MIXBA'AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 77-87.
Recibido 29-08-2024. Aceptado 06-08-25.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/alagza

POLINOMIOS Y EL CÁLCULO DE PROPOSICIONES

ALEJANDRO AGUILAR ZAVOZNIK

RESUMEN. Estudiaremos una forma de usar polinomios como funciones de verdad. Mediante éstos, podemos utilizar elementos algebraicos para comparar dos fórmulas bien formadas, así como verificar si un argumento es válido.

En los cursos de lógica, usualmente se utilizan las tablas de verdad para demostrar las propiedades elementales de las proposiciones. Una alternativa es utilizar funciones de verdad para esto, pero la mayoría de los libros de texto apropiados para este nivel no suelen definir este concepto o lo muestran como una curiosidad. En este trabajo estudiaremos una forma de usarlas, ya sea en lugar de o además de las tablas de verdad.

En la primera sección se verá una forma de definir los conceptos básicos del cálculo de proposiciones sin usar tablas de verdad. La presentación mezcla ideas de [1] y [7], pero se modifica la notación. Además de esta modalidad, otra forma de planear un curso es comenzando con tablas de verdad y, posteriormente, introduciendo el concepto de función de verdad como una alternativa con la que conseguimos los mismos resultados.

A partir de la segunda sección se mostrará cómo se pueden utilizar las funciones de verdad para demostrar algunas propiedades básicas del cálculo de proposiciones.

Para que este artículo sea breve, los temas se presentarán asumiendo que el lector tiene conocimientos básicos sobre conjuntos y funciones. Junto con los ya mencionados [1] y [7], los siguientes textos son opciones para estudiar los antecedentes: [2], [3] y [4]. Las personas interesadas en temas más profundos relacionados con las funciones de verdad pueden consultar los libros [5] y [6].

1. Notación y antecedentes

Una *proposición* es una afirmación que toma exactamente uno de dos valores: verdadero (V) o falso (F). Frases como "La mochila de Ana es roja" o "El primer día del año es el 25 de octubre" son dos proposiciones pues podemos decidir si son verdaderas o falsas. Sin embargo, nosotros nos concentraremos en un enfoque abstracto, no nos importará qué es lo que dice, solamente nos preocuparemos por su valor de verdad. Comenzaremos viendo como construir frases, a las que llamaremos *fórmulas bien formadas*, y posteriormente veremos como obtener su valor de verdad.

Para construir fórmulas en el cálculo de proposiciones usaremos dos tipos de símbolos, por un lado, las letras minúsculas (por lo general comenzando con p) a las que llamaremos *proposiciones atómicas* o *letras proposicionales*. Por otro lado, tenemos los *operadores booleanos*, que en nuestro caso usaremos cinco: la *negación* ($\neg$), la *conjunción* ($\wedge$), la *disyunción* ($\vee$), la *implicación* ($\Rightarrow$) y la *equivalencia* ($\Leftrightarrow$). El primero es un *operador unario*, mientras que los otros cuatro son *operadores binarios*.

Definimos de forma recursiva el concepto de fórmula bien formada (fbf)[1] de la siguiente manera:

- Una letra proposicional es una fbf.
- Si α es una fbf, $\neg(\alpha)$ es una fbf.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03B05, 06E30.

Palabras clave. Funciones de verdad, cálculo de proposiciones, polinomios.

[1]Algunas referencias, como [1], utiliza el nómbre fórmula, mientras que otras como [7], las llaman fórmulas bien formadas.

- Si α, β son fbf y $\circ$ es un operador booleano binario, $(\alpha \circ \beta)$ es una fbf.
- Cualquier cosa que no se construya con las reglas anteriores no es una fbf.

Si seguimos lo anterior de forma literal, acabaremos con fórmulas saturadas de paréntesis, por lo que en ocasiones nos conviene omitir algunos. Para esto, utilizaremos el siguiente orden de prelación para los operadores booleanos: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Así, podemos agregar:

- Si α es una fbf, $\neg\alpha$ es una fbf.
- Si α, β son fbf y $\circ$ es un operador booleano binario, $\alpha \circ \beta$ es una fbf.

A continuación veremos, por un lado, algunas fórmulas con los paréntesis mínimos y, por otro, la misma con todos los paréntesis.

$p \wedge \neg q \vee r$	$\Big(\big(p \wedge (\neg q)\big) \vee r\Big)$
$p \vee q \wedge r$	$\big(p \vee (q \wedge r)\big)$
$(p \vee q) \wedge r$	$\big((p \vee q) \wedge r\big)$
$\neg p \Leftrightarrow q \Rightarrow r$	$\big((\neg p) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)\big)$
$p \wedge q \Rightarrow (r \Leftrightarrow t)$	$\big((p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow t)\big)$

Dada una fbf α, $\mathfrak{P}_\alpha$ es el conjunto de las proposiciones atómicas utilizadas en α. Una *interpretación* de α es una función $\varphi : \mathfrak{P}_\alpha \to \{V, F\}$. Es decir, le asignamos valores de verdad a todas las proposiciones atómicas que utiliza α.

Por ejemplo, si $\alpha = (p \vee q) \wedge r$, la siguiente es una interpretación de α:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(p) & = & V \\ \varphi(q) & = & F \\ \varphi(r) & = & V. \end{array}$$

Si $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ es un conjunto con k proposiciones, definimos

$$\mathfrak{P}_\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathfrak{P}_\alpha.$$

Una interpretación de $\mathcal{A}$ es una función $\varphi : \mathfrak{P}_\mathcal{A} \to \{V, F\}$.

Dada una fbf, α, y una interpretación φ de ésta, el *valor de verdad* de α bajo φ lo denotaremos $v(\varphi, \alpha)$. Para calcular esto, debemos de considerar las siguientes reglas donde α, β son proposiciones y, cuando sea necesario, el conjunto de atómos será $\mathfrak{P}_{\{\alpha,\beta\}}$:

- Si α es una letra proposicional, $v(\varphi, \alpha) = \varphi(\alpha)$.
- $v\big(\varphi, (\alpha)\big) = v(\varphi, \alpha)$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = V$, $v(\varphi, \neg\alpha) = F$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = F$, $v(\varphi, \neg\alpha) = V$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = v(\varphi, \beta) = V$, $v(\varphi, \alpha \wedge \beta) = V$, en cualquier otro caso, $v(\varphi, \alpha \wedge \beta) = F$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = v(\varphi, \beta) = F$, $v(\varphi, \alpha \vee \beta) = F$, si no, $v(\varphi, \alpha \vee \beta) = V$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = V$ y $v(\varphi, \beta) = F$, entonces $v(\varphi, \alpha \Rightarrow \beta) = F$, en cualquier otro caso $v(\varphi, \alpha \Rightarrow \beta) = V$.
- Si $v(\varphi, \alpha) = v(\varphi, \beta)$, entonces $v(\varphi, \alpha \Leftrightarrow \beta) = V$; si $v(\varphi, \alpha) \neq v(\varphi, \beta)$, $v(\varphi, \alpha \Leftrightarrow \beta) = F$.

La necesidad de estas reglas es una de las desventajas de usar únicamente funciones de verdad, pues es más claro cuando lo anterior se presenta mediante tablas de verdad, las que podemos construir como sigue. Dada una fbf α, colocamos una columna por cada elemento de $\mathfrak{P}_\alpha$ y una para α. Por cada interpretación de α, tendremos un renglón. Por ejemplo, la tabla de verdad de $\neg p$ es:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Dado un operador binario, $\circ$, $p \circ q$ tiene cuatro interpretaciones posibles, por lo que tenemos esta cantidad de renglones.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Sean $\alpha = \Big(p \vee (q \Rightarrow \neg r)\Big) \Leftrightarrow (s \wedge t)$ y φ la interpretación:

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= F \\ \varphi(q) &= V \\ \varphi(r) &= V \\ \varphi(s) &= F \\ \varphi(t) &= V. \end{aligned}$$

Podemos obtener $v(\varphi, \alpha)$ como sigue, utilizando las reglas que definimos anteriormente:

$$v(\varphi, \neg r) = F$$
$$v(\varphi, q \Rightarrow \neg r) = F$$
$$v\Big(\varphi, p \vee (q \Rightarrow r)\Big) = F$$
$$v(\varphi, s \wedge t) = F$$

y, finalmente, utilizando los dos últimos resultados junto con la regla de la equivalencia

$$v(\varphi, \alpha) = V.$$

En ocasiones, en lugar del símbolo $\Leftrightarrow$ utilizaremos $\equiv$. El primero lo usaremos cuando sea parte de una fórmula bien formada; el segundo, cuando comparemos dos fbf. El primero es parte del *lenguaje* que estamos estudiando, mientras que el segundo es parte del *metalenguaje* (ver la sección 2.3.1 de [1] o la sección 1.3 de [7] para más detalles).

2. Funciones de verdad de proposiciones con un operador booleano

Frecuentemente, los valores “verdadero” y “falso” de una proposición se intercambian por 1 y 0 respectivamente. Para distinguir entre estas dos versiones, usaremos las letras mayúsculas cuando trabajemos con números. Así, la proposición atómica p estará asociada a la *variable binaria* P.

Una de las ventajas de la versión numérica es que podemos usar operaciones algebraicas para resolver problemas del cálculo de proposiciones. En particular, podemos encontrar una función que representa una proposición. A esto se le conoce como *funciones de verdad* y, como ya se mencionó, son una alternativa a las tablas de verdad.

La mayoría de los libros de lógica no mencionan las funciones de verdad o únicamente hacen una breve presentación. Adicionalmente, existen varias opciones para tratarlas, debido a que distintas expresiones algebraicas, restringidas al dominio $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ dan el mismo resultado; en particular, [7] utiliza la función de verdad $\text{mín}(P, Q)$ para representar $p \wedge q$ y $\text{máx}(P, Q)$ para $p \vee q$. Podemos notar que, si el dominio es $\mathcal{B}$:

$$\text{mín}(x, y) = xy,$$

mientras que

$$\text{máx}(x, y) = x + y - xy.$$

Nosotros estaremos utilizando polinomios, por lo que preferiremos la segunda forma. Más adelante se verá la utilidad de esto. A continuación, vamos a encontrar funciones para cada uno de los operadores binarios que definimos anteriormente.

Si α es una fbf, $\mathrm{FV}(\alpha) = f$ indicará que f es una función de verdad que representa a la fbf α. Agregando ciertas restricciones que mencionaremos posteriormente, $\mathrm{FV}(\alpha)$ es una función cuyo dominio son las fórmulas bien formadas y su codominio son los polinomios con coeficientes enteros; recalcando el hecho de que, por ser función, a cada fbf le corresponde exactamente un polinomio.

Podemos notar que las siguientes funciones cumplen con los resultados mostrados en la sección anterior:

Proposición 1. *Sean p, q proposiciones y P, Q variables asociadas a éstas. Entonces:*

1. $\mathrm{FV}(\neg p) = 1 - P$.
2. $\mathrm{FV}(p \wedge q) = PQ$.
3. $\mathrm{FV}(p \vee q) = P + Q - PQ$.
4. $\mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ$.
5. $\mathrm{FV}(p \Leftrightarrow q) = 1 - P - Q + 2PQ$.

Hay dos formas de presentar lo anterior en un curso. Por un lado, si no se usarán tablas de verdad, se pueden definir estas cinco y luego se verifica que coincide con las propiedades de v que se vieron en la sección anterior. La segunda opción es demostrando las siguientes propiedades usando tablas de verdad: $p \vee q \equiv \neg(p \wedge q)$, $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ y $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Posteriormente, se verifica que las primeras dos funciones son claramente equivalentes a las tablas correspondientes, y usando estas propiedades se pueden deducir las reglas de inferencia de las últimas tres.

$$\begin{aligned} \mathrm{FV}(p \vee q) &= \mathrm{FV}(\neg(\neg p \wedge \neg q)) \\ &= 1 - \mathrm{FV}(\neg p \wedge \neg q) \\ &= 1 - \Big(\mathrm{FV}(\neg p)\mathrm{FV}(\neg q)\Big) \\ &= 1 - \Big((1-P)(1-Q)\Big) \\ &= P + Q - PQ \end{aligned}$$

Notemos que el procedimiento se hace de afuera hacia adentro. Por ejemplo, en el primer renglón comenzamos con la negación que está a la izquierda, aplicamos la función de verdad que le corresponde. Si asignamos $\alpha = \neg p \wedge \neg q$, entonces $p \vee q \equiv \neg\alpha$, por lo que

$$\mathrm{FV}(p \vee q) = \mathrm{FV}(\neg\alpha) = 1 - \mathrm{FV}(\alpha) = 1 - \mathrm{FV}(\neg p \wedge \neg q).$$

El resto del procedimiento se hace de esta manera, siempre yendo de afuera hacia adentro.

De forma análoga, con la identidad $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ obtenemos

$$\mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ.$$

Es importante notar que el término que se resta es el que está a la izquierda, por lo que $\mathrm{FV}(q \Rightarrow p) = 1 - Q + QP$.

Para la equivalencia, primero debemos de mencionar la siguiente afirmación obvia que estaremos usando a lo largo de todo este trabajo.

Lema 2. *Si P es una variable cuyos valores están en $\mathcal{B}$ y k un entero positivo, entonces $P = P^k$.*

A partir de lo anterior y de la equivalencia $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{FV}(p \Leftrightarrow q) &= \mathrm{FV}\Big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\Big) \\ &= \mathrm{FV}(p \Rightarrow q) \cdot \mathrm{FV}(q \Rightarrow p) \\ &= (1 - P + PQ)(1 - Q + QP) \\ &= 1 - Q + QP - P + PQ - \cancel{P^2Q + PQ} - PQ^2 + P^2Q^2 \\ &= 1 - P - Q + 2PQ \end{aligned}$$

Notemos que, por el lema anterior, podemos cancelar PQ con $-P^2Q$ y tenemos $P^2Q^2 = PQ$.

A continuación se presentan otras operaciones booleanas que se suelen utilizar en algunos lenguajes de programación.

1. Disyunción exclusiva (xor). $p \oplus q \equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$. $\mathrm{FV}(p \oplus q) = P + Q - 2PQ$.
2. Incompatibilidad (nand). $p \uparrow q \equiv \neg(p \wedge q)$. $\mathrm{FV}(p \uparrow q) = 1 - PQ$.
3. Negación disjunta (nor). $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$. $\mathrm{FV}(p \downarrow q) = 1 - P - Q + PQ$.

Usando estos resultados podemos hallar la función de cualquier proposición, por ejemplo, vamos a calcular lo siguiente.

$$X = \mathrm{FV}\Big((p \vee \neg q) \wedge r \Rightarrow (s \vee t) \vee \neg u\Big).$$

Tomando en cuenta que lo siguiente se utilizará dos veces, definamos

$$\begin{aligned} Y &= \mathrm{FV}\Big((p \vee \neg q) \wedge r\Big) \\ &= \mathrm{FV}(p \vee \neg q) \cdot \mathrm{FV}(r) \\ &= \Big(P + (1 - Q) - P(1 - Q)\Big) \cdot R \\ &= R - QR + PQR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 1 - \mathrm{FV}\Big((p \vee \neg q) \wedge r\Big) + \mathrm{FV}\Big((p \vee \neg q) \wedge r\Big) \cdot \mathrm{FV}\Big((s \vee t) \vee \neg u\Big) \\ &= 1 - Y + Y \cdot \Big(\mathrm{FV}(s \vee t) + \mathrm{FV}(\neg u) - \mathrm{FV}(s \vee t) \cdot \mathrm{FV}(\neg u)\Big) \\ &= 1 - Y + Y\Big((S + T - ST) + (1 - U) - (S + T - ST)(1 - U)\Big) \\ &= 1 - Y + Y(SU + TU - STU + 1 - U) \\ &= 1 + Y\Big(\cancel{-1} + (SU + TU - STU + \cancel{1} - U)\Big) \\ &= 1 + (R - QR + PQR)(-U + SU + TU - STU) \\ &= 1 - RU + QRU + RSU + RTU - PQRU - QRSU - QRTU \\ &\quad - RSTU + PQRSU + PQRTU + QRSTU - PQRSTU. \end{aligned}$$

Los resultados los estaremos ordenando de tal forma que el número de variables que aparece en cada sumando sea no decreciente y donde las letras en cada uno estén en orden alfabético, como en el ejemplo anterior.

Si bien, el trabajo algebraico que realizamos al resolver estos problemas parece arduo, hay que tomar en cuenta que la tabla de verdad correspondiente tiene sesenta y cuatro renglones y hay que hacer siete columnas para obtener el resultado final.

Para hallar el valor de verdad de la proposición original con la interpretación $\varphi(p) = F$, $\varphi(q) = V$, $\varphi(r) = V$, $\varphi(s) = F$, $\varphi(t) = F$ y $\varphi(u) = V$, podemos calcular X usando $P = 0, Q = 1, R = 1, S = 0, T = 0, U = 1$.

$$X = 1 - 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 - 0 + 0 + 0 + 0 - 0 = 1.$$

Es importante notar que en el caso de la implicación, puede resultar útil factorizar previamente la función como sigue:

$$\mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ = 1 + P(Q - 1).$$

Esto facilitará el trabajo cuando $\mathrm{FV}(q)$ tenga el sumando 1. Por ejemplo:

$$\mathrm{FV}(p \Rightarrow \neg q) = 1 + P\Big(\mathrm{FV}(\neg q) - 1\Big) = 1 + P\Big((\cancel{1} - Q) - \cancel{1}\Big) = 1 - PQ.$$

3. Unicidad

Al conjunto de variables de una función de verdad f lo denotaremos $\mathfrak{P}_f$. Una *interpretación* de f es una función $\psi : \mathfrak{P}_f \to \mathcal{B}$. Dada una función de verdad f y una interpretación ψ, denotaremos $v(\psi, f)$ como el valor de f donde cada una de las variables $X \in \mathfrak{P}_f$ toma el valor $\psi(X)$. En esta sección vamos a demostrar que dada una función de verdad f, existe un único polinomio $g : \mathcal{B}^{|\mathfrak{P}_f|} \to \mathcal{B}$ con ciertas restricciones, tal que, para cualquier interpretación ψ, $v(\varphi, f) = v(\psi, g)$, donde φ es ψ intercambiando 0,1 por V, F.

Sea $f : \mathcal{B}^k \to \mathcal{B}$ un polinomio. Diremos que f es válido si cumple dos condiciones:

1. La primera ya está indicada en el codominio de f, pero es importante recalcarlo: Para cualquier interpretación ψ_f de f, $v(\psi_f, f) \in \mathcal{B}$.
2. La segunda se justifica usando el lema 2. En cada monomio de f, cualquier variable $X \in \mathfrak{P}_f$ aparece, a lo más, elevada a la potencia 1.

Teorema 3. *Sean α, β dos fórmulas bien formadas con $\mathfrak{P}_\alpha = \mathfrak{P}_\beta$ y f_α, f_β dos polinomios tales que* $\mathrm{FV}(\alpha) = f_\alpha$ *y* $\mathrm{FV}(\beta) = f_\beta$*; f_α es el mismo polinomio que f_β si y sólo si $\alpha \equiv \beta$.*

Demostración. Es obvio que si los polinomios son el mismo, los valores de verdad de α y de β también lo son, con lo que la ida queda demostrada.

Ahora supongamos que $\alpha \equiv \beta$. Usaremos inducción sobre $k = |\mathfrak{P}_\alpha| = |\mathfrak{P}_\beta|$.

Si $k = 1$, hay una proposición atómica, digamos p. En total hay cuatro funciones distintas:

$$\begin{array}{ll} f_1(0) = 0 & f_1(1) = 0 \\ f_2(0) = 0 & f_2(1) = 1 \\ f_3(0) = 1 & f_3(1) = 0 \\ f_4(0) = 1 & f_4(1) = 1 \end{array}$$

Vamos a ver que cada una de éstas solamente tiene un polinomio asociado y que cualquier otro polinomio con una variable no es válido.

Por un lado, dado que las potencias no pueden ser mayores que 1, las únicas posibilidades son de la forma $f_\alpha(P) = a_0 + a_1 P$. Para el caso en que $P = 0$, $f_\alpha = a_0$, por lo que $a_0 \in \mathcal{B}$. Ahora, si $P = 1$, $f(P) = a_0 + a_1$. Si $a_0 = 0$, entonces a_1 puede ser 0 ó 1; y si $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ ó $a_1 = -1$. En cualquier otro caso, el polinomio toma algún valor que no está en $\mathcal{B}$. De esta forma:

$$\begin{array}{rcl} f_1(P) & = & 0 \\ f_2(P) & = & P \\ f_3(P) & = & 1 - P \\ f_4(P) & = & 1. \end{array}$$

Esto demuestra el regreso cuando hay una variable.

Supongamos la propiedad se cumple para $k = \ell$ variables. Vamos a verificar el caso $k = \ell + 1$.

Sean α y β dos fórmulas bien formadas que en total utilizan $\ell + 1$ proposiciones atómicas, digamos, $p_1, p_2, \ldots, p_\ell, p_{\ell+1}$. Supongamos que $g(P_1, \ldots, P_\ell, P_{\ell+1}) = \mathrm{FV}(\alpha)$ y $h(P_1, \ldots, P_\ell, P_{\ell+1}) = \mathrm{FV}(\beta)$. Tomando en cuenta que la variable $P_{\ell+1}$ solamente puede aparecer a la potencia 0 ó 1, entonces:

$$\begin{array}{rcl} g(P_1, \ldots, P_{\ell+1}) & = & g_0(P_1, \ldots, P_\ell) + g_1(P_1, \ldots, P_\ell) P_{\ell+1} \\ h(P_1, \ldots, P_{\ell+1}) & = & h_0(P_1, \ldots, P_\ell) + h_1(P_1, \ldots, P_\ell) P_{\ell+1} \end{array}$$

Si $P_{\ell+1} = 0$, entonces

$$\begin{array}{rcl} g(P_1, \ldots, P_\ell, 0) & = & g_0(P_1, \ldots, P_\ell) \text{ y} \\ h(P_1, \ldots, P_\ell, 0) & = & h_0(P_1, \ldots, P_\ell). \end{array}$$

Usando la hipótesis de inducción, g_0 y h_0 son el mismo polinomio. Ahora supongamos que $P_{\ell+1} = 1$, $g = g_0 + g_1$ y $h = h_0 + h_1$. De nuevo, por hipótesis de inducción, g y h coinciden, y como $g_0 = h_0$, entonces g_1 y h_1 son el mismo polinomio. Por lo tanto, el regreso es verdadero en el caso $n = \ell + 1$. □

Lo relevante del resultado anterior es que podemos usar los polinomios para decidir si dos proposiciones son equivalentes, o incluso, si un argumento es válido. A continuación veremos los detalles para esto.

4. Demostración de equivalencias

Primero veremos como utilizar polinomios para demostrar que dos proposiciones son equivalentes. Esto es una aplicación directa del teorema demostrado en la sección anterior.

Proposición 4. *Sean p, q, r proposiciones. Tenemos las siguientes propiedades de los operadores booleanos.*

1. *Involución:* $\neg\neg p \equiv p$.
2. *Conmutatividad:* $p \wedge q \equiv q \wedge p$.
3. *Conmutatividad:* $p \vee q \equiv q \vee p$.
4. *Asociatividad:* $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.
5. *Asociatividad:* $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.
6. *Distributividad:* $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$.
7. *Distributividad:* $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.
8. *Ley de De Morgan:* $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.
9. *Ley de De Morgan:* $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.
10. *Absorción:* $(p \wedge q) \vee q \equiv q$.
11. *Absorción:* $(p \vee q) \wedge q \equiv q$.
12. *Forma disyuntiva de la implicación:* $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
13. *Contrapositiva:* $p \Rightarrow q \equiv \neg p \Rightarrow \neg p$.

Demostración. En cada caso, denotaremos X, Y a las funciones de verdad de cada uno de los dos lados de la equivalencia. Calcularemos X, Y y verificaremos que $X = Y$; con lo que, usando el teorema 3, se demuestra la afirmación. A continuación se muestran algunos casos. El resto se deja como ejercicio para el lector.

2. $X = \mathrm{FV}(p \wedge q) = PQ$. $Y = \mathrm{FV}(q \wedge p) = QP$.
5. $X = \mathrm{FV}\Big((p \vee q) \vee r\Big)$. $Y = \mathrm{FV}\Big(p \vee (q \vee r)\Big)$.

$$\begin{aligned} X &= (P + Q - PQ) + R - (P + Q - PQ)R \\ &= P + Q + R - PQ - PR - QR + PQR. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= P + (Q + R - QR) - P(Q + R - QR) \\ &= P + Q + R - PQ - PR - QR + PQR \end{aligned}$$

6. $X = \mathrm{FV}\Big((p \wedge q) \vee r\Big)$. $Y = \mathrm{FV}\Big((p \vee r) \wedge (q \vee r)\Big)$.

$$X = R + PQ - PQR.$$

$$\begin{aligned} Y &= (P + R - PR)(Q + R - QR) \\ &= PQ + \cancel{PR} - \cancel{PQR} + \cancel{RQ} + R^2 - \cancel{QR^2} - PRQ - \cancel{PR^2} + \cancel{PR^2Q} \\ &= R + PQ - PQR. \end{aligned}$$

9. $X = \mathrm{FV}\Big(\neg(p \vee q)\Big)$, $Y = \mathrm{FV}(\neg p \wedge \neg q)$.

$$X = 1 - \mathrm{FV}(p \vee q) = 1 - (P + Q - PQ) = 1 - P - Q + PQ.$$

$$Y = \mathrm{FV}(\neg p)\mathrm{FV}(\neg q) = (1 - P)(1 - Q) = 1 - P - Q + PQ.$$

12. $X = \mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ$. $Y = \mathrm{FV}(\neg p \vee q)$.

$$\begin{aligned} Y &= \mathrm{FV}(\neg p) + Q - \mathrm{FV}(\neg p)Q \\ &= (1 - P) + Q - (1 - P)Q \\ &= 1 - P + PQ. \end{aligned}$$

□

En algunos casos, como en *2*, la demostración es muy sencilla, es simple consecuencia de la conmutatividad del producto, otras son un poco más complicadas, como *5*. En ocasiones un lado es más sencillo que el otro, como en *6*, mientras que a veces ambos tienen la misma complejidad como en *9*.

5. Consecuencias tautológicas

En esta sección veremos cómo usar funciones de verdad para analizar argumentos. En [3], [4] y [7] se puede profundizar más sobre estos temas.

Si $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ es un conjunto de fórmulas bien formadas y β es una fbf, diremos que β es una consecuencia tautológica de $\mathcal{A}$ si y sólo si, para toda interpretación φ de $\mathcal{A}$ tal que $v(\varphi, \alpha_i) = V$ para $1 \leq i \leq k$, entonces $v(\varphi, \beta) = V$. Esto se denotará $\mathcal{A} \vDash \beta$. Usualmente, lo anterior se suele expresar como sigue:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \hline \therefore \beta \end{array}$$

Es importante notar que esto es equivalente a

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \Rightarrow \beta, \tag{1}$$

cuya función de verdad es

$$X = 1 + \mathrm{FV}(\alpha_1) \cdots \mathrm{FV}(\alpha_k)\Big(\mathrm{FV}(\beta) - 1\Big). \tag{2}$$

Para demostrar que $\mathcal{A} \vDash \beta$, basta con ver que $X = 1$, lo que implica que (1) es verdadera para cualquier interpretación.

Diremos que una fbf, α es una *tautología* si es verdadera para cualquier interpretación ($\varnothing \vDash \alpha$), es una *contradicción* si siempre es falsa ($\varnothing \vDash \neg\alpha$) y es una *contingencia* si no es ninguna de las dos anteriores. Usaremos los símbolos V_0, F_0 para representar una tautología y una contradicción, respectivamente. Claramente, $\mathrm{FV}(V_0) = 1$ y $\mathrm{FV}(F_0) = 0$.

De esta forma, vamos a demostrar que (1) es una tautología para ciertos casos específicos.

Proposición 5. *Las siguientes son consecuencias tautológicas:*

1. *Modus ponens*
$$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$
2. *Modus tollens*
$$\begin{array}{l} \neg q \\ p \Rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$
3. *Ley del silogismo*
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \end{array}$$
4. *Regla de conjunción*
$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$
5. *Silogismo disyuntivo*
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$
6. *Regla de contradicción*
$$\begin{array}{l} \neg p \Rightarrow F_0 \\ \hline \therefore p \end{array}$$
7. *Simplificación conjuntiva*
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$$
8. *Amplificación disyuntiva*
$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$
9. *Demostración condicional*
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \\ \hline \therefore r \end{array}$$
10. *Demostración por casos*
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow r \\ q \Rightarrow r \\ p \vee q \\ \hline \therefore r \end{array}$$
11. *Dilema constructivo*
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow s \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$
12. *Dilema destructivo*
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow s \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \therefore \neg p \vee \neg r \end{array}$$

Demostración. Probaremos algunos casos, el resto se deja al lector. Calcularemos las funciones de cada premisa, denotándola $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ y la función de la conclusión Z. Al final, se calculará la función del argumento $X = 1 + Y_1Y_2 \cdots Y_k(Z-1)$, como se ve en (2). Si $X = 1$, entonces lo que se tiene es una consecuencia tautológica.

1. $Y_1 = \mathrm{FV}(p) = P$. $Y_2 = \mathrm{FV}(q) = Q$. $Z = \mathrm{FV}(p \wedge q) = PQ$.

$$X = 1 + PQ(PQ-1) = 1 + \cancel{P^2Q^2 - PQ} = 1.$$

2. $Y_1 = \mathrm{FV}(\neg q) = 1 - Q$. $Y_2 = \mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ$. $Z = \mathrm{FV}(\neg p) = 1 - P$.

$$\begin{aligned} X &= 1 + (1-Q)(1-P+PQ)(\cancel{1} - P + \cancel{1}) \\ &= 1 + (1-Q)(\cancel{-P + P^2} - P^2Q) \\ &= 1 \cancel{- P^2Q + P^2Q^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. $Y_1 = \mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ$. $Y = \mathrm{FV}(q \Rightarrow r) = 1 - Q + QR$. $Z = \mathrm{FV}(p \Rightarrow r) = 1 - P + PR$.

$$\begin{aligned} X &= 1 + (1-P+PQ)(1-Q+QR)(1-P+PR-1) \\ &= 1 + (1-P+PQ)(-P+PQ-PQR+PR\cancel{-PQR+PQR^2}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

4. $Y_1 = \mathrm{FV}(p) = P$. $Y_2 = \mathrm{FV}(q) = Q$. $\mathrm{FV}(p \wedge q) = PQ$.

$$\begin{aligned} X &= 1 + (P)(Q)(PQ-1) \\ &= 1 + \cancel{P^2Q^2 - PQ} \\ &= 1. \end{aligned}$$

5. $Y_1 = \mathrm{FV}(p \vee q) = P + Q - PQ$. $Y_2 = \mathrm{FV}(\neg p) = 1 - P$. $Z = \mathrm{FV}(q) = Q$.

$$\begin{aligned} X &= 1 + (P+Q-PQ)(1-P)(Q-1) \\ &= 1 + (\cancel{P} + Q - PQ - \cancel{P^2} - \cancel{PQ + P^2Q})(Q-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

9. $Y_1 = \mathrm{FV}(p \wedge q) = PQ$.

$$\begin{aligned} Y_2 &= \mathrm{FV}\Big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\Big) \\ &= 1 + P\Big(\mathrm{FV}(q \Rightarrow r) - 1\Big) \\ &= 1 + P\Big(1 - Q + QR - 1\Big) \\ &= 1 - PQ + PQR. \end{aligned}$$

$$Z = \mathrm{FV}(r) = R.$$

$$X = 1 + PQ(1 - PQ + PQR)(R-1) = 1.$$

12. $Y_1 = \mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ$. $Y_2 = \mathrm{FV}(r \Rightarrow s) = 1 - R + RS$.

$$\begin{aligned} Y_3 &= \mathrm{FV}(\neg q \vee \neg s) \\ &= (1-Q) + (1-S) - (1-Q)(1-S) \\ &= 2 - \cancel{Q - S} - 1 + \cancel{Q + S} - QS \\ &= 1 - QS. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$Z = 1 - PR.$$

$$\begin{aligned} X &= 1 + Y_1Y_2Y_3(1-Z) \\ &= 1 + (1-P+PQ)(1-R+RS)(1-QS)(\cancel{1} - PR - \cancel{1}). \end{aligned}$$

Comenzaremos el cálculo de lo anterior con:

$$X_1 = (1-P+PQ)(-PR) = \cancel{-PR + P^2R} - P^2QR = -PQR.$$

$$X_2 = X_1(1-R+RS) = \cancel{-PQR + PQR^2} - PQR^2S = -PQRS.$$

$$X_3 = X_2(1-QS) = -PQRS + PQ^2RS^2 = 0.$$

Así,

$$X = 1 - 0 = 1.$$

□

Como ejemplo, queremos decidir si el siguiente argumentos es una consecuencia tautológica.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow \neg q \\ r \wedge s \\ \neg s \vee t \\ \hline \therefore \neg p \wedge t \end{array}$$

Lo anterior se puede verificar usando la proposición 5:

(1)	$p \Rightarrow q$	premisa.
(2)	$r \Rightarrow \neg q$	premisa.
(3)	$r \wedge s$	premisa.
(4)	$\neg s \vee t$	premisa.
(5)	$\neg(\neg q) \Rightarrow \neg r$	contrapositiva de (2).
(6)	$q \Rightarrow \neg r$	por (5) e involución.
(7)	$p \Rightarrow \neg r$	por (1), (6) y la ley del silogismo.
(8)	r	por (3) y simplificación conjuntiva.
(9)	$s \wedge r$	por (3) y la conmutatividad de la conjunción.
(10)	s	por (9) y simplificación conjuntiva.
(11)	t	por (4), (10) y el silogismo disyuntivo, considerando que $\neg(\neg s) \equiv s$.
(12)	$\neg p$	por (7), (8) y el modus tollens.
(13)	$\neg p \wedge t$	por (11), (12) y la regla de conjunción.

Si bien, las funciones de verdad no son capaces de verificar que la demostración anterior no tiene errores, sí permite verificar que tenemos una consecuencia tautológica (lo que también se puede hacer mediante tablas de verdad):

$Y_1 = \mathrm{FV}(p \Rightarrow q) = 1 - P + PQ$.
$Y_2 = \mathrm{FV}(r \Rightarrow \neg q) = 1 - R + R(1 - Q) = 1 - QR$.
$Y_3 = \mathrm{FV}(r \wedge s) = RS$.
$Y_4 = \mathrm{FV}(\neg s \vee t) = (1 - S) + T - (1 - S)T = 1 - S + ST$.
$Z = \mathrm{FV}(\neg p \wedge t) = (1 - P) + T - (1 - P)T = 1 - P + PT$.
$Y_1Y_2 = (1 - P + PQ)(1 - QR) = 1 - P + PQ - QR$.
$Y_1Y_2Y_3 = (1 - P + PQ - QR)(RS) = RS - PRS - QRS + PQRS$.

$$\begin{aligned} Y_1Y_2Y_3Y_4 &= (RS - PRS - QRS + PQRS)(1 - S + ST) \\ &= RST - PRST - QRST + PQRST. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 1 + Y_1Y_2Y_3Y_4(Z - 1) \\ &= 1 + (RST - PRST - QRST + PQRST)(\cancel{1} - P + PT - \cancel{1}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ahora consideremos el argumento:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \Rightarrow r \\ r \Leftrightarrow t \\ \hline \therefore t \end{array}$$

$Y_1 = \mathrm{FV}(p \vee q) = P + Q - PQ$.
$Y_2 = \mathrm{FV}(p \Rightarrow r) = 1 - P + PR$.
$Y_3 = \mathrm{FV}(r \Leftrightarrow t) = 1 - R - T + 2RT$.
$Z = \mathrm{FV}(t) = T$.
$Y_1Y_2 = (P + Q - PQ)(1 - P + PR) = Q - PQ + PR$.

$$\begin{aligned} Y_1Y_2Y_3 &= (Q - PQ + PR)(1 - R - T + 2RT) \\ &= Q - PQ - QR - QT + PQR + PQT + PRT + 2QRT - 2PQRT. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 1 + Y_1Y_2Y_3(Z-1) \\ &= 1 - Q + PQ + QR + QT - PQR - PQT - QRT + PQRT \end{aligned}$$

En este caso, la función de verdad no es 1, por lo que no tenemos una consecuencia tautológica. Si queremos encontrar una interpretación que muestre lo anterior, podemos resolver la ecuación $X = 0$. Buscamos un 0 usando los primeros sumandos del polinomio $1 - Q = 0$, con lo que $Q = 1$. A partir de ahí, queremos que el resto de los monomios sean 0, lo que conseguimos con $P = R = T = 0$.

En el caso de la proposición

$$(p \vee q) \wedge (r \vee t) \wedge (\neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \vee t),$$

la función de verdad es

$$X = 1 - PR - PT + PQR + PQT + 2PRT - 2PQRT.$$

Si queremos encontrar una interpretación que cumpla las mismas condiciones que el ejemplo anterior, de nuevo, tomamos monomios del principio que hagan que el valor sea 0. En este caso, $1 - PR = 0$ con lo que $P = R = 0$. Notemos que, por la forma en la que propusimos ordenar los sumandos, los siguientes cumplen alguna de dos condiciones:

1. Tienen el mismo número de variables que PR, pero no son las mismas.
2. Tiene más variables que PR.

Así, si el resto de las variables son 0, en este caso $Q = T = 0$, tendremos que $X - (1 - PR) = 0$; ya sea porque alguna variable que no es común vale 0 o, en el segundo caso, porque incluso si usa P y R, habrá alguna adicional igual a 0. Por ejemplo, $PT = 0$, ya que T es una variable que no usaba PR, mientras que $2PRT = 0$ ya que, aunque $PR = 1$, $T = 0$. Si, por el contrario, queremos una interpretación tal que $X = 1$, es obvio que $P = Q = R = T = 0$ sirve.

Con esto concluimos nuestro estudio de las funciones de verdad. Hemos visto cómo el uso de polinomios puede ser empleado para trabajar con proposiciones. Si bien, en algunas ocasiones es necesario realizar varias operaciones para llegar al resultado simplificado, el trabajo para hacer algo equivalente con tablas de verdad también puede ser muy laborioso.

Agradecimientos. El autor agradece los comentarios del árbitro anónimo, los que ayudaron a mejorar este trabajo.

Referencias

[1] Ben-Ari M, *Mathematical Logic for Computer Science.* Springer, 3a ed. 2013.
[2] Gerstein L J, *Introduction to Mathematical Structures and Proof*, Springer, 2a ed. 2012.
[3] Grimaldi R P, *Matemáticas discretas y combinatoria. Una introducción con aplicaciones*, Addison-Wesley, 3a ed. 1997.
[4] Hein J L, *Discrete structures, logic, and computability.* Jones & Bartlett Learning, 4a ed. 2016.
[5] Posthoff C, Steinbach B, *Logic Functions and Equations. Examples and Exercises*, Springer, 2009.
[6] Posthoff C, Steinbach B, *Logic Functions and Equations. Binary Models for Computer Science.* Springer, 2a ed. 2019.
[7] Solís Daun J E, Torres Falcón Y, *Lógica Matemática.* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, 1995.

Alejandro Aguilar Zavoznik
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco,
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Departamento de Ciencias Básicas.
Av. San Pablo 420, Col. Nueva el Rosario
Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02128 Ciudad de México.
e-mail: `aaz@azc.uam.mx`