MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 289-345.
Recibido 27-02-2025. Aceptado 22-09-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/raadm

LA GEOMETRÍA DE LA MECÁNICA CLÁSICA. EL FORMALISMO GEOMÉTRICO CON UN ENFOQUE FÍSICO

RAFAEL LEONARDO AZUAJE HIDALGO
ADRIÁN MAURICIO ESCOBAR RUIZ

Resumen. El propósito de estas notas de clase es exponer el formalismo geométrico de la Mecánica Clásica de manera accesible, pero sin comprometer la correspondiente rigurosidad matemática. Están dirigidas a estudiantes de posgrado y de los últimos años de nivel licenciatura en ciencias físico-matemáticas, así como a profesores e investigadores que busquen una introducción concisa a este formalismo. Para su comprensión, se requiere un conocimiento básico de álgebra lineal, cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales. Estas notas son el resultado de los cursos (*i*) Mecánica y Caos (posgrado) y (*ii*) Temas Selectos de Mecánica Analítica (posgrado y licenciatura), impartidos por los autores en múltiples ocasiones durante el periodo 2023-2025, en la Licenciatura y Posgrado en Física de la UAM-I. El material incluye numerosos ejemplos desarrollados de forma explícita, así como referencias que contribuyen a una exposición clara y completa. Se incluyen algunos resultados originales.

Introducción

La Mecánica Clásica se centra en la descripción de la evolución temporal de sistemas físicos cuyo estado futuro y pasado está completamente determinado por sus condiciones iniciales, es decir, por las posiciones y velocidades iniciales de todos los puntos del sistema. A estos sistemas se les denomina sistemas mecánicos (clásicos). El espacio fase de un sistema mecánico es el conjunto de todas las configuraciones posibles de posiciones y velocidades del sistema [1]. Poincaré fue quien introdujo la visión de un sistema mecánico como un campo de vectores en el espacio fase, donde cada trayectoria es una curva diferenciable cuyo vector de velocidad en cada punto coincide con el vector asignado por el campo. Esta formulación lo llevó a la noción de variedad diferencial como estructura del espacio fase en Mecánica Clásica [2]. El enfoque geométrico de la Mecánica Clásica tiene una extensa trayectoria, iniciando con los trabajos de Arnold [3] y de Abraham y Marsden [2], y sigue siendo un área de investigación activa.

Los sistemas Hamiltonianos constituyen una clase particular de sistemas mecánicos en variedades diferenciales, donde la dinámica está gobernada por un campo vectorial Hamiltoniano. En este contexto, la función Hamiltoniana del sistema representa su energía mecánica total, y la evolución del sistema está determinada por la estructura geométrica del espacio fase. Estos campos vectoriales Hamiltonianos se construyen a partir de una estructura geométrica adicional en la variedad diferencial. En efecto, las estructuras geométricas en Mecánica Clásica se definen mediante herramientas tensoriales, aunque también pueden describirse en términos algebraicos a través de paréntesis o corchetes (operaciones algebraicas no asociativas en espacios vectoriales o módulos) en el espacio de funciones diferenciables. En particular, las estructuras de Poisson, y especialmente aquellas inducidas por formas simplécticas, proporcionan el marco geométrico natural para el espacio fase en Mecánica Clásica.

A lo largo de la historia, la física y la geometría han evolucionado de manera interdependiente. Desde la formulación de la mecánica newtoniana, el formalismo vectorial

2010 *Mathematics Subject Classification.* 53D05, 53Z05, 53D22, 70G45, 70H06.
Palabras clave. Sistemas Hamiltonianos, estructuras geométricas, variedades simplécticas, campos vectoriales Hamiltonianos, transformaciones canónicas geométricas.

de la geometría euclidiana ha sido una herramienta esencial para la descripción de sistemas físicos. En su desarrollo moderno, la Mecánica Clásica adopta el lenguaje de la geometría diferencial, en particular de la geometría simpléctica. En la física relativista, muchos objetos físicos se representan matemáticamente mediante tensores, y los fenómenos que los involucran se describen a través de operaciones tensoriales. Los tensores juegan un papel fundamental en la teoría de la relatividad general de Einstein, donde el campo gravitatorio se modela geométricamente mediante una variedad pseudoriemanniana con una métrica definida por el tensor métrico, lo que da lugar a la noción de espacio-tiempo. Asimismo, la Mecánica Cuántica ha desarrollado formulaciones geométricas basadas en la geometría simpléctica. Debido a la relevancia geométrica del tema abordado, estas notas incluyen una introducción concisa a los principales objetos de la geometría diferencial aplicados a la Mecánica Clásica, tales como variedades diferenciales, vectores tangentes, campos vectoriales, tensores y formas diferenciales.

La estructura de estas notas es la siguiente: en la primera sección (1), se presenta un repaso de álgebra lineal y cálculo vectorial con el propósito de refrescar los conceptos clave y establecer la notación utilizada. Desde la sección 2 hasta la sección 7, se ofrece una revisión rigurosa de los principales objetos de la geometría diferencial, sin incluir demostraciones de resultados bien establecidos. A lo largo de este desarrollo, se destaca la profunda relación entre la física y la geometría diferencial, ilustrando mediante ejemplos y comentarios cómo la geometría diferencial encuentra aplicaciones en la física, y cómo la física ha influido en el desarrollo de la geometría diferencial. Un lector con conocimientos previos en geometría diferencial puede omitir estas secciones y dirigirse directamente a la sección 8, donde se introduce el formalismo geométrico de la Mecánica Clásica Hamiltoniana. No obstante, en la subsección 3.5 se incluye una breve introducción al formalismo geométrico de la Mecánica Lagrangiana, en la subsección 5.3 se presentan formalmente los sistemas mecánicos en variedades diferenciales, y en la subsección 6.3 se ofrece una introducción a las estructuras geométricas de Poisson. En la sección 9, se estudian las transformaciones canónicas desde el enfoque geométrico, estableciendo la conexión con la descripción local en coordenadas, marco frecuentemente adoptado en la comunidad física. Finalmente, en la sección 10, se introduce de manera informal algunos formalismos geométricos más generales en Mecánica Clásica, que permiten la descripción geométrica de sistemas no autónomos o disipativos. Entre ellos, se incluyen las estructuras de Poisson definidas por estructuras cosimplécticas, las cuales constituyen un caso particular de las estructuras presimplécticas (de rango no máximo), así como las estructuras de Jacobi, que no satisfacen la regla de Leibniz. También en esta última sección se da una breve introducción a la formulación geométrica de la Mecánica Cuántica.

Estas notas constituyen una herramienta educativa valiosa para estudiantes, docentes e investigadores en Mecánica Clásica. En general, los textos de geometría diferencial tienden a omitir los aspectos físicos, mientras que los libros de Mecánica Clásica rara vez presentan el formalismo geométrico de manera accesible para estudiantes de licenciatura. Por ejemplo, aunque el texto clásico de Arnold [3] es una referencia fundamental, su nivel de abstracción lo hace difícil de seguir sin una sólida preparación matemática. Además, en estas notas se incluyen desarrollos de investigaciones modernas, tal es el caso de las secciones 9 y 10. En la primera de estas secciones se ofrece una exposición unificada del enfoque geométrico y de la descripción en coordenadas de las transformaciones canónicas, proporcionando una visión integral tanto de los aspectos locales como globales de estas estructuras; y en la última sección se presentan de manera breve formalismos geométricos para estudios avanzados en Mecánica Clásica, dichos formalismos son objetos centrales en muchas investigaciones recientes.

Índice

Introducción 289
1. Preliminares 292
1.1. Repaso de álgebra lineal 292
1.2. Repaso de cálculo vectorial 293
2. Variedades diferenciales 294
2.1. Estructuras diferenciales 295
2.2. Funciones y mapeos diferenciables 297
2.3. Subvariedades 298
3. Vectores tangentes 299
3.1. Vectores tangentes en el espacio Euclidiano 299
3.2. Vectores tangentes en una variedad diferencial 299
3.3. Vector velocidad de una curva 300
3.4. Fibrado tangente y la diferencial de un mapeo diferenciable 301
3.5. Sistemas Lagrangianos 302
4. Grupos y álgebras de Lie 303
4.1. Grupos de Lie 303
4.2. Álgebras de Lie 305
5. Campos vectoriales 306
5.1. Campos vectoriales diferenciables 306
5.2. Curvas integrales 307
5.3. Sistemas mecánicos 309
6. Tensores 311
6.1. Tensores en un espacio vectorial 312
6.2. Campos tensoriales en una variedad 313
6.3. Estructuras de Poisson 315
7. Formas diferenciales 317
7.1. 0-formas 317
7.2. 1-formas 318
7.3. 2-formas 319
7.4. k-formas 320
7.5. Producto interior 321
7.6. Derivada de Lie 322
8. Mecánica Hamiltoniana 323
8.1. Geometría simpléctica 324
8.2. Campos vectoriales Hamiltonianos y el paréntesis de Poisson 325
8.3. Sistemas Hamiltonianos independientes del tiempo 326
8.4. Sistemas Hamiltonianos dependientes del tiempo 326
8.5. Sistemas integrables 327
9. Transformaciones canónicas y simetrías 329
9.1. Transformaciones canónicas: descripción clásica en coordenadas 329
9.2. Transformaciones canónicas: descripción geométrica 331
9.3. Simetrías y grupos de transformaciones de invarianza 335
10. Otros formalismos geométricos en Mecánica Clásica y la formulación geométrica de la Mecánica Cuántica 340
10.1. Variedades de Jacobi y variedades de contacto 340
10.2. La formulación geométrica de la Mecánica Cuántica 342
Referencias 343

1. Preliminares

En esta primera sección se ofrece un repaso conciso de los conceptos y técnicas fundamentales del álgebra lineal y el cálculo vectorial. Estos elementos son esenciales para el estudio de la geometría diferencial y constituyen la base para el desarrollo del formalismo geométrico en Mecánica Clásica. Los lectores con un conocimiento sólido en estas áreas pueden omitir esta sección y dirigirse directamente a la sección 2, donde se introducen los principales objetos de la geometría diferencial.

1.1. Repaso de álgebra lineal.

Definición 1. Espacio vectorial: Un espacio vectorial (real) es un conjunto V equipado con dos operaciones $+ : V \times V \longrightarrow V$ y $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ que satisfacen las mismas propiedades que la suma vectorial y producto por un escalar en el espacio Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1. Ejemplos de espacios vectoriales:

- El propio espacio Euclidiano n-dimensional $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ con las operaciones suma de vectores y producto por un escalar.
- El espacio de matrices con m renglones y n columnas $(M_{m\times n}, +, \cdot)$ con las operaciones suma de matrices y producto por un escalar.
- El espacio de polinomios de grado n en una variable con coeficientes reales $(P_n, +, \cdot)$ con las operaciones suma de polinomios y producto por un escalar.
- El espacio de funciones diferenciables en $\mathbb{R}$ $(C^\infty(\mathbb{R}), +, \cdot)$ con las operaciones suma de funciones y producto por un escalar.

Sea V un espacio vectorial.

Definición 2. Combinación lineal: Un vector v en V es combinación lineal de los vectores $v_1, ..., v_k \in V$ si existen escalares $\alpha^1, \ldots, \alpha^k \in \mathbb{R}$, tales que[1]

$$v = \alpha^i v_i. \tag{1}$$

Definición 3. Independencia lineal: Se dice que el conjunto $S = v_1, \ldots, v_k \subseteq V$ es linealmente independiente (li) si la única solución de la ecuación vectorial $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_v$ es la solución trivial $(\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0)$. O equivalentemente, ningún vector es combinación lineal de los otros.

Definición 4. Base: Un conjunto $S = v_1, \ldots, v_k \subseteq V$ es base de V si todo vector en V es combinación lineal de los vectores en $S\,(V = Gen(S))$ y S es linealmente independiente.

Cualquier base de V tiene el mismo número de elementos, lo que denomina dimensión de V.

Ejemplo 2. Bases de espacio vectoriales:

- El conjunto formado por los vectores $e_1, \ldots, e_n$, donde e_i es el vector de $\mathbb{R}^n$ con todas las componentes nulas excepto la i-ésima la cual es igual a 1, es una base de $\mathbb{R}^n$ llamada la base estándar o base canónica. La dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n.
- El conjunto formado por las matrices $A^1_1, \ldots, A^n_1, \ldots, A^1_m, \ldots, A^n_m$, donde A^j_i es la matriz de orden $m \times n$ cuyas entradas son todas nulas excepto la entrada en la fila i y la columna j la cual es igual a 1, es una base de $M_{m\times n}$ llamada la base estándar o base canónica. La dimensión de $M_{m\times n}$ es $m\,n$.
- El conjunto formado por los polinomios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ es una base de P_n llamada la base estándar o base canónica. La dimensión de P_n es $n + 1$.

[1]En este texto se usa la convención de suma de Einstein, es decir, se asume la operación de suma sobre indices repetidos. Por ejemplo, la suma de productos $a^1b_1 + a^2b_2 + \cdots + a^nb_n$ se escribe simplemente como $a^i\, b_i$ entendiendo que el indice i varía desde 1 hasta n.

- El conjunto formado por los polinomios $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ es una base de $C^\infty(\mathbb{R})$ llamada la base estándar o base canónica. $C^\infty(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Definición 5. Transformación lineal: Sean V y W dos espacios vectoriales. Una transformación lineal de V en W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \quad y \quad T(\alpha u) = \alpha T(u),\ \forall\, u, v \in V\ y \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Ejemplo 3. Ejemplos de transformaciones lineales:

- $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (\sin(\pi)x + y, z - 3x)$.
- $T : M_{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(M) = traza(M)$.
- $T : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $T(f) = f'$.
- $T : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Su representación matricial es una matriz $A \in M_{m,n}$, tal que, $T(v) = Av$.

Ejemplo 4. Ejemplos de representaciones matriciales:

- $T(x, y, z) = (\sin(\pi/3)x - y, x + 3y + z)$, la representación matricial de T es

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} \sin(\pi/3) & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

  Para obtener dicha matriz, se evalúa T en los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$: $T(1, 0, 0) = (\sin(\pi/3), 1)$, $T(0, 1, 0) = (-1, 3)$ y $T(0, 0, 1) = (0, 1)$. Estas imágenes constituyen las columnas de la matriz de T, de modo que

$$[T] = \begin{pmatrix} \sin(\pi/3) & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

  la cual coincide con la expresión dada en (3). Nótese que cada columna representa la imagen de un vector base de $\mathbb{R}^3$, y por tanto aplicar esta matriz a un vector $(x, y, z)^t$ reproduce la acción de T.
- $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la rotación en sentido antihorario por un ángulo θ. La representación matricial de T es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Para más detalles ver [4, 5, 6] y [7] (Appendix B).

1.2. Repaso de cálculo vectorial. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto $U = B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < r\}$ o $U = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función de varias variables $x^1, \ldots, x^n$.

Definición 6. Derivadas parciales: Para cada $a \in U$ la derivada parcial de f en a con respecto de x^i se define por:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h\hat{e}_i) - f(a)}{h}\ , \tag{5}$$

donde $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Para efectos prácticos, la derivada parcial de f en a con respecto de x^i se calcula considerando a la función f como una función solo de la variable x^i (las demás variables son constantes), se deriva como una función de una sola variable y se avalúa en $x = a$. Si $\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$ existe para todo $a \in U$ entonces $\frac{\partial f}{\partial x^i} : U \to \mathbb{R}$ es una función de varias variables.

Definición 7. Función escalar diferenciable: Se dice que $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable de clase $C^1(U)$ si sus derivadas parciales existen y son continuas.

Si f es diferenciable de clase C^1 podemos definir las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right). \tag{6}$$

Si las derivadas parciales de segundo orden existen podemos definir derivadas parciales de tercer orden y así podríamos definir derivadas parciales de orden superior.

Definición 8. Función infinitamente diferenciable: Se dice que $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable de clase $C^\infty(U)$ o infinitamente diferenciable si sus derivadas parciales de todos los ordenes existen y son continuas.

Observación: En Mecánica Clásica, los observables se representan mediante funciones infinitamente diferenciables. Es común, especialmente en textos con enfoque físico, referirse a estas funciones simplemente como diferenciables. Siguiendo esta convención, en estas notas utilizaremos el término función diferenciable para referirnos exclusivamente a funciones infinitamente diferenciables. Cabe destacar que todas las funciones elementales, como las constantes, polinomiales, trigonométricas, exponenciales y sus inversas, pertenecen a esta categoría.

Definición 9. Función vectorial diferenciable: Sea $F : U \to \mathbb{R}^m$. Se denota $F(x^1, \ldots, x^n) = (F^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, F^m(x^1, \ldots, x^n))$ y $F^i : U \to \mathbb{R}$ se llaman las funciones componentes de F. Se dice que F es diferenciable si cada función componente F^i es diferenciable.

Sea $F : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciable.

Definición 10. Derivada total: La derivada total de F en $a \in U$ es la transformación lineal $\mathbf{DF}(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cuya representación matricial es:

$$A = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(a)\right). \tag{7}$$

Ejemplo 5. Ejemplo de derivada total: Sea $F(x, y, z) = (\operatorname{sin} x + z^3, \sqrt{x^2 + y^2})$. Tenemos $F^1 = \operatorname{sin} x + z^3$ y $F^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. La derivada total de F en el punto $p = (\pi, 1, 1)$ está dada por:

$$A = \left.\begin{pmatrix} \cos x & 0 & 3z^2 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix}\right|_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Definición 11. Difeomorfismos: Sean U, V subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Un difeomorfismo es una función $F : U \to V$ diferenciable invertible con inversa diferenciable.

Para más detalles ver [8, 9] y [7] (Appendix C).

2. Variedades diferenciales

En esta sección se introducen de manera concisa los conceptos fundamentales de la geometría diferencial necesarios para la formulación geométrica de la Mecánica Clásica. Quienes deseen pasar directamente a dicha formulación pueden consultar la sección 8. No obstante, puede resultar útil revisar la subsección 3.5, donde se ofrece una introducción al formalismo geométrico de la Mecánica Lagrangiana, así como la subsección 5.3, en la que se presentan formalmente los sistemas mecánicos en variedades diferenciales. Adicionalmente, en la subsección 6.3 se proporciona una visión general de las estructuras geométricas de Poisson.

De manera intuitiva, una variedad diferencial (smooth manifold) es un conjunto que, localmente, se asemeja a un abierto de $\mathbb{R}^n$, permitiendo así el desarrollo de cálculo diferencial e integral en su entorno. Para una exposición más detallada, se recomienda consultar [7, 10, 11].

Los ejemplos más familiares de variedades son $\mathbb{R}^n$, curvas diferenciables y superficies en $\mathbb{R}^n$ tales como esferas y toros. Las superficies son objetos dentro de un espacio ambiente, a saber $\mathbb{R}^n$, las variedades son superficies abstractas en las cuales no existe necesariamente un espacio ambiente.

2.1. Estructuras diferenciales. Sea M un conjunto no vacío.

Definición 12. Carta coordenada: Una carta coordenada en M es un par (U, φ) con $U \subseteq M$ y $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva tal que $\varphi(U) = \widehat{U}$ en un abierto de $\mathbb{R}^n$. Dado $p \in U$, denotamos

$$\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p)) \ , \tag{9}$$

y llamamos a $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas en U.

De manera intuitiva podríamos entender una carta coordenada como el pegado de un abierto de $\mathbb{R}^n$ en un conjunto M, o dicho de otra forma, una carta coordenada dota de manera local de coordenadas (las de $\mathbb{R}^n$) al conjunto M (ver figura 1).

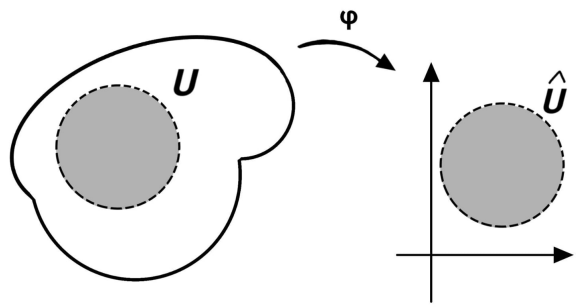

FIGURA 1. Una carta coordenada en un conjunto M es una función inyectiva φ definida en un subconjunto U de M a valores vectoriales tal que su imagen $\widehat{U}$ es un abierto del espacio Euclidiano.

Definición 13. Cartas compatibles: Dos cartas coordenadas (U, φ) y (V, ψ) tales que $U \cap V \neq \emptyset$, son compatibles si $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son abiertos, y la función $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es un difeomorfismo (ver figura 2).

La idea la compatibilidad de las cartas es que los cálculos en las variedades diferenciales sean independientes de la elección de la carta (o de la elección de coordenadas). La condición de compatibilidad garantiza que el cambio de coordenadas sea invertible y diferenciable.

Definición 14. Variedad diferencial: Una variedad diferencial de dimensión n es un conjunto M equipado con una colección de cartas compatibles $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ que cubren M.

A la familia de cartas compatibles que cubren una variedad diferencial se le llama una estructura diferencial.

Por convenio, una variedad de dimensión 0 se define como un conjunto con un único elemento (un punto).

Formalmente, una variedad diferencial es un espacio topológico dotado de una estructura diferencial, donde las cartas están definidas en conjuntos abiertos. En estas notas, omitiremos los aspectos topológicos de las variedades diferenciales, tanto por su complejidad como por su poca relevancia dentro del enfoque físico que adoptamos.

Ejemplo 6. Algunos ejemplos de variedades diferenciales:

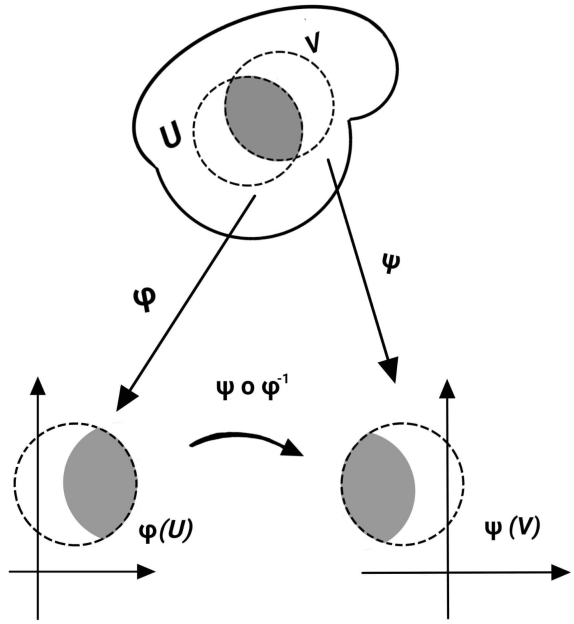

FIGURA 2. Dos cartas coordenadas φ y ψ, cuyos dominios tienen una intersección no vacía, se dicen compatibles si las imágenes de esta intersección bajo cada carta son conjuntos abiertos y la función de transición $\psi \circ \varphi^{-1}$, definida en la imagen de la intersección bajo φ, es un difeomorfismo cuya imagen es precisamente la imagen de la intersección bajo ψ.

- $\mathbb{R}^n$ y cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferencial de dimensión n. La carta coordenada global es el mapeo identidad.
- Cualquier conjunto abierto de una variedad diferencial es una variedad diferencial de la misma dimensión. Este tipo de variedades se llaman subvariedades abiertas. Las cartas en la subvariedad abierta son la restricción de las cartas de la variedad original al subconjunto.
- El conjunto de matrices de orden $m \times n$, denotado por $M_{m,n}$, es una variedad diferencial de dimensión $m\,n$. Podemos definir una carta coordenada para, por ejemplo $m = 2$ y $n = 3$, por

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = (a, b, c, d, e, f)\ . \tag{10}$$

- En general, cualquier espacio vectorial V de dimensión n es una variedad diferencial de dimensión n. Siempre es posible considerar la carta coordenada global $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\varphi(\alpha^1 e_1 + \cdots + \alpha^n e_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{11}$$

  donde $e_1, \ldots, e_n$ es una base (cualquiera) de V.
- $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n} : \text{A es invertible}\}$, llamado el grupo (grupo de Lie) lineal general, es una variedad diferencial de dimensión n^2. $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ es un conjunto abierto de la variedad diferencial M_n (matrices de orden n) por lo tanto es una subvariedad abierta de la misma.
- La gráfica de una función diferenciable $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una variedad diferencial de dimensión n. Podemos definir una carta coordenada global por

$$\varphi(x, f(x)) = x. \tag{12}$$

- La n-esfera $s^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\right\}$ es una variedad diferencial de dimensión n. Para la estructura diferenciable de la n esfera ver [7, 10].
- Sean $M_1, \dots M_k$ variedades diferenciales de dimensiones $m_1, \dots, m_k$ respectivamente. Consideremos el producto cartesiano

$$M = M_1 \times \cdots \times M_k. \tag{13}$$

M es una variedad diferencial de dimensión $m = m_1 + \cdots + m_k$. Las cartas coordenadas son definidas como productos de cartas de cada una de las variedades M_i (para detalles ver [7, 10]).

- El toro n-dimensional es una variedad diferencial de dimensión n, a saber

$$T^n = S^1 \times \cdots \times S^1 \text{ (producto } n \text{ veces)}. \tag{14}$$

Ver más ejemplos en [7, 10].

2.2. Funciones y mapeos diferenciables. Sea M una variedad diferencial de dimensión n.

Definición 15. Función diferenciable: Una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ se dice diferenciable si para cada punto $p \in M$ existe una carta (U, φ) tal que $p \in U$ y la composición $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) = \hat{U} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es una función diferenciable (ver figura 3).

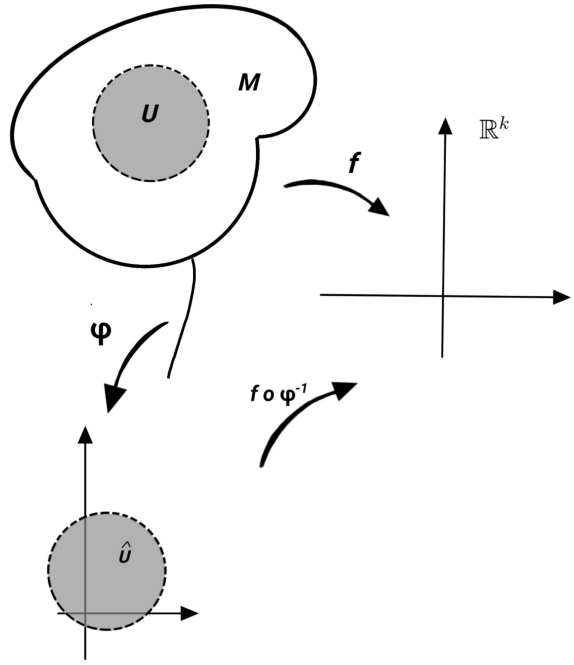

FIGURA 3. Una función en una variedad diferencial a valores vectoriales es diferenciable si su expresión en coordenadas para cada punto es una función (vectorial a valores vectoriales) diferenciable.

El conjunto de funciones $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en M se denota por $C^\infty(M)$.

Definición 16. Mapeo diferenciable: Sea N una variedad diferencial. Una función $F : M \longrightarrow N$ es un mapeo diferenciable (es usual llamar mapeos a las funciones entre variedades diferenciales) si para cada $p \in M$ existe una carta (U, φ) que contiene a p y una carta (V, ψ) que contiene a $F(p)$ tales que $F(U) \subseteq V$ y la composición $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable (ver figura 4).

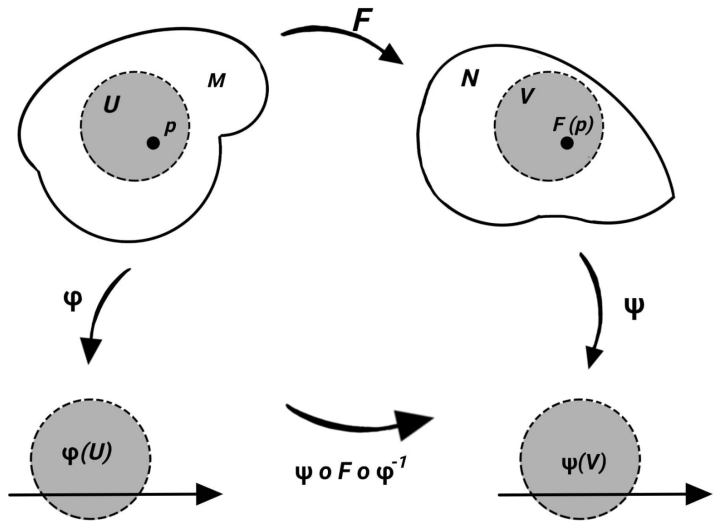

FIGURA 4. Un mapeo entre variedades diferenciales es diferenciable si su expresión en coordenadas para cada punto del dominio y para su imagen en el codominio, es una función (vectorial a valores vectoriales) diferenciable.

2.3. Subvariedades. En esta subsección se presentan de manera breve las llamadas subvariedades encajadas (embedded submanifolds), las cuales aparecen principalmente como conjuntos de nivel. En Mecánica Clásica, son fundamentales para entender la integrabilidad desde el punto de vista geométrico. En estas notas llamaremos a las subvariedades encajadas simplemente subvariedades.

Definición 17. Subvariedad: Una subvariedad diferencial de M es un conjunto $W \subseteq M$ que también es una variedad diferencial con la estructura diferencial heredada de la variedad ambiente M.

El siguiente teorema nos dice como construir subvariedades como conjuntos de nivel.

TEOREMA 18. *Teorema del conjunto de nivel* [7]*: Sea* $F : M \to \mathbb{R}^k$ *un mapeo diferenciable. Consideramos el conjunto de nivel.*

$$M_\alpha = \left\{ x \in M : F(x) = \alpha \in \mathbb{R}^k \right\}. \tag{15}$$

Si para cada $p \in M_\alpha$, $\nabla F^1(p), \ldots, \nabla F^k(p)$ *son linealmente independientes, entonces* M_α *es una subvariedad de* M *de dimensión* $n - k$.

En el Teorema 18, el gradiente $\nabla F^i(p)$ de la función $F^i : M \to \mathbb{R}$ en un punto $p \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ se entiende como

$$\nabla F^i(p) = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial F^i}{\partial x_n}(p) \right),$$

esto es, la fila i-ésima de la matriz jacobiana $DF(p)$.

Ejemplo 7. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n} : det(A) = 1\}$ (el grupo de Lie especial lineal) es una subvariedad de $M_{n,n}$ de dimensión $n^2 - 1$. En efecto, consideremos $F = M_{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(A) = det(A)$, tenemos que F es diferenciable y $SL(n, \mathbb{R})$ es el subconjunto de nivel $F(A) = 1$.

PROPOSICIÓN 19. *Restricción de un mapeo diferenciable a una subvariedad: Si* $F : M \longrightarrow N$ *es un mapeo diferenciable y* S *es una subvariedad diferencial de* M *entonces* $F|_S : S \longrightarrow N$ *es un mapeo diferenciable.*

3. Vectores tangentes

3.1. Vectores tangentes en el espacio Euclidiano.

Definición 20. Vector tangente en $\mathbb{R}^n$: Un vector tangente a un punto $a \in R^n$ es el vector velocidad v_a de una curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to R^n$ tal que $\gamma(0) = a$. Si $(x^1, \ldots, x^n)$ son coordenadas en R^n y $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ entonces $v_a = \frac{d\gamma}{dt}(0) = (\dot{x}^1(0), \ldots, \dot{x}^n(0))$.

Sea $f \in C^\infty(R^n)$, la derivada direccional de f en la dirección de v_a es:

$$\begin{aligned} D_{v_a} f &= \nabla f(a) \cdot v_a \\ &= \dot{x}^1(0)\frac{\partial f}{\partial x^1}(a) + \cdots + \dot{x}^n(0)\frac{\partial f}{\partial x^n}(a). \end{aligned} \tag{16}$$

3.2. Vectores tangentes en una variedad diferencial.

Sea M una variedad diferencial de dimensión n.

Definición 21. Vector tangente: Un vector tangente a $p \in M$ es una función lineal $v_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface la regla de Leibniz:

$$v_p(fg) = f(p)v_p g + g(p)v_p f. \tag{17}$$

Sean $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas alrededor de $p \in M$. Las funciones $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p : C^\infty(M) \to R$ definidas por

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,, \tag{18}$$

son vectores tangentes a $p \in M$.

Todo vector tangente a $p \in M$ es (localmente) combinación lineal de los vectores $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.

$$v_p = v_p^1 \frac{\partial}{\partial x^1}|_p + \cdots + v_p^n \frac{\partial}{\partial x^n}|_p = v_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p\,, \tag{19}$$

con $v_p^1, \ldots, v_p^n \in \mathbb{R}$.

Definición 22. Espacio Tangente: El conjunto de todos los vectores tangentes a $p \in M$ es un espacio vectorial de dimensión n cuya base local es $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$. Se llama espacio tangente a p en M y se denota por T_pM.

Si $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ son nuevas coordenadas alrededor de $p \in M$, podemos pasar de unas coordenadas viejas a unas nuevas mediante:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}|_p = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}(p)\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}|_p\,. \tag{20}$$

Ejemplo 8. Sea $M = \mathbb{R}^2$ dotada de su estructura diferenciable estándar y consideremos coordenadas polares (r, θ) alrededor del punto $p = (2, \frac{\pi}{2}) \in M$.

Las bases locales del espacio tangente en p son

$$\frac{\partial}{\partial r}|_p\ ,\ \frac{\partial}{\partial \theta}|_p\,.$$

Pasamos de coordenadas polares a cartesianas con:

$$x = r\cos\theta\ \ y = r\sin\theta\,.$$

Así tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r}|_p = \frac{\partial x}{\partial r}(p)\frac{\partial}{\partial x}|_p + \frac{\partial y}{\partial r}(p)\frac{\partial}{\partial y}|_p\,.$$

Sustituyendo la transformación de coordenadas se obtiene:

$$= \cos\frac{\pi}{2}\frac{\partial}{\partial x}|_p + \sin\frac{\pi}{2}\frac{\partial}{\partial y}|_p = \frac{\partial}{\partial y}|_p\,.$$

Realizamos el mismo procedimiento para la parcial de θ:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}|_p = \frac{\partial x}{\partial\theta}(p)\frac{\partial}{\partial x}|_p + \frac{\partial y}{\partial\theta}(p)\frac{\partial}{\partial y}|_p\,,$$

obteniendo:

$$= -2\sin\frac{\pi}{2}\frac{\partial}{\partial x}|_p + 2\cos\frac{\pi}{2}\frac{\partial}{\partial y}|_p = -2\frac{\partial}{\partial x}|_p\,.$$

Consideremos

$$v_p = 5\frac{\partial}{\partial r}|_p - 3\frac{\partial}{\partial\theta}|_p\,.$$

en coordenadas polares, ahora la expresión para coordenadas cartesianas es

$$v_p = 5\frac{\partial}{\partial y}|_p + 6\frac{\partial}{\partial x}|_p\,.$$

Tomando $f(x,y) = x^2 + y^2$ o en coordenadas polares como $f(r,\theta) = r^2$ obtenemos:

$$v_p(f) = 5(2r)|_{(2,\pi/2)} = 20\,.$$

y ahora para cartesianas

$$v_p(f) = 5(2y) + 6(2x) = 20\,.$$

Notemos que se llega al mismo resultado.

PROPOSICIÓN 23. *Espacio tangente a una subvariedad* [7]*: Sea S una subvariedad diferencial de M y $p \in S$. El espacio tangente a p en S es un subespacio vectorial de T_pM caracterizado por*

$$T_pS = \{v \in T_pM \,:\, vf = 0\,\forall f \in C^\infty(M) \;\; tal\ que\ f|_S = 0\}. \tag{21}$$

TEOREMA 24. *Vector tangente a una subvariedad de nivel* [7]*: Sea S una subvariedad de nivel definida por $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $F(x) = \alpha$. Un vector tangente $v_p \in T_pM$ es un vector tangente a p en S si y solo sí $v_pF^i = 0$ para cada función componente F^i de F.*

3.3. Vector velocidad de una curva. Dada una curva $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ en M con $\gamma(0) = p$ se tiene que

$$\dot\gamma(0) = \dot x^i(0)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\,, \tag{22}$$

es un vector tangente a $p \in M$

Ejemplo 9. Tomemos nuevamente la variedad $M = \mathbb{R}^2$ del ejemplo anterior. Sea la curva

$$\gamma(t) = (t^2 - 5t + 2, \frac{\pi}{2}\cos t)\,,$$

con

$$\gamma(0) = (2, \frac{\pi}{2})\,.$$

Por lo que:

$$\gamma'(0) = (2t-5)|_0\frac{\partial}{\partial r}|_p - \frac{\pi}{2}\sin t|_0\frac{\partial}{\partial\theta}|_p\,,$$

cuyo resultado es:

$$= -5\frac{\partial}{\partial r}|_p\,,$$

que es el vector velocidad de la curva $\gamma(t)$ dada en la parte de arriba.

3.4. Fibrado tangente y la diferencial de un mapeo diferenciable.

Definición 25. Fibrado tangente: El fibrado tangente de M es la unión de todos los espacios tangentes, se denota por TM,

$$TM = \cup_{p\in M} T_p(M)\,, \tag{23}$$

es una variedad diferencial de dimensión $2n$.

Si $(x^1,\ldots,x^n)$ son coordenadas alrededor de $p \in M$ entonces $(x^1,\ldots,x^n,\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)$ son coordenadas alrededor de $(p, v_p) \in TM$.

Definición 26. Diferencial de un mapeo diferenciable: Sea $F : M \longrightarrow N$ un mapeo diferenciable. Para cada $p \in M$ la diferencial de F en p es la transformación lineal $DF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ definida por $DF_p(v_p)(g) = v_p(F \circ g)$ para todo $v_p \in T_pM$ y para toda $g \in C^\infty(N)$.

Sean $(x^1,\ldots,x^n)$ coordenadas alrededor de $p \in M$

$$F(x^1,\ldots,x^n) = (F^1(x),\ldots,F^n(x)). \tag{24}$$

La representación matricial de DF_p es:

$$[DF_p] = \left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]\,. \tag{25}$$

Ejemplo 10. $dim(M) = 3$ y $dim(N) = 2$

$$F(x,y,z) = (3x^2 - 5\,xyz, z^3)\,.$$

Esta matriz es de 2×3 en $p = (1,0,-1)$

$$[DF_p] = \begin{pmatrix} 6x - 5yz & -5xz & -5xy \\ 0 & 0 & 3z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En el punto $p = (1,0,-1)$ se considera el vector tangente

$$v_p \;=\; -\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + 4\,\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + 2\,\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p.$$

Los coeficientes que acompañan a las derivadas parciales son escogidos de manera arbitraria y corresponden a las coordenadas de v_p en la base natural $\left\{\frac{\partial}{\partial x}\big|_p, \frac{\partial}{\partial y}\big|_p, \frac{\partial}{\partial z}\big|_p\right\}$ del espacio tangente T_pM. De este modo, la representación de v_p en dicha base es simplemente

$$v_p = (-1,\, 4,\, 2),$$

lo que permite tratarlo como un vector de $\mathbb{R}^3$ y aplicar el diferencial DF_p para determinar su imagen en $T_{F(p)}N$.

La acción del diferencial se obtiene mediante el producto matricial

$$DF_p(v_p) = [DF_p]\,[v_p] = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix},$$

lo cual muestra que en coordenadas locales (u,w) de N el vector tangente resultante se expresa como $DF_p(v_p) = 14\,\partial_u|_{F(p)} + 6\,\partial_w|_{F(p)} \in T_{F(p)}N$, con $F(p) = (3,-1)$. Este resultado coincide con la interpretación geométrica de $DF_p(v_p)$ como la derivada de la curva $F\circ\gamma$ en $t = 0$, para cualquier curva γ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v_p$.

3.5. Sistemas Lagrangianos. Un sistema Lagrangiano es un par (M, L) con M una variedad diferencial de dimensión n y $L : TM \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. M se llama el espacio configuración, L la función Lagrangiana y n el número de grados de libertad del sistema (ver más detalles en el libro de Arnold [3] capítulo 4).

Una curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ es una trayectoria del sistema si su expresión en coordenadas $\gamma(t) = (q^1(t), \ldots, q^n(t))$ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \tag{26}$$

donde $(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n)$ son coordenadas en TM. En el lenguaje físico las coordenadas $(q^1, \ldots, q^n)$ en M se llaman coordenadas generalizadas y se obtienen a partir de las constricciones holonómicas del sistema físico (constricciones de la forma $f(r_1, r_2, \ldots, t) = 0$ donde $r_1, r_2, \ldots$ son los vectores de posición de las partículas del sistema); las coordenadas $\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n$ se llaman velocidades generalizadas.

El cálculo variacional de funcionales constituye el marco matemático que fundamenta la dinámica de la Mecánica Lagrangiana. En efecto, las trayectorias físicas corresponden a los puntos críticos del funcional de acción

$$\Phi(\gamma) \;=\; \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt, \tag{27}$$

donde L es la función Lagrangiana del sistema [3].

El principio de mínima acción de Hamilton [3, 12] establece que la evolución de un sistema mecánico está determinada por aquellas curvas $\gamma : [t_0, t_1] \to Q$ tales que

$$\delta\Phi(\gamma) = 0, \tag{28}$$

lo cual conduce a las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{29}$$

En particular, para un sistema mecánico con energía cinética T y energía potencial U, la función Lagrangiana está dada por

$$L = T - U. \tag{30}$$

En coordenadas generalizadas $(q^1, \ldots, q^n)$ se tiene

$$L(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\, m_i\, (\dot{q}^i)^2 - U(q^1, \ldots, q^n, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n, t). \tag{31}$$

A continuación presentamos ejemplos de espacios configuración (variedades diferenciales) de sistemas físicos.

Partícula libre: La partícula libre es el ejemplo más sencillo. Lo interesante de ello, es que para una partícula que no se somete a ningún potencial viajando en 3 dimensiones (incluso puede ser en n dimensiones), su espacio configuración será de una dimensión.

Péndulo simple: El espacio de configuraciones del péndulo simple de dos dimensiones tan solo es S^1, pues a pesar que se mueve en 2 dimensiones, lo hace con una constricción, por lo que sus grados de libertad tan solo es uno, la dimensión del espacio configuración. Notar que el movimiento del péndulo simple solo describe una circulo máximo de radio l, por lo que no es tan difícil ver el espacio configuración esté caracterizado por una coordenada, que es el ángulo polar θ.

Péndulo esférico: Es fácil argumentar luego del péndulo simple que el espacio configuración del péndulo esférico es S^2, pues solo hay dos grados de libertad. Y pueden ser expresadas esos dos grados de libertad, en coordenadas esféricas por los ángulos azimutal ϕ y polar θ.

Péndulo doble: Dejemos por sentado que el péndulo doble solo se moverá en 2D, por lo tanto su espacio configuración será el producto de cada una de los péndulos simples en 2D, es decir $S^1 \otimes S^1 = T^2$, que es precisamente el toro 2-dimensional.

Péndulo doble esférico: El caso anterior, el péndulo doble solo se mueve en dos dimensiones. pero si le damos la libertad de que lo haga en 3 dimensiones físicas, entonces el péndulo tendrá el espacio configuración S^2, y el espacio configuración del péndulo doble esférico $S^2 \otimes S^2 = T^4$ será el toro 4-dimensional.

4. Grupos y álgebras de Lie

Las nociones de grupo de Lie y álgebra de Lie fueron introducidas por el matemático noruego Marius Sophus Lie (1842–1899), quien desarrolló estas nociones en un intento para resolver, o al menos simplificar ecuaciones diferenciales ordinarias. Al principio Lie basó su trabajo en analogías con la teoría de grupo desarrollada por Evariste Galois (1811–1832) para resolver ecuaciones algebraicas que fueran cuadráticas, cúbicas o cuárticas [13]. Las álgebras de Lie son la linealización de los grupos de Lie.

Los grupos de Lie son variedades diferenciales que tienen estructura de grupo compatible con la estructura diferencial [7, 14]. Los grupos de Lie se encuentran en Mecánica Clásica como grupos de simetrías [11, 15, 16]. Es bien sabido que la existencia de simetrías para un sistema mecánico, permite la reducción del sistema, o en otras palabras, permite una simplificación de las ecuaciones de movimiento, lo que facilita su solución. El célebre teorema de Noether relaciona simetrías de un sistema mecánico con cantidades conservadas (o constantes de movimiento) [7, 17, 18, 19]; una generalización de éste, relacionada con la noción de mapeo de momento, es una de las principales aplicaciones de los grupos de Lie en la Mecánica Clásica. El mapeo de momento es una generalización del momento lineal o angular, éste aparece cuando se tiene un grupo de Lie de simetrías actuando sobre un sistema mecánico. Varios teoremas de conservación, entre ellos el del momento lineal o angular, son casos particulares el teorema de conservación del mapeo de momento [15, 13, 16]. Por otro lado, las álgebras de Lie también juegan un rol importante en la Mecánica Clásica como queda en evidencia en el teorema de Lie sobre la integrabilidad de sistemas mecánicos; en este teorema la existencia de un álgebra de Lie soluble (o en particular Abeliana) de simetrías de un sistema mecánico permite encontrar trayectorias por cuadraturas [17, 20, 21].

4.1. Grupos de Lie.

Definición 27. Grupo: Un grupo es un conjunto no vacío G equipado con una operación binaria asociativa $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ llama multiplicación, tal que existe un elemento identidad e, i.e., $g \cdot e = g \ \forall g \in G$, y cada $g \in G$ tiene un elemento inverso denotado por g^{-1}, es decir, para cada $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = e$.

Definición 28. Grupo de Lie: Un grupo de Lie es una variedad diferencial G que también es un grupo, con la propiedad de que la multiplicación $G \times G \longrightarrow G$ y la inversión $G \longrightarrow G$ son mapeos diferenciables.

En Mecánica Clásica los grupos de Lie más relevantes son los grupos de Lie de matrices. A continuación veremos algunos de ellos.

Ejemplo 11. Algunos grupos de Lie de matrices con entradas reales:

- El grupo lineal general: $GL(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de matrices invertibles de orden n. Es un grupo de Lie con la operación multiplicación de matrices. Este grupo representa el grupo de todas las transformaciones invertibles en $\mathbb{R}^n$.
- El grupo lineal especial: $SL(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices de orden n con determinante igual a uno. Es un grupo de Lie con la operación multiplicación de matrices.
- El círculo S^1 es un grupo de Lie con la operación multiplicación de números complejos.
- El grupo ortogonal: $O(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices ortogonales de orden n, i.e., matrices cuya transpuesta es igual a su inversa. Este grupo

representa al grupo de las transformaciones invertibles en $\mathbb{R}^n$ que preservan la distancia Euclidiana.

- El grupo especial ortogonal: $SO(n,\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las matrices ortogonales con determinante igual a uno. Este grupo es particularmente relevante en Mecánica Clásica ya que representa al grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^n$.

Definición 29. Acción de un grupo sobre una variedad: Sea M una variedad diferencial y G un grupo de Lie. Una acción izquierda (diferenciable) de G en M es un mapeo diferenciable $L : G \times M \longrightarrow M$, denotado por $L(g,p) \mapsto g \cdot p$, tal que

- $g_1 \cdot g_2 \cdot p = (g_1 g_2) \cdot p$, y
- $e \cdot p = p$.

Si $L : G \times M \longrightarrow M$ es una acción izquierda de G en M, entonces cada $g \in G$ induce un difeomorfismo L_g en M definido por

$$L_g(p) = L(g,p) = g \cdot p. \tag{32}$$

La inversa de L_g es $L_{g^{-1}}$.

De manera análoga se puede definir una acción derecha. En estas notas trabajaremos con acciones izquierdas y las llamaremos simplemente acciones.

Ejemplo 12. Acciones de grupos de Lie:

- Cualquier grupo de Lie G actúa de manera trivial sobre cualquier variedad diferencial M. $L(g,p) = p \forall g \in G \forall p \in M$ es la acción trivial.
- $GL(n,\mathbb{R})$ actúa de manera natural en $\mathbb{R}^n$ por la acción $L(A,x) = Ax$ (multiplicación de la matriz A por el vector x).
- $SL(n)$ actúa sobre $\mathbb{R}^n$ por la misma acción $L(A,x) = Ax$.
- Consideremos un cuerpo rígido rotando alrededor de su centro de masa sin la influencia de fuerzas externas. Tenemos que las trayectorias del sistema son invariantes bajo la acción del grupo de Lie $SO(3)$, es decir, $SO(3)$ es el grupo de simetrías de dicho sistema, lo que nos lleva a la conservación del momento angular.

En Mecánica Lagrangiana, el Teorema de Noether establece que a cada grupo uno-paramétrico de difeomorfismos del espacio configuración de un sistema Lagrangiano que preserve la función Lagrangiana, lo cual representa la acción de un grupo de Lie en el espacio configuración, le corresponde una cantidad conservada [3]. Veamos los detalles de este resultado. Sea (M,L) un sistema Lagrangiano.

Definición 30. Se dice que el sistema Lagrangiano (M,L) admite un mapeo $h : M \longrightarrow M$ si

$$L(Dh_p v_p) = L(v_p),\ \forall v_p \in T_pM. \tag{33}$$

Ejemplo 13. Sea (M,L) un sistema Lagrangiano con 3 grados de libertad con coordenadas generalizadas (x,y,z) y $L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - V(y,z)$. El sistema admite el mapeo $h(x,y,z) = (x+s,y,z)$ (traslación en la primera coordenada).

Teorema 31. *Teorema de Noether [3]: Si el sistema (M,L) admite el grupo uno-paramétrico de difeomorfismos $h_s : M \longrightarrow M$ entonces*

$$I(q^1,...,q^n,\dot{q}^1,...,\dot{q}^n) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1},...,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right) \cdot \frac{dh_s(q^1,...,q^n)}{ds}\Big|_{s=0}, \tag{34}$$

es una cantidad conservada, donde $\cdot$ denota el producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

Todo campo vectorial diferenciable genera un grupo uno-paramétrico de difeomorfismos, llamado el flujo del campo vectorial (ver la sección de campos vectoriales). Si un sistema Lagrangiano admite el grupo uno-paramétrico de difeomorfismos generado por un campo vectorial diferenciable se dice que el campo vectorial es una simetría (infinitesimal) del sistema.

En términos locales un difeomorfismo puede ser visto como un cambio de coordenadas, así que el teorema de Noether puede ser planteado desde el punto de vista local de la siguiente manera: Si las ecuaciones de Lagrange son invariantes bajo un grupo uno-paramétrico de cambios de coordenadas entonces una cantidad conservada está asociada a dicha invarianza. En particular, si la Lagrangiana es invariante bajo un grupo uno-paramétrico de cambios de coordenadas, entonces se tiene una cantidad conservada asociada a tal invarianza.

Ejemplo 14. ▪ Supongamos que tenemos un sistema Lagrangiano con tres grados de libertad, coordenadas generalizadas (x, y, z) y potencial $V(x, y, z)$ invariante por traslaciones en la primera variable, es decir, traslaciones de la forma $h_s(x, y, z) = (x + s, y, z)$. Tenemos que

$$I(x, y, z) = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}) \cdot (1, 0, 0) = m\dot{x} = p_x \,, \tag{35}$$

(el momento lineal en x) es una cantidad conservada. De manera análoga con traslaciones en las otras variables se obtiene la conservación de los respectivos momentos lineales.

- Supongamos ahora que tenemos un sistema Lagrangiano con tres grados de libertad, coordenadas generalizadas (x, y, z) y potencial $V(x, y, z)$ invariante por rotaciones en la tercera variable, es decir, rotaciones de la forma $h_s(x, y, z) = (x \cos s - y \sin s, x \sin s + y \cos s, z)$ donde s es el ángulo de rotación. Tenemos que

$$I(x, y, z) = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}) \cdot (-y, x, 0) = mx\dot{y} - my\dot{x} \,, \tag{36}$$

(la componente z del momento angular) es una cantidad conservada.

4.2. Álgebras de Lie. Ahora repasaremos el concepto de álgebra de Lie y mencionaremos sus propiedades y aplicaciones más importantes.

Definición 32. Álgebra de Lie: Un álgebra de Lie es un espacio vectorial (real) $\mathfrak{g}$ equipado con una transformación llamada corchete de Lie (Lie bracket) y denotada por $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, que es bilineal (lineal en cada argumento), antisimétrica $[X, Y] = -[Y, X]$ y satisface la identidad de Jacobi $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Definición 33. Subálgebra de Lie: Una subálgebra de Lie de un álgebra de Lie es un subespacio vectorial que es cerrado bajo el corchete de Lie.

Definición 34. Álgebra de Lie de un grupo de Lie: A cada grupo de Lie se le asocia un álgebra de Lie la cual representa la linealización del grupo. El álgebra de Lie de un grupo de Lie es el espacio tangente al elemento identidad.

La linealización de los grupos de Lie en una vecindad del elemento identidad captura la estructura local de los grupos y permite una simplificación en el estudio de los mismos.

Para construir el álgebra de Lie de un grupo de Lie debemos parametrizar el grupo de Lie (variedad diferencial) y encontrar los vectores tangentes bases en el elemento identidad. El álgebra de Lie de un grupo de Lie de matrices es un álgebra de Lie de matrices. Veamos la construcción del álgebra de Lie del grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Primero parametrizamos el grupo.

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{ \begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & \frac{1+bc}{1+a} \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \} \,. \tag{37}$$

El elemento identidad de $SL(2, \mathbb{R})$ es la matriz identidad, cuyos parámetros son $(0, 0, 0)$, Así que los vectores tangentes base en el elemento identidad son

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial a}|_{a=b=c=0} \begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & \frac{1+bc}{1+a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \tag{38}$$

$$v_2 = \frac{\partial}{\partial b}|_{a=b=c=0} \begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & \frac{1+bc}{1+a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{39}$$

$$v_3 = \frac{\partial}{\partial c}|_{a=b=c=0} \begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & \frac{1+bc}{1+a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \,:\, \alpha_i \in \mathbb{R}\} = \{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \,:\, \alpha_i \in \mathbb{R}\}, \tag{41}$$

Por lo tanto el álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{R})$ es es conjunto de matrices de orden dos con traza cero. En general tenemos lo siguiente:

Ejemplo 15. Álgebras de Lie de grupos de Lie de matrices:

- $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ es el álgebra de todas las matrices reales de orden n.
- $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ es el álgebra de matrices reales de orden n con traza cero.
- $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ es el álgebra de matrices reales antisimétricas de orden n.

Es posible reconstruir, al menos localmente, un grupo de Lie a partir de su álgebra de Lie mediante el mapeo exponencial. En general, la definición de este mapeo puede ser algo compleja; sin embargo, en el caso de los grupos de Lie de matrices, su formulación resulta más intuitiva y accesible.

Definición 35. Mapeo exponencial: Sea G un grupo de Lie de matrices y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. El mapeo exponencial $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ está dado por

$$exp(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!}\,. \tag{42}$$

5. Campos vectoriales

Sea M una variedad diferencial de dimensión n.

5.1. Campos vectoriales diferenciables.

Definición 36. Campo vectorial: Un campo vectorial diferenciable (smooth vector field) en M es un mapeo diferenciable $V : M \longrightarrow TM$ tal que para cada punto $p \in M$ se tiene que $V(p) = v_p \in T_pM$, es decir, un campo vectorial asigna a cada $p \in M$ un vector tangente a p en M (ver figura 5).

Sean $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas alrededor de $p \in M$. Los mapeos $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ definidos por

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p\,, \tag{43}$$

son campos vectoriales diferenciales en M llamados los campos vectoriales coordenados y se tiene que cada campo vectorial diferenciable V en M se escribe localmente como

$$V \;=\; V^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{44}$$

con $V^i \in C^\infty(U \subseteq M)$, luego

$$V(p) \;=\; V^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p. \tag{45}$$

El conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables en M se denota por $\mathfrak{X}(M)$. Si $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ son nuevas coordenadas alrededor de $p \in M$, podemos pasar de unas coordenadas viejas a unas nuevas mediante:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\,. \tag{46}$$

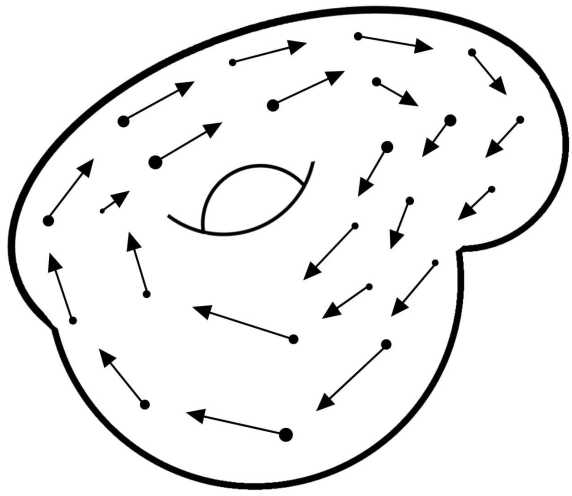

FIGURA 5. Un campo vectorial asigna a cada punto un vector tangente a dicho punto.

TEOREMA 37. *Derivación* [7]*: Todo campo vectorial diferenciable V en M es una derivación en M, es decir, es una transformación lineal $V : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ que satisface la regla de Leibniz*

$$V(fg) = fV(g) + gV(f)\,, \tag{47}$$

para todas $f, g \in C^\infty(M)$.

Dada $f \in C^\infty(M)$ y $V \in \mathfrak{X}(M)$, con $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ en coordenadas locales, tenemos

$$V(f) \;=\; V^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^\infty(M). \tag{48}$$

$$V(f)(p) = \; V^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = v_p(f). \tag{49}$$

Definición 38. Conmutador: Sean $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. El corchete de Lie de V y W definido por

$$[V, W] = VW - WV\,, \tag{50}$$

es también un campo vectorial diferenciable en M. $(\mathfrak{X}(M), [,])$ es un álgebra de Lie.

Para coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ en M se tiene que

$$V \;=\; V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad y \qquad W \;=\; W^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{51}$$

luego

$$[V, W] = \left(V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - \; W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{52}$$

5.2. Curvas integrales. Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 39. Curva integral: Una curva integral de V es una curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$, tal que $\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$, donde I es un intervalo abierto $(-\epsilon, \epsilon)$ que contiene al cero. Es decir, en cada punto sobre la curva el campo vectorial es el vector velocidad (ver figura 6).

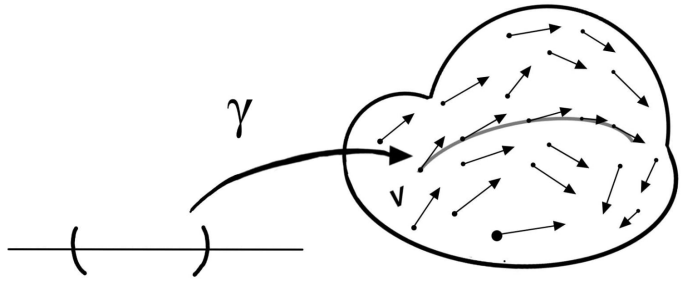

FIGURA 6. Una curva integral de un campo vectorial diferenciable es una curva cuyo vector velocidad en cada punto coincide en dicho punto con el vector tangente asignado por el campo vectorial.

Ejemplo 16. Sean (x, y) coordenadas en M. $V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$. Una curva integral de V es una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tal que $\dot{x} = -y$ y $\dot{y} = x$, así que $\gamma(t) = (a\,cos(t) - b\,sen(t), a\,sen(t) + b\,cos(t))$ donde a, b son constantes que se obtienen con las condiciones iniciales.

Definición 40. Flujo: Un flujo diferenciable (o solo flujo) en M es un mapeo diferenciable $\Psi : I \times M \longrightarrow M$ con I un intervalo abierto que contiene al cero, tal que $\Psi(s, (\Psi(t, p))) = \Psi(s + t, p)$ y $\Psi(0, p) = p$.

Dado un flujo Ψ en M, para cada $p \in M$ podemos considerar la curva diferenciable $\Psi^p : I \longrightarrow M$ definida por $\Psi^p(s) = \Psi(s, p)$, y el vector tangente $v_p \in T_pM$ dado por $v_p = \frac{d}{ds}\Psi^p(s)|_{s=0}$; tenemos que el mapeo $p \mapsto v_p$ es un campo vectorial diferenciable V en M llamado el generador infinitesimal del flujo. El siguiente teorema nos da una versión reciproca de este resultado.

TEOREMA 41. ***Teorema fundamental en flujos*** [7]***:*** *Dado $V \in \mathfrak{X}(M)$, existe un único flujo $\Psi : I \times M \longrightarrow M$ tal que para cada $p \in M$ se tiene que la función $\Psi^p : I \subseteq R \longrightarrow M$ definida por $\Psi^p(s) = \Psi(s, p)$ es una curva integral de V y la función $\Psi_s : M \longrightarrow M$ definida por $\Psi_s(p) = \Psi(s, p)$ es un (posiblemente local) difeomorfismo.*

Ejemplo 17. Ejemplos de flujos de campos vectoriales:

- El flujo de $V = \frac{\partial}{\partial x}$ en $\mathbb{R}^2$ es el mapeo $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\Psi(s, x, y,) = (x + s, y). \tag{53}$$

- El flujo de $W = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ en $\mathbb{R}^2$ es el mapeo $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\Psi(s, x, y,) = (x\ \cos(s) - y\ \sin(s), x\ \sin(s) + y\ \cos(s)). \tag{54}$$

Definición 42. Pushforward: Dado $F : M \longrightarrow N$ un difeomorfismo entre variedades diferenciales. El pushforward de V por F, denotado por F_*V es el único campo vectorial diferenciable en N tal que

$$F_*v_{F(p)} = DF_pv_p. \tag{55}$$

Definición 43. Derivada de Lie: Sea $W \in \mathfrak{X}(M)$. La derivada de Lie de W con respecto de V es el campo vectorial diferenciable en M definido por

$$L_VW = \frac{d}{ds}|_{s=0}\Psi_{s*}W, \tag{56}$$

donde Ψ es el flujo de V.

La derivada de Lie mide el cambio de W a lo largo del flujo del campo vectorial V. Si $L_VW = 0$ se dice que W es invariante bajo el flujo de V.

TEOREMA 44. *Se tiene que* [7]

$$L_V W = [V, W]. \tag{57}$$

5.3. Sistemas mecánicos. La Mecánica Clásica se centra en describir la evolución temporal de sistemas físicos cuyo movimiento futuro y pasado están completamente determinados por sus condiciones iniciales, es decir, las posiciones y velocidades iniciales de todas sus partículas. A estos sistemas se les conoce como sistemas mecánicos (clásicos).

El espacio fase de un sistema mecánico es el conjunto formado por todas las configuraciones posibles de posiciones y velocidades de sus partículas [1]. Henri Poincaré introdujo la idea de visualizar un sistema mecánico como un campo de vectores en el espacio fase, donde una trayectoria es una curva diferenciable cuya velocidad en cada punto coincide con el vector asignado por dicho campo. Esta concepción condujo a Poincaré a la noción de variedad diferencial como el marco geométrico natural para describir el espacio fase en Mecánica Clásica [2].

$V \in \mathfrak{X}(M)$ define un sistema mecánico (clásico) en M cuyas trayectorias son las curvas integrales de V [10]. Sean $(x^1, \cdots, x^n)$ coordenadas locales en M, la expresión local de V es $V = V^i(x^1, \cdots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$, y las curvas integrales $\gamma(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ de V satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = V^1(x^1, \cdots, x^n), \\ \vdots \\ \dot{x}^n = V^n(x^1, \cdots, x^n). \end{cases} \tag{58}$$

Consideremos un sistema mecánico (M, V), M es el espacio fase del sistema y V es el campo vectorial dinámico. El sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (58) es el sistema de ecuaciones (locales) de movimiento (el movimiento en Mecánica Clásica se describe usando ecuaciones diferenciales ordinarias [1]). La evolución de una función $f \in C^\infty(M)$ (un observable físico) a lo largo de las trayectorias del sistema está dado por

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = df_{\gamma(t)}(\frac{d}{dt}\gamma(t)) = (\frac{d}{dt}\gamma(t))(f) = V_{\gamma(t)}(f) = (Vf)(\gamma(t)), \tag{59}$$

así que la evolución temporal de f queda determinada por

$$\dot{f} = Vf. \tag{60}$$

Una función $f \in C^\infty(M)$ se llama una constante de movimiento (o una integral de movimiento) del sistema mecánico (M, V) si f es constante a lo largo de las trayectorias del sistema (físicamente representa una cantidad conservada), lo cual es equivalente a $Vf = 0$. La existencia de constantes de movimiento permite construir un sistema mecánico cuya dinámica está contenida en la dinámica del sistema dinámico original, es decir, es posible construir un sistema reducido tal que sus trayectorias son trayectorias del sistema original. En términos de las ecuaciones de movimiento, la existencia de una constante de movimiento permite buscar trayectorias del sistema que son soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales reducido; en efecto, supongamos que f es una constante de movimiento de (M, V), se tiene que el conjunto de nivel

$$M_f \ = \ \{\, x \in M : \ f(x) \ = \ c,\, c \in \mathbb{R} \} \ ,$$

es una subvariedad diferencial de M de codimensión 1 para valores regulares de f [7] y, es cerrada bajo la dinámica de V, es decir, si $\gamma : I \longrightarrow M$ es una curva integral de V tal que $\gamma(t_0) \in M_f$ para algún $t_0 \in I$ entonces $\gamma(t) \in M_f$ para cada $t \in I$. La última afirmación puede ser probada como sigue: suponga que $\gamma : I \longrightarrow M$ es una curva integral de V tal que $\gamma(t_0) \in M_f$ para algún $t_0 \in I$, entonces $f(\gamma(t_0)) = c$ y, ya que f es constante a lo largo de la trayectoria, es decir, $f(\gamma(t)) = c$ para cada $t \in I$, se concluye que $\gamma(t) \in M_f$ para cada $t \in I$. Así es posible buscar trayectorias de (M, V) que viven en M_f. Es importante resaltar que las trayectorias de (M, V) que viven en M_f no son todas las trayectorias del sistema, pero ellas pueden ser encontradas

resolviendo un sistema de ecuaciones reducido; en efecto, si f es una constante de movimiento de (M, V) las curvas integrales de V que viven en M_f son curvas integrales de la restricción $V|_{M_f}$ del campo vectorial V a M_f, así si $(y^1, \cdots, y^{n-1})$ son coordenadas locales en M_f entonces tales curvas integrales son soluciones de la ecuaciones diferencial vectorial $\dot{Y} = V|_{M_f}(Y)$, donde $Y = (y^1, \cdots, y^{n-1})$, la cual es equivalente a un sistema de $n-1$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

La noción de integrabilidad para sistemas Hamiltonianos es bien conocida por la comunidad física, a saber, el famoso teorema de Liouville establece que el conocimiento de una cantidad suficiente de funcionalmente independiente constantes de movimiento en involución, permite resolver las ecuaciones de Hamilton por cuadraturas [17, 22, 10, 20], es decir, realizando un número finito de operaciones algebraicas y calculando integrales de funciones conocidas. Una noción de integrabilidad local ha sido estudiada en [23], ahí la noción de integral de movimiento (constante de movimiento) ha sido generalizada a integral particular. Para sistemas mecánicos generales, Lie estableció un marco que permite resolver las ecuaciones de movimiento por cuadraturas, en cuyo caso se dice que el sistema es integrable por cuadraturas. Para esto Lie introdujo la noción de álgebra de Lie soluble de una manera análoga a la noción de grupo soluble empleada por Galois para resolver ecuaciones algebraicas; el resultado principal de ese trabajo es conocido como el teorema de Lie en integrabilidad de ecuaciones diferenciales vectoriales, el cual se detalla, con un lenguaje moderno, a continuación.

Definición 45. Se dice que un campo vectorial W en M es una simetría del campo vectorial V si $[W, V] = 0$, donde $[,]$ es el conmutador de campos vectoriales.

Sea W un campo vectorial diferenciable en M. Se sigue del teorema de rectificación (Straightening Out Theorem) [10, 1] que existen coordenadas locales $(y^1, \ldots, y^n)$ en M tales que $W(y) = \frac{\partial}{\partial y^n}$. Observe que si W es una simetría de V, esto es $[W, V] = 0$, entonces las funciones componentes $\overline{V}^1, \ldots, \overline{V}^n$ de V en términos de los campos vectoriales coordenados $\frac{\partial}{\partial y^i}$ no dependen de la coordenada y^n, en efecto,

$$0 = [W, V] = \left[\frac{\partial}{\partial y^n}, \overline{V}^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right] = \frac{\partial \overline{V}^i}{\partial y^n} \frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{61}$$

por lo tanto $\frac{\partial \overline{V}^i}{\partial y^n} = 0$, i.e. $\overline{V}^i = \overline{V}^i(y^1, \ldots, y^{n-1})$ para $i = 1, \ldots, n$. Así que el sistema de ecuaciones de movimiento del sistema dado por V es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \overline{V}^1(y^1, \ldots, y^{n-1}), \\ \vdots \\ \dot{y}^{n-1} = \overline{V}^{n-1}(y^1, \ldots, y^{n-1}), \\ \dot{y}^n = \overline{V}^n(y^1, \ldots, y^{n-1}). \end{cases} \tag{62}$$

Esto quiere decir que el problema de resolver el sistema de ecuaciones de movimiento se reduce a resolver el siguiente sistema de $n-1$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \overline{V}^1(y^1, \ldots, y^{n-1}), \\ \vdots \\ \dot{y}^{n-1} = \overline{V}^{n-1}(y^1, \ldots, y^{n-1}), \end{cases} \tag{63}$$

y luego integrar la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{y}^n = \overline{V}^n(y^1, \ldots, y^{n-1}). \tag{64}$$

Observe que si fuera posible realizar el proceso anterior al sistema de ecuaciones diferenciales (63) entonces se tendría un sistema de $n-2$ ecuaciones diferenciales ordinarias y dos ecuaciones diferenciales integrables. Lo anterior es posible si se tiene otra simetría Z de V tal que $[Z, W] = \lambda W$ con λ un escalar real no nulo; en efecto,

suponga que se tiene una segunda simetría Z de V satisfaciendo $[Z,W]=\lambda W$, se ve que las funciones componentes de Z no dependen de la coordenada y^n, en efecto

$$
\begin{aligned}
\lambda W=[Z,W] &\Longrightarrow \lambda\frac{\partial}{\partial y^n}=\left[Z^i\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^n}\right]\\
&\Longrightarrow \lambda\frac{\partial}{\partial y^n}=-\frac{\partial Z^i}{\partial y^n}\frac{\partial}{\partial y^i}\\
&\Longrightarrow \frac{\partial Z^i}{\partial y^n}=0,\quad \forall i\in\{1,\dots,n-1\},
\end{aligned}
\tag{65}
$$

así que $Z^i=Z^i(y^1,\dots,y^{n-1})$ para $i=1,\dots,n-1$; por lo tanto el campo vectorial diferenciable $Z^1\frac{\partial}{\partial y^1}+\cdots+Z^{n-1}\frac{\partial}{\partial y^{n-1}}$ es una simetría del campo vectorial diferenciable $\overline{V}^1\frac{\partial}{\partial y^1}+\cdots+\overline{V}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y^{n-1}}$ y es posible aplicar el procedimiento previo para reducir el sistema (63) a un sistema de $n-2$ ecuaciones diferenciales ordinarias y una ecuaciones diferencial ordinaria integrable, lo que lleva a un sistema de $n-2$ ecuaciones diferenciales ordinarias y dos ecuaciones diferenciales ordinarias integrables. Repitiendo este proceso un número suficiente de veces, se obtendrían las soluciones del sistema de ecuaciones de movimiento original solo integrando ecuaciones diferenciales ordinarias y haciendo algunas operaciones algebraicas (cambios de coordenadas); esto es posible si se tiene un álgebra de Lie soluble de simetrías.

Definición 46. Álgebra de Lie soluble: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.

- Una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial L de $\mathfrak{g}$ tal que $[X,Y]\in L$ $\forall X,Y\in L$.
- Un subespacio vectorial I de $\mathfrak{g}$ se llama un ideal de $\mathfrak{g}$ si $[X,Y]\in I$ $\forall X\in I$ y $\forall Y\in\mathfrak{g}$. Observe que todo ideal es también una subálgebra de Lie.
- Se dice que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble si existe una sucesión finita de subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$, digamos $L_1,\dots,L_n$ con $n=dim(\mathfrak{g})$, tal que $\{0\}=L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_{n-1}\subset L_n=\mathfrak{g}$ y L_i es un ideal de L_{i+1} de codimension 1 para $i=0,1,\dots,n-1$.

Ejemplo 18.

- Toda álgebra de Lie Abeliana, es decir, donde todos sus elementos conmutan, es trivialmente un álgebra de Lie soluble.
- El álgebra de Lie formada por los campos vectoriales $V_1=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$, $V_2=z\frac{\partial}{\partial x}+w\frac{\partial}{\partial y}$, $V_3=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-z\frac{\partial}{\partial z}-w\frac{\partial}{\partial w}\in\mathcal{X}(\mathbb{R}^4)$ es un álgebra de Lie soluble.

Tenemos el teorema de Lie a continuación.

Teorema 47. *Teorema de Lie* [17]*: Sean $W_1,\dots W_n$ campos vectoriales diferenciales linealmente independientes en M. Si $W_1,\dots,W_n$ son simetrías de V y generan un álgebra de Lie soluble bajo el corchete de Lie $[,]$ de campos vectoriales, entonces el sistema definido por V en M es integrable por cuadraturas.*

En la práctica buscamos simetrías que formen un álgebra de Lie Abeliana, es decir, simetrías que conmuten entre ellas. Para un ejemplo no trivial de un álgebra de Lie soluble no Abeliana de simetrías de un sistema mecánico ver [20].

La integrabilidad de un campo vectorial V es usualmente estudiada en matemáticas por medio de sus estructuras geométricas compatibles [24]. Estructuras geométricas son definidas por campos tensoriales, y se dice que son compatibles cuando son invariantes bajo el flujo del campo vectorial [25]. Como un caso particular se tiene el de una función invariante bajo el flujo de un campo vectorial, es decir, una constante de movimiento. En la siguiente sección se estudian los campos tensoriales.

6. Tensores

En el lenguaje matemático moderno, los tensores se definen como objetos abstractos, independientes de coordenadas o índices. No obstante, al trabajar en un sistema de referencia específico, los tensores adquieren una representación en términos de

componentes. Aunque los tensores en sí no dependen del sistema de referencia, sus componentes sí lo hacen y varían en función de este.

En diversos textos, especialmente en la literatura física, los tensores suelen presentarse desde un enfoque basado en coordenadas, describiéndolos como un conjunto de cantidades (sus componentes) que dependen de las coordenadas de un espacio dado (una variedad diferencial) y que se transforman de manera bien definida bajo cambios de coordenadas [26, 27]. Este enfoque tiene la ventaja de requerir menos formalismo matemático, permitiendo una introducción más accesible a la manipulación de tensores. Sin embargo, al centrarse en la estructura local y en coordenadas, se pierden ciertos aspectos geométricos y conceptuales que emergen en una formulación global y libre de coordenadas.

En estas notas, adoptamos inicialmente una perspectiva abstracta y global para introducir los tensores, enfatizando su independencia de coordenadas. Posteriormente, desarrollamos su descripción local a partir de esta formulación abstracta, integrando ambos enfoques de manera coherente [7, 10, 15].

6.1. Tensores en un espacio vectorial.

Definición 48. Transformación multilineal: Sean $V_1, ..., V_k, W$ espacios vectoriales. Una transformación $T : V_1 \times \cdots \times V_k \longrightarrow W$ se dice k-lineal (o simplemente multilineal) si es lineal en cada argumento, es decir,

$$T(v_1, \ldots, v_i + av_i', \ldots, v_k) = T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + aT(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k)\,, \tag{66}$$

para todo $(v_1, \ldots, v_k) \in: V_1 \times \cdots \times V_k$ y para todo $a \in \mathbb{R}$.

Si $k = 1$ se dice que la transformación es lineal y si $k = 2$ se dice que la transformación es bilineal.

Ejemplo 19. Ejemplos de funciones multilineales:

- El producto punto en $\mathbb{R}^n$ es una función bilineal de dos vectores a valores reales.
- El producto cruz en $\mathbb{R}^3$ es una función bilineal de dos vectores a valores vectoriales.
- El determinante de una matriz cuadrada es una función multilineal de vectores a valores reales.

Definición 49. Producto tensorial: Sean $V_1, ..., V_k, W_1, ..., W_l$ espacios vectoriales. Sean $F : V_1 \times ... \times V_k \longrightarrow \mathbb{R}$ una transformación k-lineal y $G : W_1 \times ... \times W_l \longrightarrow \mathbb{R}$ una transformación l-lineal. El producto tensorial de F y G es la transformación $(k + l)$-lineal $F \otimes G : V_1 \times ... \times V_k \times W_1 \times ... \times W_l \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F \otimes G(v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_l) = F(v_1, ..., v_k)G(w_1, ..., w_l). \tag{67}$$

Sea V un espacio vectorial.

Definición 50. Covector: Un covector en V es una transformación lineal $\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}$.

El conjunto de todos los covectores en V es un espacio vectorial de la misma dimensión que V, se llama espacio dual de V y se denota por V^*.

Definición 51. Tensores covariantes y contravariantes:

- Un k-tensor covariante en V es un transformación k-lineal $T : V \times ... \times V \longrightarrow \mathbb{R}$.
- Un k-tensor contravariante en V es un transformación k-lineal $T : V^* \times ... \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo 20. Ejemplos de tensores covariantes:

- Cada función lineal $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es un 1-tensor covariante, es decir, un covector.
- El producto punto en $\mathbb{R}^n$ es un 2-tensor covariante.
- El determinante de de n vectores es un n-tensor covariante.

Un 0-tensor en V es un número real.

Definición 52. Tensor mixto: Un tensor mixto en V de tipo (k,l) es una transformación multilineal $T : V^* \times \cdots V^* \times V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, donde hay k copias de V^* y l copias de V.

En el resto de esta sección nos enfocaremos principalmente en tensores covariantes.

Definición 53. Tensores simétricos y antisimétricos:

- Un k-tensor covariante α en V se dice simétrico si su valor no cambia al intercambiar dos de sus argumentos, es decir,

$$\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = \alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k). \tag{68}$$

- Un k-tensor covariante α en V se dice antisimétrico o alternante (skew-symmetric) si su valor cambia de signo al intercambiar dos de sus argumentos, es decir,

$$\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -\alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k). \tag{69}$$

6.2. Campos tensoriales en una variedad. Sea M una variedad diferencial de dimensión n.

Definición 54. Covector tangente: Sea $p \in M$. Un covector tangente a p en M es una transformación lineal $\alpha_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$, es decir, un covector tangente a p en M es un elemento del espacio vectorial T_p^*M que se llama espacio cotangente a p en M.

Sean $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas alrededor de $p \in M$. Las funciones $dx^i|_p : T_p(M) \to R$ definidas por

$$dx^i|_p(v_p) = v_p^i\,, \tag{70}$$

donde $v_p = v_p^1 \frac{\partial}{\partial x^1}|_p + ... + v_p^n \frac{\partial}{\partial x^n}|_p = v_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, son covectores tangentes a p en M.

Todo covector tangente α_p a $p \in M$ es (localmente) combinación lineal de los covectores $dx^i|_p$,

$$\alpha_p = \alpha_{1p} dx^1|_p + ... + \alpha_{np} dx^n|_p\,, \tag{71}$$

con $\alpha_{1p}, \ldots, \alpha_{np} \in \mathbb{R}$.

Definición 55. Fibrado cotangente: El fibrado cotangente de M es la unión de todos los espacios cotangentes, se denota por T^*M,

$$T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M\,, \tag{72}$$

es una variedad diferencial de dimensión $2n$.

Si $(x^1, \ldots, x^n)$ son coordenadas alrededor de $p \in M$ entonces $(x^1, \ldots, x^n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ son coordenadas alrededor de $(p, \alpha_p) \in T^*M$.

Definición 56. Campo de covectores tangentes: Un campo diferencial de covectores tangentes en M es un mapeo diferenciable $\alpha : M \longrightarrow T^*M$ tal que para cada punto $p \in M$ se tiene que $\alpha(p) = \alpha_p \in T_p^*M$, es decir, un campo de covectores asigna a cada $p \in M$ un covector tangente a p en M.

En coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ alrededor de $p \in M$,

$$\alpha_p \;=\; \alpha_i(p) dx^i|_p, \tag{73}$$

donde $\alpha_i(p) \in \mathbb{R}$. Así que

$$\alpha \;=\; \alpha_i dx^i, \tag{74}$$

con $\alpha_i \in C^\infty(U \subseteq M)$ y dx^i son campos de covectores coordenados que funcionan como bases. El conjunto de todos los campos de covectores en M se denota por $\Omega^1(M)$.

Si $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ son nuevas coordenadas alrededor del punto p en la variedad M, podemos pasar de unas coordenadas viejas a unas nuevas mediante:

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} d\bar{x}^i. \tag{75}$$

Definición 57. Diferencial de una función diferenciable: Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, es decir, $f \in C^\infty(M)$. Para cada $p \in M$ la diferencial de f en p es la transformación lineal $df_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $df_p(v_p) = v_p(f)$ para todo $v_p \in T_pM$.

Entonces, la diferencial de una función diferenciable es un campo diferencial de covectores tangentes.

En coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ alrededor de $p \in M$, se tiene que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \,, \tag{76}$$

así que

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i|_p. \tag{77}$$

Definición 58. Campo de tensores: Un campo diferencial de k-tensores (smooth k-tensor field) covariantes (o contravariantes o mixtos) en M es un mapeo diferenciable A que asigna a cada $p \in M$ un k-tensor covariante (o contravariante o mixto) en T_pM, es decir, $A(p)$ es un k-tensor covariante (o contravariante o mixto) en T_pM.

Un campo diferencial de 0-tensores en M (o solo un 0-tensor) es una función diferenciable $f \in C^\infty(M)$.

En coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ alrededor de $p \in M$ se tiene:

- Si A es un campo diferencial de k-tensores covariantes (o solo un k-tensor covariante) en M entonces

$$A = A_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}, \tag{78}$$

  con $A_{i_1 \ldots i_k} \in C^\infty(M)$ las funciones componentes de A.
- Si A es un campo diferencial de k-tensores contravariantes (o solo un k-tensor contravariante) en M entonces

$$A = A^{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, \tag{79}$$

  con $A^{i_1 \ldots i_k} \in C^\infty(M)$ las funciones componentes de A.
- Si A es un campo diferencial de tensores mixtos de tipo (k, l) (o solo un (k, l)-tensor) en M entonces

$$A = A^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_l}, \tag{80}$$

  con $A^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_l} \in C^\infty(M)$ las funciones componentes de A.

Sea A un k-tensor covariante en M, en coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n)$ se tiene $A = A_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}$. Si tenemos un cambio de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ a nuevas $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$, podemos escribir el tensor A en las nuevas coordenadas, tenemos

$$A = \bar{A}_{i_1 \ldots i_k} d\bar{x}^{i_1} \otimes \cdots \otimes d\bar{x}^{i_k}. \tag{81}$$

Se sabe que $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j$, así que

$$A = A_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} = A_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \bar{x}^{j_k}} d\bar{x}^{j_1} \otimes \cdots \otimes d\bar{x}^{j_k}, \tag{82}$$

Por lo tanto

$$\bar{A}_{j_1 \ldots j_k} = A_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \bar{x}^{j_k}}. \tag{83}$$

La ecuación (83) es la regla general para la transformación de las componentes de un tensor covariante bajo un cambio de coordenadas. En el enfoque en coordenadas, los tensores covariantes son definidos como cantidades dependientes de coordenadas que se transforman de acuerdo a la ecuación 83 bajo un cambio de coordenadas [26].

Para un tensor contravariante $A = A^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$, la regla para el cambio de coordenadas es

$$\bar{A}^{j_1 \dots j_k} = A^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_k}}{\partial x^{j_k}}. \tag{84}$$

Ejemplo 21. Tensores en relatividad general:

- En relatividad general es espacio-tiempo está modelado matemáticamente por una variedad Riemanniana [26], es decir, una variedad diferencial M equipada con un tensor métrico g, éste es un 2-tensor covariante simétrico. En coordenadas locales $(x^1, ..., x^n)$ el tensor métrico tiene la forma

$$g = g_{ij} dx^i dx^j. \tag{85}$$

- En relatividad general la curvatura del espacio-tiempo está determinada matemáticamente por el tensor de curvatura de Riemann, el cual es un tensor mixto 1-vez contravariante y 3-veces covariante cuyas componentes locales R^l_{ijk} son definidas por medio del tensor métrico (ver detalles en [26]).

En Mecánica Clásica los tensores suelen aparecer como estructuras geométricas, las más conocidas son estructuras de Poisson, definidas por tensores de Poisson, y en particular las estructuras simplécticas, definidas por formas diferenciales simplécticas. Las estructuras de Poisson fueron introducidas por Lichnerowicz [28] (para una breve historia en las variedades de Poisson ver [15]). Por otro lado, los llamados tensores de Nijenhuis y tensores de Haantjes, los cuales son tensores mixtos, han sido estudiados en relación con la integrabilidad de sistemas Hamiltonianos [29, 30, 31, 32, 33, 34].

6.3. Estructuras de Poisson. Sea M una variedad diferencial.

Definición 59. Tensor de Poisson: Un tensor de Poisson en M es un 2-tensor contravariante antisimétrico P tal que $[P, P]_{SN} = 0$, donde $[,]_{SN}$ es el corchete de Schouten–Nijenhuis [32, 15]. Si P es un tensor de Poisson en M se dice que (M, P) es una variedad de Poisson.

Definición 60. Paréntesis de Poisson: Un paréntesis de Poisson en M es un corchete de Lie en $C^\infty(M)$, denotado por $\{,\}$ (bilineal, antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi), que satisface la regla de Leibniz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}. \tag{86}$$

Varios ejemplos de paréntesis de Poisson son presentados en [15].

Teorema 61. *Estructura de Poisson* [15]*:*

- *Si P es un tensor de Poisson en M entonces P define un paréntesis de Poisson en M por*

$$\{f, g\} = P(df, dg). \tag{87}$$

- *Si $\{,\}$ es un paréntesis de Poisson en M entonces existe un tensor de Poisson que lo define.*

En cualquier caso se dice que se tiene una estructura de Poisson en M.

Para más detalles en estructuras de Poisson ver [35].

Sea (M, P) una variedad de Poisson de dimensión m. en coordenadas locales $(x^1, \dots, x^m)$ en M se tiene que

$$P = \sum_{1 \le i < j \le m} \{x^i, x^j\} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{88}$$

y para $f, g \in C^\infty(M)$

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \{x^i, x^j\} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}, \tag{89}$$

donde $\{,\}$ es el paréntesis de Poisson definido por P.

Cada 2-tensor contravariante Q es una variedad diferencial M define un homomorfismo de fibrados $Q^\sharp : T^*M \longrightarrow TM$ dado para cada $x \in M$ por

$$\alpha_x(Q_x^\sharp \beta_x) = Q_x(\alpha_x, \beta_x); \tag{90}$$

también se puede hacer referencia al mapeo inducido $Q^\sharp : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$\alpha(Q^\sharp(\beta)) = Q(\alpha, \beta). \tag{91}$$

El rango de Q en el punto $x \in M$ es el rango de la transformación lineal $Q_x^\sharp$. Se dice que Q es de rango constante si tiene el mismo rango para todo $x \in M$. El rango de un tensor de Poisson P en cualquier punto en M es par [35].

El siguiente teorema debido a Weinstein describe la estructura local de una variedad de Poisson.

Teorema 62. *Weinstein's splitting theorem* [36, 37]*: Sea (M, P) una variedad de Poisson. Sea $x \in M$ con rango $2r$. Existe una carta coordenada en un abierto U de x con coordenadas $(q^1, \ldots, q^r, p^1, \ldots, p^r, z^1, \ldots, z^s)$ tales que*

$$P = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p^i} + \sum_{1 \le k < l \le s} \phi^{kl}(z) \frac{\partial}{\partial z^k} \wedge \frac{\partial}{\partial z^l}, \tag{92}$$

donde las funciones φ^{kl} son funciones diferenciables en U que dependen solo de las coordenadas $z = (z^1, \ldots, z^s)$ y se anulan cuando $z = 0$; las coordenadas $(q^1, \ldots, q^r, p^1, \ldots, p^r, z^1, \ldots, z^s)$ se llaman coordenadas de división en $x \in M$. En particular, si P es localmente de rango constante, entonces existen coordenadas locales $(q^1, \ldots, q^r, p^1, \ldots, p^r, z^1, \ldots, z^s)$ tales que

$$P = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q^i} \wedge \frac{\partial}{\partial p^i}; \tag{93}$$

en este caso las coordenadas $(q^1, \ldots, q^r, p^1, \ldots, p^r, z^1, \ldots, z^s)$ se llaman coordenadas de Darboux.

La existencia de una estructura de Poisson en una variedad diferencial permite la construcción de campos vectoriales Hamiltonianos, los cuales definen dinámica Hamiltoniana en tal variedad. Sea (M, P) una variedad de Poisson.

Teorema 63. *Campo vectorial Hamiltoniano* [15]*: Para cada $f \in C^\infty(M)$ existe uno y solo un campo vectorial X_f en M tal que*

$$\{g, f\} = X_f g \quad \forall g \in C^\infty(M), \tag{94}$$

donde $\{,\}$ es el paréntesis de Poisson definido por P. En términos del mapeo inducido $P^\sharp$ se tiene

$$X_f = P^\sharp(df). \tag{95}$$

X_f se llama el campo vectorial Hamiltoniano para f.

Proposición 64.

- *La asignación $f \mapsto X_f$ es un antihomomorfismo de álgebras de Lie entre las álgebras de Lie $(C^\infty(M), \{,\})$ y $(\mathfrak{X}(M), [,])$, en efecto se tiene que $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.*
- *$g \in C^\infty(M)$ es constante a lo largo de las curvas integrales de X_f, es decir $L_{X_f} g = 0$, si y solo si $\{f, g\} = 0$.*
- *Los flujos Hamiltonianos preservan la estructura de Poisson, es decir, $L_{X_f} P = 0$ para toda $f \in C^\infty(M)$.*
- *Si $f, g \in C^\infty(M)$ son constantes a lo largo de las curvas integrales de X_h entonces también lo es $\{f, g\}$.*

Para la prueba de esta proposición y para la prueba del teorema 63 ver [15, 35]. En coordenadas de división $(q^1,\dots,q^r,p^1,\dots,p^r,z^1,\dots,z^s)$ para (M,P) se tiene

$$X_f=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p^i}\right)+\sum_{1\le k<l\le s}\phi^{kl}(z)\frac{\partial f}{\partial z^l}\frac{\partial}{\partial z^k}-\sum_{1\le k<l\le s}\phi^{kl}(z)\frac{\partial f}{\partial z^k}\frac{\partial}{\partial z^l}, \tag{96}$$

o en una forma más compacta

$$X_f=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p^i}\right)+\sum_{k,l=1}^{s}\hat{\phi}^{kl}(z)\frac{\partial f}{\partial z^l}\frac{\partial}{\partial z^k}, \tag{97}$$

donde$\hat{\phi}^{kl}(z)=\phi^{kl}(z)$ para $k<l$, $\hat{\phi}^{kl}(z)=-\phi^{kl}(z)$ para $k<l$ y $\hat{\phi}^{kl}(z)=0$ para $k=l$. Para más detalles en estructuras de Poisson y Mecánica Hamiltoniana en variedades de Poisson ver [15, 35, 38].

Cada variedad de Poisson es de manera natural la unión disjunta de subvariedades inmersas (subvariedades que pueden tener una topología diferente a la topología de subespacio, para detalles en este tipo de subvariedades ver [7]), cuyos espacios tangentes son generados por los campos vectoriales Hamiltonianos. La estructura de Poisson restringida a cada una de estas subvariedades es una estructura de Poisson de rango máximo par, es decir, una estructura simpléctica, por lo que estas subvariedades se llaman hojas simplécticas de la estructura de Poisson (estas hojas forman una estructura geométrica llama foliación, en particular forman la foliación simpléctica). Para cada $x\in M$ la hoja simpléctica que contiene a x está dada

$$\mathcal{L}_x(M)=\{x'\in M|\exists \text{ un camino Hamiltoniano a trozos en M de x a } x'\}. \tag{98}$$

Las hojas simplécticas son cerradas bajo la dinámica de cualquier campo vectorial Hamiltoniano. En la sección 8 se presentan las estructuras simplécticas con detalle.

7. Formas diferenciales

En la sección anterior fueron presentados dos tipos de tensores covariantes, los simétricos y los antisimétricos (o alternantes). Un tipo especial de tensores simétricos son las métricas Riemannianas. En esta sección se revisa la teoría de las formas diferenciales (differential forms), las cuales son campos tensoriales alternantes.

Sea M una variedad diferencial de dimensión n.

7.1. 0-formas.

Definición 65. 0-forma: Una 0-forma diferencial en M es una función diferenciable $f\in C^\infty(M)$.

En mecánica, una función de estado termodinámico, un Lagrangiano y un Hamiltoniano son ejemplos de 0-formas definidos sobre un espacio de configuración o espacio fase, respectivamente (en general, un observable es una 0-forma).

Definición 66. Derivada de una 0-forma: Sea $f\in C^\infty(M)$. Para cada $p\in M$ la diferencial de f en p es la transformación lineal $df_p:T_pM\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $df_p(v_p)=v_p(f)$ para todo $v_p\in T_pM$.

Sean $(x^1,\dots,x^n)$ coordenadas alrededor de p en M, se tiene que

$$\begin{aligned} df_p&=\frac{\partial f}{\partial x^1}(p)dx^1|_p+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x^n}(p)dx^n|_p\\ &=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i|_p\,, \end{aligned} \tag{99}$$

donde

$$dx^i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\right)=\delta^i_j=\begin{cases}1\,,\ si\ i=j.\\ 0\,,\ si\ i\neq j.\end{cases} \tag{100}$$

Si v_p es un vector tangente a p en M, entonces

$$v_p = v_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \,, \tag{101}$$

donde $v_p^i \in \mathbb{R}$. Luego

$$dx^i|_p(v_p) = v_p^i \in \mathbb{R}. \tag{102}$$

Ejemplo 22. Sean (x, y, z) coordenadas alrededor del punto $p = (1, 0, -2) \in M$ y la función $f(x, y, z) = x^2y - 2xz^3$. Calcular df_p y $df_p(v_p)$ con $v_p = 5\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p - 2\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p - \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$.

- df_p

$$\begin{aligned} df_p &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)dx\Big|_p + \frac{\partial f}{\partial y}(p)dy\Big|_p + \frac{\partial f}{\partial z}(p)dz\Big|_p \\ &= (2xy - 2z^3)\Big|_{(1,0,-2)} dx\Big|_{(1,0,-2)} + x^2\Big|_{(1,0,-2)} dy\Big|_{(1,0,-2)} - 6xz^2\Big|_{(1,0,-2)} dz\Big|_{(1,0,-2)} \\ &= 16dx\Big|_{(1,0,-2)} + dy\Big|_{(1,0,-2)} - 24dz\Big|_{(1,0,-2)} \,. \end{aligned}$$

- $df_p(v_p)$

$$\begin{aligned} df_p(v_p) &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)dx\Big|_p(v_p) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)dy\Big|_p(v_p) + \frac{\partial f}{\partial z}(p)dz\Big|_p(v_p) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)v_p^x + \frac{\partial f}{\partial y}(p)v_p^y + \frac{\partial f}{\partial z}(p)v_p^z \\ &= (16)(5) + (1)(-2) - (24)(-1) \\ &= 102 \,. \end{aligned}$$

7.2. 1-formas.

Definición 67. 1-forma: Una 1-forma diferencial en M es un campo de covectores tangentes en M, es decir, un mapeo diferenciable $\theta : M \longrightarrow T^*M$ tal que para cada $p \in M$ $\theta(p) = \theta_p : T_pM \to \mathbb{R}$ es una transformación lineal.

El conjunto de 1-formas diferenciales en M se denota igual que el conjunto de campos de covectores tangentes en M, a saber, $\Omega^1(M)$. En coordenadas $(x^1, ..., x^n)$ alrededor de $p \in M$, tenemos que $dx^1, ..., dx^n$ son 1-formas diferenciales en M, llamadas las 1-formas coordenadas. Cualquier 1-forma diferencial θ en M se escribe como

$$\theta = \theta_i dx^i \,, \tag{103}$$

con $\theta_i \in C^\infty(M)$. Evaluada en p, la expresión (103) queda como

$$\theta_p = \theta_i(p)dx^i|_p \,. \tag{104}$$

Así que si $v_p = v_p^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es un vector tangente a p en M, entonces

$$\theta_p(v_p) = \theta_i(p)v_p^i. \tag{105}$$

Ejemplo 23. Sean las coordenadas (x, y, z) alrededor del punto $p = (0, 1, -1)$ en M. Calcular $\theta_p(v_p)$ donde $\theta = (x-y)dx + (x^2+3z^2+4y^2)dy - 2\cos x dz$ es una 1-forma y $v_p = 5\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p - 2\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p - \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$ es un vector tangente a p en M.

Sol: De la expresión (104), evaluamos la 1-forma θ en el punto $p = (0, 1, -1)$:

$$\begin{aligned} \theta_p &= \theta_i(p)dx^i\Big|_p \\ &= -dx\Big|_{(0,1,-1)} + 7dy\Big|_{(0,1,-1)} - 2dz\Big|_{(0,1,-1)}. \end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned}\theta_p(v_p) &= (-1)(5) + (7)(-2) + (-2)(-1)\\ &= -5 - 14 + 2\\ &= -17\,.\end{aligned} \tag{107}$$

Si $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ son nuevas coordenadas alrededor del punto p en la variedad M, la regla de transformación para las 1-formas coordenadas dx^i es

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} d\bar{x}^i\,. \tag{108}$$

Ejemplo 24. Cambio de coordenadas cartesianas a polares.
Buscando hacer el cambio

$$(x, y) \to (r, \theta)\,,$$

partimos de las expresiones de las coordenadas cartesianas en términos de las coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\sin\theta\,, \tag{109}$$

y basándonos en la regla de transformación, tenemos

$$\begin{aligned}dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta\\ &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta\,,\end{aligned} \tag{110}$$

y

$$\begin{aligned}dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta\\ &= \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta\,.\end{aligned} \tag{111}$$

La derivada de una 0-forma (la diferencial de una función diferenciable) es una 1-forma diferencial.

7.3. 2-formas.

Definición 68. 2-forma: Una 2-forma diferencial ω en M es un mapeo diferenciable ω que asigna a cada punto $p \in M$ una transformación bilineal antisimétrica. $\omega(p) = \omega_p$: $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$

Recordemos que una transformación es bilineal (o en general multilineal) si es lineal en cada argumento $T(v_1 + av_2, w) = T(v_1, w) + aT(v_2, w)$ para todo $v_1, v_2, w \in T_pM$ y para todo $a \in \mathbb{R}$ (lo mismo en el segundo argumento). Y es antisimétrica si al intercambiar dos argumentos obtenemos un signo negativo ($T(v, w) = -T(w, v)$).

Definición 69. Producto Wedge: Sean θ y α 1-formas diferenciales en M, el producto Wedge (también llamado producto cuña) se denota por $\theta \wedge \alpha$ es una 2-forma diferencial en M definida en cada $p \in M$ por

$$(\theta \wedge \alpha)|_p(v_p, \bar{v}_p) = \begin{vmatrix} \theta_p(v_p) & \theta_p(\bar{v}_p) \\ \\ \alpha_p(v_p) & \alpha_p(\bar{v}_p) \end{vmatrix}\,. \tag{112}$$

Sean $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas alrededor de $p \in M$, $dx^i \wedge dx^j$ son las 2-formas coordenadas. Toda 2-forma diferencial ω en M se escribe como:

$$\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j\,, \tag{113}$$

con $\omega_{ij} \in C^\infty(M)$. Las 2-formas coordenadas siguen las siguientes propiedades:

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i\,, \tag{114}$$

$$dx^i \wedge dx^i = 0\,. \tag{115}$$

Ejemplo 25. Sean (x, y, z) coordenadas alrededor del punto $p = (1, 2, 3) \in M$ y la 2-forma $\omega = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dx \wedge dy - 4dx \wedge dz + 2xydy \wedge dz$. Calcular $\omega_p(v_p, \bar{v}_p)$, en el que $v_p = \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p - 2\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + 5\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$ y $\bar{v}_p = \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p - 3\frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$.

Solución: Primero, evaluando la 2-forma ω en $p = (1, 2, 3)$:

$$\omega_p = \sqrt{14}(dx \wedge dy)\Big|_{(1,2,3)} - 4(dx \wedge dz)\Big|_{(1,2,3)} + 4(dy \wedge dz)\Big|_{(1,2,3)} \tag{116}$$

Ahora, para calcular $\omega_p(v_p, \bar{v}_p)$, utilizamos la definición del producto Wedge 112 para cada componente de la 2-forma:

$$dx \wedge dy\Big|_p (v_p, \bar{v}_p) = \begin{vmatrix} v_p^1 & \bar{v}_p^1 \\ v_p^2 & \bar{v}_p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (-2)(1) = 2\,. \tag{117}$$

$$dx \wedge dz\Big|_p (v_p, \bar{v}_p) = \begin{vmatrix} v_p^1 & \bar{v}_p^1 \\ v_p^3 & \bar{v}_p^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (1)(-3) - (1)(5) = -8\,. \tag{118}$$

$$dy \wedge dz\Big|_p (v_p, \bar{v}_p) = \begin{vmatrix} v_p^2 & \bar{v}_p^2 \\ v_p^3 & \bar{v}_p^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (-2)(-3) - (0)(5) = 6\,. \tag{119}$$

Sustituyendo las últimas tres expresiones en (116), obtenemos finalmente:

$$\omega_p(v_p, \bar{v}_p) = 2\sqrt{14} + 32 + 24 = 2\sqrt{14} + 56\,. \tag{120}$$

Definición 70. Derivada de una 1-forma: Sea $\theta = \theta_i dx^i$ una 1-forma diferencial en M. Su derivada es una 2-forma diferencial en M dada por

$$d\theta = d\theta_i \wedge dx^i = \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i\,. \tag{121}$$

Ejemplo 26. Sea la 1-forma $\theta = x^2 y dx + (x^2 + y^2 + z^2)dy - 4dz$, calcule $d\theta$.

Solución:

$$\begin{aligned} d\theta = {} & \frac{\partial(x^2 y)}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial(x^2 y)}{\partial y} dy \wedge dx \\ & + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial y} dy \wedge dy + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)}{\partial z} dz \wedge dy\,. \end{aligned} \tag{122}$$

Utilizando las propiedades (114) y (115):

$$\begin{aligned} d\theta &= x^2(-dx \wedge dy) + 2x dx \wedge dy + 2z(-dy \wedge dz) \\ &= (2x - x^2)dx \wedge dy - 2\,z\,dy \wedge dz\,. \end{aligned} \tag{123}$$

7.4. k-formas. En general, una k-forma diferencial (differential k-form) α en M asigna a cada punto p en M una transformación multilineal $\alpha_p : T_pM \times ... \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ (T_pM k veces) alternante.

El producto Wedge de k 1-formas coordenadas $dx^1, \ldots, dx^k$ es una k-forma diferencial definida por

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k|_p(v_p^1, \ldots, v_p^k) = \begin{vmatrix} dx^1(v_p^1) & . & . & . & dx^1(v_p^k) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ dx^k(v_p^1) & . & . & . & dx^k(v_p^k) \end{vmatrix}\,. \tag{124}$$

Toda k-forma diferencial en M es (localmente) combinación lineal, con funciones diferenciables como escalares, de las k-formas coordenadas $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. El conjunto de las k-formas diferenciales en M se denota por $\Omega^k(M)$.

Definición 71. Derivada de una k-forma diferencial: Si $\alpha = \alpha_{i_1\dots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ es una k-forma diferencial, entonces la derivada es una $(k+1)$-forma diferencial dada por

$$d\alpha = d(\alpha_{i_1\dots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \,. \tag{125}$$

Ejemplo 27. Sean (x, y, z, w) coordenadas en M (cuya dimensión es 4).

- Obtener una 3-forma a partir de la 2-forma $\omega = 5x^2z^2dx \wedge dy - 4w^2dy \wedge dw + (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)dz \wedge dw$.

Solución: Análogamente al ejemplo anterior, sabemos que podemos descartar los términos con producto Wedge entre la misma variable. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial(5x^2z^2)}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)}{\partial x} dx \wedge dz \wedge dw \\ &\quad + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dw \\ &= (10x^2z)dx \wedge dy \wedge dz + (2x)dx \wedge dz \wedge dw + (2y)dy \wedge dz \wedge dw \end{aligned} \,. \tag{126}$$

- Obtener una 4-forma a partir de la 3-forma $\alpha = xyzdx \wedge dy \wedge dz - zxw^4dx \wedge dy \wedge dw$.

Solución: Una vez más, al considerar la derivación en los términos con respecto a las variables que no aparecen en el producto Wedge que los acompaña, obtenemos:

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\frac{\partial(zxw^4)}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \wedge dw \\ &= -xw^4(-dx \wedge dz) \wedge dy \wedge dw \\ &= -xw^4 dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw \,. \end{aligned} \tag{127}$$

Teorema 72. *Propiedades de la derivada de formas diferenciales* [7]*: Sean α y β k-formas y $a \in \mathbb{R}$:*

1. $d(a\alpha + \beta) = ad\alpha + d\beta$
2. $d(d\alpha) = 0$
3. $(df)(V) = Vf \in C^\infty(M)$, *con* $f \in C^\infty(M)$ *y* $V \in \mathfrak{X}(M)$.

7.5. Producto interior. También llamado contracción.

1. Sea θ una 1-forma diferencial en M y $V \in \mathfrak{X}(M)$, el producto interior entre θ y V es una 0-forma diferencial (función diferenciable) dada por

$$(V \lrcorner \theta)_p = \theta_p(V_p). \tag{128}$$

También se denota por $i_V\theta$.

Ejemplo 28. Sean (x, y, z, w) coordenadas en M, $\theta = xydx + \sin(x + y + z)dx - dz$ una 1-forma y $V = \sqrt{x-y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x^2y^2\frac{\partial}{\partial z}$ un campo vectorial. Calcule $V \lrcorner \theta$.

Solución: Visto en términos de componentes:

$$\theta = \theta_i dx^i \qquad\qquad V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \,, \tag{129}$$

(130)

se obtiene que:

$$V \lrcorner \theta = \theta_i V^i \,. \tag{131}$$

Por lo que el producto interior está dado por

$$\begin{aligned} V \lrcorner \theta &= \theta_1 V^1 + \theta_2 V^2 + \theta_3 V^3 \\ &= xy\sqrt{x-y} + \sin(x + y + z) - x^2y^2 \,. \end{aligned} \tag{132}$$

2. Sea ω una 2-forma diferencial en M y $V \in \mathfrak{X}(M)$, el producto interior entre ω y V es una 1-forma diferencial dada por

$$(V \lrcorner \omega)_p(W_p) = \omega_p(V_p, W_p)\,, \tag{133}$$

para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$. También se denota por $i_V\omega$.

Ejemplo 29. Dada la 2-forma $\omega = xydx\wedge dy+\sin(x+y+z)dy\wedge dz$. Calcular el producto interior con el campo vectorial V utilizado en el ejemplo anterior.

Solución: Visto en términos de componentes:

$$\omega = \omega_{ij}dx^i \wedge dx^j \qquad\qquad V = V^i\frac{\partial}{\partial x^i}\,, \tag{134}$$

tenemos que el producto interior entre una 2-forma y el campo vectorial es:

$$V \lrcorner \omega = \omega_{ij}V^i dx^j\,. \tag{135}$$

Así, considerando que ω es antisimétrica ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$):

(136)

$$\begin{aligned} V \lrcorner \omega &= \omega_{12}V^1dy + \omega_{21}V^2dx + \omega_{23}V^2dz + \omega_{32}V^3dy \\ &= xy\sqrt{x-y}dy + (-xy)(1)dx + \sin(x+y+z)(1)dz + (-\sin(x+y+z))(xry^2)dy \\ &= -xydx + (xy\sqrt{x-y} - x^2y^2\sin(x+y+z))dy + \sin(x+y+z)dz\,. \end{aligned}$$

3. En general el producto interior entre una k-forma diferencial y un campo vectorial diferencial es una (k-1)-forma diferencial.

7.6. Derivada de Lie. Sean M y N variedades diferenciales, y $F : M \longrightarrow N$ una mapeo diferenciable.

Definición 73. Pullback: Para una k-forma diferencial α en N, el pullback de α por F es la k-forma diferencial $F^*\alpha$ en M definida por

$$(F^*\alpha)_p(v_p^1, \cdots, v_p^k) = \alpha_{F(p)}(DF_pv_p^1, \cdots, Df_pv_p^k)\,, \tag{137}$$

para todo $v_p^1, \cdots, v_p^k \in T_pM$.

Teorema 74. *Propiedades del Pullback* [7]*: Para α, β formas diferenciales en N, $f \in C^\infty(N)$ y $c \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente:*

- $F^*f = f \circ F$.
- $F^*(f\alpha) = F^*fF^*\alpha$.
- $F^*(c\alpha + \beta) = cF^*\alpha + F^*\beta$.
- $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$.
- $F^*d\alpha = dF^*\alpha$.

Definición 75. Derivada de Lie: Sea α una k-forma diferencial en M y $V \in \mathfrak{X}(M)$. La derivada de Lie de α con respecto de V es la k-forma diferencial en M definida por

$$L_V\alpha = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Psi_s^*\alpha, \tag{138}$$

donde Ψ es el flujo de V.

La derivada de Lie mide el cambio de la forma diferencial a lo largo del flujo del campo vectorial. Si $L_V\alpha = 0$ se dice que α es invariante bajo el flujo de V.

Teorema 76. *Propiedades de la derivada de Lie* [7]*: Sean $f \in C^\infty(M)$, α, β formas diferenciales en M y $V, W \in \mathfrak{X}(M)$:*

- $L_Vf = Vf$.
- $L_V(f\alpha) = (L_Vf)\alpha + fL_V\alpha$.
- $L_Vd\alpha = d(L_v\alpha)$.
- $L_V(\alpha \wedge \beta) = (L_V\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_V\beta)$.
- $L_V\alpha = V \lrcorner d\alpha + d(V \lrcorner \alpha)$ *(Fórmula de Cartan).*
- $[V, W] \lrcorner \alpha = L_V(W \lrcorner \alpha) - W \lrcorner (L_V\alpha)$.

8. Mecánica Hamiltoniana

La Mecánica Clásica inicia con el trabajo de Sir Isaac Newton (1642-1727) en su célebre libro Philosophiæ naturalis principia mathematica. Existen dos reformulaciones de la Mecánica Clásica de Newton, a saber, la formulación Lagrangiana y la formulación Hamiltoniana. La formulación Lagrangiana puede considerarse más fundamental en la medida en que se deriva de principios variacionales, proporcionando un marco general para la deducción de las ecuaciones de movimiento a partir de una función escalar. Por su parte, la formulación Hamiltoniana se fundamenta directamente en el concepto de energía, lo que permite una descripción más estructurada en términos de coordenadas canónicas y facilita el análisis de propiedades como la conservación y las simetrías. En la mayoría de los casos de interés físico, ambas formulaciones son matemáticamente equivalentes [15].

Recordemos que para un sistema Lagrangiano la función Lagrangiana está definida en el espacio tangente TQ (localmente ésta depende de las coordenadas generalizadas y de las velocidades generalizadas) de una variedad diferencial Q llamada el espacio configuración (ver subsección 3.5). Consideremos un sistema Lagrangiano con espacio configuración Q, coordenadas generalizadas $(q^1, ..., q^n)$ y función Lagrangiana $L = L(q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n, t)$. Se definen los llamados momentos generalizados (o conjugados) por $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$. Si la Lagrangiana es regular, es decir, $det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) \neq 0$, se tiene que las variables $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ son coordenadas locales independientes para T^*Q. Es posible definir una nueva función H en T^*Q (el fibrado cotangente) como la transformación de Legendre de la Lagrangiana con respecto a las variables $(\dot{q}^1, ..., \dot{q^n})$. Las transformaciones de Legendre son una herramienta matemática muy útil, de hecho, éstas transforman funciones en un espacio vectorial a funciones en el espacio dual, a saber, para una función convexa $f(x^1, ..., x^n)$ definida en un espacio vectorial E con coordenadas $(x^1, ..., x^n)$ (convexa significa que $det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) \neq 0$), la transformación de Legendre es una función $g(p_1, ..., p_n) =$ en el espacio dual E^* de E con coordenadas $(p_1, ..., p_n)$ definidas por $p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. La transformación de Legendre es involutiva, es decir, g es la transformación de Legendre de f si y solo si f es la transformación de Legendre de g (para detalles ver [3]). Se define H en T^*Q con las nuevas coordenadas $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ por

$$H(q, p, t) = p_j \dot{q}^j - L(q, \dot{q}, t), \tag{139}$$

se tiene que las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \tag{140}$$

son equivalentes a las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{q}^1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \quad \vdots \\ \dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \\ \quad \vdots \\ \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n}. \end{cases} \tag{141}$$

El sistema de ecuaciones (141) se llama sistema de ecuaciones de Hamilton para la Hamiltoniana H [3, 39, 12].

Para un sistema físico, la función Lagrangiana tiene la forma en coordenadas

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m (\dot{q}^i)^2 - U(q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n, t), \tag{142}$$

ésta es la diferencia entre la energía cinética $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m(\dot{q}^i)^2$ y la energía potencial $U = U(q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n, t)$. Cuando la función de energía potencial U tiene la forma $U = U(q^1, ..., q^n, t)$ entonces la función de energía cinética es $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m}(p^i)^2$ y la función Hamiltoniana es la energía total del sistema $H = T + U = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m}(p^i)^2 + U(q^1, ..., q^n, t)$.

Ejemplo 30. Ejemplos de función Hamiltoniana de sistemas físicos relevantes:

- La partícula libre: $n = 1$, $U = 0$, $H = \dfrac{1}{2m} p^2$.
- El oscilador armónico n-dimensional: $U = \frac{1}{2}(k_1 q_1^2 + \cdots + k_n q_n^2)$ con $k_i \in \mathbb{R}$. La función Hamiltoniana es $H(q, p) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + \cdots + p_n^2) + \frac{1}{2}(k_1 q_1^2 + \cdots + k_n q_n^2)$. El caso especial $k_1 = \cdots = k_n = k$ corresponde al oscilador armónico isotrópico.
- El problema de fuerza central: $U = U(r)$ con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, (x, y, z) son coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$. La parte radial del sistema está descrita por el Hamiltoniano $H = \frac{1}{2\,m} p_r^2 + \frac{L^2}{2\,m\,r^2} + U(r)$. Aquí L es una constante (momento angular del sistema).
- El problema de Kepler (el movimiento relativo de dos cuerpos con interacción gravitacional Newtoniana): $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ donde $k > 0$ es una constante.
- El problema de N cuerpos: consideremos N partículas con masas m_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, moviéndose en $\mathbb{R}^3$ con un potencial dependiendo solo de las distancias relativas de las partículas $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. $U = U(\{r_{ij}\})$, $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i} |\mathbf{p}_i|^2 + U(\{r_{ij}\})$ donde $\mathbf{p}_i$ es el momento canónico asociado a $\mathbf{r}_i$.
- El oscilador armónico dependiente del tiempo ($n = 1$): $U = \omega^2(t) q^2$ (frecuencia angular dependiente del tiempo), $H = \frac{1}{2m} p^2 + \omega^2(t) q^2$. Dicho sistema aparece en muchos problemas físicos [40, 41].

Los sistemas Hamiltonianos son sistemas mecánicos en variedades diferenciales donde las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Se ha visto que en algunos casos las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton, lo que significa que es posible pasar de la descripción Lagrangiana de un sistema dinámico a una descripción Hamiltoniana equivalente; para esto la función Hamiltoniana es definida para cada punto fijo en el espacio configuración como la transformación de Legendre de la función Lagrangiana regular (convexa con respecto a las velocidades generalizadas) considerando esta última como una función en el espacio tangente del punto fijo en el espacio configuración, entonces la Hamiltoniana es una función definida en el espacio cotangente del espacio configuración [3, 39, 12].

Para un sistemas Hamiltoniano el campo vectorial dinámico es un campo vectorial Hamiltoniano para una función distinguida llamada la Hamiltoniana del sistema. Los campos vectoriales Hamiltonianos en un variedad diferencial son construidos por medio de una estructura geométrica adiciona sobre dicha variedad, usualmente ésta es una estructura de Poisson (ver subsección 6.3) definida por una forma simpléctica. En este contexto, el problema de Hamiltonización de un sistema mecánico (M, V) consiste en determinar las condiciones bajo las cuales existe una estructura geométrica, en particular una estructura de Poisson, en M tal que V sea un campo vectorial Hamiltoniano [42, 43, 44]. La geometría simpléctica, el estudio de las estructuras simplécticas, es considerada el formalismo geométrico natural donde la teoría de la Mecánica Hamiltoniana se desarrolla. A continuación se presenta un breve repaso de la geometría simpléctica y la formulación geométrica de la Mecánica Hamiltoniana (para detalles ver [2, 45, 11, 7, 15]).

8.1. Geometría simpléctica.

Sea M una variedad diferencial.

Definición 77. Sea ω una 2-forma diferencial en M.

- Se dice que ω es cerrada si $d\omega = 0$.
- Se dice que ω es no degenerada si para cada 1-forma α en M existe uno y solo un campo vectorial X en M tal que $X \lrcorner \omega = \alpha$.

Una estructura simpléctica en M es una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada (también llamada forma simpléctica).

Si ω es una estructura simpléctica en M se dice que (M, ω) es una variedad simpléctica.

TEOREMA 78. *Teorema de Darboux* [46]*: Si* (M, ω) *es una variedad simpléctica entonces* M *es de dimensión par, digamos* $dim(M) = 2n$*, y alrededor de cada punto* $p \in M$ *existen coordenadas locales* $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$*, llamadas coordenadas de Darboux o coordenadas canónicas, tales que*

$$\omega = dq^i \wedge dp_i. \tag{143}$$

Ejemplo 31. Ejemplos de variedades simplécticas:

- $(M = R^2, \omega)$ es una variedad simpléctica con estructura simpléctica ω dada en coordenadas cartesianas (x, y) por $\omega = dx \wedge dy$.
- El toro T^2 es una variedad simpléctica con estructura simpléctica ω dada en coordenadas periódicas (θ, φ) por $\omega = d\theta \wedge d\varphi$.
- El fibrado cotangente T^*Q de una variedad diferencial Q tiene estructura simpléctica natural dada en coordenadas locales $(x^1, ..., x^n, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ por $\omega = dx^i \wedge d\alpha_i$. El fibrado cotangente una variedad diferencial es el espacio fase natural en Mecánica Hamiltoniana.

8.2. Campos vectoriales Hamiltonianos y el paréntesis de Poisson. Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$.

Para cada $f \in C^\infty(M)$ es asignado uno y solo un campo vectorial diferenciable X_f en M, llamado el campo vectorial Hamiltoniano para f, de acuerdo a

$$X_f \lrcorner \omega \; = \; df \; . \tag{144}$$

La estructura simpléctica ω induce un mapeo invertible $\flat : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ (algunas veces denotado por $\overline{\omega}$) definido por $\flat(X) = X \lrcorner \Omega$ [47, 2, 7, 15]. Se tiene que $\flat(X_f) = df$ o equivalentemente $X_f = \flat^{-1} df$. En coordenadas canónicas $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$, X_f tiene la forma

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \; . \tag{145}$$

La asignación $f \longmapsto X_f$ es lineal

$$X_{f + c\, g} \; = \; X_f + c X_g \; , \tag{146}$$

$\forall f, g \in C^\infty(M)$ y $\forall c \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 79. *Loa flujos Hamiltonianos preservan la estructura simpléctica, en efecto,* $L_{X_f} \omega = 0$ *para toda* $f \in C^\infty(M)$.

La estructura simpléctica ω en M define una estructura de Poisson P en M ((M, P) es una variedad de Poisson) por

$$P(\alpha, \beta) = \omega(\flat^{-1}\alpha, \flat^{-1}\beta) \, \forall \, \alpha, \beta \in \Omega^1(M). \tag{147}$$

Así dadas $f, g \in C^\infty(M)$, su paréntesis de Poisson satisface

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= P(df, dg) \\ &= \omega(\flat^{-1} df, \flat^{-1} dg) \\ &= \omega(X_f, X_g) \\ &= df(X_g) \\ &= X_g f. \end{aligned} \tag{148}$$

En coordenadas canónicas se tiene que

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \ . \tag{149}$$

PROPOSICIÓN 80.
- *La asignación $f \mapsto X_f$ es un antihomomorfismo de álgebras de Lie entre las álgebras de Lie $(C^\infty(M),\{,\})$ y $(\mathfrak{X}(M),[,])$ [7], en efecto,*

$$X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]. \tag{150}$$

- *$g \in C^\infty(M)$ es constante a lo largo de las curvas integrales de X_f, es decir $L_{X_f} g = 0$, si y solo si $\{f,g\} = 0$.*
- *Si $f, g \in C^\infty(M)$ son constantes a lo largo de las curvas integrales de X_h entonces también lo es $\{f,g\}$.*

8.3. Sistemas Hamiltonianos independientes del tiempo. La teoría de los sistemas Hamiltonianos (conservativos) independientes del tiempo se desarrolla de manera natural dentro del formalismo de la geometría simpléctica. Dada $H \in C^\infty(M)$, el sistema mecánico definido por X_H en M es un sistema Hamiltoniano, denotado por (M,ω,H), con (M,ω) el espacio fase y H la función Hamiltoniana. En coordenadas canónicas $(q^1,\cdots,q^n,p_1,\cdots,p_n)$ en M, la expresión local $\psi(t) = (q^1(t),\cdots,q^n(t),p_1(t),\cdots,p_n(t))$ de las trayectorias del sistema satisface las ecuaciones de movimiento de Hamilton

$$\dot{q^i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad ; \qquad i = 1,2,3,\ldots,n \ . \tag{151}$$

n es el número de grados de libertad del sistema.

La evolución (evolución temporal) de una función $f \in C^\infty(M)$ (un observable físico) a lo largo de las trayectorias del sistema está dado por

$$\dot{f} = X_H f = \{f,H\}. \tag{152}$$

Se dice que f es una constante de movimiento del sistema si es constante a lo largo de las trayectorias del sistema (una constante de movimiento representa una cantidad física conservada), es decir, si $X_H f = 0$ (equivalentemente $\{f,H\} = 0$). Es claro que la función Hamiltoniana es una constante de movimiento; ésta representa la energía mecánica total del sistema (energía cinética más energía potencial).

8.4. Sistemas Hamiltonianos dependientes del tiempo. El espacio fase de un sistema Hamiltoniano dependiente del tiempo es geométricamente identificado con el espacio fase extendido $M \times \mathbb{R}$ [48, 2, 11], con M una variedad simpléctica (el espacio fase natural para sistemas Hamiltonianos físicos dependiente del tiempo es $T^*Q \times \mathbb{R}$, donde Q es el espacio configuración de la descripción Lagrangiana). El espacio fase extendido $M \times \mathbb{R}$ tiene estructura natural de variedad cosimpléctica (para un breve repaso del formalismo de la geometría cosimpléctica ver [49, 50] y para exposición más detallada ver [51, 47]). Sea Ω una estructura simpléctica en M, entonces localmente se tiene

$$\Omega = dq^i \wedge dp_i \tag{153}$$

para algún conjunto de coordenadas canónicas. El campo vectorial Hamiltoniano X_f para $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ (f puede depender de manera explícita del tiempo) está dado por

$$X_f \lrcorner \Omega = df - \frac{\partial f}{\partial t}dt \qquad \text{y} \qquad \mathrm{X_f} \lrcorner \mathrm{dt} = 0, \tag{154}$$

donde t es la coordenada global en $\mathbb{R}$. En coordenadas canónicas se tiene que

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{155}$$

El campo vectorial Hamiltoniano luce exactamente igual que en el caso simpléctico, la única diferencia es que las funciones componentes de tal campo vectorial pueden

depender (de manera explícita) de la coordenada t, que en existencia de dinámica representa el tiempo.

El paréntesis de Poisson es definido de la misma manera que en el caso simpléctico y tiene la misma forma local.

La dinámica Hamiltoniana es definida por el llamado campo vectorial evolución $E_H = X_H + \frac{\partial}{\partial t}$ para la función $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ dependiente de la coordenada t que representa el tiempo. Como en el caso independiente del tiempo, las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Hamilton. La evolución de una función $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{f} = E_H f = X_H f + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \ . \tag{156}$$

Así que f es una constante de movimiento si y solo si $\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Se observa que la función Hamiltoniana, que representa la energía total del sistema, no es una constante de movimiento cuando ésta depende del tiempo, a saber $\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t}$.

8.5. Sistemas integrables. Integrabilidad por cuadraturas de un sistema mecánico significa encontrar las soluciones de las ecuaciones de movimiento realizando un número finito de operaciones algebraicas (incluyendo tomar inversas) y calculando integrales de funciones conocidas [17]. Lie estableció un marco práctico-teórico para determinar la integrabilidad por cuadraturas de un sistema mecánico, el resultado principal de tal marco se conoce como el teorema de Lie en integrabilidad por cuadratura [17, 20, 52].

TEOREMA 81. *Teorema de Lie* [17]*: Sean $u_1, \dots u_n$ campos vectoriales diferenciables linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Si $u_1, \dots, u_n$ son simetrías del campo vectorial diferenciable v y general un álgebra de Lie soluble bajo el corchete de Lie $[,]$ de campos vectoriales, entonces las soluciones ecuaciones de movimiento $\dot{x} = v(x)$ del sistema mecánico definido por v pueden ser encontradas por cuadraturas, es decir, el sistema es integrable por cuadraturas.*

Para sistemas Hamiltonianos, el célebre teorema de Noether relaciona simetrías con constantes de movimiento (ver sección 9), y es bien sabido que la existencia de simetrías para un sistema mecánico permite una reducción del sistema, o en otras palabras, permite una simplificación del problema de resolver las ecuaciones de movimiento (ver subsección 5.3). Así que para sistemas Hamiltonianos, la existencia de constantes de movimiento está relacionada con la simplificación de las ecuaciones de movimiento. De hecho, el famoso teorema de Liouville establece que para un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad, el conocimiento de n constantes de movimiento funcionalmente independientes y en involución permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de movimiento de Hamilton por cuadraturas [2, 17, 39, 22, 45, 53, 54, 32]. En consecuencia, se dice que un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad es integrable (en el sentido de Liouville) si se pueden encontrar n constantes de movimiento funcionalmente independientes y en involución. En involución significa que el paréntesis de Poisson de cualesquiera dos constantes de movimiento es cero, o equivalentemente, las constantes de movimiento forman un álgebra de Lie Abeliana (conmutativa) bajo el paréntesis de Poisson, lo cual a su vez es equivalente al hecho de que los correspondientes campos vectoriales Hamiltonianos de las constantes de movimiento forman un álgebra de Lie Abeliana de simetrías del campo Hamiltoniano dinámico. Veamos un breve repaso de la noción de integrabilidad según Liouville.

Definición 82.

- Se dice que las funciones $f_1, \cdots, f_k$ en una variedad diferencial son funcionalmente independientes si sus derivadas $df_1, \cdots, df_k$ son linealmente independientes.
- Se dice que las funciones f, g están en involución con respecto del paréntesis de Poisson $\{,\}$ si $\{f, g\} = 0$.

- Un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad se dice integrable si éste tiene n constantes de movimiento funcionalmente independientes y en involución.

TEOREMA 83. *Teorema de Liouville: Las ecuaciones de movimiento de un sistema integrable pueden ser resueltas por cuadraturas.*

Para la demostración ver [23, 2, 17, 39, 22, 45, 53, 54, 32].

Ejemplo 32.
- La función Hamiltoniana para el oscilador armónico dos dimensional es $H(q_1,q_2,p_1,p_2)=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+w_1^2q_1^2+w_2^2q_2^2)$. Se tiene que $f_1=H$ y $f_2=\frac{1}{2}(p_1^2+w_1^2q_1^2)$ son constantes de movimiento funcionalmente independientes y en involución, así que el sistema es integrable.
- La función Hamiltoniana para el problema de Kepler de dos cuerpos es $H(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{c}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}$. Se tiene que $f_1=H$, $f_2=L_z=q_1p_2-q_2p_1$ y $L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$ son constantes de movimiento funcionalmente independientes y en involución. Por lo tanto, el sistema es integrable.
- La función Hamiltoniana para el oscilador armónico uno dimensional con frecuencia angular dependiente del tiempo (sistema dependiente del tiempo) es $H(q,p,t)=\frac{1}{2}(p^2+w^2(t)q^2)$. Se tiene que $f=\frac{1}{2}(\alpha^{-2}q^2+(\alpha p-\dot{\alpha}q)^2)$, con $\alpha=\alpha(t)$ tal que $\ddot{\alpha}+w^2(t)\alpha-\alpha^{-3}=0$, es una constante de movimiento [55, 56], así que el sistema es integrable. Otros sistemas integrables dependientes del tiempo han sido estudiados en [47].

Existe un marco para la integrabilidad por cuadraturas para sistemas Hamiltonianos más general que la integrabilidad de Liouville, a saber, la integrabilidad de Lie, basada en la existencia de un álgebra de Lie soluble de constantes de movimiento; dicho marco incluye la integrabilidad de Lie en el caso particular en el que el álgebra es Abeliana, en efecto, toda álgebra Abeliana es soluble, pero existen álgebras solubles que no son Abelianas [20]. Sin embargo, el marco de integrabilidad de Liouville resulta ser mucho más útil en la practica ya que se han encontrado álgebras Abelianas para muchos sistemas y resulta complicado encontrar álgebras solubles, de ahí que el marco de Liouville sea tan conocido, al contrario que el marco teóricamente más general de Lie. Veamos el teorema de Lie para la integrabilidad por cuadraturas de un sistema Hamiltoniano (para más detalles ver [57, 17, 52]).

TEOREMA 84. *Se se conocen n constantes de movimiento $f_1,\dots,f_n$ para un sistemas Hamiltoniano con n grados de libertad, tales que*

1. $\{f_i,f_j\}=c_{ij}^k f_k$, *con* $c_{ij}^k\in\mathbb{R}$,
2. *el álgebra de Lie generada por* $f_1,\dots,f_n$ *es soluble bajo el paréntesis de Poisson,*
3. *en el conjunto de nivel* $M_f=\{x\in M: f_i(x)=\alpha_i,\alpha_i\in\mathbb{R}\}$ *las funciones* $f_1,\dots,f_n$ *son funcionalmente independientes y,*
4. $c_{ij}^k\alpha_k=0$ *para* $i,j=1,\dots,n$,

entonces M_f es una subvariedad diferencial de M de dimensión n, y las soluciones de las ecuaciones de Hamilton que viven en M_f pueden ser encontradas por cuadraturas [58].

La independencia funcional de las funciones $f_1,\dots,f_n$ en M_f garantiza que M_f sea una subvariedad de M de dimensión $2n-n=n$, en efecto, en general si las funciones $f_1,\cdots,f_k$ con $k\leq dim(N)$ son funcionalmente independientes en el punto $p\in N$ entonces las derivadas $df_1|_p,\dots,df_k|_p$ son linealmente independientes; ésto significa que p es un punto regular de la función diferenciable $F:N\longrightarrow\mathbb{R}^k$ definida por $F=(f_1,f_2,\dots,f_k)$. Considere ahora el conjunto $N_f=\{x\in N: f_i(x)=\alpha_i,\alpha_i\in\mathbb{R}\}$, y suponga que $f_1,f_2,\dots,f_k$ son funcionalmente independientes, entonces del teorema del conjunto de nivel regular (regular level set theorem [7]) se tiene que N_f es una subvariedad diferencial de N de dimensión $dim(N)-k$.

9. Transformaciones canónicas y simetrías

En la Mecánica Clásica Hamiltoniana, las transformaciones canónicas desempeñan un papel fundamental por diversas razones. En primer lugar, preservan la forma de las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Más aún, resultan esenciales para la resolución de dichas ecuaciones, ya que constituyen el núcleo del formalismo de la teoría de Hamilton-Jacobi. De hecho, la evolución de las variables dinámicas canónicas durante el movimiento del sistema puede interpretarse como una sucesión de transformaciones canónicas [59].

En los libros de texto clásicos de Mecánica dirigidos a estudiantes de licenciatura (ver, por ejemplo, [59, 39, 12]), las transformaciones canónicas suelen definirse mediante el llamado formalismo en coordenadas, el cual permite una descripción local. En este enfoque, las coordenadas canónicas se introducen de manera explícita y el paréntesis de Poisson se expresa en términos de derivadas respecto a estas variables. Por otro lado, el formalismo geométrico ofrece una descripción global del sistema.

En esta sección, se presentan las transformaciones canónicas desde ambos enfoques: el formalismo en coordenadas y el enfoque geométrico. Para más detalles, véase [60].

9.1. Transformaciones canónicas: descripción clásica en coordenadas. En esta subsección se presenta un breve repaso de la teoría de las transformaciones canónicas desde el enfoque en coordenadas, como es presentada en libros de texto clásicos como [12, 39, 59].

Considere un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad cuyas ecuaciones de movimiento son dadas en un conjunto de coordenadas canónicas $(q,p) = (q^1,\dots,q^n,p_1,\dots,p_n)$ en el espacio fase con una función Hamiltoniana $H = H(q,p,t)$ posiblemente dependiente del tiempo t; las ecuaciones de movimiento son

$$\text{(157)}\qquad \begin{cases} \dot{q}^1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \quad\vdots \\ \dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \\ \quad\vdots \\ \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n}\ . \end{cases}$$

El paréntesis de Poisson de dos funciones $f = f(q,p,t)$ y $g = g(q,p,t)$ en coordenadas canónicas (q,p) tiene la forma

$$\text{(158)}\qquad \{f,g\}_{q,p} \;=\; \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \;-\; \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\ .$$

Definición 85. Una transformación de coordenadas (cambio de coordenadas) $(q,p) \mapsto (Q(q,p,t), P(q,p,t))$ es una transformación canónica si el nuevo conjunto de coordenadas (Q,P) forma un conjunto de coordenadas canónicas.

Es bien sabido que un conjunto de coordenadas $(Q^1,\dots,Q^n,P_1,\dots,P_n)$ forma un conjunto de coordenadas canónicas si y solo sí

$$\text{(159)}\qquad \{Q^i,P_j\}_{q,p} = \delta^i_j \quad \text{y} \quad \{Q^i,Q_j\}_{q,p} = \{P^i,P_j\}_{q,p} = 0\ , \quad i,j = 1,2,\dots,n\ ,$$

donde δ^i_j es la delta de Kronecker; esto muestra que las transformaciones canónicas son independientes de la función Hamiltoniana. Las transformaciones canónicas preservan la forma de las ecuaciones de Hamilton, es decir, si $(q,p) \mapsto (Q(q,p,t), P(q,p,t))$ es una transformación canónica entonces existe una nueva función $K = K(Q,P,t)$ tal

que

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{Q}^1 = \frac{\partial K}{\partial P_1}, \\ \quad\vdots \\ \dot{Q}^n = \frac{\partial K}{\partial P_n}, \\ \dot{P}_1 = -\frac{\partial K}{\partial Q^1}, \\ \quad\vdots \\ \dot{P}_n = -\frac{\partial K}{\partial Q^n}\ . \end{array}\right. \tag{160}$$

Dada una transformación canónica $(q,p) \mapsto (Q,P)$ existe una función F posiblemente dependiente del tiempo, definida en el espacio fase, tal que

$$p_i dq^i - H dt - (P_i dQ^i - K dt) \ = \ dF\ . \tag{161}$$

F se llama función generatriz de la transformación canónica. En este caso se tienen $4n$ coordenadas $(q^1,\ldots,q^n,p_1,\ldots,p_n,Q^1,\ldots,Q^n,P_1,\ldots,P_n)$ en el espacio fase; resulta que $2n$ coordenadas son independientes y las otras $2n$ son dependientes. Así que es conveniente considerar transformaciones canónicas que consistan de n coordenadas viejas más n coordenadas nuevas, todas ellas independientes. Existen cuatro tipos básicos de transformaciones canónicas descritas por conjunto de la forma (q,Q), (q,P), (p,Q) o (p,P), respectivamente. Si las coordenadas (q,Q) son independientes, entonces la función F puede ser escrita como $F = F_1(q,Q,t)$ satisfaciendo la condición $\det(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q^i \partial Q^j}) \neq 0$, y de (161) se tienen las siguientes relaciones

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q^i} \quad \text{y} \quad K - H = \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{162}$$

En este caso se dice que $F = F_1(q,Q,t)$ es una función generatriz de tipo 1. Para la transformación identidad $(q = Q, p = P)$, la cual juega un papel importante en las siguientes subsecciones, las coordenadas (q,Q) son independientes; Así, en esta caso particular se pueden tomar las variables (q,P) como coordenadas independientes, y construir, por medio de la transformación de Legendre apropiada, la función generatriz $F_2(q,P) = F_1 + Q^i P_i$. De (161) se tiene que

$$p_i dq^i - H dt + Q^i dP_i + K dt = dF_2\ , \tag{163}$$

luego

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad \text{y} \quad K - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{164}$$

En este caso se dice que $F_2(q,P,t)$ es una función generatriz de tipo 2. En particular, la función generatriz

$$F_{Id}(q,P) \ \equiv \ q^i\, P_i\ , \tag{165}$$

da como resultado la transformación identidad.

Definición 86. Una transformación canónica infinitesimal es una transformación canónica "cercana" a la transformación identidad, es decir, una transformación canónica de la forma

$$Q^i = q^i + \epsilon\, \Delta q^i(q,p,t), \quad P_i = p_i + \epsilon\, \Delta p_i(q,p,t)\ , \tag{166}$$

donde ϵ es un parámetro infinitesimal (el cambio desde (q,p) hasta (Q,P) es "pequeño"), y $\Delta q^i(q,p,t)$ y $\Delta p_i(q,p,t)$ son ciertas funciones indeterminadas.

Las transformaciones canónicas infinitesimales son generadas por funciones "cercanas" a la función generatriz $F_{Id}(q,P)$ de la transformación identidad; dichas funciones pueden ser escritas como

$$F_2(q,P,t) \ = \ q^i P_i \ + \ \epsilon\, G(q,P,t)\ , \tag{167}$$

aquí $G(q,P,t)$ es cualquier función. En efecto, la transformación canónica generada por (167) tiene la forma

$$Q^i = q^i + \epsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial P_i} \quad \text{and} \quad P_i = p_i - \epsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial q^i} . \tag{168}$$

Observe que es posible sustituir $P_i = p_i$ en $\epsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial q^i}$ y en $\epsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial P_i}$ ya que los términos cuadráticos y de orden superior en ϵ deben ser despreciados; así que se obtiene la forma explícita de la transformación canónica infinitesimal

$$Q^i = q^i + \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_i} \quad \text{and} \quad P_i = p_i - \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q^i} . \tag{169}$$

De (166) y (169) se pueden hacer las identificaciones $\Delta q^i(q,p,t) = \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_i}$ y $\Delta p_i = -\frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q_i}$. En este caso, la función $G = G(q,p,t)$ en (169) se llama la función generatriz de la transformación canónica infinitesimal.

Dada una transformación canónica $(q,p) \mapsto (Q(q,p,t), P(q,p,t))$ con función generatriz F (de cualquier tipo), la nueva función Hamiltoniana K es

$$K(q,p,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{170}$$

Para una transformación canónica independiente del tiempo, la nueva función Hamiltoniana puede ser tomada igual a la vieja.

Se dice que la función Hamiltoniana es invariante bajo una trasformación canónica, o que la transformación canónica deja invariante la Hamiltoniana, cuando la nueva Hamiltoniana es igual a la vieja Hamiltoniana en las nuevas coordenadas, es decir,

$$K(q,p,t) = H(Q,P,t), \tag{171}$$

o de manera equivalente,

$$H(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{172}$$

Para una transformación canónica independiente del tiempo se tiene que la Hamiltoniana es invariante si y solo sí $H(Q,P,t) = H(q,p,t)$.

Bajo la transformación canónica infinitesimal (169), la Hamiltoniana es invariante si y solo sí

$$H(q^i + \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_i}, p_i - \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q^i}, t) = H(q,p,t) + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} . \tag{173}$$

Expandiendo $H(q^i + \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_i}, p_i - \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial q^i}, t)$ alrededor del punto (q,p,t) se tiene

$$H(q,p,t) + \epsilon \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = H(q,p,t) + \epsilon \frac{\partial G}{\partial t} , \tag{174}$$

luego eliminando términos de alto grado $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ en ϵ se tiene

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \{G,H\} = 0 , \tag{175}$$

así, G es una constante de movimiento. En resumen, la función generatriz de una transformación canónica infinitesimal que deja la Hamiltoniana invariante, es una constante de movimiento, y de manera recíproca, la transformación canónica infinitesimal generada por una constante de movimiento, deja la Hamiltoniana invariante.

9.2. Transformaciones canónicas: descripción geométrica. Comencemos con el formalismo independiente del tiempo. Sea (M,ω,H) un sistema Hamiltoniano independiente del tiempo.

Definición 87. Sea (N,η) una variedad simpléctica. Un difeomorfismo $\Phi : M \longrightarrow N$ tal que $\Phi^*\eta = \omega$ se llama simplectomorfismo.

En el formalismo geométrico de la Mecánica Clásica Hamiltoniana independiente del tiempo, las transformaciones canónicas son definidas como simplectomorfismos en el espacio fase [61, 49, 50, 48, 62]; formalmente

Definición 88. Una transformación canónica para (M, ω, H) es un difeomorfismo Φ en M tal que $\Phi^*\omega = \omega$.

Observe que tal y como ocurre en el formalismo en coordenadas, las transformaciones canónicas son independientes de la función Hamiltoniana. En efecto, en el formalismo geométrico, solo la geometría del espacio fase queda involucrada en la noción de transformación canónica.

Dado un difeomorfismo $\Phi : M \longrightarrow M$, se sabe que $\Phi^*\omega$ es una forma simpléctica en M, así que alrededor de cualquier punto $p \in M$ existen coordenadas locales $(Q^1, \cdots, Q^n, P_1, \cdots, P_n)$ tales que

$$\Phi^*\omega = dQ^i \wedge dP_i. \tag{176}$$

Considere el paréntesis de Poisson definido por $\Phi^*\omega$, denotado por $\overline{\{,\}}$, se tiene que

$$\overline{\{f, g\}} = \overline{X}_g f, \tag{177}$$

donde $\overline{X}_g$ es el campo vectorial Hamiltoniano definido por $\Phi^*\omega$ para $g \in C^\infty(M)$ ($\overline{X}_g \lrcorner \Phi^*\omega = dg$); en coordenadas canónicas $(Q^1, \cdots, Q^n, P_1, \cdots, P_n)$ éste tiene la forma

$$\overline{\{f, g\}} = \frac{\partial f}{\partial Q^i}\frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q^i}. \tag{178}$$

Si Φ es una transformación canónica entonces $\overline{X}_g = X_g$, así que

$$\overline{\{f, g\}} = \{f, g\}, \tag{179}$$

es decir, las transformaciones canónicas preservan el paréntesis de Poisson [62], por lo tanto, se tiene

$$\{Q^i, Q^j\} = \overline{\{Q^i, Q^j\}} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = \overline{\{P_i, P_j\}} = 0 \quad \text{y} \quad \{Q^i, P_j\} = \overline{\{Q^i, P_j\}} = \delta^i_j. \tag{180}$$

Si pensamos en Φ localmente como una transformación de coordenadas $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n) \mapsto (Q^1, \cdots, Q^n, P_1, \cdots, P_n)$, entonces ésta es canónica en el sentido del formalismo en coordenadas. Algunas veces agregaremos el adjetivo "geométrica" a las transformaciones canónicas definidas en el sentido geométrico con el objetivo de evitar confusiones.

Ahora veamos el caso dependiente del tiempo. Sea $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ un sistema Hamiltoniano dependiente del tiempo, es decir, $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$. Para cada transformación (difeomorfismo) Φ en $M \times \mathbb{R}$ se requiere que el parámetro temporal t sea preservado, lo cual implica que uno puede considerar el mapeo $\Phi_t : M \longrightarrow M$ para cada valor fijo de t, y éste es una transformación en M. La siguiente definición de transformación canónica en el formalismo de la Mecánica Hamiltoniana dependiente del tiempo se presenta en [60].

Definición 89. Una transformación canónica en $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ es un difeomorfismo Φ en $M \times \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi^*\Omega - \Omega = d(H - K) \wedge dt, \tag{181}$$

para alguna función $K \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$.

La definición anterior es más general que la presentada previamente en [50] bajo el formalismo de la geometría cosimpléctica. Uno puede pensar que la definición 89 de transformación canónica no es independiente de la función Hamiltoniana H. Sin embargo, la ecuación (181) solo nos indica la relación entre dos funciones Hamiltonianas H y K. De hecho podemos reescribir dicha definición sin considerar un sistema Hamiltoniano del todo, solo es necesario un espacio fase de la forma $(M \times \mathbb{R}, \Omega)$. Una definición equivalente a la definición 89 puede ser dada de la siguiente manera: una

transformación canónica en $(M \times \mathbb{R}, \Omega)$ es un difeomorfismo Φ en $M \times \mathbb{R}$ (preservando t) tal que

$$\Phi^*\Omega - \Omega = dJ \wedge dt, \tag{182}$$

para alguna función $J \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$. Para una Hamiltoniana dada H, la nueva Hamiltoniana K satisface $d(H - K) = dJ$.

Podemos observar que la ecuación (181) localmente tiene la forma

$$dQ^i \wedge dP_i - dq^i \wedge dp_i = d(H - K) \wedge dt, \tag{183}$$

la cual es la condición general para una transformación de coordenadas canónica con nueva Hamiltoniana K [12, 53].

En lo que sigue de esta subsección M puede ser una variedad simpléctica o $M \times \mathbb{R}$, a menos que se indique de manera explícita.

Definición 90. Un grupo uno-paramétrico local de transformaciones en M es una familia de difeomorfismos $\{\Psi_s\}_{s\in I}$ en M con I un intervalo abierto que contiene al cero, tal que para cada s, $\Psi_0 = Id_M$ (la función identidad), $\Psi_s \circ \Psi_t = \Psi_{s+t}$ (la propiedad de grupo) y el mapeo $\Psi : I \times M \longrightarrow M$ definido por $\Psi(s, p) = \Psi_s(p)$ es un mapeo diferenciable.

La definición 90 puede ser reescrita diciendo solamente que un grupo uno-paramétrico local de transformaciones $\{\Psi_s\}_{s\in I}$ en M es un flujo local $\Psi : I \times M \longrightarrow M$ en M [7]. El intervalo I para el parámetro s puede ser el conjunto completo de los números reales, en este caso se dice que la familia de transformaciones es un grupo uno-paramétrico global de transformaciones y el mapeo $\Psi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ es un flujo global.

Dado un flujo Ψ (local o global) en M, para cada $p \in M$ podemos considerar la curva diferenciable $\Psi^p : I \longrightarrow M$ definida por $\Psi^p(s) = \Psi(s, p)$, y el vector tangente $v_p \in T_pM$ dado por $v_p = \frac{d}{ds}\Psi^p(s)|_{s=0}$; se tiene que la asignación $p \mapsto v_p$ es un campo vectorial diferenciable V en M llamado el generador infinitesimal del flujo. El teorema fundamental en flujos establece (en pocas palabras) que cada campo vectorial diferenciable V en M es el generador infinitesimal de un flujo (posiblemente local) Ψ tal que $\Psi_s : M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo (posiblemente local) y $\Psi^p : I \longrightarrow M$ es una curva integral de V [7]. Se puede hacer referencia de manera indistinta al flujo Ψ o al grupo uno-paramétrico de transformaciones $\{\Psi_s\}_{s\in I}$ ya que hay una correspondencia uno a uno entre dichos objetos.

Definición 91. Un grupo uno-paramétrico de transformaciones en M se dice un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas si cada transformaciones es canónica.

El siguiente teorema establece que los generadores infinitesimales de grupos uno-paramétricos de transformaciones canónicas son campos vectoriales Hamiltonianos [62, 60].

Teorema 92. *Sea $\{\Psi_s\}_{s\in I}$ un grupo uno-paramétrico de transformaciones en M y $V \in \mathfrak{X}(M)$ su generador infinitesimal. $\{\Psi_s\}_{s\in I}$ es un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas si y solo sí V es un campo vectorial Hamiltoniano.*

Para un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas con generador infinitesimal $V = X_f$ se dice que f es el generador de tal grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas.

Se ha visto que las transformaciones canónicas (geométricas) Ψ pueden ser vistas localmente como transformaciones de coordenadas $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n) \mapsto (Q^1, \cdots, Q^n, P_1, \cdots, P_n)$, así que un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas puede ser visto localmente como una familia de transformaciones de coordenadas canónicas de la forma $\{(Q_s(q, p, t), P_s(q, p, t))\}_{s\in I}$. Grupos uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas de la forma $\{(Q_s(q, p, t), P_s(q, p, t))\}_{s\in I}$ son estudiadas en [53], ahí el autor usa la notación $(Q(q, p, t, s), P(q, p, t, s))$ para la

familia $\{(Q_s(q,p,t), P_s(q,p,t))\}_{s\in I}$, y se muestra que si $(Q(q,p,t,s), P(q,p,t,s))$ es un grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas entonces existe una función diferenciable $f(q,p,t)$ (una función local en $M\times\mathbb{R}$) tal que

$$\frac{\partial Q^i}{\partial s}|_{s=0} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad \text{and} \quad \frac{\partial Q^i}{\partial s}|_{s=0} = -\frac{\partial f}{\partial q^i}. \tag{184}$$

Recíprocamente, en [53] se muestra también que cualquier función diferenciable $f(q,p,t)$ define un grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas de la forma $(Q(q,p,t,s), P(q,p,t,s))$ por medio de las ecuaciones (184). Es fácil ver que si se tiene un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas (geométricas) Ψ generado por una función $f\in C^\infty(M\times\mathbb{R})$ (el generador infinitesimal es el campo vectorial X_f) entonces el generador del grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas $(Q(q,p,t,s), P(q,p,t,s))$ definido localmente por Ψ (Ψ visto como un flujo es una función vectorial posiblemente dependiente del tiempo en los puntos $(q,p)\in M$ y el parámetro s) es $f(q,p,t)$. De hecho las ecuaciones (184) son las ecuaciones de movimiento de Hamilton para el campo vectorial X_f, así que las soluciones de tales ecuaciones son las curvas integrales de X_f las cuales juntas definen el flujo Ψ de X_f.

Abajo se presenta un ejemplo simple para ilustrar las ideas discutidas previamente.

Ejemplo 33. Considere un grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas dadas por

$$Q = qe^s - \frac{tp}{m}(e^s - e^{-s}), \quad P = pe^{-s}. \tag{185}$$

En [53] se muestra que este grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas es generado por $f(q,p,t) = qp - \frac{tp^2}{m}$, es decir, las ecuaciones (184) se satisfacen. Primero observe que el flujo de X_f está dado localmente por $\Psi(q,p,t,s) = (qe^s - \frac{tp}{m}(e^s - e^{-s}), pe^{-s})$. En efecto, las ecuaciones para las curvas integrales $\Psi(s) = (q(s), p(s))$ de X_f son

$$\dot{q} = q - \frac{2tp}{m}, \quad \dot{p} = -p\ , \tag{186}$$

con solución general dada por

$$q(s) = e^s c_1 - \frac{(e^s - e^{-s})t}{m}c_2, \quad p(s) = e^{-s}c_2\ , \tag{187}$$

las constantes c_1, c_2 son determinadas por $q(0) = q, p(0) = p$, es decir, se tiene $c_1 = q$ y $c_2 = p$. Así que el flujo de X_f está dado localmente por

$$\Psi(q,p,t,s) \;=\; (q\,e^s - \frac{t\,p}{m}(e^s - e^{-s}),\, pe^{-s}). \tag{188}$$

Se sigue el el grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas $(Q(q,p,t,s) = qe^s - \frac{tp}{m}(e^s - e^{-s}), P(q,p,t,s) = pe^{-s})$ es la expresión local para el grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas (geométricas) Ψ con generador infinitesimal X_f (o generador f).

Se puede verificar de manera explícita que Ψ es un grupo uno-paramétrico de transformaciones de canónicas, en efecto

(189)

$$\begin{aligned} dQ\wedge dP - dq\wedge dp &= (e^s dq - \frac{t}{m}(e^s - e^{-s})dp - \frac{p}{m}(e^s - e^{-s})dt)\wedge(e^{-s}dp) - dq\wedge dp \\ &= -\frac{p}{m}(e^s - e^{-s})dt\wedge dp \\ &= \frac{p}{m}(e^s - e^{-s})dp\wedge dt. \end{aligned}$$

Así se concluye que Ψ es un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas. Observe que hasta ahora no hemos considerado ninguna función Hamiltoniana, lo

cual es compatible con el hecho de que las transformaciones canónicas son independientes de la Hamiltoniana, o en otras palabras, las transformaciones canónicas son independientes de la dinámica. Ahora, dada una función Hamiltoniana H, la nueva Hamiltoniana K tiene la forma $K(q,p,t,s) = H - \frac{p}{m}(e^s - e^{-s}) + g(t,s)$, donde $g(t,s)$ es cualquier función de t y s.

También se puede verificar que para cada valor fijo de t se tiene que $\Psi_{t,s}^*\Omega = \Omega$. En efecto,

$$\begin{aligned}\Psi_{t,s}^*\Omega &= dQ \wedge dP = (e^s dq - \frac{t}{m}(e^s - e^{-s})dp) \wedge e^{-s}dp \\ &= dq \wedge dp \\ &= \Omega,\end{aligned} \tag{190}$$

donde las derivadas son tomadas en M, así que las variables t, s son tratadas como parámetros (constantes).

Las transformaciones canónicas infinitesimales son la versión infinitesimal de grupos uno-paramétricos de transformaciones de coordenadas canónicas de la forma $(Q(q,p,t,s), P(q,p,t,s))$; Expandiendo alrededor de $s = 0$ y despreciando términos de orden cuadrado y superior en s se obtiene la versión infinitesimal de un grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas (se toma $\epsilon = s$ como el parámetro infinitesimal). La versión infinitesimal del grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas $(Q(q,p,t,s) = qe^s - \frac{tp}{m}(e^s - e^{-s}), P(q,p,t,s) = pe^{-s})$ se presenta en [53], ésta es

$$Q = q + q\,\epsilon - \frac{2\,t\,p}{m}\epsilon, \quad P = p - p\,\epsilon. \tag{191}$$

Es claro que la función generatriz de una transformación canónica infinitesimal es la misma función generatriz del grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas que la define. Para la transformación canónica infinitesimal (191) la función generatriz es $G(q,p,t) = qp - \frac{tp^2}{m}$, la cual coincide con la función generatriz $f(q,p,t)$ del grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas (185). En general se tiene que la transformación canónica infinitesimal generada por una función dada es la versión infinitesimal del grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas generado por dicha función.

9.3. Simetrías y grupos de transformaciones de invarianza. Es bien sabido que asociado con cada transformación de invarianza infinitesimal existe una constante de movimiento, la cual es la generatriz de dicha transformación [12]. Además, en [53] se muestra que si un grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas deja la Hamiltoniana invariante, entonces su función generatriz es una constante de movimiento; y de manera recíproca, cualquier constante de movimiento genera un grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas que deja la Hamiltoniana invariante. Se dice que una función Hamiltoniana $H(q,p,t)$ es invariante bajo una transformación de coordenadas canónicas $(Q(q,p,t), P(p,q,t))$ (o que la transformación de coordenadas canónicas deja la Hamiltoniana invariante) si la nueva Hamiltoniana es

$$K(q,p,t) \;=\; H(Q(q,p,t),\, P(p,q,t),\, t)\;. \tag{192}$$

Si la transformación de coordenadas canónicas es independiente del tiempo, es decir, $Q = Q(q,p), P = P(q,p)$, entonces la nueva Hamiltoniana puede ser tomada como la vieja Hamiltoniana, es decir, podemos tomar $K(q,p,t) = H(q,p,t)$. Así que una transformación de coordenadas canónicas independiente del tiempo $(Q(q,p), P(q,p))$ deja la Hamiltoniana $H(q,p,t)$ invariante si $H(Q,P,t) = H(q,p,t)$.

Veamos la noción de invarianza desde el punto de vista geométrico [60].

Considere primero el caso independiente del tiempo.

Definición 93. Se dice que la transformación canónica independiente del tiempo $\Phi : M \longrightarrow M$ deja la Hamiltoniana (independiente del tiempo) H invariante si $\Phi^* H = H$ (o equivalentemente $H \circ \Phi = H$).

En el caso de un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas (geométricas) $\{\Psi_s\}$, se dice que éste deja la Hamiltoniana H invariante si ésta es invariante bajo cada transformación canónica Ψ_s, es decir, $\Psi_s^* H = H$.

Es claro que el generador infinitesimal de un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas que deja invariante la Hamiltoniana H es una campo vectorial Hamiltoniano X_f tal que $L_{X_f}\omega = L_{X_f} H = 0$. Un campo vectorial X que satisface

$$L_X \omega = L_X H = 0\,, \tag{193}$$

se llama simetría infinitesimal del sistema Hamiltoniano (M, ω, H) [7]. Una de las consecuencias de la existencia de simetrías en Mecánica Clásica es su asociación con constantes de movimiento, éste es el resultado del celebrado teorema de Noether. Hay una versión del teorema de Noether en Mecánica Lagrangiana [3, 18], así como también en Mecánica Hamiltoniana [53], dichas formulaciones sin el uso del formalismo geométrico. Por supuesto también se tiene la versión desde el formalismo geométrico [7, 50, 19], ésta es la siguiente:

TEOREMA 94. *i) Si f es una constante de movimiento de (M, ω, H), entonces su campo vectorial Hamiltoniano X_f es una simetría infinitesimal de (M, ω, H). De manera recíproca,*

ii) si V es una simetría infinitesimal de (M, ω, H), entonces existe una función f (posiblemente local) tal que $V = X_f$ y f es una constante de movimiento.

En términos de grupos de transformaciones, se resume que: si un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas independientes del tiempo dejan la Hamiltoniana invariante, entonces su función generatriz es una constante de movimiento; y de manera recíproca, cualquier constante de movimiento genera un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas que dejan la Hamiltoniana invariante.

Ahora veamos la noción de invarianza para transformaciones canónicas dependientes del tiempo [60]. Sea $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ un sistema Hamiltoniano dependiente del tiempo.

Definición 95. Se dice que la transformación canónica $\Phi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ deja la Hamiltoniana invariante si

$$\Phi^*(\Omega + dH \wedge dt) = \Omega + dH \wedge dt. \tag{194}$$

La ecuación (194) es equivalente a

$$\Phi^*\Omega + d(\Phi^* H) \wedge dt = \Omega + dH \wedge dt, \tag{195}$$

la cual puede ser reescrita como

$$\Phi^*\Omega - \Omega = d(H - \Phi^* H) \wedge dt; \tag{196}$$

esta última ecuación implica que la nueva Hamiltoniana (determinada hasta una función aditiva dependiente solo de t) puede ser tomada como

$$K = \Phi^* H = H \circ \Phi. \tag{197}$$

Localmente tiene la forma

$$K(q, p, t) = H(Q, P, t), \tag{198}$$

la cual es la condición general para que una transformación de coordenadas canónicas (independiente o dependiente del tiempo) sea una transformación de invarianza [12].

Se dice que la Hamiltoniana es invariante bajo un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas $\{\Psi_s\}$, si cada transformación Ψ_s deja la Hamiltoniana invariante, es decir,

$$\Psi_s^*(\Omega + dH \wedge dt) = \Omega + dH \wedge dt \tag{199}$$

para cada s.

Se observa que el generador infinitesimal de un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas que deja invariante la Hamiltoniana es un campo vectorial Hamiltoniano X_f tal que $L_{X_f}(\Omega + dH \wedge dt) = 0$. Un campo vectorial X que satisface

$$L_X(\Omega + dH \wedge dt) = 0 \tag{200}$$

se llama simetría infinitesimal del sistema Hamiltoniano $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$ [60]. A continuación se presenta la versión geométrica del teorema de Noether para grupos uno-paramétricos de transformaciones canónicas dependientes del tiempo que dejan la Hamiltoniana invariante.

TEOREMA 96. *i) Si f es una constante de movimiento (posiblemente dependiente del tiempo) de $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$, entonces su campo vectorial Hamiltoniano X_f es una simetría infinitesimal de $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$.*

De manera recíproca,

ii) si V es una simetría infinitesimal de $(M \times \mathbb{R}, \Omega, H)$, entonces existe una función f (posiblemente local) tal que $V = X_f$ y f es una constante de movimiento (posiblemente dependiente del tiempo).

Para la prueba ver [60].

9.3.1. Un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas para el oscilador armónico isotrópico. Considere el sistema físico del oscilador armónico en dos dimensiones. La función Hamiltoniana en coordenadas Cartesianas canónicas (x, y, p_x, p_y) es

$$H = \frac{1}{2\,m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\,w^2(x^2 + y^2)}{2}, \tag{201}$$

m es la masa y w la frecuencia angular. Es bien sabido que el momento angular

$$f = x\,p_y - y\,p_x \ , \tag{202}$$

es una constante de movimiento, por lo tanto su campo vectorial Hamiltoniano X_f es una simetría infinitesimal del sistema, en efecto,

$$X_f = -y\frac{\partial}{\partial x} - p_y\frac{\partial}{\partial p_x} + x\frac{\partial}{\partial y} + p_x\frac{\partial}{\partial p_y}, \tag{203}$$

$$\begin{aligned} L_{X_f}\omega &= d(X_f \lrcorner X_f) \\ &= d((dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y) \lrcorner X_f) \\ &= d(-y dp_x + p_y dx + x dp_y - p_x dy) \\ &= -dy \wedge dp_x + dp_y \wedge dx + dx \wedge dp_y - dp_x \wedge dy \\ &= 0 \ , \end{aligned} \tag{204}$$

y

$$L_{X_f}H = X_f H = -y\,m\,w^2\,x - p_y\frac{p_x}{m} + x\,m\,w^2\,y + p_x\frac{p_y}{m} = 0. \tag{205}$$

Ya que X_f es una simetría infinitesimal entonces su flujo es un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas que dejan la Hamiltoniana invariante. En efecto, las curvas integrales de X_f satisfacen las ecuaciones de Hamilton para f, a saber

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\dot{p_x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\dot{p_y}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_x} = \dot{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_y} = \dot{y}, \tag{206}$$

es decir,

$$\begin{aligned} p_y &= -\dot{p_x} \\ p_x &= \dot{p_y} \\ y &= -\dot{x} \\ x &= \dot{y} \ . \end{aligned} \tag{207}$$

La solución general del sistema (207) es

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos s + c_2 \sin s \\ x &= -c_1 \sin s + c_2 \cos s \\ p_y &= c_3 \cos s + c_4 \sin s \\ p_x &= -c_3 \sin s + c_4 \cos s \ , \end{aligned} \tag{208}$$

con c_1, c_2, c_3, c_4 constantes de integración. Ya que el flujo $\Psi(p, s)$ de X_f obedece la condición $\Psi(p, 0) = p$, se tiene que

(209)
$$\Psi(x, y, p_x, p_y, s) = (-y \sin s + x \cos s,\ y \cos s + x \sin s,\ p_x \cos s - p_y \sin s,\ p_y \cos s + p_x \sin s).$$

Así se puede ver de manera explícita que

$$\begin{aligned} \Psi_s^* \omega &= \Psi_s^*(dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y) \\ &= d(-y \sin s + x \cos s) \wedge d(p_x \cos s - p_y \sin s) \\ &+ d(y \cos s + x \sin s) \wedge d(p_y \cos s + p_x \sin s) \\ &= dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y \\ &= \omega \ , \end{aligned} \tag{210}$$

y

(211)
$$\begin{aligned} \Psi_s^* H &= H \circ \Psi_s \\ &= H(-y \sin s + x \cos s, y \cos s + x \sin s,\ p_x \cos s - p_y \sin s,\ p_y \cos s + p_x \sin s) \\ &= \frac{1}{2\,m}((p_x \cos s - p_y \sin s)^2 + (p_y \cos s + p_x \sin s)^2) \\ &+ \frac{m\, w^2((-y \sin s + x \cos s)^2 + (y \cos s + x \sin s)^2)}{2} \\ &= \frac{1}{2\,m}(p_x^2 + p_y^2) \ + \ \frac{m\, w^2(x^2 + y^2)}{2} \\ &= H. \end{aligned}$$

9.3.2. Un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas para el sistema Smorodinsky-Winternitz. En este caso se considera el sistema superintegrable de Smorodinsky-Winternitz [63, 64]. La función Hamiltoniana en coordenadas Cartesianas canónicas está dada por

$$H = \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2} + k\,(x^2 + y^2) + \frac{c}{x^2} \ , \tag{212}$$

k, c son constantes reales. La función

$$T \ = \ p_y^2 + 2\,k\,y^2 \ , \tag{213}$$

es una constante de movimiento (es la responsable de la separación de variables en coordenadas Cartesianas). Se tiene que el campo vectorial Hamiltoniano

$$X_T = 2p_y \frac{\partial}{\partial y} - 4ky \frac{\partial}{\partial p_y} \ , \tag{214}$$

es una simetría infinitesimal del sistema, y su flujo

(215)
$$\Psi(x, y, p_x, p_y, s) = \left(x, \frac{p_y \sin(\sqrt{8k}s)}{\sqrt{2k}} + y \cos(\sqrt{8k}s), p_x, p_y \cos(\sqrt{8k}s) - \sqrt{2k} y \sin(\sqrt{8k}s) \right) \ ,$$

es un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas que dejan la Hamiltoniana invariante. En efecto, de manera geométrica explícita se ve que

$$\begin{aligned}\Psi^*\omega = &= \left(\frac{\sin(\sqrt{8k}s)}{\sqrt{2k}}dp_y + \cos(\sqrt{8k}s)dy\right)\wedge \\ &\quad \left(\cos(\sqrt{8k}s)dp_y - \sqrt{2k}\sin(\sqrt{8k}s)dy\right) + dx\wedge dp_x, \\ &= (-\sin^2(\sqrt{8k}s)dp_y\wedge dy + \cos^2(\sqrt{8k}s)dy\wedge dp_y)+ \\ &\quad + dx\wedge dp_x \\ &= dx\wedge dp_x + dy\wedge dp_y \\ &= \omega\ ,\end{aligned} \tag{216}$$

y

$$\begin{aligned}= H(\Psi(x,y,p_x,p_y,s)) &= \frac{1}{2}\left(p_x^2 + \left(p_y\cos(\sqrt{8k}s) - \sqrt{2k}y\sin(\sqrt{8k}s)\right)^2\right)+ \\ &\quad + k\left(x^2 + \left(\frac{p_y\sin(\sqrt{8k}s)}{\sqrt{2k}} + y\cos(\sqrt{8k}s)\right)^2\right) + \frac{c}{x^2} \\ &= \frac{(p_x^2+p_y^2)}{2} \ + \ k\,(x^2+y^2) \ + \ \frac{c}{x^2} \\ &= H(x,y,p_x,p_y).\end{aligned} \tag{217}$$

9.3.3. Un grupo uno-paramétrico de transformaciones canónicas dependientes del tiempo. En [53] se muestra que la Hamiltoniana dependiente del tiempo

$$H = \frac{p^2}{2\,m} \ - \ k\,t\,q, \tag{218}$$

con k una constante real, es invariante bajo el grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas generado por la siguiente constante de movimiento

$$g = q - \frac{t\,p}{m} + k\frac{t^3}{3\,m}. \tag{219}$$

Se verifica que X_g es una simetría infinitesimal, en efecto

$$X_g = -\frac{t}{m}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial p}, \tag{220}$$

así que

$$\begin{aligned}L_{X_g}(\Omega + dH\wedge dt) &= d(\Omega\lrcorner X_g + dH\wedge dt\lrcorner X_g) \\ &= d(dq\wedge dp\lrcorner(-\frac{t}{m}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial p}) - ktdq\wedge dt\lrcorner(-\frac{t}{m}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial p}) \\ &\quad + \frac{p}{m}dp\wedge dt\lrcorner(-\frac{t}{m}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial p})) \\ &= d(-\frac{t}{m}dp + dq + k\frac{t^2}{m}dt + \frac{p}{m}dt) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{221}$$

Por otro lado, el flujo Ψ de X_g está dado por

$$\Psi(q,p,t,s) = (q - \frac{ts}{m}, p - s, t), \tag{222}$$

el cual coincide con la expresión del grupo uno-paramétrico de transformaciones de coordenadas canónicas generado por g presentado en [53] (de acuerdo a la ecuación (184)) por

$$Q = q - \frac{ts}{m}\ , \quad P = p - s. \tag{223}$$

9.3.4. Una simetría infinitesimal para el oscilador armónico dependiente el tiempo. El oscilador armónico dependiente el tiempo aparece en diversos marcos de estudio, el caso N-dimensional fue analizado en [56]. Para $N = 1$, la función Hamiltoniana es

$$H(q,p,t) = \frac{1}{2}(p^2 + w^2(t)\, q^2), \tag{224}$$

con frecuencia angular $w(t)$ dependiente del tiempo. La función

$$f = \frac{1}{2}(\alpha^{-2}\, q^2 + (\alpha\, p - \dot{\alpha}\, q)^2), \tag{225}$$

con $\alpha = \alpha(t)$ satisfaciendo $\ddot{\alpha} + w^2(t)\alpha - \alpha^{-3} = 0$, es una constante de movimiento, así que el campo vectorial Hamiltoniano X_f es una simetría infinitesimal del sistema, en efecto,

$$X_f = (\alpha^2 p - \alpha\dot{\alpha} q)\frac{\partial}{\partial q} + (\alpha\dot{\alpha} p - \dot{\alpha}^2 q - \alpha^{-2} q)\frac{\partial}{\partial p}; \tag{226}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} L_{X_f}(\Omega + dH \wedge dt) &= d(\omega \lrcorner X_f + dH \wedge dt \lrcorner X_f) \\ &= d((\alpha^2 p - \alpha\dot{\alpha} q)dp + (\dot{\alpha}^2 q + \alpha^{-2} q - \alpha\dot{\alpha} p)dq \\ &+ (\alpha\dot{\alpha} p^2 - \dot{\alpha}^2 pq - \alpha^{-2} pq + w^2(t)\alpha^2 pq - w^2(t)\alpha\dot{\alpha} q^2)dt) \\ &= (\ddot{\alpha} + w^2(t)\alpha - \alpha^{-3})(\alpha p - 2\dot{\alpha} q)dq \wedge dt \\ &+ (\ddot{\alpha} + w^2(t)\alpha - \alpha^{-3})\alpha q dp \wedge dt \\ &= 0. \end{aligned} \tag{227}$$

En el último pase en la ecuación (227) se ha usado que $\ddot{\alpha} + w^2(t)\alpha - \alpha^{-3} = 0$.

10. Otros formalismos geométricos en Mecánica Clásica y la formulación geométrica de la Mecánica Cuántica

El objetivo de esta sección final es ofrecer una visión general de algunos temas que pueden servir como base para estudios más avanzados. En particular, se presenta de manera introductoria e informal ciertos formalismos geométricos que permiten extender la formulación de la Mecánica Clásica para incluir la descripción de sistemas disipativos. Además, se ofrece una breve exposición sobre la formulación geométrica de la Mecánica Cuántica.

10.1. Variedades de Jacobi y variedades de contacto. Las estructuras de Poisson y de Jacobi fueron introducidas por Lichnerowicz (1915-1998) como estructuras tensoriales que definen dinámica Hamiltoniana [28, 65], a saber, permiten asignar a cada función diferenciable un campo vectorial diferenciable llamado el campo vectorial Hamiltoniano para dicha función. Por otro lado, las llamadas estructuras casi-Poisson se han estudiado como las estructuras subyacentes para la mecánica no-holónoma [66]

Definición 97. Una variedad de Jacobi es una variedad diferencial M equipada con un par (Λ, E), con Λ un campo de 2-tensores contravariantes antisimétricos y E un campo vectorial, que nuevamente satisfacen una condición de compatibilidad establecida también por medio del corchete de Schouten-Nijenhuis.

Cada variedad de Poisson (M, P) es una variedad de Jacobi con $\Lambda = P$ y $E = 0$.

Si (M, Λ, E) es una variedad de Jacobi, entonces la estructura (Λ, E) induce un corchete de Lie en el espacio de funciones diferenciables en M, llamado paréntesis de Jacobi, que satisface la llamada regla débil de Leibniz, a saber, $supp(\{f, g\}) \subseteq supp(f) \cap supp(g)$. Todo paréntesis de Jacobi está definido por una variedad de Jacobi [67, 68].

Dada una variedad de Jacobi (M, Λ, E), es posible asignar a cada función diferenciable f en M uno y solo un campo vectorial, llamado el campo vectorial Hamiltoniano para f (de forma similar al caso Poisson). La dinámica definida por cualquier campo

vectorial Hamiltoniano (en una variedad de Jacobi) describe un sistema disipativo. Dos casos particulares, pero relevantes de variedades de Jacobi, son las variedades de contacto y las variedades simplécticas localmente conformes, de hecho, cada variedad de Jacobi se descompone de manera natural en subvariedades disjuntas que son o variedades de contacto o variedades simplécticas localmente conformes, cada una de estas variedades es cerrada bajo cualquier dinámica Hamiltoniana. Para detalles en mecánica Hamiltoniana en variedades de Jacobi ver [69, 70, 67, 68, 71, 72].

El caso especial de los formalismos tanto Hamiltoniano como Lagrangiano en variedades de contacto se ha convertido en el principal objeto de estudio de muchos artículos de investigación publicados durante la última década [73, 47, 74, 75, 19, 76, 77, 78, 49, 79], ésta es un área de investigación activa.

Una variedad de contacto es una variedad de Jacobi en la que la estructura de Jacobi está definida por medio de una 1-forma diferencial llamada forma de contacto. Toda variedad de contacto es de dimensión impar. El espacio fase natural para sistemas Hamiltonianos disipativos es el producto $\mathbb{R} \times T^*Q$ [74], el cual es una variedad de contacto con la forma de contacto dada localmente por $\theta = dz - \alpha^i dx^i$, donde z es la coordenada global en $\mathbb{R}$ y $(x^1, ..., x^n, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ son coordenadas locales en T^*Q.

En general para una variedad de contacto de dimensión $2n+1$, alrededor de cada punto $x \in M$, existen coordenadas locales (llamadas coordenadas de Darboux o coordenadas canónicas) $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n, z)$ tales que la forma de contacto tiene la expresión local

$$\theta = dz - p_i dq^i; \tag{228}$$

El campo vectorial Hamiltoniano X_f para una función f tiene la expresión local

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} + p_i\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial p_i} + \left(p_i\frac{\partial f}{\partial p_i} - f\right)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{229}$$

Si (M, θ) es una variedad de contacto, entonces el campo vectorial Hamiltoniano X_H para una función H define un sistema Hamiltoniano de contacto. Las expresiones locales de las trayectorias del sistema $\psi(t) = (q^1(t), \ldots, q^n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t), z(t))$ satisfacen las llamadas ecuaciones disipativas de Hamilton [73, 47, 74]

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\left(\frac{\partial H}{\partial q^i} + p_i\frac{\partial H}{\partial z}\right), \qquad \dot{z} = p_i\frac{\partial H}{\partial p_i} - H. \tag{230}$$

La evolución de una función $f \in C^\infty(M)$ a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{f} = \{f, H\} - f\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{231}$$

Así se ve que si la función H (la Hamiltoniana del sistema) depende de la coordenada z entonces ésta no es una constante de movimiento, a saber

$$\dot{H} = -H\frac{\partial H}{\partial z}. \tag{232}$$

Un sistema físico de interés modelado matemáticamente por un sistema Hamiltoniano de contacto es el oscilador armónico amortiguado [74], en efecto, considere el sistema Hamiltoniano de contacto con Hamiltoniana $H = \frac{1}{2m}y^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \gamma z$; se nota que $\dot{H} \neq 0$. Las ecuaciones disipativas de Hamilton son

$$\dot{x} = \frac{y}{m}, \qquad \dot{y} = -m\omega^2 x - \gamma y, \qquad \dot{z} = \frac{y^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \gamma z. \tag{233}$$

Se tiene que

$$\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \omega^2 q = 0\,, \tag{234}$$

la cual es la ecuación de Newton para el oscilador armónico amortiguado.

El oscilador armónico amortiguado es típicamente analizado mediante el formalismo de Lagrange–d'Alembert, introduciendo una función de disipación de Rayleigh,

o bien a través de extensiones Hamiltonianas dependientes del tiempo (como el Hamiltoniano de Caldirola–Kanai). Sin embargo, en estos esquemas el sistema no es verdaderamente Hamiltoniano autónomo, pues la disipación destruye la estructura simpléctica estándar. Recientemente, se ha mostrado que este sistema puede reformularse en términos de una dinámica de cuarto orden, construida a partir de un principio variacional basado en los llamados residuales de la ecuación de Newton. Este enfoque fue introducido en [80] y posteriormente extendido a sistemas con rigidez compleja mediante un modelo de doble oscilador [81].

Más aún, en [82] se ha mostrado que cada formulación dinámica de orden superior par, posee una estructura variacional intrínseca, lo cual permite una descripción Hamiltoniana canónica autónoma, con Hamiltoniano conservado y ecuación de Hamilton–Jacobi asociada, de sistemas disipativos o no holónomos. Este proceso se lleva a cabo al extender el espacio fase permitiendo derivadas de orden superior, creando así un espacio de mayor dimensión donde surgen naturalmente estructuras simplécticas. Dicha dinámica extendida no es equivalente por sí sola al sistema mecánico original, sino que requiere imponer condiciones auxiliares sobre el residual y su derivada, obteniendo la dinámica original en la subvariedad definida por dichas condiciones [83]. Cabe remarcar que este último aspecto de la formulación de la mecánica clásica por medio de dinámica de orden superior, representa una diferencia fundamental con el formalismo de la dinámica Hamiltoniana de contacto, donde la dinámica en la variedad de contacto es equivalente a la dinámica original.

10.2. La formulación geométrica de la Mecánica Cuántica. En la descripción matemática rigurosa de la Mecánica Cuántica el espacio fase es un espacio de Hilbert complejo (de manera estándar en física, el espacio fase es el conjunto de funciones complejas segundo integrables en el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$, y los estados son llamados funciones de onda [84]) llamado espacio de Hilbert cuántico; y los observables son operadores lineales autoadjuntos (operadores diferenciales en la descripción física estándar [84]). A diferencia de la Mecánica Clásica, la cual es una teoría determinista, la Mecánica Cuántica tiene una naturaleza probabilística, a saber, solo probabilidades pueden ser medidas, concretamente, el valor esperado de un observable Q en el estado $\psi \in \mathcal{H}$ es el número $\langle Q \rangle_\psi = \langle \psi, Q\psi \rangle$, donde $\langle , \rangle$ es el producto interno en $\mathcal{H}$ [85].

Dado un sistema cuántico en el espacio de Hilbert complejo $(\mathcal{H}, \langle , \rangle)$ con operador Hamiltoniano H, la evolución de una trayectoria $\psi(t)$ en el espacio de Hilbert cuántico está determinada por la ecuación de Schrödinger (por simplicidad se toman unidades donde $\hbar$ es igual a 1)

$$i\frac{d\psi}{dt} = H\psi. \tag{235}$$

Un observable Q (un operador autoadjunto) es una constante de movimiento si $\langle Q \rangle_{\psi(t)}$ es constante a lo largo de cualquier trayectoria $\psi(t)$ del sistema, es decir, Q es una constante de movimiento si $\frac{d\langle Q \rangle_{\psi(t)}}{dt} = 0$. El conocido teorema de Ehrenfest establece que

$$\frac{d\langle Q \rangle_{\psi(t)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [Q, H] \rangle_{\psi(t)} + \langle \frac{\partial Q}{\partial t} \rangle_{\psi(t)}, \tag{236}$$

donde $[,]$ es el conmutador de operadores. Para más detalles ver [85]. También puede consultar las notas [86], en ellas se exponen con detalle y de manera autocontenida las herramientas básicas de la teoría de los espacios de Hilbert complejos de dimensión infinita, además de una introducción axiomática a la Mecánica Cuántica.

El espacio de Hilbert cuántico $(\mathcal{H}, \langle , \rangle)$ puede ser visto como una variedad simpléctica con la forma simpléctica definida por $\omega(\psi, \phi) = 2Im\langle \psi, \phi \rangle$ [87, 88, 89]. Todo observable F define una función real f por $f(\psi) = \langle F \rangle \psi$ y el campo vectorial Hamiltoniano X_f para f, definido por medio de la forma simpléctica ω (en el sentido $df = X_f \lrcorner \omega$) en $\mathcal{H}$ (como variedad simpléctica), coincide con el operador $-iF$; por lo tanto, las curvas integrales de X_h, con h la función real definida por el operador Hamiltoniano

H, satisfacen la ecuación de de Schrödinger $\frac{d\psi}{dt} = -iH\psi$, es decir, las curvas integrales de X_h son trayectorias del sistema cuántico $(\mathcal{H}, \langle , \rangle, H)$ [87, 88, 89].

AGRADECIMIENTOS. Adrián Escobar agradece el apoyo del proyecto de investigación 2024-CPIR-0 por parte de la DAI UAM. Rafael Azuaje agradece a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti) por el apoyo económico otorgado para una estancia posdoctoral en el marco de la convocatoria Estancias posdoctorales por México 2022.

Referencias

[1] V. I. Arnold. *Ordinary Differential equations*. Springer, 1992.
[2] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. American Mathematical Soc. No. 364, 2008.
[3] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer New York, 1978.
[4] R. Larson, B. H. Edwards, and D. C. Falvo. *Elementary linear algebra*. Brooks/Cole, Cengage Learning Belmont, 2013.
[5] S. Lang. *Linear algebra*. Springer Science & Business Media, 1987.
[6] S. H. Friedberg, A. J. Insel, and L. E. Spence. *Álgebra lineal*. Publicaciones cultural, 1982.
[7] J. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds, second edition*. Springer, 2012.
[8] J. E. Marsden and A. Tromba. *Vector calculus*. Macmillan, 2003.
[9] J. Stewart, K. K. Clegg, and S. Watson. *Calculus*. Cengage Learning, 2020.
[10] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer, 1988.
[11] G. F. Torres del Castillo. *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach, second edition*. Birkhäuser Basel, 2020.
[12] M. G. Calkin. *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*. World Scientific Publishing, 1996.
[13] R. Gilmor. *Lie Groups, Physics and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*. Cambridge University Press, 2008.
[14] P. J. Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107. Springer Science & Business Media, 1993.
[15] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2013.
[16] M. Fecko. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
[17] V. I. Arnold, V. V. Kozlov, and A. I. Neishtadt. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, third edition*. Springer, 2006.
[18] Y. Kosmann-Schwarzbach and B. E. Schwarzbach. *The Noether Theorems, Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*. Springer New York, 2011.
[19] A. Bravetti and A. Garcia-Chung. A geometric approach to the generalized Noether theorem. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 54:095205, 2023.
[20] J. F. Cariñena, F. Falceto, J. Grabowski, and M. F. Rañada. Geometry of Lie integrability by quadratures. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 48:215206, 2015.
[21] J. F. Cariñena et al. Solvability of a Lie algebra of vector fields implies their integrability by quadratures. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 49:425202, 2016.
[22] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge University Press, 2003.
[23] A. M. Escobar-Ruiz and R. Azuaje. On particular integrability in classical mechanics. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 57:105202, 2024.
[24] J. F. Cariñena. A geometric approach to the Sundman transformation and its applications to integrability. *Symmetry*, 16(5):568, 2024.
[25] V. V. Kozlov. Tensor invariants and integration of differential equations. *Russian Mathematical Surveys*, 74(1):111, 2019.
[26] R. d'Inverno and J. Vickers. *Introducing Einstein's relativity: a deeper understanding*. Oxford University Press, 2022.
[27] S. M. Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
[28] A. Lichnerowicz. Les variétés de Poisson et leurs algebres de Lie associées. *J. Differential Geom.*, 12(2):253–300, 1977.
[29] F. Magri and C. Morosi. *A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds*. Quaderno S 19, Universit'a degli Studi di Milano, 1984.
[30] Y. KosmannSchwarzbach and F. Magri. Lax–Nijenhuis operators for integrable systems. *J. Math. Phys.*, 37:6173, 1996.
[31] F. Magri et al. Eight lectures on integrable systems. *Integrability of nonlinear systems*, pages 209–250, 2004.

[32] V. S. Gerdjikov, G. Vilasi, and A. B. Yanovski. *Integrable Hamiltonian Hierarchies*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
[33] P. Tempesta and G. Tondo. Higher Haantjes brackets and integrability. *Commun. Math. Phys.*, 289:1647–1671, 2021.
[34] P. Tempesta and G. Tondo. Haantjes algebras of classical integrable systems. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 201:57–90, 2022.
[35] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau, and P. Vanhaecke. *Poisson structures*. Springer, 2013.
[36] A. Weinstein. The local structure of Poisson manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(3):523–557, 1983.
[37] A. Weinstein. Poisson geometry. *Differential Geom. Appl.*, 9(1):213–238, 1998.
[38] G. Rastelli and M. Santoprete. Canonoid and poissonoid transformations, symmetries and bi-Hamiltonian structures. *J. Geom. Mech.*, 7:483–515, 2015.
[39] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics, third edition*. Addison-Wesley, 2002.
[40] C. J. Eliezer and A. Gray. A note on the time-dependent harmonic oscillator. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 30(3):463–468, 1976.
[41] G. Fiore. The time-dependent harmonic oscillator revisited. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 58:055202, 2025.
[42] V. Perlick. The Hamiltonization problem from a global viewpoint. *J. Math. Phys.*, 33(2):599–606, 1992.
[43] S. A. Hojman. The construction of a Poisson structure out of a symmetry and a conservation law of a dynamical system. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29(3):667, 1996.
[44] M. Avendaño-Camacho et al. Geometrical aspects of the Hamiltonization problem of dynamical systems. *SIGMA*, 18:038, 2022.
[45] M. de León and P. R. Rodrigues. *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*. North-Holland Mathematics Studies, 1989.
[46] A. Weinstein. Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. *Advances in mathematics*, 6(3):329–346, 1971.
[47] M. de León and C. Sardon. Cosymplectic and contact structures for time-dependent and dissipative Hamiltonian systems. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 50:255205, 2017.
[48] J. Struckmeier. Hamiltonian dynamics on the symplectic extended phase space for autonomous and non-autonomous systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38(6):1257, 2005.
[49] R. Azuaje and A. M. Escobar-Ruiz. Canonical and canonoid transformations for Hamiltonian systems on (co)symplectic and (co)contact manifolds. *J. Math. Phys.*, 64(3):033501, 2023.
[50] R. Azuaje and A. Bravetti. Scaling symmetries and canonoid transformations in hamiltonian systems. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 21(04):2450077, 2024.
[51] F. Cantrijn, M. de León, and E. A. Lacomba. Gradient vector fields on cosymplectic manifolds. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25:175–188, 1992.
[52] R. Azuaje. Lie integrability by quadratures for symplectic, cosymplectic, contact and cocontact hamiltonian systems. *Rep. Math. Phys.*, 93(1):37–56, 2024.
[53] G. F. Torres del Castillo. *An Introduction to Hamiltonian Mechanics*. Springer, 2018.
[54] S. Bouquet and A. Bourdier. Notion of integrability for time-dependent Hamiltonian systems: Illustrations from the relativistic motion of a charged particle. *Phys. Rev. E*, 57:1273, 1998.
[55] J. Lewis and H. Ralph. Class of exact invariants for classical and quantum time-dependent harmonic oscillators. *J. Math. Phys.*, 9(11):1976–1986, 1968.
[56] G. E. Prince and C. J. Eliezer. Symmetries of the time-dependent n-dimensional oscillator. *J. Phys. A: Math. Gen*, 13(3):815, 1980.
[57] A. M. Perelomov. *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras*. Birkhäuser Basel, 1990.
[58] V. Kozlov. *Symmetries, Topology and Resonances in Hamiltonian Mechanics*. Springer, 1996.
[59] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mechanics: Volume 1*. Elsevier Science, 1982.
[60] R. Azuaje and A. M. Escobar-Ruiz. Canonical transformations: from the coordinate based approach to the geometric one. *Physica Scripta*, 100(6):065228, 2025.
[61] J. F. Cariñena, F. Falceto, and M. F. Rañada. Canonoid transformations and master symmetries. *J. Geo. Mech*, 5:151–166, 2013.
[62] M. Spivak. *Physics for Mathematicians: Mechanics I*. Physics for Mathematicians: Mechanics I. Publish or Perish, 2010.
[63] P. Winternitz, J. A. Smorodisky, M. Uhlir, and I Fris. On symmetry groups in classical and quantum mechanics. Jadernaja Fiz. 4, 625–635 (1967). *English transl.: Soviet J. Nucl. Phys*, 4:444–450, 1967.
[64] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, and K. Kokkotas. Deformed oscillator algebras for two-dimensional quantum superintegrable systems. *Phys. Rev. A*, 50(5):3700, 1994.
[65] A. Lichnerowicz. Les variétés de Jacobi et leurs algebres de Lie associées. *J. Math. pures et appl.*, 57:453–488, 1978.
[66] L. C. García-Naranjo et al. Almost-Poisson brackets for nonholonomic systems with gyroscopic terms and Hamiltonisation. *Journal of Nonlinear Science*, 34(6):110, 2024.
[67] A. Ibort et al. Reduction of Jacobi manifolds. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 30(8):2783, 1997.

[68] C. M. Marle. On Jacobi manifolds and Jacobi bundles. In *Symplectic Geometry, Groupoids, and Integrable Systems*, pages 227–246, New York, NY, 1991. Springer US.
[69] M. de León, B. López, J. C. Marrero, and E. Padrón. Lichnerowicz-Jacobi cohomology and homology of Jacobi manifolds: modular class and duality. *arXiv preprint math/9910079*, 1999.
[70] J. Araujo and C. Sardón. *A guide to Lie systems with compatible geometric structures*. World Scientific, 2020.
[71] O. Esen et al. Reviewing the geometric Hamilton–Jacobi theory concerning jacobi and leibniz identities. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 55(40):403001, 2022.
[72] I. Vaisman. Jacobi manifolds. *Selected topics in Geometry and Mathematical Physics*, 1:81–100, 2002.
[73] M. de León and M. Lainz. Contact Hamiltonian systems. *J. Math. Phys.*, 60:102902, 2019.
[74] A. Bravetti, H. Cruz, and D. Tapias. Contact Hamiltonian mechanics. *Ann. Physics*, 376:17–39, 2017.
[75] A. Bravetti. Contact Hamiltonian dynamics: The concept and its use. *Entropy*, 19(10):535, 2017.
[76] J. Gaset, X. Gràcia, M.C. Muñoz-Lecanda, X. Rivas, and N. Román-Roy. New contributions to the Hamiltonian and Lagrangian contact formalisms for dissipative mechanical systems and their symmetries. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 17:2050090, 2020.
[77] M. de León and M. Lainz. Infinitesimal symmetries in contact Hamiltonian systems. *J. Geom. Phys.*, 153:103651, 2020.
[78] M. De León et al. Time-dependent contact mechanics. *Monatshefte für Mathematik*, 2022.
[79] R. Azuaje and A. M. Escobar-Ruiz. On particular integrability for (co) symplectic and (co) contact hamiltonian systems. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 58:045201, 2025.
[80] J. W. Sanders. Fourth-order dynamics of the damped harmonic oscillator. *arXiv preprint*, 2021.
[81] J. W. Sanders. A dual-oscillator approach to complex-stiffness damping based on fourth-order dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 109(2):285–301, 2022.
[82] J. W. Sanders. Intrinsic variational structure of higher-derivative formulations of classical mechanics. *arXiv preprint*, 2023.
[83] J. W. Sanders, A. C. DeVoria, N. J. Washuta, G. A. Elamin, K. L. Skenes, and J. C. Berlinghieri. A canonical hamiltonian formulation of the navier–stokes problem. *Journal of Fluid Mechanics*, 984:A27, 2024.
[84] D. Griffiths and D. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics, third edition*. Cambridge University Press, 2018.
[85] B. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer, 2013.
[86] J. R. Bolaños-Servín, R. Quezada-Batalla, and J. I. Rios-Cangas. Elementos matemáticos de la mecánica cuántica. *MIXBA'AL*, 14(1):143–222, 2023.
[87] J-F. Carinena, J. Clemente-Gallardo, and G. Marmo. Geometrization of quantum mechanics. *Theoretical and Mathematical Physics*, 152:894–903, 2007.
[88] J. Clemente-Gallardo. The geometrical formulation of quantum mechanics. *Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza*, 67:51–103, 2012.
[89] P. Sinha and A. Yadav. Poisson geometric formulation of quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 65(6), 2024.

Rafael L. Azuaje Hidalgo.
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Física.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.
e-mail: `razuaje@xanum.uam.mx`

Adrián M. Escobar Ruiz.
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Física.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.
e-mail: `admau@xanum.uam.mx`