MIXBA' AL,
Revista Metropolitana de Matemáticas.
Vol.16, No.1, páginas 235-242.
Recibido 30-05-2025. Aceptado 27-07-2025.
www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v16n1/nardie

COLORACIONES LOCALIZADORAS EN GRÁFICAS

NARDA CORDERO-MICHEL, DIEGO GONZÁLEZ-MORENO

RESUMEN. Las coloraciones localizadoras surgen de la combinación de dos nociones muy estudiadas en teoría de las gráficas: las coloraciones propias y los conjuntos localizadores. En una coloración localizadora, además de requerirse que vértices adyacentes reciban colores distintos, se pide que cada vértice sea identificable de manera única a partir de su vector de distancias a las clases cromáticas. Este artículo presenta una introducción accesible a este concepto. Se discuten ejemplos, propiedades básicas y algunas cotas del número cromático localizador, con el objetivo de ilustrar el interés teórico de esta noción.

1. INTRODUCCIÓN

Este texto aborda el estudio de las **coloraciones localizadoras**, un concepto que combina dos nociones de la teoría de las gráficas. Por un lado, la **coloración propia** de vértices, en la que se asignan colores a los vértices de una gráfica de forma que vértices adyacentes reciban colores distintos. Por otro lado, los **conjuntos localizadores** (también conocidos como 'resolving sets'), que permiten distinguir los vértices de una gráfica a partir de sus distancias a un subconjunto fijo de vértices.

La idea es la siguiente: se busca una manera de colorear propiamente los vértices de una gráfica, de modo que cada vértice tenga una "huella digital" única. Esta huella está determinada por sus distancias a cada clase de color y recibe el nombre de **código de color**. Si ningún par de vértices comparte el mismo código, entonces es posible identificar unívocamente cualquier vértice a partir de sus distancias a los distintos colores.

Esta forma de codificación basada en colores y distancias resulta útil en diversas aplicaciones. Por ejemplo:

- En el *diagnóstico de redes*, nos permite detectar la ubicación de una falla a partir de señales recolectadas en distintos puntos.
- En el *diseño de etiquetas* o sistemas de localización, facilita distinguir ubicaciones de manera eficiente.
- En contextos como la *robótica* o la *navegación autónoma*, ayuda a que un agente determine su posición sin GPS, solo midiendo distancias a ciertos puntos de referencia.

Considera una gráfica G. Una k-**coloración propia** de los vértices de G es una función $\Gamma : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que, si dos vértices u y v son adyacentes, es decir, $uv \in E(G)$, entonces $\Gamma(u) \neq \Gamma(v)$. En otras palabras, se asignan colores a los vértices de modo que los vértices adyacentes reciban colores distintos. Al mínimo número de colores para los cuales G admite una coloración propia, se le conoce como el **número cromático** de G y se denota por $\chi(G)$. En una coloración, a cada color $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ le corresponde una **clase cromática** $C_i = \Gamma^{-1}(i)$, que consiste en el conjunto de vértices que reciben el color i. Diremos que una clase cromática es *singular* si contiene exactamente un vértice.

Dada una coloración Γ, podemos medir qué tan cerca está un vértice $v \in V(G)$ de cada clase cromática. Para ello, definimos la **distancia** de un vértice v a un conjunto $S \subseteq V(G)$ como

$$d(v, S) = \min\{d(v, u) : u \in S\},$$

donde $d(v, u)$ denota la distancia entre vértices en la gráfica.

Si tomamos una ordenación de las clases cromáticas $(C_1, C_2, \ldots, C_k)$, podemos asociar a cada vértice v un vector de distancias a dichas clases. A este vector lo llamamos el **código de**

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C15, 20F65.
Palabras clave. Gráficas, Coloraciones localizadoras.

color de v, y lo denotamos por

$$c_\Gamma(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)).$$

Diremos que Γ es una **coloración localizadora** de G si Γ es una coloración propia y, para todo par de vértices distintos $u, v \in V(G)$, se cumple que $c_\Gamma(u) \neq c_\Gamma(v)$.

Obsérvese que una coloración en la que cada vértice recibe un color distinto es una coloración localizadora, por lo cual siempre se puede dar una coloración localizadora a una gráfica, sin embargo, es de interés encontrar coloraciones localizadoras que utilicen un número menor de colores. El **número cromático localizador** de una gráfica G, denotado por $\chi_L(G)$, se define como el mínimo número de colores para los cuales se puede dar una coloración localizadora de G.

En la figura 1 se muestra una coloración localizadora del ciclo de longitud 6 que utiliza el menor número posible de colores.

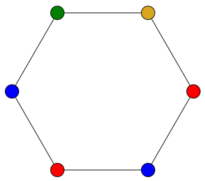


FIGURA 1. Una coloración localizadora de C_6 con 4 colores

Las coloraciones localizadoras fueron introducidas por Chartrand *et al.* [5] como una generalización del concepto de dimensión métrica en gráficas.

Este trabajo está organizado como sigue: en la sección 2 se presentarán las definiciones de las nociones y los conceptos que se abordarán en este texto, en las sección 3 se demostrarán algunos resultados generales sobre el número cromático localizador y, en la sección 4, se encontrará el número cromático localizador para dos familias de gráficas.

2. DEFINICIONES BÁSICAS

Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica simple, conexa y no dirigida, donde $V(G)$ denota el conjunto de vértices y $E(G)$ el conjunto de aristas, es decir, pares no ordenados de vértices adyacentes. El **orden** de G es el número de vértices que contiene, denotado por $|V(G)|$, mientras que el **tamaño** de G es el número de aristas, denotado por $|E(G)|$.

Una **subgráfica** de G es una gráfica $H = (V(H), E(H))$ tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si $E(H)$ contiene todas las aristas de G cuyos extremos están en $V(H)$, entonces H se llama una **subgráfica inducida** de G.

Una **trayectoria** de longitud r en G es una sucesión de vértices distintos $(v_0, v_1, \dots, v_r)$ tal que $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $i = 1, \dots, r$. La **distancia** entre dos vértices u y v de G, denotada por $d(u, v)$, es la mínima de las longitudes de las trayectorias que los unen. A una trayectoria de u a v de longitud $d(u, v)$ se le llama uv**-geodésica**. El **diámetro** de una gráfica G, denotado por diám(G), es la mayor distancia entre pares de vértices de G:

$$\text{diám}(G) = \text{máx}\{d(u, v) : u, v \in V(G)\}.$$

Dada una coloración $\Gamma : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ y una clase cromática $C_i = \Gamma^{-1}(i)$, definimos la **distancia de un vértice** v **al conjunto** C_i como

$$d(v, C_i) = \text{mín}\{d(v, u) : u \in C_i\}.$$

A cada vértice $v \in V(G)$ se le asocia el **código de color**

$$c_\Gamma(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)),$$

donde $(C_1, C_2, \dots, C_k)$ es el orden fijado de las clases cromáticas.

Diremos que Γ es una **coloración localizadora** si $c_\Gamma(u) \neq c_\Gamma(v)$ para todo par de vértices distintos $u, v \in V(G)$.

El **número cromático localizador** de G, denotado por $\chi_L(G)$, es el mínimo número de colores que se requieren en una coloración localizadora de G. Dado que la coloración que asigna a cada vértice un color distinto es localizadora, es inmediato que $\chi_L(G) \leq |V(G)|$.

3. RESULTADOS

En esta sección se presentan algunas propiedades básicas del número cromático localizador, así como cotas generales y resultados que permiten acotarlo en distintas clases de gráficas. Encontrar el valor exacto de $\chi_L(G)$ puede ser muy difícil, por esto, resulta útil establecer cotas, ejemplos representativos y construcciones que nos permitan comprender mejor su comportamiento.

Como las coloraciones localizadoras son, en particular, coloraciones propias, se tiene que

$$\chi(G) \leq \chi_L(G),$$

para toda gráfica G.

También es posible establecer una cota superior en términos del orden y de una subgráfica inducida de G.

TEOREMA 1. *Sea G una gráfica de orden n y sea H una subgráfica inducida de G. Entonces*

$$\chi_L(G) \leq n - |V(H)| + \chi_L(H).$$

Demostración. Sea G una gráfica de orden n, y H una subgráfica inducida de G. Consideremos una coloración localizadora de H con $\chi_L(H)$ colores, a la cual denotaremos con φ. Ahora, definimos la coloración Γ de $V(G)$ como sigue:

$$\Gamma(v) = \begin{cases} \varphi(v) & \text{si } v \in V(H), \\ \text{un color nuevo y singular} & \text{si } v \in V(G) \setminus V(H). \end{cases}$$

Se puede ver que Γ utiliza $n-|V(H)|+\chi_L(H)$ colores. Veamos ahora que Γ es un coloración localizadora de $V(G)$.

Supongamos por contradicción que hay dos vértices u y v que tienen el mismo código de color, es decir,

$$c_\Gamma(v) = c_\Gamma(u).$$

Como los colores de los vértices en $G - H$ son singulares, entonces necesariamente $u, v \in H$. Pero la coloración de H es localizadora, por lo que $c_\varphi(u) \neq c_\varphi(v)$. Como Γ coincide con φ en H, se sigue que $c_\Gamma(u) \neq c_\Gamma(v)$, lo cual contradice la suposición. Por lo tanto, Γ es una coloración localizadora de $V(G)$. □

Otra cota superior para el número cromático localizador puede darse en términos del diámetro y el orden de la gráfica.

TEOREMA 2. *Sea G un gráfica de orden n y diámetro d, entonces*

$$\chi_L(G) \leq n - d + 2.$$

Demostración. Sea G una gráfica con n vértices y diámetro d. Sean $u, v \in V(G)$ tales que $d(u, v) = d$ y sea $T = (u = v_1, v_2, \ldots, v_{d+1} = v)$ una uv-geodésica. Supongamos que $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}, v_{d+2}, \ldots, v_n\}$. Definimos la siguiente coloración Γ. Dado $v_i \in V(G)$,

$$\Gamma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i \text{ es par y } 2 \leq i \leq d+1, \\ 3 & \text{si } i \text{ es impar y } 3 \leq i \leq d+1, \\ i & \text{si } i \in \{d+2, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Obsérvese que Γ es una coloración propia y localizadora. □

TEOREMA 3. *Sea G una gráfica conexa de orden n y diámetro d y $\chi_L(G) = 3$. Entonces,*

$$n \leq 6(d-1) + 3.$$

Demostración. Sea G una gráfica como en la hipótesis. Sea Γ una coloración localizadora con 3 colores y sean C_1, C_2 y C_3 las clases cromáticas de Γ. Obsérvese que para todo $v \in V(G)$, el código de color de v tiene exactamente 3 entradas de las cuales exactamente una es 0, hay al menos un 1 y cada entrada vale a los más d.

Sea $C_\Gamma(v) = (x, y, z)$. Procedemos por casos:

Caso 1. Existen dos entradas con valor 1 en $C_\Gamma(v) = (x, y, z)$. Nótese que hay tres vectores que cumplen la condición.

Caso 2. Hay exactamente una entrada con valor 1. En este caso, la entrada restante x puede tomar los valores $\{2, \ldots, d\}$. Por cada $x \in \{2, \ldots, d\}$ hay $3! = 6$ vectores distintos. En total hay $6(d-1)$ vectores con exactamente un 1.

Uniendo ambos casos, tenemos que en total hay $6(d-1)+3$ vectores diferentes. Por lo cual, hay a los más $6(d-1)+3$ vértices, lo cual concluye la prueba.

4. Número cromático localizador de dos familias de gráficas

Como ya se mencionó, encontrar el número cromático localizador para una gráfica dada G es una tarea difícil. Sin embargo hay algunas familias de gráficas para las cuales es posible determinar este número. El procedimiento tiene dos etapas: la primera y más sencilla, es encontrar una coloración localizadora con el número propuesto de colores, digamos k colores, lo cual nos dice que k colores son suficientes para dar una coloración localizadora de G, es decir, obtenemos una cota superior para el número cromático localizador ($\chi_L(G) \leq k$); La segunda etapa y más laboriosa consiste en demostrar que ninguna coloración propia de G con $k-1$ colores (o menos) es localizadora, es decir, obtenemos una cota inferior para el número cromático localizador ($\chi_L(G) \geq k$).

Empezaremos por encontrar el número cromático localizador de una gráfica particular, la gráfica de Petersen, y después veremos cómo es ese número para dos familias de gráficas: las trayectorias y los ciclos.

TEOREMA 4. *Si P es la gráfica de Petersen, entonces*

$$\chi_L(P) = 4.$$

Demostración. Primero veamos que $\chi_L(P) \leq 4$.

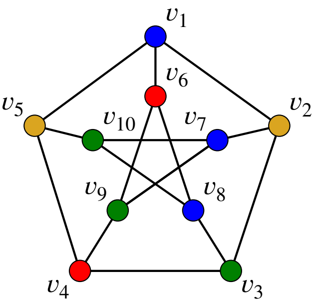


FIGURA 2. Una coloración localizadora de la gráfica de Petersen con 4 colores

Observa que, de acuerdo a la coloración Γ de P de la figura 2 y el orden de colores $(C_\bullet, C_\bullet, C_\bullet, C_\bullet)$, el código de color de cada vértice es diferente:

- Los vértices azules tienen los siguientes códigos de color:
  $c_\Gamma(v_1) = (0, 1, 2, 1)$, $c_\Gamma(v_7) = (0, 2, 1, 1)$ y $C_\Gamma(v_8) = (0, 1, 1, 2)$.
- Los vértices rojos tienen los siguientes códigos de color:
  $c_\Gamma(v_4) = (2, 0, 1, 1)$ y $c_\Gamma(v_6) = (1, 0, 1, 2)$.
- Los vértices verdes tienen los siguientes códigos de color:
  $c_\Gamma(v_3) = (1, 1, 0, 1)$, $c_\Gamma(v_9) = (1, 1, 0, 2)$ y $c_\Gamma(v_{10}) = (1, 2, 0, 1)$.
- Los vértices amarillos tienen los siguientes códigos de color:
  $c_\Gamma(v_2) = (1, 2, 1, 0)$ y $c_\Gamma(v_5) = (1, 1, 1, 0)$.

Todos los códigos de color son distintos, por lo cual $\chi_L(P) \leq 4$. Para ver que la gráfica de Petersen no se puede colorear con tres colores utilizamos el teorema 3. Como P tiene diámetro 2, si $\chi_L(P) = 3$, entonces $|V(P)| \leq 6(2-1)+3 = 9$, lo cual es una contradicción. □

TEOREMA 5. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$, entonces $\chi_L(T_n) = 3$.*

Demostración. Sea $n \geq 3$ y consideremos la trayectoria $T_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Primero veamos que $\chi_L(T_n) \leq 3$, para ello consideremos la coloración localizadora con tres colores, $\Gamma\colon V(T_n) \to \{1,2,3\}$, dada por:

$$\Gamma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i \text{ es par}, \\ 3 & \text{si } i \text{ es impar e } i \geq 3. \end{cases}$$

La entrada correspondiente al color 1 de $c_\Gamma(v_i)$ es igual a $d(v_i, C_1) = d(v_i, v_1) = i-1$ para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, la cual es diferente para cada vértice de la trayectoria. Por lo tanto, Γ es una coloración localizadora. De donde, $\chi_L(G) \leq 3$.

Ahora probemos que $\chi_L(T_n) \geq 3$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una coloración localizadora φ con dos colores, digamos rojo y azul. Como φ es propia, entonces si v_1 tiene color rojo, se sigue que $\varphi(v_i)$ es rojo si y sólo si i es impar y $\varphi(v_i)$ es azul si y sólo si i es par. Entonces, obsérvese que $c_\varphi(v_i) = (1,0)$ para todo i par y $c_\varphi(v_i) = (0,1)$ para todo i impar. En ese caso, T_n tiene a lo más dos vértices, lo cual contradice la hipótesis $n \geq 3$. Por lo tanto, $\chi_L G \geq 3$ y, así, $\chi_L(G) = 3$.

□

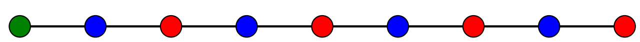


FIGURA 3. Una coloración localizadora de T_9 con 3 colores

TEOREMA 6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$, entonces*

$$\chi_L(C_n) = \begin{cases} 3 & \textit{si } n \textit{ es impar}, \\ 4 & \textit{si } n \textit{ es par}. \end{cases}$$

Demostración. Sea $n \geq 3$ un número natural. Supongamos que $C_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$. Procedemos por casos.

Caso 1. Si n es impar, tomemos la siguiente coloración Γ (figura 4 (a)):

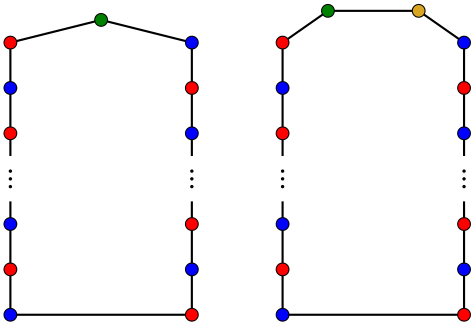
$$\Gamma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i \text{ es par}, \\ 3 & \text{si } i \text{ es impar e } i \geq 3. \end{cases}$$

Consideremos el orden de colores $(C_1, C_2, C_3) = (C_{\bullet}, C_{\bullet}, C_{\bullet})$.

El único vértice cuya primera entrada es cero es el vértice v_1. Para el resto de los vectores, la primera entrada es $d(v_i, C_1) = i-1$ para $2 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ y $d(v_i, C_1) = n+1-i$ para $\frac{n+1}{2} \leq i \leq n$. Por lo cual, dos vértices que tengan el mismo color tienen código de color diferentes pues difieren en la primera entrada.

Además, si los códigos de color de dos vértices distintos tienen su primera entrada igual, digamos los correspondientes a v_i y v_j con $2 \leq i < j \leq n$, entonces $d(v_i, C_1) = d(v_j, C_1)$. De donde se tiene que $2 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ y $\frac{n+1}{2} \leq j \leq n$, por lo cual $i-1 = d(v_i, C_1) = d(v_j, C_1) = n+1-j$. De este modo, $n+2 = i+j$, por lo cual i y j tienen distinta paridad ya que $n+2$ es impar. Así, v_i y v_j tienen colores distintos, por lo que sus códigos de color difieren.

Por lo tanto, Γ es una coloración localizadora y, así, $\chi_L(C_n) \leq 3$ si n es impar. Notemos, además, que como $\chi_L(C_n) \geq \chi(C_n)$ y $\chi(C_n) = 3$ cuando n es impar, se tiene que $\chi_L(C_n) = 3$ cuando n es impar.



(a) Ciclo impar (b) Ciclo par

FIGURA 4. Coloración distinguida de un ciclo

Caso 2. Si n es par. Tomemos la siguiente coloración Γ (figura 4 (b)):

$$\Gamma(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 2 & \text{si } i = 2, \\ 3 & \text{si } i \text{ es impar e } i \geq 3, \\ 4 & \text{si } i \text{ es par e } i \geq 4. \end{cases}$$

Consideremos el orden de colores $(C_1, C_2, C_3, C_4) = (C_{\bullet}, C_{\bullet}, C_{\bullet}, C_{\bullet})$.

El único vértice cuya primera entrada es cero es el vértice v_1 y el único vértice cuya segunda entrada es cero es el vértice v_2. Para el resto de los vectores, la primera entrada es $d(v_i, C_1) = i - 1$ para $3 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1$ y $d(v_i, C_1) = n + 1 - i$ para $\frac{n}{2} + 2 \leq i \leq n$, y la segunda entrada es $d(v_i, C_2) = i - 2$ para $3 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1$ y $d(v_i, C_2) = n + 2 - i$ para $\frac{n}{2} + 2 \leq i \leq n$.

De lo anterior, si los códigos de color de dos vértices distintos son iguales, digamos los correspondientes a v_i y v_j con $3 \leq i < j \leq n$, entonces $d(v_i, C_1) = d(v_j, C_1)$ y $d(v_i, C_2) = d(v_j, C_2)$. Así, $3 \leq i \leq \frac{n}{2}+1$ y $\frac{n}{2}+2 \leq j \leq n$, por lo cual $i-1 = d(v_i, C_1) = d(v_j, C_1) = n+1-j$ e $i-2 = d(v_i, C_2) = d(v_j, C_2) = n+2-j$. De este modo, se tiene que $n+2 = i+j$ y $n+4 = i+j$, lo cual es imposible. Es decir, no hay dos vértices que tengan el mismo código de color. Por lo tanto, Γ es una coloración localizadora y $\chi_L(C_n) \leq 4$ si n es par.

Veamos ahora que $\chi_L(C_n) \geq 4$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una coloración localizadora $\Gamma : V(C_n) \to \{1, 2, 3\}$. Por el principio del palomar, existe una clase cromática C_i con al menos $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ vértices. Supongamos sin perder generalidad que $n_1 = |C_1| \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Consideremos $C_1 = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{n_1}}\}$ donde $i_j < i_{j+1}$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\}$ y sean T_j la trayectoria contenida en C_n que inicia en v_{i_j} y termina en $v_{i_{j+1}}$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n_1 - 1\}$, y T_{n_1} trayectoria contenida en C_n que inicia en $v_{i_{n-1}}$ y termina en v_{i_1}. Tenemos entonces que $l(T_j) \geq 2$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ pues no hay dos vértices consecutivos en C_n que tengan el mismo color. Además, sólo los vértices extremos de T_j tienen color 1, por lo que los vértices interiores deben estar coloreados con los colores 2 y 3, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n_1\}$.

Si para algún $j \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, la trayectoria T_j tiene longitud mayor que 2, entonces el código de color del segundo vértice de T_j es $(1, 0, 1)$ si dicho vértice es de color 2 o $(1, 1, 0)$ si es de color 3. De igual manera, el código de color del penúltimo vértice de T_j es $(1, 0, 1)$ si dicho vértice es de color 2 o $(1, 1, 0)$ si es de color 3. Dado que Γ es localizadora, tendríamos que uno de esos vértices es de color 2 y el otro de color 3, y que T_j tiene longitud impar. Además, ninguna otra trayectoria T_l puede tener longitud $l(T_l) \geq 3$ pues, con el mismo razonamiento, habría otro vértice con el código de color $(1, 0, 1)$ o el código de color $(1, 1, 0)$, lo cual contradice que Γ sea localizadora.

Así, $l(T_l) = 2$ para todo $l \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$ con $l \neq j$. Como C_n es un ciclo par y $l(C_n) = \sum_{l=1}^{n_1} l(T_l) = 2(n_1 - 1) + l(T_j)$, se sigue que $l(T_j)$ debe de ser par, de donde, $l(T_j)$ no puede ser mayor que 2, es decir $l(T_j) = 2$.

Dado que $l(T_l) = 2$ para todo $l \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$, tenemos que $|C_1| = \frac{n}{2}$ y $C_1 = \{v_i : i \text{ es par}\}$ o $C_1 = \{v_i : i \text{ es impar}\}$. Supongamos sin perder generalidad que $C_1 = \{v_i : i \text{ es par}\}$. Lo cual significa que $C_2 \cup C_3 = \{v_i : i \text{ es impar}\}$. Por el principio del palomar, existe una clase cromática C_i, $i \in \{2, 3\}$, con al menos $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ vértices. Supongamos sin perder generalidad que $n_2 = |C_2| \geq \lceil \frac{n}{4} \rceil$.

Como la distancia entre cualesquiera dos vértices en C_n es a lo más $\frac{n}{2}$, cualquier vértice en C_2 es adyacente a un vértice en C_1 y la distancia entre dos vértices con índice impar es par, se tiene que, para cada $v \in C_2$, $c_\Gamma(v) = (1, 0, a)$ donde a es un número par y $2 \leq a \leq \frac{n}{2}$. Hay a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ de este estilo, por lo cual $|C_2| \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil$. Dado que $\lceil \frac{n}{4} \rceil \leq |C_2| \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, se sigue que n es un múltiplo de 4, $|C_2| = \frac{n}{4}$ y, también, $|C_3| = \frac{n}{4}$.

Observemos que los códigos de color de los vértices en C_2 son todos los vectores de la forma $(1, 0, a)$ donde a es par y $2 \leq a \leq \frac{n}{2}$, los códigos de color de los vértices en C_3 son todos los vectores de la forma $(1, b, 0)$ donde b es par y $2 \leq b \leq \frac{n}{2}$. De modo que hay un vértice de color 2 y un vértice de color 3 que están a distancia 2, digamos $\alpha(v_1) = 2$ y $\alpha(v_3) = 3$. Entonces $\alpha(v_5) = 3$ pues si $\alpha(v_5) = 2$, entonces su código de color es $c_\Gamma(v_5) = (1, 0, 2) = c_\Gamma(v_1)$, lo cual es imposible. Siguiendo este razonamiento $\alpha(v_i) = 3$ para cada i impar con $3 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1$, que son $\frac{n}{4} = |C_3|$ vértices. Necesariamente, $\alpha(v_{\frac{n}{2}+3}) = 2$ lo cual implica que $c_\Gamma(v_{\frac{n}{2}+3}) = (1, 0, 2) = c_\Gamma(v_1)$. Lo que contradice la hipótesis de que Γ sea una coloración localizadora. Por lo tanto, $\chi_L(C_n) \geq 4$ cuando n es par, lo cual concluye la prueba.

□

Agradecimientos. Los autores expresan su gratitud a todas las instituciones que apoyaron la organización del Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas (TOMMAD) 2025. Particularmente a la Sociedad Matemática Mexicana, a la UAM-Cuajimalpa y a la UAM-Iztapalapa. También agradecemos a Haniel Lamas, Brisa Guerrero Rosales, Raúl Arturo Gaytán Ruiz y Luis Macip Hernández, participantes del taller, con quienes se trabajaron los resultados aquí plasmados.

Referencias

[1] Albertson, M. O., K.L. Collins, K. L. *Symmetry Breaking in Graphs*, Electronic Journal of Combinatorics, vol. 3, no. 1, R18, 1996. doi:10.37236/1242.

[2] Chan, M. *The distinguishing number of the augmented cube and hypercube powers*, Discrete Mathematics, vol. 308, no. 11, pp. 2330-2336, 2008. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.09.056

[3] Chartrand, G., L. Lesniak, L., Zhang, P. *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall/CRC, 6th ed., Boca Raton, FL, 2016.

[4] Rubin, F. Problem 729: The Blind Man's Keys, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 11, p. 128, 1979. Solution in vol. 12, 1980. As cited by Albertson & Collins (1996).

[5] Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., Zhang, P. *The locating-chromatic number of a graph*. Bull. Inst. Comb. Appl. 2002, 36, 89–101.

Narda Cordero-Michel
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871,
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: `narda@ciencias.unam.mx`, `narda.cordero@cua.uam.mx`

Diego González-Moreno
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Cuajimalpa,
División de Ciencias Naturales e Ingeniería,
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas.
Av. Vasco de Quiroga 4871,
Alcaldía Cuajimalpa de Morelos, C.P. 05348 Ciudad de México, México
e-mail: dgonzalez@cua.uam.mx