MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 33-43.
Recibido 06-03-2024. Aceptado 06-06-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/jirca

PERTURBACIÓN UNIDIMENSIONAL DE RELACIONES AUTOADJUNTAS

JOSUÉ I. RIOS-CANGAS

RESUMEN. En la teoría de transformaciones lineales que se aborda en los cursos clásicos del álgebra lineal, siempre consideran equivalente las nociones de ser simétrica y autoadjunta. Sin embargo, esta equivalencia no sucede si el dominio de la transformación no es todo el espacio vectorial. Este tipo de transformaciones siempre tienen extensiones autoadjuntas que son transformaciones lineales multivaluadas o también conocidas como relaciones. Mediante la teoría de perturbación de transformaciones lineales multivaluadas autoadjuntas, en este trabajo analizamos las extensiones autoadjuntas de transformaciones lineales multivaluadas simétricas, y en particular, de transformaciones lineales cuyo dominio no necesariamente es todo el espacio vectorial.

1. INTRODUCCIÓN

Con frecuencia encontramos que los problemas del análisis, la geometría diferencial, el análisis funcional, los sistemas dinámicos, la física teórica, entre otras importantes teorías, se pueden reducir a un problema de matrices. Este comportamiento es de interés en las ramas de la matemática aplicada, debido a que resulta más factible resolver un problema de matrices que el problema de origen. Horn - Johnson [9, 10] y Bhatia [3, 2] desarrollaron una teoría exhaustiva del análisis matricial, en donde incluye resultados modernos con numerosas pruebas simplificadas de resultados clásicos, basados en publicaciones o al aporte de alumnos, ayudantes y profesores de todos los cursos del álgebra lineal y temas afines.

Una parte que resalta en la teoría de matrices es la teoría de transformaciones lineales (u operadores lineales) es espacios vectoriales de dimensión finita. Recordemos que una transformación lineal $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ en un espacio vectorial sobre el campo de los complejos $\mathbb{C}$, es una aplicación que satisface

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta g\,, \quad \text{para todo} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ y } f, g \in \mathcal{H}\,. \tag{1}$$

Las matrices y las transformaciones lineales están estrechamente relacionadas. De hecho, si $\dim \mathcal{H} = n$ entonces la transformación (1) se puede representar como una matriz en $M_n(\mathbb{C})$ (espacio de matrices complejas de tamaño $n \times n$). Inversamente, toda matriz A en $M_n(\mathbb{C})$ se puede ver como una transformación lineal $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

En los cursos clásicos del álgebra lineal usualmente se considera el dominio de las transformaciones lineales como todo el espacio vectorial y se deja este análisis de dominio en cursos más avanzados de licenciatura o de posgrado como los cursos del análisis funcional, teoría de operadores lineales o teoría espectral de operadores (por mencionar algunos), en donde el dominio del operador lineal actúa en espacios vectoriales de dimensión infinita. Sin embargo, existen ejemplos de transformaciones lineales que no pueden ser analizados con la teoría clásica del álgebra lineal. Por ejemplo, si consideramos a $\mathbb{C}_n[x]$ como el espacio de los polinomios de grado menor o igual a $n \in \mathbb{N}$ en variable la x y el operador de multiplicación por la variable independiente $J\colon \mathcal{D}(J) \subset \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ dado por

$$Jp(x) = xp(x)\,, \tag{2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Principal 15A04, 47A06; Secundaría 47B25, 47A55.
Palabras clave. Transformaciones lineales, relaciones autoadjuntas, teoría de perturbación.

uno puede calcular de manera simple que J es una transformación lineal. Note que hemos hecho énfasis en el dominio de J debido a lo siguiente: como $\{1,\dots,x^n\}$ es una base para $\mathbb{C}_n[x]$, se tiene de (2) que

$$J1 = x\,,\quad Jx = x^2\,,\dots\,,\quad Jx^{n-1} = x^n\,,\quad \text{pero } Jx^n \text{ no está definido}$$

ya que $x^{n+1} \notin \mathbb{C}_n[x]$ y $\mathcal{D}(J) = \operatorname{span}\{1,\dots,x^{n-1}\} \neq \mathbb{C}_n[x]$. Además, si equipamos a $\mathbb{C}_n[x]$ con un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, es decir, si lo convertimos en un espacio de Hilbert, podemos construir una base ortonormal $\{e_j(x)\}_{j=0}^n$ para $\mathbb{C}_n[x]$ mediante el proceso de Gram-Schmidt aplicado a $\{x^j\}_{j=0}^n$. De esto se sigue que el dominio de (2) satisface $\mathcal{D}(J) = \operatorname{span}\{e_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$ y de manera sencilla se verifica que $\langle p(x), Jp(x)\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $p(x) \in \mathcal{D}(J)$, es decir J es una transformación lineal simétrica. Por otra parte, existen $a_j \in \mathbb{R}$ y $b_j > 0$ tales que (ver proposición 15 de la sección 5)

$$Je_j(x) = b_j e_{j+1}(x) + a_j e_j(x) + b_{j-1}e_{j-1}(x)\,,\quad j = 0,\dots,n-1\,.\quad (b_{-1} = 0)$$

De esta manera, uno puede calcular la representación matricial de J, dada por

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & * \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & * \end{pmatrix}. \tag{3}$$

En los cursos de álgebra lineal nos enseñan que una transformación lineal simétrica es autoadjunta, pero esto no sucede con la transformación (2), ya que su representación (3) no es autoadjunta. De hecho, ni siquiera tiene sentido la adjunta de J en teoría clásica del álgebra lineal (incluso ni en teoría de operadores lineales).

Lo anterior es un ejemplo de transformación lineal con dominio no densamente definido en el espacio vectorial y este tipo de transformaciones motivaron a von Neumann a introducir la teoría de transformaciones multivaluadas (o también conocidas como relaciones lineales). Esto por la necesidad de trabajar con la adjunta de una transformación lineal no densamente definida. Es increíble que Neumann no solamente fue el pionero de la teoría de extensiones de operadores simétricos, más también de la teoría de transformaciones multivaluadas iniciada en su trabajo [13], y posteriormente desarrollada en [1, 6, 7].

Hoy en día encontramos numerosos trabajos sobre transformaciones multivaluadas, la cual busca dar solución a problemas lineales y de extensión que son difíciles o imposibles de resolver con la teoría clásica de operadores lineales. En este trabajo abordamos la teoría de extensión de transformaciones lineales simétricas multivaluadas a través de la teoría de perturbación unidimensional (ver sección 4), ya que estas transformaciones siempre tiene extensiones autoadjuntas [12, prop. 4.10]. Para lograr esto, en la sección 2 damos una serie de conceptos y resultados básicos sobre transformaciones multivaluadas, mientras que la sección 3 un poco de teoría de transformaciones simétricas multivaluadas. La última sección la dedicamos en mostrar las extensiones autoadjuntas del operador (2) o equivalente a encontrar las matrices autoadjuntas que contengan a la matriz (3).

2. Transformaciones lineales multivaluadas

Sea $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial finito-dimensional sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$, siendo el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ anti-lineal en su primera entrada.

Para trabajar con transformaciones lineales multivaluadas es necesario trabajar en el espacio vectorial que es copia de $\mathcal{H}$ consigo mismo (c.f. [4, sec. 2.3]),

$$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H} := \left\{\begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix} \,:\, f,g\in\mathcal{H}\right\}\,,\quad \text{con}\quad \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}\right\rangle := \langle f,u\rangle + \langle g,v\rangle\,.$$

Es fácil verificar que el producto anterior de $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ es un producto interno y por consiguiente induce una norma que es equivalente a la norma $\left\|\binom{f}{g}\right\| = \|f\| + \|g\|$. Así, la convergencia en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ implica la convergencia en cada una de sus entradas.

Definición 1. Una *transformación lineal multivaluada* (o también llamada relación) T en $\mathcal{H}$ es un conjunto lineal de $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, donde

$$\mathcal{D}(T) := \left\{ f \in \mathcal{H} : \binom{f}{g} \in T \right\}, \qquad \mathcal{R}(T) := \left\{ g \in \mathcal{H} : \binom{f}{g} \in T \right\},$$
$$\mathcal{N}(T) := \left\{ f \in \mathcal{H} : \binom{f}{0} \in T \right\}, \qquad \mathcal{M}(T) := \left\{ g \in \mathcal{H} : \binom{0}{g} \in T \right\},$$

representan el *dominio*, *rango*, *núcleo* y *multivaluado* de T, respectivamente, los cuales son conjuntos lineales de $\mathcal{H}$.

De esta manera, al hablar de una relación en $\mathcal{H}$ nos estamos refiriendo a un conjunto lineal de $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$.

Ejemplo 1. Abusando un poco de la notación, si identificamos a la transformación lineal (2) con su gráfica en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ (cf. [4, cap. 3]), tenemos que

$$J = \left\{ \binom{p(x)}{xp(x)} : p(x) \in \operatorname{span}\{x^j\}_{j=0}^{n-1} \right\} \subset \mathbb{C}_n[x] \oplus \mathbb{C}_n[x]. \tag{4}$$

Entonces, para $\binom{p(x)}{xp(x)}, \binom{q(x)}{xq(x)} \in J$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se sigue que

$$\alpha\binom{p(x)}{xp(x)} + \beta\binom{q(x)}{xq(x)} = \binom{\alpha p(x) + \beta q(x)}{x(\alpha p(x) + \beta q(x))} \in J.$$

Por lo tanto, J es una relación en $\mathbb{C}_n[x] \oplus \mathbb{C}_n[x]$.

Observación 1. El ejemplo 1 se cumple de manera general, i.e., toda transformación lineal $T\colon \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ identificada con su gráfica es una relación en $\mathcal{H}$.

El inverso de la observación anterior no se cumple, pues es simple ver que para $f \in \mathcal{H}$ distinto de cero, span $\left\{\binom{0}{f}\right\}$ es una relación en $\mathcal{H}$ que no representa la gráfica de una transformación lineal. De hecho se cumple la siguiente caracterización.

Observación 2. Una relación T en $\mathcal{H}$ es gráfica de una transformación lineal si y solo si $\mathcal{M}(T) = \{0\}$ [5, prop. 3.2.1].

A partir de aquí, las transformaciones lineales serán identificadas con su gráfica para tratarlas como relaciones. Diremos que una relación no es transformación lineal si no es la gráfica de una transformación lineal.

Ejemplo 2. El conjunto T de $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ dado por

$$T = \left\{ \binom{(x,y)}{(x+y,a)} : x, y, a \in \mathbb{C} \right\}.$$

es una relación que no es transformación lineal. En efecto, si $\binom{(x,y)}{(x+y,a)}, \binom{(r,s)}{(r+s,b)} \in T$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces

$$\alpha\binom{(x,y)}{(x+y,a)} + \beta\binom{(r,s)}{(r+s,b)} = \binom{(\alpha x + \beta r, \alpha y + \beta s)}{(\alpha x + \beta r + \alpha y + \beta s, \alpha a + \beta b)} \in T.$$

Sin embargo, para $\alpha \neq 0$ se sigue que $\binom{(0,0)}{(0,\alpha)} \in T$, o bien, $\mathcal{M}(T) \neq \{(0,0)\}$.

Para dos relaciones T, S y $\zeta \in \mathbb{C}$, consideremos las operaciones *suma, multiplicación por escalar, composición* e *inversa* de relaciones dadas por

$$T + S := \left\{ \binom{f}{g+h} : \binom{f}{g} \in T, \ \binom{f}{h} \in S \right\}, \quad \zeta T := \left\{ \binom{f}{\zeta g} : \binom{f}{g} \in T \right\},$$
$$ST := \left\{ \binom{f}{k} : \binom{f}{g} \in T, \ \binom{g}{k} \in S \right\}, \qquad T^{-1} := \left\{ \binom{g}{f} : \binom{f}{g} \in T \right\},$$

respectivamente, las cuales son relaciones en $\mathcal{H}$. Es directo ver que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T^{-1}) &= \mathcal{R}(T)\,, & \mathcal{N}(T^{-1}) &= \mathcal{M}(T)\,, \\ \mathcal{R}(T^{-1}) &= \mathcal{D}(T)\,, & \mathcal{M}(T^{-1}) &= \mathcal{N}(T)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

La relación $T\restriction_{\mathcal{C}}$ es la relación T con dominio restringido a un conjunto lineal $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(T)$.

Definición 2. Para dos relaciones T, S, decimos que S es extensión de T, escribimos $T \subset S$, si $S\restriction_{\mathcal{D}(T)} = T$.

Ejemplo 3 (continuación del ejemplo 1)**.** Teniendo en cuenta la representación matricial (3), considere $J_0 \colon \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ con representación matricial

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

el cual siendo identificado con su gráfica en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ se sigue que J_0 es extensión de J dado en (4), debido a que $J_0\restriction_{\mathcal{D}(J)} = J$.

Dos relaciones T y S son linealmente independientes si $T \cap S = \left\{\binom{0}{0}\right\}$. De esto, podemos asumir que los símbolos $\perp, \dotplus$, $\oplus$, y $\ominus$ representan la notación estándar en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, es decir,

$$\begin{aligned} T^{\perp} &= \left\{\binom{h}{k} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \left\langle \binom{f}{b}, \binom{h}{k} \right\rangle = 0\,, \quad \forall \binom{f}{g} \in T \right\}, \\ T \dotplus S &= \left\{ \binom{f+h}{g+k} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \binom{f}{g} \in T,\ \binom{h}{k} \in S \text{ y } T \cap S = \left\{\binom{0}{0}\right\} \right\}, \\ T \oplus S &= T \dotplus S\,, \text{ con } T \subset S^{\perp}\,, \\ T \ominus S &= T \cap S^{\perp}\,, \end{aligned}$$

los cuales se vuelven conjuntos lineales en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, o bien, relaciones en $\mathcal{H}$. Hablando de manera estricta, el símbolo $\oplus$ en este contexto difiere de la expresión $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Esto no debería causar confusión al usar el mismo símbolo.

En el contexto de relaciones, se denota la *adjunta* de una relación T como la relación en $\mathcal{H}$ dada por

$$T^* := \left\{ \binom{h}{k} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \langle h, g\rangle = \langle k, f\rangle\,, \quad \forall \binom{f}{g} \in T \right\}. \tag{6}$$

Este concepto extiende al usual en transformaciones lineales, e incluso al de operadores lineales en donde es necesario la densidad del dominio [5, sec. 3.4].

Observación 3. La adjunta de T satisface $T^* = \left(-T^{-1}\right)^{\perp}$. Además, para dos relaciones T, S y $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, se tiene lo siguiente [11, teo. 3 y cor. 4]:

$$\begin{aligned} T^{**} &= T\,, & (T+S)^* &= T^* + S^*\,, \\ (T^*)^{-1} &= (T^{-1})^*\,, & S \subset T &\Rightarrow T^* \subset S^*\,, \\ (\alpha T)^* &= \overline{\alpha} T^*\,, & \mathcal{N}(T^*) &= \mathcal{R}(T)^{\perp}\,. \end{aligned}$$

Las propiedades de la inversa (5) y la última igualdad de la observación 3 implican

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(A^{-1}) \subset \mathcal{N}(A^{*-1})^{\perp} = \mathcal{M}(A^*)^{\perp}\,. \tag{7}$$

En la observación 2 mencionamos que el multivaluado de una relación determina si la relación es o no una transformación lineal. Uno se pregunta si una relación contiene una parte que sea transformación lineal, la respuesta incide en la siguiente descomposición.

Definición 3. Para una relación T, considere

$$T_{\mathrm{m}} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in T \right\} \quad \text{y} \quad T_{\mathrm{o}} := T \ominus T_{\mathrm{m}} \,, \tag{8}$$

de donde se consigue la descomposición $T = T_{\mathrm{o}} \oplus T_{\mathrm{m}}$.

Es claro que T_{o} es una transformación lineal y es llamada la *parte operador* de T, mientras que T_{m} es una relación puramente multivaluada y es llamada la *parte multivaluada* de T. Además,

$$\mathcal{R}(T_{\mathrm{o}}) \perp \mathcal{R}(T_{\mathrm{m}}) = \mathcal{M}(T) \quad \text{y} \quad \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T_{\mathrm{o}}) \,.$$

La descomposición de una relación es sus partes operador y multivaluada (8) simplifica el análisis de su espectro debido a la siguiente observación.

Observación 4. Si T es una relación tal que $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{M}(T)^{\perp}$, entonces tanto el dominio como el rango de T_{o} están contenidos en $\mathcal{M}(T)^{\perp}$. Así, para el espacio vectorial copia de $\mathcal{M}(T)^{\perp}$ consigo mismo,

$$\mathcal{M}(T)^{\perp} \oplus \mathcal{M}(T)^{\perp} \,, \tag{9}$$

se sigue que la relación T_T en el espacio (9) dada por

$$T_T := T \cap \left(\mathcal{M}(T)^{\perp} \oplus \mathcal{M}(T)^{\perp} \right) = T_{\mathrm{o}} \,,$$

es decir, T_T es equivalente a T_{o} en el espacio (9) y por consiguiente es una transformación lineal. Con esta construcción se puede afirmar que los espectros de T y de T_T son los mismos [11, teo. 9].

3. Transformaciones multivaluadas simétricas

Abordamos en esta sección un poco de la teoría de transformaciones lineales multivaluadas que son simétricas, i.e., relaciones simétricas. Esto para extender la noción de transformaciones lineales simétricas que no necesariamente son autoadjuntas (ver por ejemplo el operador (2) que se vio en la sección 1).

Definición 4. Se dice que una relación A en $\mathcal{H}$ es simétrica si

$$\langle f, g \rangle \in \mathbb{R} \,, \quad \text{para todo} \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A \,. \tag{10}$$

La noción de ser simétrica se caracteriza de la siguiente manera (cf. [11, prop. 10]):

$$A \text{ es simétrica} \quad \Leftrightarrow \quad \langle f, k \rangle = \langle g, h \rangle \;, \quad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A \quad \Leftrightarrow \quad A \subset A^* \,. \tag{11}$$

Proposición 5. *Una relación simétrica A satisface $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{M}(A)^{\perp}$ y, por lo tanto, cumple las condiciones de la observación 4.*

Demostración. Se sigue de la última implicación de (11) que $\mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}(A^*)$. Por lo tanto, de (7) y tomando complemento ortogonal, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{M}(A^*)^{\perp} \subset \mathcal{M}(A)^{\perp}$. □

Lo siguiente muestra una propiedad del adjunto de una relación simétrica.

Proposición 6. *Si A es una relación simétrica en $\mathcal{H}$, entonces*

$$\mathcal{R}(A^* - \zeta I) = \mathcal{H} \,, \qquad \zeta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \,. \tag{12}$$

Demostración. Como A es simétrica, si $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in (A - \overline{\zeta} I)$ entonces $\begin{pmatrix} f \\ \overline{\zeta} f \end{pmatrix} \in A$ y $\overline{\zeta} \left\| f \right\|^2 = \left\langle f, \overline{\zeta} f \right\rangle \in \mathbb{R}$, lo que implica $f = 0$, es decir, $\mathcal{N}(A - \overline{\zeta} I) = \{0\}$. Por lo tanto, de la última implicación de la observación 3 se sigue (12). □

Diremos que una relación A es *autoadjunta* si $A = A^*$. Es claro que toda relación autoadjunta es simétrica, pero el sentido inverso no necesariamente se cumple. Por ejemplo, la transformación (2) que se mostró en la sección 1 es simétrica no autoadjunta, debido a que su representación matricial (3) no es autoadjunta.

Corolario 7. *Una relación simétrica con dominio todo el espacio vectorial es una transformación lineal autoadjunta.*

Demostración. Como $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$, se sigue de (7) que $\mathcal{M}(A^*) = \{0\}$ y por consiguiente A^* es una transformación lineal. Ahora bien, (11) implica que si $\binom{h}{k} \in A^*$ entonces existe $\binom{h}{g} \in A \subset A^*$, de donde se sigue que $\binom{0}{k-g} = \binom{h}{k} - \binom{h}{g} \in A^*$, o bien, $k = g$ y $A^* \subset A$. Por lo tanto, $A = A^*$. □

Para trabajar con la teoría de extensión de relaciones simétricas consideramos el *espacio defecto* de una relación T dado por

$$\mathrm{N}_\zeta(T) := \left\{ \binom{f}{\zeta f} \in T \right\} , \quad \zeta \in \mathbb{C} ,$$

el cual es una transformación lineal contenida en T con $\mathcal{D}(\mathrm{N}_\zeta(T)) = \mathcal{N}(T - \zeta I)$.

El espacio defecto es útil en la caracterización de la adjunta de una relación simétrica A, viz. (cf. [12, teo. 4.6])

$$A^* = A \dotplus \mathrm{N}_\zeta(A^*) \dotplus \mathrm{N}_{\overline{\zeta}}(A^*) , \quad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} , \tag{13}$$

donde la suma en (13) se vuelve ortogonal si $\zeta \in \{i, -i\}$. Cabe mencionar que la ecuación (13) se le conoce como la *primera fórmula* de von Neumann para relaciones lineales.

Debido a que el espacio defecto está involucrado en la caracterización de la adjunta de una relación, es conveniente considerar el *índice de defecto* de una relación simétrica A, el cual viene dado por

$$\eta_\zeta(A) := \dim \mathrm{N}_\zeta(A^*) , \quad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} . \tag{14}$$

este índice permanece constante sobre $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ [12, sec. 3].

Proposición 8. *Una relación simétrica A es autoadjunta si y solo si $\eta_\zeta(A) = 0$.*

Demostración. El índice $\eta_\zeta(A)$ es cero si y solo si $\mathrm{N}_\zeta(A^*) = \left\{\binom{0}{0}\right\}$, para todo $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, esto si y solo si $A = A^*$, debido a (13). □

Observación 5. La proposición 8 proporciona una manera de determinar si una relación simétrica es autoadjunta o no. Además, en [12, prop. 4.10] nos aseguran que una relación simétrica no autoadjunta siempre tiene extensiones autoadjuntas.

Surge el interés de describir las extensiones autoadjuntas de una relación simétrica y una manera de hacerlo es mediante la llamada *segunda fórmula* de von Neumann para relaciones [12, teo. 4.7]. Otra manera de describir estas extensiones es a través de la teoría de perturbación la cual se aborda en la siguiente sección.

4. Perturbación unidimensional de relaciones autoadjuntas

Iniciamos esta sección con la siguiente igualdad entre relaciones que será de gran utilidad en la secuela. Recalcamos que dos relaciones son linealmente independientes si solo coinciden en el elemento cero.

Lema 9. *Si T y S son relaciones linealmente independientes, entonces*

$$T \dotplus S = (T^* \cap S^*)^* . \tag{15}$$

Demostración. Mostremos primero por contención que

$$T \dotplus S = \left(T^\perp \cap S^\perp\right)^\perp . \tag{16}$$

Si $\mathbf{a} \in T^\perp \cap S^\perp$, entonces es simple ver que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$, para todo $\mathbf{b} \in T \dotplus S$, es decir, $\mathbf{a} \in (T \dotplus S)^\perp$ y se cumple $T^\perp \cap S^\perp \subset (T \dotplus S)^\perp$. Ahora, es claro que $T, S \subset T \dotplus S$, o bien, $(T \dotplus S)^\perp \subset T^\perp, S^\perp$, es decir, $(T \dotplus S)^\perp \subset T^\perp \cap S^\perp$ y por consiguiente iguales, que tomando complemento ortogonal se llega a (16). Por lo tanto, las propiedades de la observación 3 y (16) implican

$$\begin{aligned} T \dotplus S &= (-T^{*-1})^{\perp} \dotplus (-S^{*-1})^{\perp} = -\big(T^{*\perp} \dotplus S^{*\perp}\big)^{-1} \\ &= -\Big((T^* \cap S^*)^{\perp}\Big)^{-1} = \big(-(T^* \cap S^*)^{-1}\big)^{\perp} = (T^* \cap S^*)^* , \end{aligned} \tag{17}$$

como se queria. □

Hemos usado libremente en (17) la conmutación de las operaciones multiplicación por menos, inversa y complemento ortogonal de una relación (cf. [11, prop. 2]).

Para una relación A y $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ de norma uno, consideremos las relaciones

$$S_A := A\restriction_{\mathcal{D}(A)\ominus\varphi} , \qquad A_\varphi := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\ \varphi\end{pmatrix}\right\} .$$

Lema 10. *Las relaciones A^*, A_φ son linealmente independientes. Además,*
(a) $S_A = A \cap A_\varphi^*$.
(b) $S_A^* = A^* \dotplus A_\varphi$.
(c) $\mathcal{M}(S_A^*) = \mathcal{M}(A^*) \oplus \operatorname{span}\{\varphi\}$.

Demostración. Teniendo en cuenta (7), se sigue que $\varphi \perp \mathcal{M}(A^*)$, lo que implica $A_\varphi \cap A^* = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ y se cumple la primera parte de la afirmación.

(a): Es sencillo calcular que $\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix} \in S_A \subset A$ si y solo si $\langle f, \varphi\rangle = \langle g, 0\rangle$, esto si y solo si $\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix} \in A_\varphi^* \cap A$.

(b): Se sigue del punto anterior y de la ecuación (15).

(c): Se mostró en la primera parte de la afirmación que $\operatorname{span}\{\varphi\} \perp \mathcal{M}(A^*)$ y del punto (b) se tiene que $\mathcal{M}(A^*) \oplus \operatorname{span}\{\varphi\} \subset \mathcal{M}(S_A^*)$. Para la otra contención, si $g \in \mathcal{M}(S_A^*)$ se sigue de (b) que existe $h \in \mathcal{M}(A^*)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que

$$g = h + \alpha\varphi \in \mathcal{M}(A^*) \oplus \operatorname{span}\{\varphi\} ,$$

o bien, $\mathcal{M}(S_A^*) \subset \mathcal{M}(A^*) \oplus \operatorname{span}\{\varphi\}$. □

Lo siguiente describe las partes (8) de S_A^*.

Corolario 11. *Las partes operador y multivaluada de la adjunta de S_A cumplen*

$$(S_A^*)_{\mathrm{m}} = (A^*)_{\mathrm{m}} \oplus A_\varphi ; \quad (S_A^*)_{\mathrm{o}} = \left\{\begin{pmatrix}f\\ g - \langle\varphi, g\rangle\,\varphi\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix} \in (A^*)_{\mathrm{o}}\right\} . \tag{18}$$

Demostración. La primera igualdad de (18) es directo de 10.(c). Ahora, definamos el lado derecho de la segunda igualdad de (18) como T para mostrar que $(S_A^*)_{\mathrm{o}} = T$. De 10.(b) se sigue que $T \subset S_A^*$ y es sencillo ver que T es transformación lineal, pues $(A^*)_{\mathrm{o}}$ lo es, lo que implica $T \subset (S_A^*)_{\mathrm{o}}$. Para la otra contención, si $\begin{pmatrix}f\\h\end{pmatrix} \in (S_A^*)_{\mathrm{o}} \subset S_A^*$ entonces se tiene nuevamente de 10.(b) que $\begin{pmatrix}f\\h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f\\ g+\alpha\varphi\end{pmatrix}$, con $\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix} \in A^*$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Note que $f = 0$ implica $0 = h = g + \alpha\varphi$, o bien, $g = \alpha\varphi = 0$, pues A^* y A_φ son linealmente independientes. Así, $\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix} \in (A^*)_{\mathrm{o}}$ y de 10.(c) se cumple que $h \perp \varphi$,

$$0 = \langle\varphi, h\rangle = \langle\varphi, g + \alpha\varphi\rangle = \langle\varphi, g\rangle + \alpha ,$$

es decir, $h = g - \langle\varphi, g\rangle\,\varphi$. Por lo tanto, $\begin{pmatrix}f\\h\end{pmatrix} \in T$ y $(S_A^*)_{\mathrm{m}} \subset T$. □

Note que la relación $S_A \subset A$ es simétrica si A lo es, ya que $S_A \subset A \subset A^* \subset S_A^*$.

Teorema 12. *Si A es una relación simétrica, entonces:*
(a) $\dim \mathrm{N}_\zeta(S_A^*) = \dim \mathrm{N}_\zeta(A^*) + 1$, *con* $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
(b) $\dim[S_A^*/S_A] = [A^*/A] + 2$.

Demostración. Para $\alpha \in \mathbb{C}$, de (12) existe $\binom{f}{g} \in A^*$ tal que $-\alpha\varphi = g - \zeta f$, o bien, $\binom{f}{\zeta f - \alpha\varphi} \in A^*$. Además, si $\binom{f}{\zeta f} \in \mathrm{N}_\zeta(S_A^*) \subset S_A^*$ entonces de 10.(b) existen $\binom{f}{g} \in A^*$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que $\binom{f}{\zeta f} = \binom{f}{g + \alpha\varphi}$, viz. $\binom{f}{\zeta f - \alpha\varphi} \in A^*$. De esto podemos considerar $D = \left\{ \binom{f}{\zeta f - \alpha\varphi} \in A^* \,:\, \alpha \in \mathbb{C} \right\} \subset A^*$, el cual es un conjunto lineal con $\dim D = \dim \mathrm{N}_\zeta(A^*) + 1$, debido a que A^* y A_φ son linealmente independientes. Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} \gamma \colon \mathrm{N}_\zeta(S_A^*) &\to D \\ \binom{f}{\zeta f} &\mapsto \binom{f}{\zeta f - \alpha\varphi}. \end{aligned}$$

Observe que $\gamma\binom{0}{0} = \binom{0}{-\alpha\varphi}$ implica $\alpha = 0$, debido a independencia lineal de A^* y A_φ. Además, es sencillo ver que $\ker\gamma = \left\{\binom{0}{0}\right\}$ y para $\binom{f}{\zeta f - \alpha\varphi} \in D$ se tiene que $\binom{f}{\zeta f} = \binom{f}{\zeta f - \alpha\varphi} + \binom{0}{\alpha\varphi} \in S_A^*$, i.e., $\binom{f}{\zeta f} \in \mathrm{N}_\zeta(S_A^*)$. Por lo tanto, γ es un isomorfismo y se cumple (a). Además, uno calcula de (13) que

$$\dim[S_A^*/S_A] = 2\dim \mathrm{N}_\zeta(S_A^*) = 2\dim \mathrm{N}_\zeta(A^*) + 2 = [A^*/A] + 2\,,$$

de donde se sigue (b). □

El punto 12.(b) es equivalente a decir que el índice (ver (14)) de S_A es

$$\eta_\zeta(S_A) = \eta_\zeta(A) + 1\,, \quad \zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\,. \tag{19}$$

En lo siguiente caracterizamos todas las extensiones autoadjuntas de S_A cuando A es relación autoadjunta.

Teorema 13. *Si A es una relación autoadjunta, entonces $\eta_\zeta(S_A) = 1$. Además, todas las extensiones autoadjuntas de S_A están en correspondencia uno-a-uno con $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, las cuales vienen dadas por*

$$A_\tau = \left\{ \binom{f}{g + \tau\langle\varphi, f\rangle\varphi} \,:\, \binom{f}{g} \in A \right\}, \quad \tau \neq \infty\,, \tag{20}$$

mientras que

$$A_\infty = S_A \dotplus A_\varphi\,. \tag{21}$$

Demostración. De la proposición (8) y (19) se sigue la primera parte de la afirmación. Ahora, es sencillo verificar de la definición (10) que las extensiones (20) y (21) son simétricas. Además, para $\tau \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mathcal{D}(A_\tau) = \mathcal{D}(A)$ y

$$S_{A_\tau} = A_\tau\!\restriction_{\mathcal{D}(A_\tau)\ominus\varphi} = A\!\restriction_{\mathcal{D}(A)\ominus\varphi} = S_A\,.$$

De esto y de (19) se cumple que $\eta_\zeta(A_\tau) = \eta_\zeta(S_A) - 1 = 0$, es decir, A_τ es autoadjunta. Por otra parte, como $S_A \subset A$, se cumple de los lemas 9 y 10 que S_A y A_φ son lineamente independientes y $A_\infty^* = S_A^* \cap A_\varphi^*$. Así, si $\binom{f}{\zeta f} \in A_\infty^* \subset A_\varphi^*, S_A^*$, con $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, entonces $\langle f, \varphi\rangle = \langle \zeta f, 0\rangle = 0$ y de 10.(b), $\binom{f}{\zeta f} = \binom{f}{g + \alpha\varphi}$, con $\binom{f}{g} \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\zeta\langle f, f\rangle = \langle f, g + \alpha\varphi\rangle = \langle f, g\rangle \in \mathbb{R}\,,$$

lo que implica $f = 0$ y $\eta_\zeta(A_\infty) = 0$, i.e, A_∞ es autoadjunta. Falta mostrar que cualquier extensión autoadjunta tiene la estructura (20) o (21). Si $\hat{A}$ es extensión autoadjunta de S_A entonces $\hat{A} \subset S_A^*$. Así, para $\binom{f}{h} \in \hat{A}$ se cumple de 10.(b) que

$$\binom{f}{h} = \binom{f}{g + \alpha\varphi}, \quad \text{con} \quad \binom{f}{g} \in A,\ \alpha \in \mathbb{C}\,. \tag{22}$$

Si $f \perp \varphi$ entonces $\binom{f}{g} \in S_A$ y $\binom{f}{h} \in A_\infty$. Por lo tanto, $\hat{A} \subset A_\infty$ e iguales, debido a que son autoadjuntas. Para el caso $\langle \varphi, f \rangle \neq 0$, hacemos $\tau = \alpha / \langle \varphi, f \rangle$ en (22), por lo que $h = g + \tau \langle \varphi, f \rangle \varphi$ y como $\hat{A}, A$ son autoadjuntas, $\langle f, h \rangle, \langle f, g \rangle \in \mathbb{R}$ y

$$\langle f, h \rangle = \langle f, g \rangle + \tau \langle \varphi, f \rangle \langle f, \varphi \rangle = \langle f, g \rangle + \tau \left| \langle \varphi, f \rangle \right|^2 ,$$

de donde se sigue $\tau \in \mathbb{R}$ y $\hat{A} \subset A_\tau$. Por lo tanto, $\hat{A} = A_\tau$ ya que son autoadjuntas. □

Observación 6. En [8, props. 1.3 y 1.4] se menciona que una transformación lineal simétrica S con $\mathcal{D}(S) \neq \mathcal{H}$ e índice $\eta_\zeta(S) = 1$, tiene una extensión autoadjunta A con $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$, que del corolario 7 se cumple que A es una transformación lineal.

Corolario 14. *Si S es una transformación lineal con $\mathcal{D}(S) \neq \mathcal{H}$ y $\eta_\zeta(S) = 1$, entonces existe una transformación lineal autoadjunta A tal que*

$$S^* = A \dotplus (S^*)_{\mathrm{m}} . \tag{23}$$

Además, $\dim \mathcal{D}(S)^\perp = \dim \mathcal{M}(S^*) = 1$, *que haciendo* $\mathcal{D}(S)^\perp = \operatorname{span}\{\varphi\}$ *se llega a*

$$S = A\restriction_{\mathcal{H} \ominus \varphi} . \tag{24}$$

Por lo tanto, $S_A = S$ y todas sus extensiones autoadjuntas vienen dadas por (20)-(21) *del teorema 13, las cuales son todas transformaciones lineales a excepción de A_∞.*

Demostración. De la observación 6 se tiene la existencia de una transformación lineal autoadjunta A tal que $S \subset A$ y $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. Además, es directo ver que A y $(S^*)_{\mathrm{m}}$ son linealmente independientes y como $A \subset S^*$, entonces $A \dotplus (S^*)_{\mathrm{m}} \subset S^*$. Por otra parte, como $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$, si $\binom{f}{g} \in S^*$ entonces existe $\binom{f}{h} \in A \subset S^*$, lo que implica $\binom{0}{g-h} \in (S^*)_{\mathrm{m}}$ y $\binom{f}{g} = \binom{f}{h} + \binom{0}{g-h} \in A \dotplus (S^*)_{\mathrm{m}}$, es decir, $S^* \subset A \dotplus (S^*)_{\mathrm{m}}$, de donde se sigue (23). Ahora bien, debido al índice de S se tiene que $\dim \mathrm{N}_\zeta(S^*) = 1$ y de (13), $2 = \dim[S^*/S] > \dim[A/S] > 0$ de donde se tiene $\dim[A/S] = 1$ y de (23),

$$1 = \dim[S^*/A] = \dim (S^*)_{\mathrm{m}} = \dim \mathcal{M}(S^*) .$$

Note de (7) que $\dim \mathcal{D}(S)^\perp = 1$. Por lo tanto, (15), 10.(a) y (23) implican (24). □

La condición de que S sea una transformación lineal en el corolario 14, no se puede relajar para que tenga codimensión del dominio igual a uno. En efecto, pues para la relación autoadjunta (21), el mismo teorema 13 nos marca que S_{A_∞} tiene índice $\eta_\zeta(S_{A_\infty}) = 1$, pero la codimensión de su dominio es mayor o igual que dos.

5. Ejemplo

En esta sección abordamos el problema de encontrar las extensiones autoadjuntas de la transformación lineal (2) que se inició en la sección 1. Recordamos que $(\mathbb{C}_n[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es el espacio de Hilbert de los polinomios de grado menor o igual a $n \in \mathbb{N}$ en la variable x y que el operador de multiplicación por la variable independiente es la transformación lineal simétrica

$$\begin{aligned} J\colon \operatorname{span}\{e_j(x)\}_{j=0}^{n-1} &\to \mathbb{C}_n[x] \\ p(x) &\mapsto xp(x) , \end{aligned} \tag{25}$$

donde $\{e_j(x)\}_{j=0}^{n}$ es la base ortonormal para $\mathbb{C}_n[x]$ construida mediante el proceso de Gram-Schmidt aplicado a $\{x^j\}_{j=0}^{n}$, cuyos elementos satisfacen

$$e_j(x) = \alpha_{jj} x^j + \text{orden menor} , \quad \alpha_{jj} > 0, \text{ para } j = 0, \dots, n . \tag{26}$$

Proposición 15 (Relación de recurrencia). *Existen $a_j \in \mathbb{R}$ y $b_j > 0$ tales que*

$$J e_j(x) = b_j e_{j+1}(x) + a_j e_j(x) + b_{j-1} e_{j-1}(x) , \quad j = 0, \dots, n-1 . \quad (b_{-1} = 0) \tag{27}$$

Demostración. Como $Je_j(x) \in \mathbb{C}_n[x]$ es un polinomio de grado $j+1$, entonces se cumple que $Je_j(x) = \sum_{r=0}^{j+1} c_{jr} e_r(x)$, con $c_{jr} \in \mathbb{C}$. Así, para $s = 0, \dots, j-2$,

$$c_{js} = \langle e_s(x), Je_j(x) \rangle = \langle Je_s(x), e_j(x) \rangle = \sum_{k=0}^{s+1} \overline{c}_{sk} \langle e_k(x), e_j(x) \rangle = 0 \,,$$

lo que implica $Je_j(x) = b_j e_{j+1}(x) + a_j e_j(x) + d_j e_{j-1}(x)$, donde $b_j = c_{j(j+1)}$, $a_j = c_{jj}$ y $d_j = c_{j(j-1)}$. Además, $a_j = \langle e_j(x), Je_j(x) \rangle \in \mathbb{R}$ mientras que de (26),

$$\alpha_{jj} x^{j+1} + \text{orden menor} = x e_j(x) = Je_j(x) = b_j \alpha_{(j+1)(j+1)} x^{j+1} + \text{orden menor} \,,$$

lo cual implica $b_j > 0$. Más aún,

$$d_j = \langle e_{j-1}(x), Je_j(x) \rangle = \langle Je_{j-1}(x), e_j(x) \rangle = b_{j-1} \,,$$

como se quería. □

Teniendo en cuenta la relación de recurrencia (27), definamos la transformación lineal $J_0 \colon \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ que actúa como

$$\begin{aligned} J_0 e_0(x) &= b_0 e_1(x) + a_0 e_0(x) \,, \\ J_0 e_j(x) &= b_j e_{j+1}(x) + a_j e_j(x) + b_{j-1} e_{j-1}(x) \,, \quad j = 1, \dots, n-1 \,, \\ J_0 e_n(x) &= b_{n-1} e_{n-1}(x) \,. \end{aligned} \tag{28}$$

Es directo calcular que J_0 es simétrica y por ende autoadjunta, debido al corolario 7.

Observe que $J_0 \upharpoonright_{\mathbb{C}_n[x] \ominus e_n(x)} = J$ y si identificamos a los operadores J y J_0 con su gráfica (ver ejemplo 1), entonces el lema 10, teorema 12 y corolario 11 implican que el operador de multiplicación (25) tiene índice $\eta_\zeta(J) = 1$ y adjunta

$$J^* = J_0 \dotplus \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e_n(x) \end{pmatrix} \right\} ,$$

cuyas partes operador y multivaluada son $(J^*)_{\mathrm{m}} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e_n(x) \end{pmatrix} \right\}$ y

$$(J^*)_{\mathrm{o}} = \left\{ \begin{pmatrix} p(x) \\ J_0 p(x) - b_{n-1} p_{n-1} e_n(x) \end{pmatrix} : p(x) = \sum_{j=0}^{n} p_n e_n(x) \in \mathbb{C}_n[x] \right\} . \tag{29}$$

Ciertamente, pues se tiene de (28) que $\langle e_n(x), J_0 p(x) \rangle = \langle J_0 e_n(x), p(x) \rangle = b_{n-1} p_{n-1}$, por lo que el lado derecho de (18) implica (29).

Además, se sigue del teorema 13 que todas las extensiones autoadjuntas de J están en correspondencia unívoca con $\tau \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y estás vienen dadas por

$$J_\tau = \left\{ \begin{pmatrix} p(x) \\ J_0 p(x) + \tau p_n e_n(x) \end{pmatrix} : p(x) = \sum_{j=0}^{n} p_n e_n(x) \in \mathbb{C}_n[x] \right\} , \quad \tau \in \mathbb{R} \,, \tag{30}$$

las cuales son transformaciones lineales, mientras que

$$J_\infty = J \dotplus \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e_n(x) \end{pmatrix} \right\} ,$$

es una relación que no es transformación lineal.

Observación 7. El dominio de las transformaciones lineales (29) y (30) es $\mathbb{C}_n[x]$ y estás actúan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (J^*)_{\mathrm{o}} p(x) &= J_0 p(x) - b_{n-1} p_{n-1} e_n(x) \,; \\ J_\tau p(x) &= J_0 p(x) + \tau p_n e_n(x) \,, \quad (\tau \in \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{31}$$

lo que implica que son perturbaciones unidimensionales de J_0. Además, las representaciones matriciales de (31) son

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & \tau \end{pmatrix}, \tag{32}$$

respectivamente. Es claro que la matriz derecha de (32) (que representa a J_τ) extiende la representación matricial de J mostrada en (3).

Agradecimientos. Trabajo parcialmente apoyado por los proyectos CONACYT-México CBF2023-2024-1842 y UAM-DAI 2024: “Enfoque Analítico-Combinatorio y su Equivalencia de Estados Gaussianos”. El autor expresa su gratitud al árbitro anónimo por su atenta lectura, comentarios y recomendaciones sobre el manuscrito.

Referencias

[1] Richard Arens, *Operational calculus of linear relations*, Pacific J. Math. **11** (1961), 9–23. MR 0123188 (23 #A517)

[2] Rajendra Bhatia, *Matrix analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 169, Springer-Verlag, New York, 1997. MR 1477662

[3] ______, *Positive definite matrices*, paperback ed., Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007. MR 3443454

[4] M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller. MR 1192782 (93g:47001)

[5] Jorge R. Bolaños Servín, Roberto Quezada, and Josué I. Rios-Cangas, *Elementos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*, Revista Metropolitana de Matemáticas Mixba'al, **14** (2023), no. 1, 143–222.

[6] Earl A. Coddington, *Extension theory of formally normal and symmetric subspaces*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 134. MR 0477855

[7] A. Dijksma and H. S. V. de Snoo, *Self-adjoint extensions of symmetric subspaces*, Pacific J. Math. **54** (1974), 71–100. MR 0361889 (50 #14331)

[8] Seppo Hassi and Henk de Snoo, *One-dimensional graph perturbations of selfadjoint relations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **22** (1997), no. 1, 123–164. MR 1430397 (97m:47025)

[9] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Corrected reprint of the 1991 original. MR 1288752

[10] ______, *Matrix analysis*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2013. MR 2978290

[11] Josué I. Rios-Cangas, *Operadores Simétricos Multivaluados y el Problema de Momentos de Hamburger Truncado*, Revista Metropolitana de Matemáticas Mixba'al, **12** (2021), no. 1, 33–45.

[12] Josué I. Rios-Cangas and Luis O. Silva, *Dissipative extension theory for linear relations*, Expo. Math. **38** (2020), no. 1, 60–90. MR 4082306

[13] John von Neumann, *Functional Operators. II. The Geometry of Orthogonal Spaces*, Annals of Mathematics Studies, no. 22, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1950. MR 0034514

Josué I. Rios Cangas
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas.
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma 1^a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310 CDMX, México.
ORCID: `https://orcid.org/0000-0001-7758-7362`
e-mail: `jottsmok@xanum.uam.mx`