



LA CURVA DE FARGUES–FONTAINE: UNA MOTIVACIÓN AL ESTUDIO DE LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES DE GALOIS p -ÁDICAS

JORGE ALBERTO ROBLES HERNÁNDEZ
J.R. PÉREZ-BUENDÍA

RESUMEN. Este artículo proporciona una revisión comprensiva sobre la curva de Fargues-Fontaine, una pieza central en la teoría de Hodge p -ádica, y su papel crucial en la clasificación de las representaciones de Galois p -ádicas. Nos enfocamos en sintetizar los desarrollos fundamentales en torno a esta curva, subrayando cómo conecta conceptos avanzados de geometría aritmética con la teoría práctica de representaciones. Analizamos en detalle los anillos de periodos de Fontaine (B_{cris} , B_{st} , B_{dR}), abordando sus propiedades algebraicas y aritméticas esenciales, y cómo estos anillos contribuyen a la construcción y definición de la curva. Además, exploramos la teoría de las representaciones de Galois p -ádicas admisibles y discutimos cómo, una vez definida la curva, esta se relaciona con la teoría de Harder-Narasimhan. Este trabajo no solo destaca la importancia de la curva de Fargues-Fontaine en el contexto contemporáneo, sino que también pone de relieve su papel en la formación académica y en investigaciones futuras en el ámbito de la geometría aritmética en México y Latinoamérica.

1. INTRODUCCIÓN

La geometría aritmética ha experimentado un notable auge en los últimos años, en gran parte gracias al empleo de métodos p -ádicos. En este contexto, la curva de Fargues-Fontaine se destaca como una entidad de profundo interés. En este artículo, abordamos una introducción a esta fascinante curva, que se puede entender como un análogo en geometría aritmética p -ádica de la esfera de Riemann, lo que abre un abanico de nuevas perspectivas y temas de investigación.

La curva de Fargues-Fontaine, descubierta en 2009 por los matemáticos franceses Laurent Fargues y Jean-Marc Fontaine, surgió de un intercambio de correos electrónicos y una serie de conferencias en Trieste, Italia. Pierre Colmez documenta este emocionante proceso en [14]. El descubrimiento se inició con una discusión sobre un artículo de Berger [13], que afirmaba que el anillo de períodos B_e (definido más adelante) era un anillo de Bézout. Fontaine, escéptico ante esta afirmación, profundizó en la investigación y llegó a la sorprendente conclusión de que era un anillo de ideales principales. Esta revelación marcó el inicio de una serie de preguntas formuladas por Fontaine a Colmez y Fargues, cuyas respuestas dieron lugar a una inesperada conexión con la teoría de filtraciones de Harder-Narasimhan en el contexto p -ádico. Esta relación fundamental condujo al descubrimiento de la curva de Fargues-Fontaine, revelando una conexión crucial con la teoría de Harder-Narasimhan y las representaciones de Galois p -ádicas.

El propósito de este artículo es proporcionar una base para futuros estudios en este emocionante campo matemático. Entre las investigaciones relevantes se incluyen aquellas sobre superficies K3 p -ádicas, realizadas por diversos grupos de investigación en México [9] y [10], así como la tesis doctoral del segundo autor [8]. Como parte de nuestro compromiso con la educación en esta área y nuestro interés en fortalecer el

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11F85, 11S15, 11S20, 11F80.

Palabras clave. Curva de Fargues-Fontaine, Geometría Aritmética, Representaciones de Galois p -ádicas, Anillos de Periodos, Teoría de Hodge p -ádica.

grupo de trabajo en Geometría Aritmética en México y Latinoamérica, hemos impartido cursos de posgrado y escuelas CIMPA [1], así como supervisado investigaciones de tesis, incluyendo la actual del primer autor de este artículo. Más información sobre estos cursos se encuentra en la página web del segundo autor [11].

La intención de este artículo es la de servir como una revisión introductoria y sentar las bases para futuros estudios. Nos centramos en una revisión de la construcción de la curva de Fargues–Fontaine y su conexión con las representaciones de Galois y la teoría de Harder–Narasimhan, un paso fundamental en la comprensión de este fascinante objeto matemático.

La estructura del artículo es la siguiente: En la sección 2, presentamos la notación y la información preliminar que se utilizará a lo largo del texto. En la sección 3, ofrecemos una introducción a la idea de Fontaine sobre la clasificación de representaciones de Galois p -ádicas. La sección 4 se dedica a la definición de los anillos de períodos y destaca sus propiedades algebraicas y aritméticas clave. En la sección 5, profundizamos en el papel de los anillos de períodos en la clasificación de las representaciones de Galois p -ádicas. La sección 6 aborda la construcción de la curva de Fargues–Fontaine, utilizando analogías con las ideas de construcción de la esfera de Riemann. En la sección 7, describimos la conexión entre las fibras vectoriales de la curva de Fargues–Fontaine y las representaciones de Galois p -ádicas a través del teorema de Harder–Narasimhan. Finalmente, el Epílogo propone una reflexión sintética sobre la arquitectura de los anillos de períodos y su función como puentes entre la aritmética, la geometría y el análisis p -ádico. Asimismo, se esbozan posibles direcciones de investigación futura, como el estudio de sistemas dinámicos racionales sobre la curva de Fargues–Fontaine.

2. NOTACIÓN Y PRELIMINARES

Sea p un primo fijo. El campo de los números p -ádicos (denotado como \mathbb{Q}_p) se puede definir como sigue: Para $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, sea $v_p(a)$ la máxima potencia de p que divide al entero a . Extendiendo esto a $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definimos $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$. Así podemos definir una norma en \mathbb{Q} como

$$|\frac{a}{b}|_p = \frac{1}{p^{v_p(\frac{a}{b})}}, \quad |0|_p = 0.$$

Dicha norma induce una distancia en \mathbb{Q} la cual no es completa (no toda sucesión de Cauchy converge). Al completar \mathbb{Q} con respecto a esta distancia se obtiene el campo \mathbb{Q}_p , también llamado el campo de los números racionales p -ádicos.

Denotamos por K a una extensión finita de \mathbb{Q}_p , \mathcal{O}_K su anillo de enteros, m_K su único ideal maximal y $k := \mathcal{O}_K/m_K$ su campo residual. Denotamos por $K_0 = K \cap \mathbb{Q}_p^{nr}$ a la máxima extensión no ramificada [7] de \mathbb{Q}_p dentro de K . Fijamos una cerradura algebraica \overline{K} de K y sea $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ su grupo de Galois absoluto. Notar que \overline{K} es también una cerradura algebraica de \mathbb{Q}_p . Sea K_0^{nr} la extensión maximal no ramificada de K_0 en \overline{K} . Análogamente definimos a $K^{nr} \subseteq \overline{K}$. Como K_0 es no ramificado sobre \mathbb{Q}_p , K_0^{nr} es la extensión máxima no ramificada de \mathbb{Q}_p en \overline{K} y por lo tanto también es independiente de K .

Denotemos por \mathbb{C}_p a la completación p -ádica de \overline{K} y por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ a su anillo de enteros. Fijamos $\pi \in m_K$ al parámetro uniformizador de K , es decir, un generador del ideal principal m_K .

Se dirá que un campo K de característica p es perfecto si el morfismo de Frobenius es un isomorfismo.

3. LA IDEA DE FONTAINE.

Desde finales de la década de 1970, J.M. Fontaine desarrolló un programa destinado a clasificar y describir las \mathbb{Q}_p -representaciones del grupo de Galois absoluto, G_K , de una extensión finita de los racionales p -ádicos \mathbb{Q}_p , i.e., los \mathbb{Q}_p -espacios vectoriales de dimensión finita dotados de una acción \mathbb{Q}_p -lineal continua de G_K [19].

La estrategia de Fontaine parte de la siguiente observación: si tenemos un anillo topológico B , dotado de una acción continua de G_K y estructuras adicionales estables bajo la acción de G_K , podemos asociar a cualquier representación V de G_K un invariante $D_B(V) := (B \otimes V)^{G_K}$ de $B \otimes V$.

Entonces $D_B(V)$ es un B^{G_K} -módulo equipado con estructuras adicionales heredadas de B , y que es a menudo más fácil de describir que la representación V de la que partimos. El anillo B permite descomponer la subcategoría de B -representaciones admisibles (aquellas para las cuales $B \otimes V$ es trivial, i.e., isomorfa a $B^{\dim V}$, como G_K -representación). Tales anillos topológicos B son los llamados anillos de periodos de Fontaine. A continuación presentamos la construcción de dichos anillos así como de algunas de sus propiedades.

4. TEORÍA DE HODGE p -ÁDICA

La teoría de Hodge p -ádica, como lo describe [22], puede verse desde dos puntos de vista: el aritmético y el geométrico.

Desde el punto de vista aritmético, es el estudio de las representaciones de Galois p -ádicas, es decir, representaciones continuas $G_K \rightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{Q}_p)$ donde K es extensión finita de \mathbb{Q}_p . Específicamente, esta teoría busca construir un diccionario que relacione buenas categorías de representaciones de G_K con categorías de objetos algebraicos semilineales. Un ejemplo de esto es el estudio de los módulos de Tate de una curva elíptica sobre K (que son representaciones de G_K) con buena reducción junto con los llamados isocristales (es decir, \mathbb{Q}_p -espacios vectoriales de dimensión finita equipados con un automorfismo de Frobenius semilineal).

Desde el punto de vista geométrico, la teoría de Hodge p -ádica es el estudio de la geometría de una variedad (suave) X sobre un campo p -ádico K . En particular estamos interesados en varias teorías de cohomología relacionadas a X como la cohomología étale ($H_{et}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$), la cohomología de De Rham ($H_{dR}^n(X, K)$) y la cohomología cristalina ($H_{cris}^n(X, K)$). Uno de los resultados más relevantes de esta teoría es derivado del caso clásico en \mathbb{C} sobre la descomposición de Hodge de una variedad suave Y :

$$H^n(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(Y, \Omega_Y^j).$$

Tate observó que existía una descomposición análoga para la cohomología étale de una variedad abeliana sobre K con buena reducción, lo que lo llevo a conjeturar (y tiempo después Faltings lo demostraría) la descomposición de Hodge-Tate [2]:

$$H_{et}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_K \cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \Omega_{X/K}^j) \otimes_K \mathbb{C}_K(-j),$$

donde X es una variedad suave sobre K y es un isomorfismo de representaciones de Galois p -ádicas $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$.

En este sentido, Fontaine realiza una serie de conjeturas, ahora teoremas, conocidos como teoremas de comparación en donde relaciona a las distintas cohomologías de la variedad, siendo necesario extender los coeficientes a los llamados anillos de periodos de Fontaine.

TEOREMA 1. [2] *Sea K una extensión finita de \mathbb{Q}_p y X una variedad proyectiva lisa definida sobre K . Existen isomorfismos naturales:*

- $H_{et}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \cong H_{cris}^n(X) \otimes_{K_0} B_{cris}$.
- $H_{et}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{st} \cong H_{HK}^n(X) \otimes_{K_0} B_{st}$.
- $H_{et}^n(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR} \cong H_{dR}^n(X) \otimes_K B_{dR}$.

que conmutan con las acciones de G_K , Frobenius, N (monodromía) y respectivas filtraciones. Aquí H_{HK}^i denota la cohomología de Hyodo-Kato.

En esta sección nos centraremos en estudiar los anillos de periodos, en particular, mostraremos sus construcciones y las propiedades aritméticas y algebraicas que nos

servirán para la construcción de la curva de Fargues-Fontaine. En el presente texto no se estudiará la relación con las cohomologías como en el teorema 1. Para el lector interesado en este aspecto puede consultar [19].

4.1. Anillos de Periodos. En geometría algebraica, la palabra periodo se suele referir a un número complejo que puede ser expresado como integral de una función algebraica sobre un dominio algebraico [18]. Uno de ellos es $2i\pi = \int_{\gamma} \frac{dt}{t}$, donde γ es el círculo unitario en el plano complejo. La teoría de Hodge p -ádica nos permite diseñar un análogo p -ádico de los periodos, trabajo que realizó Fontaine creando anillos específicos [5, 3, 6, 4], los cuales además están estrechamente relacionados con distintos tipos de cohomologías. Estos anillos forman parte fundamental en la construcción de la curva de Fargues-Fontaine y las representaciones de Galois p -ádicas.

En esta sección se dará una introducción a los anillos de periodos como en [23], en particular estudiaremos a los anillos B_{cris} , B_{st} y B_{dR} , sus respectivas construcciones y algunas de sus propiedades algebraicas y analíticas.

4.1.1. El anillo B_{inf}^+ . Denotemos como ϕ el morfismo de Frobenius $x \mapsto x^p$ actuando en el cociente $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ y notemos que ϕ es un homomorfismo de anillos. Sea R el límite del sistema proyectivo de anillos:

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \xleftarrow{\phi} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \xleftarrow{\phi} \dots \xleftarrow{\phi} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \dots,$$

Específicamente, un elemento de R es una sucesión $(\zeta_n)_{n \geq 0}$ de elementos en $\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$, que satisfacen la propiedad de compatibilidad $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$, $\forall n \geq 0$. R es un anillo perfecto de característica p .

El anillo R está equipado con una valuación v_b que se definirá a continuación: notemos que si $x \in \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \setminus \{0\}$, la valuación p -ádica de $\hat{x} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ no depende del levantamiento \hat{x} de x . La valuación $v_p : \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \rightarrow \mathbb{Q}$ induce una función bien definida en el cociente $v_p : \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$, donde $v_p(0) = +\infty$. Así, para $\zeta = (\zeta_n)_{n \geq 0}$ en R definimos

$$v_b(\zeta) := \lim_{n \rightarrow \infty} p^n v_p(\zeta_n).$$

La condición de compatibilidad $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$ implica que la sucesión $(p^n v_p(\zeta_n))_{n \geq 0}$ es eventualmente constante y el límite está bien definido.

A continuación se hará uso de una estructura algebraica conocida como el anillo de vectores de Witt y cuya idea es la de construir extensiones no ramificadas.

Definición 2. Definimos como $A_{inf} = W(R)$ donde $W(-)$ es el funtor de vectores de Witt y $B_{inf}^+ = A_{inf} \left[\frac{1}{p} \right] = W(R) \left[\frac{1}{p} \right]$, la localización de A_{inf} en p .¹

Para $x \in R$, definimos el representante de Teichmüller en A_{inf} como $[x] = (x, 0, \dots, 0, \dots)$. Dado que R es de valuación discreta, todo elemento de A_{inf} puede ser escrito de manera única como

$$\sum_{i \geq 0} [\zeta_i] p^i, \quad \zeta_i \in R.$$

De manera similar, todo elemento de B_{inf}^+ se puede escribir de manera única de la forma

$$\sum_{i \geq i_0} [\zeta_i] p^i, \quad \zeta_i \in R,$$

donde i_0 puede ser negativo y depende de x .

Además, B_{inf}^+ cuenta con estructuras adicionales:

¹Para una breve motivación sobre el rol de A_{inf} y B_{inf}^+ , véase la Sección 8.

- B_{inf}^+ tiene una acción de Frobenius φ dado por:

$$\varphi\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} [\zeta_i] p^i\right) = \sum_{i=i_0}^{\infty} [\zeta_i^p] p^i, \quad \zeta_i \in R, \quad i_0 \in \mathbb{Z}.$$

- B_{inf}^+ está equipado con una acción de G_K dado por:

$$g\left(\sum_{i=i_0}^{\infty} [\zeta_i] p^i\right) = \sum_{i=i_0}^{\infty} [g\zeta_i] p^i, \quad \zeta_i \in R, \quad i_0 \in \mathbb{Z}, \quad \forall g \in G_K.$$

Fijamos ϵ_1 una raíz primitiva p -ésima de la unidad en $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Escojamos a ϵ_2 como raíz primitiva p -ésima de ϵ_1 . Entonces ϵ_2 es raíz primitiva p^2 -ésima de la unidad. Repitiendo este proceso, construimos elementos $\epsilon_3, \epsilon_4, \dots \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ tales que $\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n$, $\forall n \geq 0$. Sea $\bar{\epsilon}_n \in \frac{\mathcal{O}_{\overline{K}}}{p\mathcal{O}_{\overline{K}}}$ la clase de ϵ_n . Por la propiedad de compatibilidad, $\underline{\epsilon} = (1, \bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \dots) \in R$. De manera similar, escogemos una sucesión (p_n) en $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ de p^n -raíces de p , esto es, $p_1^p = p$ y $p_{n+1}^p = p_n$ para todo $n \geq 1$. Así, definimos en R al elemento $p^b = (0, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots)$, donde $\bar{p}_i \in \frac{\mathcal{O}_{\overline{K}}}{p\mathcal{O}_{\overline{K}}}$.

A continuación definiremos una topología p -ádica en B_{inf}^+ : Primero en A_{inf} definimos una topología débil, donde si

$$x_n = \sum_{i=0}^{\infty} [\zeta_{i,n}] p^i \in A_{inf} \quad \text{y} \quad x = \sum_{i=0}^{\infty} [\zeta_i] p^i \in A_{inf},$$

se tiene que $x_n \rightarrow x$ si $\zeta_{i,n} \rightarrow \zeta_i$ para todo índice $i \in \mathbb{N}$. Esta topología en A_{inf} induce en el subconjunto $p^{-\nu} A_{inf}$ de B_{inf}^+ una topología para todo ν y así, en B_{inf}^+ definimos la topología dada por $B_{inf}^+ = \bigcup_{\nu \geq 0} p^{-\nu} A_{inf}$.

Definición 3. Para $\zeta = (c_0, c_1, \dots) \in R$, definimos $\zeta^\sharp = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{c}_n^{p^n}$, donde \hat{c}_n es un levantamiento de c_n en $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$.

La función $\sharp : R \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, $\zeta \mapsto \zeta^\sharp$ es inyectiva y multiplicativa. Por las propiedades de los vectores de Witt, esta función se extiende a un homomorfismo inyectivo de \widehat{K}_0^{ur} -álgebras $\theta : B_{inf}^+ \rightarrow \mathbb{C}_p$ que conmuta con la acción de G_K . Está dado por

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} [\zeta_i] p^i \mapsto \sum_{i=i_0}^{\infty} \zeta_i^\sharp p^i, \quad i_0 \in \mathbb{Z}, \quad \zeta_i \in R.$$

La siguiente proposición nos dice que el kernel de θ es principal y nos muestra explícitamente a un generador del mismo.

PROPOSICIÓN 4 ([23], Lema:3.1.5). *Sea $z \in A_{inf}$ elemento tal que $\theta(z) = 0$ y $v_b(z \pmod{p}) = 1$. Entonces z genera $A_{inf} \cap \ker \theta$ como ideal de A_{inf} . En particular, el elemento*

$$\omega = \frac{[\underline{\epsilon}] - 1}{[\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}] - 1} = [\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}] + [\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}]^2 + \dots + [\underline{\epsilon}^{\frac{1}{p}}]^{p-1},$$

satisface las condiciones.

4.1.2. El anillo B_{cris} . Para definir el anillo B_{cris} necesitamos tener la noción de elementos de la forma $\frac{x^n}{n!}$ y para ello daremos un breve preámbulo a las llamadas potencias divididas. Se considerará $0! = 1$.

Definición 5. Sea A un anillo (conmutativo con unidad), I un ideal A . Una colección de aplicaciones $\gamma_n : I \rightarrow I$, $n \geq 0$ y $\gamma_0 : I \rightarrow A$ definido como $\gamma_0(x) = 1$, es llamado una estructura de potencias divididas en I si para todos $n \geq 0, m > 0, x, y \in I$ y $a \in A$ se tiene:

- 1) $\gamma_1(x) = x$
- 2) $\gamma_n(x)\gamma_m(x) = \frac{(n+m)!}{n!m!} \gamma_{n+m}(x).$

- 3) $\gamma_n(ax) = a^n \gamma_n(x)$.
- 4) $\gamma_n(x+y) = \sum_{i=0}^n \gamma_i(x) \gamma_{n-i}(y)$.
- 5) $\gamma_n(\gamma_m(x)) = \frac{(nm)!}{n!(m!)^n} \gamma_{nm}(x)$.

Notemos que $\frac{(n+m)!}{n!m!} = \binom{n+m}{n} \in \mathbb{Z}$ y además, $\frac{(nm)!}{n!(m!)^n} \in \mathbb{Z}$ ya que cuenta el número de maneras de dividir un grupo de nm objetos en n grupos de m elementos.

LEMA 6. *Sea A un anillo, I un ideal de A . Si γ es una estructura de potencias divididas en I , entonces $n! \gamma_n(x) = x^n$ para todo $n \geq 1$ y $x \in I$.*

Este lema se puede demostrar por inducción. Así, en el anillo A tendríamos la noción de dividir entre $n!$, cuestión que no siempre es posible si $\text{char}(A) > 0$.

Volviendo a los anillos de periodos, dado $x \in A_{inf} = W(R)$ denotamos como $A_{inf}\langle x \rangle$ la sub A_{inf} -álgebra de B_{inf}^+ generada por los elementos $\frac{x^n}{n!}$ [23]

Definición 7. Definimos A_{cris} como la completación p -ádica de $A_{inf}\langle z \rangle$, donde z es un generador de $A_{inf} \cap \ker \theta$. Denotamos por $B_{cris}^+ = A_{cris} \left[\frac{1}{p} \right]$ a la localización en p de A_{cris} .²

Observación 1. La construcción de A_{cris} a partir de $A_{inf}\langle z \rangle$ mediante potencias divididas (Definición 5) y completación p -ádica merece un comentario. Una pregunta natural es por qué se recurre a las potencias divididas y por qué no se trabaja directamente con A_{inf} o se invierte p desde un inicio.

Si bien A_{inf} es de característica cero, p no es una unidad en este anillo (la invertibilidad de p se introduce al pasar a $B_{inf}^+ = A_{inf} \left[\frac{1}{p} \right]$, ver Definición 2). La estructura de potencias divididas $\gamma_n(x)$ proporciona un análogo formal de $x^n/n!$ sin asumir que $n!$ sea invertible (Lema 6). Esto es crucial porque permite la existencia de elementos como $t = \log([\underline{c}])$ presentada en ecuación (1) (cuya serie involucra divisiones por enteros), dentro de un anillo p -ádicamente completo y asegura que el endomorfismo de Frobenius φ se extienda de manera controlada desde A_{inf} . Esta extensión es vital para las propiedades de A_{cris} y su rol en la teoría.

Preservar A_{cris} como un anillo donde p no es invertible es esencial para mantener una fina estructura p -ádica y la conexión con la cohomología cristalina, fundamental en los teoremas de comparación (Teorema 1). Invertir p prematuramente, para trabajar en B_{inf}^+ , trivializaría aspectos de esta estructura p -ádica antes de que A_{cris} pueda cumplir su función como un *punte* en la Teoría de Hodge p -ádica. Para una discusión más profunda sobre estos anillos, se puede consultar [19] o [23].

Como ω es un generador de $A_{inf} \cap \ker \theta$, se tiene que $A_{cris} = \widehat{A_{inf}\langle \omega \rangle}$, donde $\widehat{}$ denota la completación p -ádica. Otro generador de $A_{inf} \cap \ker \theta$ también es el elemento $[p^b] - p$.

El siguiente lema nos da una condición sobre cuándo cualesquiera dos elementos en A_{inf} producen la misma sub A_{inf} -álgebra generada por las potencias divididas.

LEMA 8. *Si $x, y \in A_{inf}$, $x \equiv y \pmod{pA_{inf}}$ entonces $A_{inf}\langle x \rangle = A_{inf}\langle y \rangle$.*

Usando el lema, se tendría que $A_{cris} = \widehat{A_{inf}\langle [p^b] \rangle}$.

Como A_{cris} está definida como completación p -ádica es natural equipar A_{cris} y B_{cris}^+ con la topología p -ádica. Con esta topología, la inclusión $A_{inf} \hookrightarrow A_{cris}$ es continua al igual que la inclusión $B_{inf}^+ \hookrightarrow B_{cris}^+$.

Frobenius se extiende canónicamente a un endomorfismo $A_{cris} \rightarrow A_{cris}$, ya que $A_{inf}\langle [p^b] \rangle$ es estable bajo Frobenius. En efecto,

$$\varphi \left(\frac{[p^b]^n}{n!} \right) = [p^b]^{np-n} \varphi \left(\frac{[p^b]^n}{n!} \right).$$

²Para una breve motivación sobre el rol de A_{cris} y B_{cris}^+ , véase la Sección 8.

Invirtiendo p se obtiene Frobenius para B_{cris}^+ . Análogamente, G_K extiende la acción a B_{cris}^+ .

A_{cris} contiene un periodo para el caracter ciclotómico, i.e., un elemento en el cual Galois actúa por multiplicación por χ , el caracter ciclotómico. Este elemento es

$$(1) \quad t = \log([\epsilon]) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{([\epsilon] - 1)^i}{i}.$$

Frobenius actúa como $[\epsilon] \mapsto [\epsilon]^p$ y G_K actúa como $g[\epsilon] = [\epsilon]^{\chi(g)}$, $g \in G_K$. Tomando logaritmos, $\varphi(t) = pt$ y $gt = \chi(g)t$, $\forall g \in G_K$. Así, t es un periodo del caracter ciclotómico.

4.1.3. El anillo B_{dR} .

Definición 9. Definimos B_{dR}^+ como la completación de B_{inf}^+ respecto a la topología $(\ker \theta)$ -ádica, es decir

$$B_{dR}^+ = \varprojlim_m \frac{B_{inf}^+}{(\ker \theta)^m}.$$

Como B_{dR}^+ está definido como una completación, la topología natural en este anillo es la topología $(\ker \theta)$ -ádica. También podemos extender la función θ a B_{dR}^+ con la composición $B_{dR}^+ \rightarrow B_{inf}^+ / \ker \theta \rightarrow \mathbb{C}_p$ y a esta extensión la denotaremos como θ_{dR} . Así, B_{dR}^+ tiene una filtración dada por $Fil^m B_{dR}^+ = (\ker \theta_{dR})^m$.

Una sucesión $(x_n)_{n \geq 0}$ de elementos en B_{dR}^+ converge a $x \in B_{dR}^+$ si y sólo si para todo m , la sucesión $\{x_n \pmod{Fil^m B_{dR}^+}\}$ es eventualmente constante.

Definición 10. Definimos el anillo $B_{dR} = B_{dR}^+[\frac{1}{t}]$.³

Como B_{dR}^+ es un anillo de valuación discreta con uniformizador t , se tiene que B_{dR} es el campo de fracciones de B_{dR}^+ , es decir, este anillo es de hecho un campo.

La filtración de De Rham se extiende a $B_{dR} : Fil^m B_{dR} = t^m B_{dR}^+$, $m \in \mathbb{Z}$. Para más información se recomienda consultar al lector [3], [6], [23].

5. REPRESENTACIONES DE GALOIS p -ÁDICAS

Una vez que hemos construido los anillos de periodos, regresamos a la idea de Fontaine para clasificar las representaciones de Galois p -ádicas. En esta sección se hablará primero de la B -admisibilidad de una representación para luego dar paso a un ejemplo concreto: cómo el anillo de periodos B_{dR} nos dará más información sobre la representación. La bibliografía que se seguirá en esta sección es [19].

5.1. Representaciones admisibles. Sea F un campo y G un grupo. Sea B una F -álgebra, dominio equipado con una G -acción (como F -álgebra) y asuma que la sub F -álgebra $E = B^G$ es un campo.

No se imponen estructuras topológicas en B, F o G . El objetivo es usar a B para construir un functor de representaciones F -lineales de G de dimensión finita a E -espacios vectoriales de dimensión finita equipados con estructuras adicionales que dependen de B .

Sea $C = \text{Frac}(B)$ y G actúa en C de manera natural, i.e., $g(\frac{a}{b}) = g(a)g(b^{-1})$.

Definición 11. Decimos que B es (F, G) -regular si $C^G = B^G (= E)$ y si para todo $b \in B \setminus \{0\}$ cuyo espacio generado F -lineal Fb es G -estable se tiene que b es unidad en B .

Notemos que si B es un campo, entonces es (F, G) -regular.

³Para una breve motivación sobre el rol de B_{dR}^+ y B_{dR} , véase la Sección 8.

Definición 12. Si B es un dominio (F, G) -regular y E denota el campo $C^G = B^G$, entonces para cualquier objeto $V \in \text{Rep}_F(G)$ de G representaciones F -lineales de dimensión finita definimos

$$D_B(V) := (B \otimes_F V)^G,$$

es decir, $D_B(V)$ es un E -espacio vectorial equipado con un mapeo canónico.

$$\alpha_V : B \otimes_E D_B(V) \rightarrow B \otimes_E (B \otimes_F V) = (B \otimes_E B) \otimes_F V \rightarrow B \otimes_F V.$$

Definición 13. Si se tiene la igualdad $\dim_E D_B(V) = \dim_F(V)$ se dirá que V es una representación B -admisibles.

El siguiente teorema nos indica que el E -espacio vectorial $D_B(V)$ es de hecho de dimensión finita y que al restringirnos a las representaciones B -admisibles, se tiene un funtor exacto y fiel.

TEOREMA 14. *Fijamos V como antes.*

- i) *El mapeo α_V es siempre inyectivo y $\dim_E D_B(V) \leq \dim_F V$. La igualdad se da y si sólo si α_V es un isomorfismo.*
- ii) *Sea $\text{Rep}_F^B(G) \subseteq \text{Rep}_F(G)$ la subcategoría de representaciones B -admisibles. El funtor contravariante $D_B : \text{Rep}_F^B(G) \rightarrow \text{Vec}_E$ es exacto y fiel.*

En particular, considerando a K un campo p -ádico, i.e., extensión finita de \mathbb{Q}_p , $F = \mathbb{Q}_p$, $G = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ y V representación B -admisibles, tenemos que:

- Si $B = B_{dR}$, se dice que la representación es de De Rham.
- Si $B = B_{cris}$, se dice que la representación es cristalina.
- Si $B = B_{st}$, se dice que la representación es semiestable.

5.2. Representaciones de De Rham. Analizaremos un poco más a detalle las representaciones de De Rham. Como B_{dR} es (\mathbb{Q}_p, G_K) -regular con $B_{dR}^{G_K} = K$, la formalización general de representaciones admisibles provee de una buena clase de representaciones p -ádicas, los que son B_{dR} -admisibles.

Definición 15. Definimos el funtor covariante $D_{dR} : \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \rightarrow \text{Vec}_K$ a la categoría de K -espacios vectoriales de dimensión finita como $D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. En el caso que $\dim_{B_{dR}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ diremos que V es una representación de De Rham.

El espacio $D_{dR}(V)$ tiene estructuras K -lineales adicionales (que vienen de la estructura adicional de la K -álgebra B_{dR}), específicamente una filtración K -lineal que surge de la filtración K -lineal en el campo de fracciones B_{dR} del anillo de valuación discreto completo B_{dR}^+ sobre K .

Concretamente, para $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$, el K -espacio vectorial $D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \in \text{Vec}_K$ tiene estructura natural de objeto en Fil_K : Como B_{dR} tiene una filtración K -lineal, G_K estable dado por $\text{Fil}^i(B_{dR}) = t^i B_{dR}^+$, obtenemos una filtración K -lineal, G_K -estable $\{\text{Fil}^i(B_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\}$ en $B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ y este induce una filtración en $D_{dR}(V)$ de elementos G_K -invariantes, explícitamente

$$\text{Fil}^i(D_{dR}(V)) = (t^i B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

6. CONSTRUCCIÓN DE LA CURVA DE FARGUES-FONTAINE.

La curva de Fargues-Fontaine es un objeto de la teoría de números descubierta en 2009 por Laurent Fargues y Jean Marc-Fontaine, donde en su geometría codifica mucha información sobre la aritmética de los números p -ádicos. Se ha convertido rápidamente en un tema de investigación en la teoría de Hodge p -ádica y el programa de Langlands.

En esta sección motivamos la definición de la curva usando una analogía con la esfera de Riemann. Luego, construimos la curva desde dos puntos de vista distintos,

uno desde el punto de vista del álgebra conmutativa y otro desde los espacios de Tilts y Untilts [17, 21].

6.1. La esfera de Riemann. Para motivar la definición de la curva, analizaremos una curva más familiar, la esfera de Riemann $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, a la cual le podemos asociar anillos $\mathbb{C}[z] \subseteq \mathbb{C}((\frac{1}{z}))$.

- Primero, el anillo de funciones meromorfas sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ sin polos fuera del punto al infinito es el álgebra de polinomios $\mathbb{C}[z]$, donde z denota el parámetro local habitual en el origen.
- Mirando los desarrollos de Laurent en el punto al infinito de todas las funciones meromorfas en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ encontramos el anillo $\mathbb{C}((\frac{1}{z}))$, donde $\frac{1}{z}$ es un parámetro local para el punto al infinito.

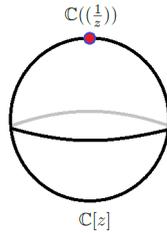


FIGURA 1. Esfera de Riemann.

Recíprocamente, podemos reconstruir la esfera de Riemann a partir de los anillos $\mathbb{C}[z] \subseteq \mathbb{C}((\frac{1}{z}))$ [17]. Más precisamente, cada punto x de la esfera de Riemann $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ puede asociarse unívocamente con un subespacio de dimensión uno l_x (una línea) dentro del espacio de funciones de grado ≤ 1 , que es $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}z$. Si consideramos la línea afín \mathbb{C} (identificada con $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ menos un punto), un punto $x = z_0 \in \mathbb{C}$ se asocia con la línea l_{z_0} de funciones $f(z) = a(z - z_0)$ que se anulan en z_0 . Para el punto al infinito, $x = \infty$, la línea l_{∞} correspondería al espacio de funciones constantes $f(z) = a$. Toda esta correspondencia puede expresarse de manera más unificada utilizando coordenadas homogéneas. Si un punto $x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ se representa por $[X_0 : X_1]$, y el espacio de funciones de grado ≤ 1 se ve como el espacio de formas lineales $\mathbb{C}[Z_0, Z_1]_1 = \{aZ_0 + bZ_1 \mid a, b \in \mathbb{C}\}$, entonces l_x es el subespacio de dichas formas que se anulan en $[X_0 : X_1]$ (es decir, $aX_0 + bX_1 = 0$). Esta condición define una línea de soluciones para (a, b) . Así, tenemos la correspondencia general:

$$x \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \quad \leftrightarrow \quad l_x \subseteq \mathbb{C}[Z_0, Z_1]_1.$$

Esta identificación entre puntos y líneas de funciones es la que se busca replicar para la curva de Fargues-Fontaine.

Más aún, si

$$S = \bigoplus_{k \geq 0} \{f \in \mathbb{C}[z] \mid \deg f \leq k\},$$

entonces $Proj(S) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.⁴

Partiendo de esta analogía, la curva de Fargues-Fontaine se construye utilizando los anillos $B_e \subseteq B_{dR}$ (donde $B_e := B_{cris}^{\varphi=1}$ denota los puntos fijos bajo la acción de Frobenius en B_{cris}) en el contexto p -ádico.

A esta curva la denotaremos como X^{FF} . Concretamente, Fargues y Fontaine demostraron que [14]:

⁴Estrictamente, la construcción $Proj$ se aplica a anillos graduados donde S_0 es un campo y S es generado por S_1 como S_0 -álgebra, y S_k son las componentes homogéneas de grado k . La forma estándar es $S = \mathbb{C}[Z_0, Z_1]$, donde $S_k = \mathbb{C}[Z_0, Z_1]_k$. El anillo S definido en el texto está relacionado con el anillo de secciones globales $S' = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{O}(k))$, donde $H^0(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{O}(k))$ es isomorfo a S_k . Se tiene $Proj(S') \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Para una referencia general sobre $Proj$ y estos resultados, ver por ejemplo [24, Capítulo II, Secciones 2 y 7].

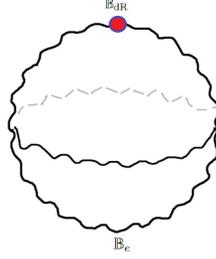


FIGURA 2. Representación artística de la curva de Fargues-Fontaine [17].

TEOREMA 16 (FF). *Existe un esquema regular, noetheriano, conexo, separado de dimensión uno, X^{FF} , sobre \mathbb{Q}_p ; tal que tiene un punto al infinito y, el anillo de funciones meromorfas sin polos fuera del infinito es el anillo B_e .*

En este caso, si $S = \bigoplus_{k \geq 0} \{f \in B_e \mid \deg f \leq k\}$, entonces la curva de Fargues-Fontaine se define como $X^{FF} = \text{Proj}(S)$.

En esta construcción algebraica vía $\text{Proj}(S)$ [14, Sección 10.1], cada punto x de la curva X^{FF} corresponde, por definición, a un cierto ideal primo homogéneo relevante del anillo graduado S . Este ideal, a su vez, permite identificar un subespacio de dimensión uno, l_x , dentro del espacio de funciones de grado 1 en B_e (es decir, la componente S_1 del anillo graduado). Así, de manera análoga al caso de la esfera de Riemann, se establece una biyección fundamental entre los puntos de la curva y estas *líneas* de funciones, como se afirma en el Teorema 16:

$$x \in X^{FF} \quad \longleftrightarrow \quad l_x = \{f \in B_e \mid \deg f \leq 1\}.$$

Esta correspondencia nos permite interpretar B_e como un anillo de funciones sobre el objeto geométrico X^{FF} .

6.2. Otro punto de vista: Tilts y Untilts. A continuación presentamos otra forma de construir la curva de Fargues-Fontaine mediante lo llamados tilts y untilts. Esta sección está basada en la sección 2.1 de [16].

Sea C un campo algebraicamente cerrado que contiene a \mathbb{Q}_p y es completo respecto a un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_C : C \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que extiende el valor absoluto p -ádico en \mathbb{Q}_p . (Un ejemplo es \mathbb{C}_p , los complejos p -ádicos).

Definición 17. El tilt $F = C^b$ de C es un campo algebraicamente cerrado que contiene a \mathbb{F}_p y es completo respecto a un valor absoluto no arquimediano no trivial $|\cdot|_F : F \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Como conjunto,

$$C^b = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_i \in C \text{ y } a_i^p = a_{i-1}\}$$

La multiplicación se define término a término y la suma como $(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (c_0, c_1, \dots)$, donde

$$c_i := \lim_{i \leq n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^{p^{n-i}}.$$

Recíprocamente, sea F con las hipótesis de la definición de tilt.

Definición 18. Un untilt de F es un par (C, i) , donde C es un campo algebraicamente cerrado que contiene a \mathbb{Q}_p y es completo respecto a un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_C : C \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que extiende el valor absoluto p -ádico en \mathbb{Q}_p e $i : F \rightarrow C^b$ es un isomorfismo de campos valuados.

Decimos que dos untilts $(C, i), (C', i')$ son equivalentes si existe un isomorfismo $C \cong C'$ tal que el isomorfismo inducido entre sus tilts es compatible con i y i' , es

decir, si existe $\psi : C \rightarrow C'$ isomorfismo tal que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C^b & \xrightarrow{\psi^b} & C'^b \\ \uparrow i & \nearrow i' & \\ F & & \end{array},$$

donde $\psi^b(a_0, a_1, \dots) = (\psi(a_0), \psi(a_1), \dots)$.

Definición 19. Sea $|Y_F|$ el conjunto de clases de equivalencia de untirts de F .

Dado un untirt (C, i) de F podemos construir nuevos untirts $(C, i \circ \varphi^m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, donde φ es el automorfismo de Frobenius.

Definición 20. Decimos que dos untirts (C, i) , (C', i') son Frobenius equivalentes si existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que (C, i) y $(C', i' \circ \varphi^m)$ son equivalentes.

El conjunto de clases de equivalencia de untirts Frobenius equivalentes está dado por el cociente

$$|Y_F|/\varphi^{\mathbb{Z}},$$

donde el grupo cíclico infinito $\varphi^{\mathbb{Z}}$ actúa en $|Y_F|$ via

$$\varphi^m \cdot (C, i) = (C, i \circ \varphi^m).$$

El siguiente resultado cuya demostración puede ser consultado en [16] nos da la relación entre este conjunto de clase de equivalencia y las curva de Fargues-Fontaine.

TEOREMA 21. *Existe una curva X_F^{FF} cuyos puntos están en biyección con $|Y_F|/\varphi^{\mathbb{Z}}$.*

7. LA CURVA Y LAS REPRESENTACIONES DE GALOIS p -ÁDICAS.

En esta última sección se muestra la relación de la curva de Fargues-Fontaine, específicamente sus fibrados vectoriales, con las representaciones de Galois p -ádicas, haciendo uso del teorema de Harder-Narasimhan. En los fibrados vectoriales se tiene lo siguiente:

Definición 22. Sea X una superficie de Riemann. Para cualquier fibrado vectorial E de X asociamos dos invariantes:

- Su rango, $rk(E) \in \mathbb{N}$.
- Su grado, $\deg(E) \in \mathbb{Z}$, definido como el grado de su haz (lineal) determinante. El grado de un fibrado lineal L se define identificándolo a L con un divisor de Weil $\sum_{x \in X} n_x[x]$ y definimos $\deg(L) = \sum_{x \in X} n_x$.

De los dos invariantes anteriores se define un tercero, su pendiente

$$\mu(E) = \frac{\deg(E)}{rk(E)} \in \mathbb{Q}.$$

Se dice que E es semiestable si $\mu(E') \leq \mu(E)$ para todo E' subfibrado vectorial de E .

Enunciaremos ahora el teorema principal de este sección cuya demostración puede ser consultada en [16].

TEOREMA 23 (Harder-Narasimhan (H-N)). *Sea E un fibrado vectorial de una superficie de Riemann X . Entonces E tiene una única filtración de subfibrados*

$$0 = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots \subseteq E_m = E,$$

tales que:

- El fibrado cociente $\frac{E_i}{E_{i-1}}$ es semiestable para todo $i = 1, \dots, m$.
- $\mu\left(\frac{E_1}{E_0}\right) > \dots > \mu\left(\frac{E_m}{E_{m-1}}\right)$.

En general hay otras categorías en las cuales existe un análogo al teorema de H-N. Mencionaremos algunas de estas.

- Fibrados vectoriales de una curva X .
Sea X una superficie de Riemann. Sea $Vect(X)$ la categoría de fibrados en X . Equipado con las nociones definidas anteriormente de rango y grado, dicha categoría satisface el teorema H-N.
- Los pares \mathbb{P}^1 -algebraicos completos. Antes de definir estos objetos necesitaremos la definición de una función casi euclidiana.

Definición 24. Una función casi euclidiana de un dominio entero B es una función $\nu : B \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\nu(f) = -\infty \iff f = 0$.
2. Para $f, g \in B - \{0\}$ se tiene que $\nu(f) \leq \nu(fg)$.
3. Si $\nu(f) = 0$, entonces f es unidad.
4. Si $f, g \in B$ con $\nu(g) \geq 1$, entonces existen $q, r \in B$ tales que $f = gq + r$ y $\nu(r) \leq \nu(g)$.

Definición 25. Un par \mathbb{P}^1 -algebraico es un par (B, ν) que consiste de un anillo de ideales principales B y una valuación $\nu : \text{Frac}(B) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ tal que $-\nu$ es una función casi euclidiana en B . Decimos que el par es completo si

$$\nu(f) + \sum_{\mathfrak{p} \subseteq B} \text{ord}_{\mathfrak{p}}(f) = 0,$$

para todo $f \in B$, donde \mathfrak{p} corre sobre todos los ideales primos distintos del cero de B y $\text{ord}_{\mathfrak{p}}$ denota la valuación \mathfrak{p} -ádica asociada en B .

Sea (B, ν) un par \mathbb{P}^1 -algebraico completo. Un fibrado vectorial en (B, ν) se define como un par (M, M_{∞}) , donde M es un B -módulo libre de rango finito y M_{∞} es un \mathcal{O}_{ν} -retículo dentro del espacio vectorial de dimensión finita $M \otimes_B k_{\nu}$, donde k_{ν} es la completación de $k = \text{Frac}(B)$ respecto a ν y \mathcal{O}_{ν} es el anillo de enteros.

- El rango de (M, M_{∞}) es el rango del módulo M .
- El grado se calcula como la valuación ν del determinante de la matriz de cambio de base entre una base de M sobre B_e y una base de M_{∞} sobre \mathcal{O}_{ν} .⁵

Así, la categoría de fibrados vectoriales de un par \mathbb{P}^1 -algebraico (B, ν) cumple el teorema H-N.

En particular, para el par \mathbb{P}^1 -algebraico completo (B_e, ν_{dR}) , donde ν_{dR} denota la valuación en B_{dR} , los (B, ν) -pares solo son llamados B -pares. Aquí un fibrado vectorial es un par (M, M_{dR}) tal que

- M es un B_e -módulo libre de rango finito.
- M_{dR} es un B_{dR}^+ -retículo dentro de $M \otimes_{B_e} B_{dR}$.

La siguiente proposición relaciona las dos categorías antes mencionadas. Su demostración puede ser consultada en [16].

PROPOSICIÓN 26. *La categoría de (B_e, ν_{dR}) -pares se identifica con la categoría $Vect(X^{FF})$ de fibrados vectoriales de la curva de Fargues-Fontaine.*

- Espacios vectoriales con filtraciones.
Dada una extensión de campos L/F , sea $VectFil_{L/F}$ la categoría de pares $(V, Fil^{\bullet}V_L)$, donde V es un F -espacio vectorial de dimensión finita y Fil^{\bullet} es

⁵Esta definición concreta se alinea con la definición general del grado de un fibrado vectorial como el grado de su fibrado determinante, que aparece en textos como [24, Ap. A] o [19, §2.2]. En efecto, si M tiene rango r , entonces $\det M := \bigwedge^r M$ es un B_e -módulo libre de rango 1, y $\det M_{\infty} \subseteq \det M \otimes_{B_e} B_{dR}$ es un retículo sobre B_{dR}^+ . La valuación $\nu(\det A)$, donde A es la matriz del cambio de base entre bases de M y M_{∞} , coincide con la posición relativa del retículo $\det M_{\infty}$, y por tanto con el grado del fibrado determinante.

una filtración en $V_L = V \otimes_F L$ separada y exhaustiva. Se definen el rango y grado del par como:

- $rk(V, Fil^\bullet V_L) = \dim_F V$.
- $\deg(V, Fil^\bullet V_L) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \dim_L (gr^i V_L)$

Así, esta categoría cumple con el teorema H-N.

■ **Isocristales.**

Sea K campo perfecto de característica p y $K_0 = \text{Frac}(W(K))$. Un isocrystal sobre K es un par (D, φ_D) , donde D es un K_0 -espacio vectorial de dimensión finita y $\varphi_D : D \rightarrow D$ es un isomorfismo φ -semilineal (esto es, $\varphi_D(ad) = \varphi(a)\varphi_D(d)$ para todo $a \in K_0$ y $d \in D$).

- $rk(D, \varphi_D) = \dim_{K_0} D$.
- $\deg(D, \varphi_D) = -\deg^+ \det(D, \varphi_D)$, donde \deg^+ de un isocrystal de rango uno (L, φ_L) se define escogiendo un elemento básico $e \in L$, luego $\varphi_L(e) = ae$ para algún $a \in K_0$ y $\deg^+(L, \varphi_L) := \nu_p(a)$, ya que K_0 es campo de valuación discreta.

Así, esa categoría cumple con el teorema de H-N. A esta categoría se le suele denotar como $\varphi - \text{Mod}_{K_0}$.

Sea $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbb{Q}$, donde $(d, h) = 1$ y $h > 0$. Podemos definir un isocrystal $(D_\lambda, \varphi_\lambda) \in \varphi - \text{Mod}_{K_0}$ como

- $D_\lambda = K_0^h$, con elementos básicos e_1, \dots, e_h .
- $\varphi_\lambda : D_\lambda \rightarrow D_\lambda$ como el único endomorfismo semilineal que satisface:

$$\varphi_\lambda(e_i) = \begin{cases} e_{i+1}, & \text{si } i = 1, \dots, h-1, \\ p^{-d}e_1, & \text{si } i = h. \end{cases}$$

El isocrystal $(D_\lambda, \varphi_\lambda)$ tiene rango h , grado d y pendiente λ .

LEMA 27. Sea $(D, \varphi_D) \in \varphi - \text{Mod}_{\mathbb{Q}_p}$ isocrystal sobre \mathbb{F}_p . Entonces el par

$$((B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} D)^{\varphi=1}, B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} D)$$

es un fibrado vectorial (B_e, ν_{dR}) con rango y grado dado por el rango y grado del isocrystal.

Este lema asocia a un isocrystal fibrado un fibrado vectorial en X^{FF} , denotado por $\xi(D, \varphi_D)$. En particular, en el caso del isocrystal $(D_\lambda, \varphi_\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{Q}$, escribimos $\mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda) := \xi(D_\lambda, \varphi_\lambda)$. Por el lema, $\mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda)$ tiene rango h , grado d y pendiente λ si $\lambda = \frac{d}{h}$ con $(d, h) = 1$ y $h > 0$.

TEOREMA 28 (De clasificación de fibrados vectoriales en X^{FF}). Sea E un fibrado vectorial en X^{FF} . Entonces existe una única sucesión de racionales $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$ tales que E es isomorfo a

$$\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^m \xi(D_{\lambda_i}, \varphi_{\lambda_i}).$$

La demostración de este teorema puede ser consultada en [14].

COROLARIO 29.

- El funtor $\xi(-) : \varphi - \text{Mod}_{K_0} \rightarrow \text{Vect}(X^{FF})$ es esencialmente sobreyectivo.
- Sea E un fibrado vectorial de X^{FF} y $\lambda \in \mathbb{Q}$. Entonces E es semiestable de pendiente λ si y sólo si E es isomorfo a $\mathcal{O}_{X^{FF}}(\lambda)^m$ para algún $m \geq 1$.
- La categoría de fibrados vectoriales de X^{FF} semiestables y de pendiente cero es equivalente a la categoría de \mathbb{Q}_p -espacios vectoriales de dimensión finita vía $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_{X^{FF}}$.

- $\varphi - \text{ModFil}_{K/K_0}$.

Esta es la categoría de los tripletes $(D, \varphi_D, \text{Fil}^\bullet D_K)$ donde

- D es un K_0 -espacio vectorial de dimensión finita.
- $\varphi_D : D \rightarrow D$, isomorfismo φ -lineal.
- Fil^\bullet es una filtración en $D_K := D \otimes_{K_0} K$ separada y exhaustiva.

Es decir, $(D, \varphi) \in \varphi - \text{Mod}_{K_0}$ y $(D, \text{Fil}^\bullet D_K) \in \text{VectFil}_{K_0/K}$. Definimos:

- $\text{rk}(D, \varphi_D, \text{Fil}^\bullet D_K) := \dim_{K_0} D$.
- $\text{deg}(D, \varphi_D, \text{Fil}^\bullet D_K) := \text{deg}(D, \varphi_D) + \text{deg}(D, \text{Fil}^\bullet D_K)$.

De esta forma, esta categoría cumple con el teorema de H-N.

Como $B_{\text{cris}} \subseteq B_{dR}$, si V es representación cristalina entonces V es de De Rham y $D_{B_{dR}}(V) = D_{B_{\text{cris}}}(V) \otimes_{K_0} K$. Así el functor

$$D_{\text{cris}} : \text{Rep}_{\text{cris}}(G_K) \rightarrow \varphi - \text{ModFil}_{K/K_0}$$

es completamente fiel.

Fontaine conjeturó que todo isocristal filtrado estaba en la imagen esencial de $\text{Rep}_{\text{cris}}(G_K)$ si y sólo si era débilmente admisible [14, Capítulo 8: classification des fibrés vectoriels: le cas F algébriquement clos], que en este caso, es equivalente a pedir que sea semiestable y de pendiente cero. Esto demuestra que

$$D_{\text{cris}} : \text{Rep}_{\text{cris}}(G_K) \rightarrow \varphi - \text{ModFil}_{K/K_0}^{w.a.},$$

donde *w.a.* denota weakly admissible (débilmente admisible) es una equivalencia de categorías. También es posible demostrar que la categoría de representaciones semiestables se puede describir como isocristales filtrados débilmente admisibles con operador de monodromía [14].

Finalmente, hemos llegado a uno de los objetivos de la teoría de Hodge p -ádica, describir clases de representaciones de Galois p -ádicas en términos de pura álgebra lineal.

8. EPÍLOGO

El estudio de la curva de Fargues-Fontaine es actualmente un tema de investigación muy activo dentro del área de la geometría aritmética. Trabajos como los de Peter Scholze sobre perfectoides [20] o de Fargues respecto al programa de Langlands [15] son muestra del actual avance en este tópico.

A lo largo de este artículo, hemos presentado la construcción de los anillos de periodos de Fontaine, culminando en la curva de Fargues-Fontaine. Puede resultar útil reflexionar sobre la *arquitectura* de esta construcción, como bien lo detalla Colmez [21]. La necesidad de múltiples anillos $(A_{\text{inf}}, B_{\text{inf}}^+, A_{\text{cris}}, B_{dR}^+, B_{dR})$ surge de la delicada tarea de tender puentes entre mundos aparentemente dispares: la aritmética de \mathbb{Q}_p , las representaciones de Galois G_K , y la geometría p -ádica, cuyas estructuras formales guardan ciertos paralelismos con la geometría compleja.

Cada anillo juega un papel específico:

- $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ y R : Proporcionan el *material base* p -ádico y su versión perfecta R (el "tilt"), esencial para manejar Frobenius.
- $A_{\text{inf}} = W(R)$: Levanta R a característica cero, introduciendo la estructura de Witt y permitiendo la aparición de p . (Ver Definición 2).
- B_{inf}^+ : Permite la inversión (formal) de p , acercándose a un campo \mathbb{Q}_p -vectorial.
- A_{cris} : Introduce la estructura de potencias divididas y la completitud p -ádica, esencial para alojar periodos como t y conectar con la cohomología cristalina (ver Observación 1). Es el *punto* principal. (Ver Definición 7).
- B_{cris}^+ : La versión de A_{cris} con p invertido.
- B_{dR}^+ y B_{dR} : Incorporan la topología $(\ker \theta)$ -ádica y el periodo t , creando el campo p -ádico análogo a \mathbb{C} que permite la comparación con la cohomología de De Rham y define la filtración de Hodge-Tate. (Ver Definición 10).

Esta secuencia de anillos, cada uno con sus acciones de Galois y Frobenius, constituye el ingenioso andamiaje que permite a Fontaine (y Fargues-Fontaine) asociar a las representaciones p -ádicas distintos objetos de álgebra lineal con estructuras adicionales (acción de Frobenius, filtraciones, conexiones), según el contexto. En particular, permiten traducir la información aritmética en términos geométrico-lineales, como módulos con filtración (en el caso de B_{dR}) o con Frobenius (en el caso de B_{cris}).

Otro punto de vista que particularmente estamos estudiando son los sistemas dinámicos de funciones racionales sobre la curva: estudiar puntos periódicos o los conjuntos de Fatou y Julia podrían llevarnos a descubrir aún más información acerca de este objeto matemático tan importante.

Finalmente, conviene recordar que este sistema de anillos no fue diseñado para resolver un único problema, sino para tejer puentes entre estructuras profundamente distintas. Como señala Colmez [21], la teoría de periodos de Fontaine constituye una auténtica arquitectura matemática: no se trata solo de construir un anillo universal, sino de organizar múltiples niveles de compatibilidad entre geometría, aritmética y análisis. Cada anillo juega un papel estructural fundamento, puente, ventana o terraza en este edificio conceptual. Comprenderlo implica recorrer sus niveles, descifrar sus relaciones, y reconocer en ellos el lenguaje profundo de la geometría aritmética contemporánea.

AGRADECIMIENTOS. El primer autor expresa su gratitud a SECIHTI por la beca obtenida para estudiar el doctorado en el CIMAT y con el cual fue posible el desarrollo del presente artículo. El segundo autor agradece al proyecto de Frontera SECIHTI “Modelos matemáticos y computacionales no convencionales para el estudio y análisis de problemas relevantes en Biología” FORDECYT-PRONACES UNAM 217367.

REFERENCIAS

- [1] CIMPA. *Research school on Hodge theory and p -adic Hodge theory*, (2021).
- [2] Gerd Faltings. *p -adic Hodge theory*. J. Amer. Math. Soc, 1(1):255-299, (1988).
- [3] Jean-Marc Fontaine. *p -adic periods and p -adic étale cohomology*. In Current trends in arithmetical algebraic geometry, Proceedings of the AMS-IMS-SIAM joint summer research conference, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1985, pages 179-207. Amer. Math. Soc., (1987).
- [4] Jean-Marc Fontaine. *Le corps des périodes p -adiques*. Astérisque, 223:59-111, (1994).
- [5] Jean-Marc Fontaine. *Représentations p -adiques semi-stables*. Astérisque, 223:113-184, (1994).
- [6] Jean Marc Fontaine and Luc Illusie. *p -adic periods: A survey*. Université de Paris-sud, Département de mathématiques, (1990).
- [7] Jean-Pierre Serre. *Local Fields*. Graduate Texts in Mathematics;67. Springer Verlag New York Inc, (1979).
- [8] J. R. Pérez-Buendía. *A crystalline criterion for good reduction on semi-stable $k3$ -surfaces over a p -adic field*. PhD thesis, Concordia University (2014).
- [9] J. R. Pérez-Buendía. *A kulikov-type classification theorem for a one parameter family of $k3$ -surfaces over p -adic field and a good reduction criterion*. *Annales mathématiques du Québec*, 43:411–434, 2019.
- [10] G. Hernandez-Mada. *A monodromy criterion for the good reduction of $k3$ surfaces*. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 145, 2021.
- [11] Página web J.R. Pérez-Buendía. Afiliación: SECIHTI CIMAT–Mérida. Web: <http://www.cimat.mx/rogelio.perez>. Sección de Cursos: <http://www.cimat.mx/rogelio.perez/Cursos>.
- [12] Jesús Rogelio. Pérez-Buendía. *Curse: p -adic Galois representations*. <https://youtu.be/-KoXzop6X1Y?feature=shared>, CIMPA Research School on Hodge Theory and p -adic Hodge Theory. Online, CIMAT-Gto, México, (2021)
- [13] Laurent Berger. *Construction de (ϕ, γ) -modules: représentations p -adiques et b -paires*. *Algebra and Number Theory*, 2(1):91-120, (2008).
- [14] Laurent Fargues and Jean Marc Fontaine. *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p -adique*. Société mathématique de France, (2018).
- [15] Laurent Fargues and Peter Scholze. *Geometrization of the local Langlands correspondence*. arXiv preprint arXiv:2102.13459, (2021).
- [16] Matthew Morrow. *The Fargues-Fontaine curve and diamonds*. Séminaire BOURBAKI, (1150), (2018).

- [17] Matthew Morrow. *Raconte moi. . . la courbe de Fargues-Fontaine*. Gazette des Mathématiciens, (163):36-41, (2020).
- [18] Maxim Kontsevich and Don Zagier. *Periods*. Springer, (2001).
- [19] Olivier Brinon and Brian Conrad. *Cmi summer school notes on p-adic Hodge theory*. (2009).
- [20] Peter Scholze. *Perfectoid spaces and their applications*. In Proceedings of the ICM, volume 2014, (2014).
- [21] Pierre Colmez. *Le programme de fontaine*. L'Enseignement Mathématique, 65(3/4):487-531, (2019).
- [22] Serin Hong. *Notes on p-adic hodge theory*. (2020).
- [23] Xavier Caruso. *An introduction to p-adic period rings*. (2019).
- [24] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.

Jorge A. Robles Hernández

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Unidad Mérida.
Parque Científico y Tecnológico de Yucatán Km 5.5 Carretera Sierra Papacal
Chuburná Puerto Sierra Papacal; CP 97302, Mérida, Yucatán.
e-mail: jorge.robles@cimat.mx

J. Rogelio Pérez-Buendía

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Unidad Mérida.
Parque Científico y Tecnológico de Yucatán Km 5.5 Carretera Sierra Papacal
Chuburná Puerto Sierra Papacal; CP 97302, Mérida, Yucatán.
e-mail: rogelio.perez@cimat.mx