Ver figura 12.

FIGURA 11. Árboles R y S con $k(R) = k(S) = 2$.FIGURA 12. $R = Q_0, Q_1, \dots, Q_{s-r} = S$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d(R, S) &= d(Q_0, Q_{s-r}) \\ &\leq s - r \\ &\leq n - 2 \end{aligned}$$

lo cual contradice $d(R, S) = 2n - 4$ pues $n \geq 3$. Por lo tanto $d(R, S) \leq 2n - 5$.

Con el argumento anterior hemos probado el siguiente teorema:

TEOREMA 4. *Para todo entero $n \geq 3$, el diámetro $\text{Diam}(\overline{\mathcal{B}_n})$ de $\overline{\mathcal{B}_n}$ es a lo más $2n - 5$.*

3. COTAS INFERIORES PARA $\text{Rad}(\overline{\mathcal{B}_n})$ Y $\text{Diam}(\overline{\mathcal{B}_n})$

Sean S_n^1 y S_n^2 las estrellas con n vértices con centro en v_1 y v_2 , respectivamente.

Como P_n y S_n^1 solamente tienen en común a la arista v_1v_2 , necesariamente $d(S_n^1, P_n) \geq n - 2$. Por lo tanto $\text{Rad}(\overline{\mathcal{B}_n}) \geq n - 2$.

Sea $S_n^1 = R_0, R_1, R_2, \dots, R_d = S_n^2$ una trayectoria de longitud $d = d(S_n^1, S_n^2)$ que une S_n^1 con S_n^2 en $\overline{\mathcal{B}_n}$ y sea t el menor subíndice tal que R_t contiene una arista de la forma v_2v_j con $j \geq 3$.

Notemos que:

1. La arista v_2v_j de R_t forma un ciclo en F_n con las aristas v_1v_2 y v_1v_j de S_n^1 . Ver figura 13.

Como R_t no tiene ciclos, al menos una de las aristas v_1v_2 o v_1v_j de S_n^1 no es arista de R_t .

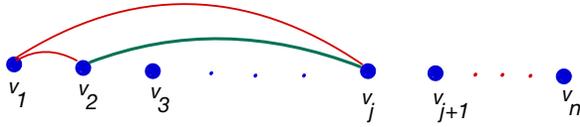


FIGURA 13. Las aristas v_2v_j, v_1v_2 y v_1v_j forman un ciclo.

2. Si $j > 3$, entonces la arista v_2v_j de R_t cruza en F_n a las aristas $v_1v_3, v_1v_4, \dots, v_1v_{j-1}$ de S_n^1 . Ver figura 14.

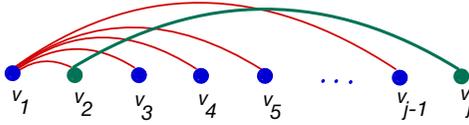


FIGURA 14. La arista v_2v_j cruza a las aristas $v_1v_3, v_1v_4, \dots, v_1v_{j-1}$.

Como R_t no tiene aristas que se cruzan en F_n , necesariamente las $j - 3$ aristas $v_1v_3, v_1v_4, \dots, v_1v_{j-1}$ de S_n^1 no son aristas de R_t .

3. Si $j < n$, entonces la arista v_2v_j de R_t está anidada con las aristas $v_1v_{j+1}, v_1v_{j+2}, \dots, v_1v_n$ de S_n^1 . Ver figura 15.

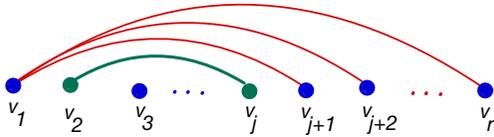


FIGURA 15. La arista v_2v_j está anidada con cada una de las aristas $v_1v_{j+1}, v_1v_{j+2}, \dots, v_1v_n$.

Como R_t no tiene aristas anidadas, necesariamente las $n - j$ aristas $v_1v_{j+1}, v_1v_{j+2}, \dots, v_1v_n$ de S_n^1 no son aristas de R_t .

Por 1, 2 y 3, el árbol R_t no tiene al menos $1 + (j - 3) + (n - j) = n - 2$ aristas de S_n^1 ; esto implica $t \geq n - 2$.

Finalmente, por la elección de t , el árbol R_t tiene a lo más dos aristas (v_2v_1 y $e = v_2v_j$) de S_n^2 por lo que se requieren al menos $n - 3$ intercambios de aristas para obtener el árbol S_n^2 a partir del árbol R_t . Entonces $d - t \geq n - 3$, lo cual implica $d(S_n^1, S_n^2) = d \geq t + (n - 3) \geq 2n - 5$. Por lo tanto $Diam(\overline{\mathcal{B}}_n) \geq 2n - 5$.

Como las cotas superiores e inferiores de $Rad(\overline{\mathcal{B}}_n)$ y $Diam(\overline{\mathcal{B}}_n)$ coinciden, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 5. Para todo entero $n \geq 3$, $Rad(\overline{\mathcal{B}}_n) = n - 2$ y $Diam(\overline{\mathcal{B}}_n) = 2n - 5$.

REFERENCIAS

[1] A. P. Figueroa y J. Fresán- Figueroa, The biplanar tree graph, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana 26 (2020), 795–806.
 [2] H. Harborth, I Mengersen, Drawings of the complete graph with maximum number of crossings, in Proceedings of the Twenty-Third Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, (Boca Raton, Fl 1992), Congressus Numerantium 88, Utilitas Math., Winnipeg, 1992, 225–228.

- [3] J. Pach, J. Solymosi, G. Tóth, Unavoidable configurations in complete topological graphs, *Discrete Comput Geom* 30 (2003), 311–320.

Elsa P. Omaña Pulido

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.

e-mail: eop@xanum.uam.mx

Eduardo Rivera Campo

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa,

División de Ciencias Básicas e Ingeniería,

Departamento de Matemáticas.

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.

e-mail: erc@xanum.uam.mx