



## CONJUNTOS DE VISIBILIDAD MUTUA

ILÁN A. GOLDFEDER, NAHID YELENE JAVIER NOL, LUIS JOSÍAS LÓPEZ BARRIOS,  
ALDO LOZANO PIÑA, MIRYAM SOPHIE NAOMI MIELKE MÉNDEZ, RAÚL VÉLEZ LIMÓN

RESUMEN. Dada una gráfica  $G$ , un subconjunto  $S$  de sus vértices es de visibilidad mutua si entre cualquier par de vértices del conjunto  $S$  existe una trayectoria de longitud mínima que no contiene vértices de  $S$ , salvo por sus extremos. El número de visibilidad mutua es la cardinalidad de un conjunto de visibilidad máximo. En este trabajo mostramos resultados al respecto en algunas familias de gráficas como son las trayectorias, árboles, ciclos, ruedas,  $k$ -partitas, rejillas y cilindros.

### 1. INTRODUCCIÓN

Consideremos un conjunto de posiciones en las que podemos colocar dispositivos y en las que, entre algunas de ellas, existe una vía de comunicación directa. Un ejemplo de ello es la configuración de la figura 1. ¿Cuál es el número máximo de dispositivos que se pueden colocar de forma tal que, entre cualesquiera dos de ellos, exista una ruta mínima que les permita comunicarse? En particular, los puntos rojos de dicha figura representan el número máximo de dispositivos que se podrían ubicar en esta configuración cumpliendo la propiedad solicitada.

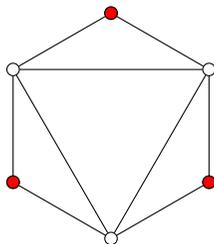


FIGURA 1. Configuración de posibles posiciones para dispositivos

Otro ejemplo relacionado es el siguiente. Consideremos un conjunto de localidades, como pueden ser ciudades y pueblos, algunas de ellas conectadas por carreteras. En ciertas locaciones se pueden colocar casetas de cobro de peaje; sin embargo, interesa evitar un número excesivo de ellas. ¿Cuál es el número máximo de casetas que se pueden colocar de forma tal que, entre cualesquiera dos locaciones, exista una ruta mínima que pase por *a lo más* dos casetas?

Los ejemplos anteriores constituyen problemas que se modelan en teoría de gráficas mediante los *conjuntos de visibilidad mutua*. A continuación, daremos las nociones básicas y presentaremos algunos resultados.

### 2. DEFINICIONES BÁSICAS

Una *gráfica* es un par ordenado  $G = (V(G), A(G))$ , donde  $V(G)$  es un conjunto finito y no vacío cuyos elementos son los *vértices* de la gráfica, y  $A(G)$  es un conjunto de pares no ordenados de vértices, que llamamos *aristas*. El *orden* de  $G$  es el número de vértices y el *tamaño* es el número de aristas.

2010 *Mathematics Subject Classification*. 05C69, 05C12, 05C76, 05C38.

*Palabras clave*. Gráficas, rejillas, visibilidad mutua.

Dados dos vértices  $x, y \in V(G)$ , diremos que  $x$  e  $y$  son *adyacentes* (o *vecinos*) si  $\{x, y\} \in A(G)$ . La *vecindad* de  $x$  se define como

$$N(x) = \{y \in V(G) : \{x, y\} \in A(G)\}.$$

El *grado* de  $x$ , denotado  $\deg_G(x)$ , es  $|N(x)|$ ; el *grado mínimo* de  $G$ ,  $\delta(G) = \min_{z \in V(G)} \deg_G(z)$ , y el *grado máximo*,  $\Delta(G) = \max_{z \in V(G)} \deg_G(z)$ . Si  $|N(x)| = 1$ , decimos que  $x$  es un *vértice hoja*.

Dados  $x, y \in V(G)$ , una *trayectoria* o  $(x, y)$ -trayectoria es una sucesión de vértices distintos

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_l),$$

donde  $x_1 = x$ ,  $x_l = y$  y cada par de vértices consecutivos es adyacente. La *longitud* de  $P$ , denotada  $l(P)$ , es el número de aristas que contiene ( $l(P) = l - 1$ ). Si  $P$  tiene orden  $n$ , escribiremos  $P_n$ . La *distancia* entre dos vértices  $x, y$ , denotada  $d_G(x, y)$  o simplemente  $d(x, y)$ , es la longitud de una trayectoria de longitud mínima entre ellos. Un *ciclo* es una trayectoria  $(x_1, \dots, x_l)$  con  $l \geq 3$  junto con la arista  $\{x_l, x_1\}$ . Una gráfica es *conexa* si entre cualquier de vértices  $x, y$  existe una  $(x, y)$ -trayectoria. Una *árbol* es una gráfica conexa y sin ciclos.

Dado  $S \subseteq V(G)$ , la *subgráfica inducida*  $G[S]$  tiene como conjunto de vértices  $S$  y, para  $x, y \in S$ ,  $\{x, y\} \in A(G[S])$  si y sólo si  $\{x, y\} \in A(G)$ .

Una gráfica de orden  $n$  es *completa* si cualquier par de vértices es adyacente; la denotamos  $K_n$ . Decimos que  $G$  es *k-partita* si  $V(G)$  se puede partir en conjuntos  $V_1, \dots, V_k$  tales que, para cada  $i$ , no hay aristas entre vértices de  $V_i$ . A cada uno de tales conjuntos se le llama una *parte* de la partición. Si  $k = 2$ ,  $G$  es *bipartita*. Si además cada vértice de  $V_i$  es adyacente a todos los de  $V_j$  con  $i \neq j$ , decimos que es *k-partita completa*. Una gráfica se llama *multipartita* si es *k-partita* para algún  $k \geq 2$ .

El *producto cartesiano*  $G \square H$  de dos gráficas  $G$  y  $H$  es la gráfica con conjunto de vértices  $V(G) \times V(H)$  y en la que dos vértices  $(g_1, h_1)$  y  $(g_2, h_2)$  son adyacentes si  $g_1 = g_2$  y  $\{h_1, h_2\} \in A(H)$  o si  $h_1 = h_2$  y  $\{g_1, g_2\} \in A(G)$ . Cuando no se preste a confusión al vértice  $(g_i, h_i)$  lo denotaremos como  $g_i h_i$ . A la gráfica  $P_m \square P_n$  se le conoce como *malla* o *rejilla de m por n* y a la gráfica  $C_m \square P_n$  se le conoce como *cilindro de m por n*.

Para ilustrar la definición de producto cartesiano de gráficas, mostramos los siguientes ejemplos. Consideremos  $G_1 = P_1$  y  $H_1 = P_4$  (véase la figura 2 (a)), y  $G_2 = P_2$  y  $H_2 = P_4$  (véase la figura 2 (b)). Obsérvese que  $P_1 \square P_4$  coincide con  $P_4$  y, en general,  $P_1 \square P_m$  coincide con  $P_m$ . Consideremos  $G_3 = C_3$  y  $H_3 = P_6$  (véase la figura 2 (c)); en este caso, es el cilindro 3 por 6.

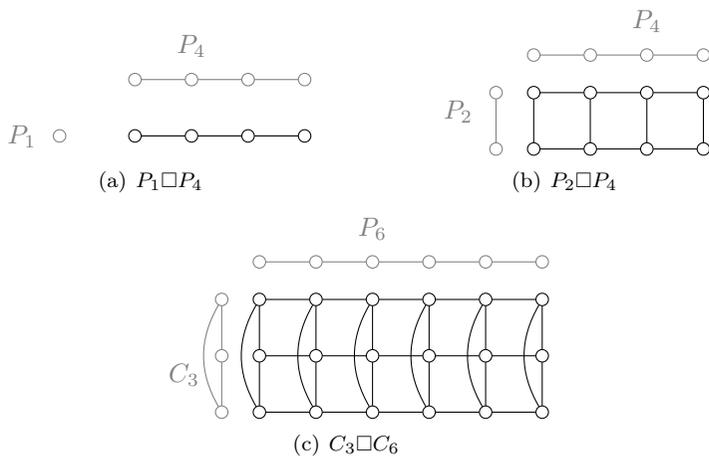


FIGURA 2. Producto cartesiano de  $P_1 \square P_4$ ,  $P_2 \square P_4$  y  $C_3 \square C_6$

Sean  $G = (V(G), A(G))$  una gráfica y  $S \subseteq V(G)$  un subconjunto de vértices de  $G$ . Diremos que dos vértices  $x, y \in S$  son *mutuamente visibles* si existe una  $(x, y)$ -trayectoria de longitud mínima  $P$  tal que  $V(P) \cap S = \{x, y\}$ , cuando esto pasa diremos que los vértices  $x$  y  $y$  pueden *verse* entre sí. Diremos que  $S$  es un *conjunto de visibilidad mutua* si cada par de vértices en  $S$  es mutuamente visible. El *número de visibilidad mutua* de  $G$ , denotado  $\mu(G)$ , es la cardinalidad de un conjunto de visibilidad mutua de orden máximo.

Para esclarecer las definiciones anteriores, considere la gráfica  $G$  que aparece en la figura 3 (a) y un subconjunto  $S_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ . Los vértices  $v_1, v_3$  y  $v_5$  (véase la figura 3 (b)) son mutuamente visibles entre sí porque las trayectorias

$$(v_1, v_2, v_3), (v_1, v_0, v_3) \text{ y } (v_3, v_4, v_5)$$

son de longitud mínima y se tiene que  $S_1 \cap \{v_1, v_2, v_3\} = \{v_1, v_3\}$ ,  $S_1 \cap \{v_1, v_0, v_3\} = \{v_1, v_3\}$  y  $S_1 \cap \{v_3, v_4, v_5\} = \{v_3, v_5\}$ . Por tanto,  $S_1$  es un conjunto de visibilidad mutua. ¿Será  $S_1$  el conjunto de visibilidad mutua de mayor cardinalidad?

Ahora considere un conjunto  $S_2 = \{v_0, v_2, v_4, v_6\}$ . Los vértices  $v_0, v_2, v_4$  y  $v_6$  (véase la figura 3 (c)) son mutuamente visibles entre sí porque que las trayectorias

$$(v_0, v_1, v_2), (v_0, v_6), (v_0, v_5, v_4), (v_2, v_3, v_4), (v_2, v_6) \text{ y } (v_4, v_5, v_6)$$

son de longitud mínima y se tiene que  $S_2 \cap \{v_0, v_1, v_2\} = \{v_0, v_2\}$ ,  $S_2 \cap \{v_0, v_6\} = \{v_0, v_6\}$ ,  $S_2 \cap \{v_0, v_5, v_4\} = \{v_0, v_4\}$ ,  $S_2 \cap \{v_2, v_3, v_4\} = \{v_2, v_4\}$ ,  $S_2 \cap \{v_2, v_6\} = \{v_2, v_6\}$  y  $S_2 \cap \{v_4, v_5, v_6\} = \{v_4, v_6\}$ . Por tanto,  $S_2$  es un conjunto de visibilidad mutua de orden cuatro. Además, se puede probar que ningún conjunto con cinco o más vértices puede ser de visibilidad mutua. Por lo que, el número de visibilidad mutua de  $G$  es 4, es decir,  $\mu(G) = 4$ .

En nuestro ejemplo de las localidades y las casetas, podemos construir una gráfica en la que cada localidad sea un vértice y entre dos vértices hay una arista siempre que las localidades correspondientes haya una carretera (que no pasa por ninguna otra localidad). Observemos que si tenemos un conjunto de visibilidad mutua  $S$  en una gráfica  $G$ , entre cualesquiera dos vértices de la gráfica hay una trayectoria de longitud mínima que contiene a lo más dos vértices de  $S$  (pues si tuviese tres, los vértices de  $S$  más alejados en la trayectoria no serían de visibilidad mutua, véase el teorema 4). Por lo tanto, al poner casetas de cobro en un conjunto de visibilidad mutua de la gráfica de localidades y carreteras, entre cualesquiera dos localidades hay una trayectoria de longitud mínima que pasa por a lo más dos casetas de cobro.

### 3. PRIMEROS RESULTADOS

**TEOREMA 1.** *Sea  $G$  una gráfica con grado máximo  $\Delta(G)$ . Se satisface que  $\mu(G) \geq \Delta(G)$ .*

*Demostración.* Sea  $v$  un vértice de  $G$  tal que  $\deg_G(v) = \Delta(G)$  y tómesese el conjunto de vértices  $S = N(v)$ . Para cualquier par de vértices  $x, y \in S$ , ocurre que o bien son adyacentes o bien están a lo más a distancia dos mediante el camino  $P = (x, v, y)$ . Como  $v$  no está en  $S$ , en ambos casos los vértices  $x, y$  son mutuamente visibles; por lo tanto,  $S$  es un conjunto de visibilidad mutua. Así,  $\mu(G) \geq \deg_G(v) = \Delta(G)$ .  $\square$

Una consecuencia de este teorema es el caso de las ruedas (véase la figura 4), en las cuales el conjunto de visibilidad mutua máximo es el conjunto de todos sus vértices excepto el vértice central. Basta con fijarse en la prueba del teorema 1, y en una rueda tomar como conjunto de visibilidad mutua a la vecindad del vértice central, la cual tiene cardinalidad igual al grado máximo de la gráfica. Además, dicho conjunto es máximo, porque todos sus vértices están al menos a distancia dos de cualquier otro vértice, pasando por el vértice central.

**COROLARIO 2.** *El número de visibilidad mutua de la rueda  $W_n$ , para  $n \geq 4$ , es  $\mu(W_n) = \Delta(W_n)$ .*

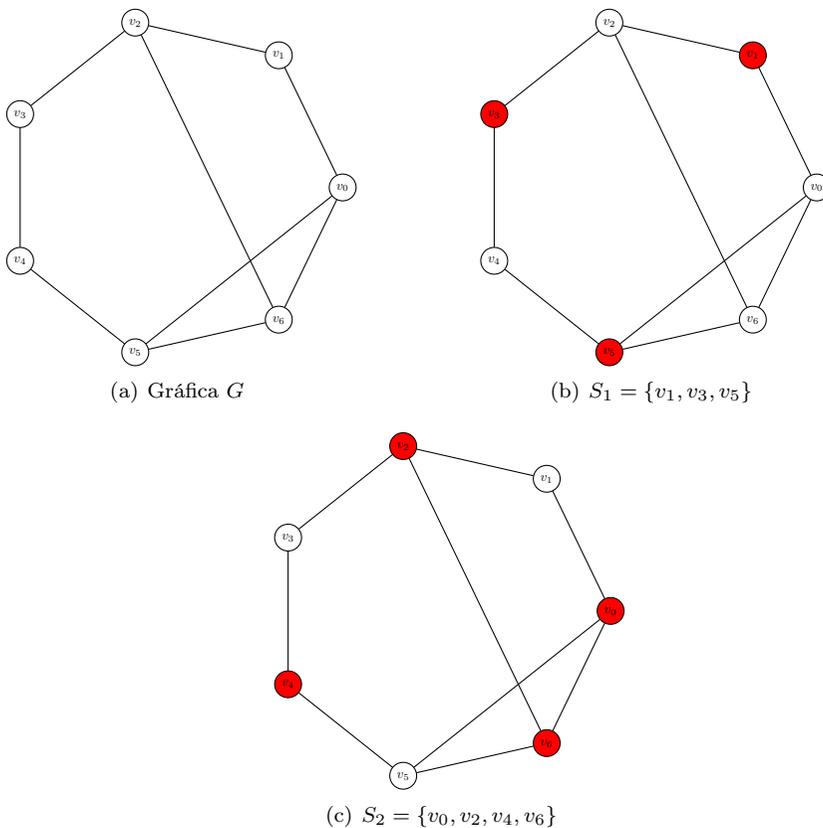


FIGURA 3. Gráfica  $G$  y dos conjuntos de visibilidad mutua  $S_1$  y  $S_2$ ,  $\mu(G) = 4$

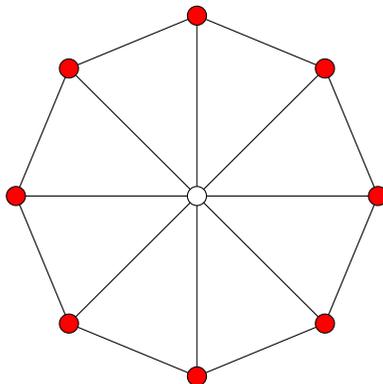


FIGURA 4. Conjunto máximo de visibilidad mutua en  $W_9$

TEOREMA 3. Sea  $G = (V(G), A(G))$  una gráfica conexa tal que  $|V(G)| = n$ . Entonces,  $\mu(G) = n$  si y sólo si  $G = K_n$ , donde  $K_n$  es la gráfica completa de  $n$  vértices.

*Demostración.* Primero probaremos la condición necesaria. Supongamos que  $\mu(G) = n$ . Por contradicción, supongamos que  $G \neq K_n$ , es decir, existen  $u, v \in V(G)$  tales que  $\{u, v\} \notin A(G)$ . Esto implica que toda  $(u, v)$ -trayectoria de longitud mínima  $P$  tiene orden al menos tres. Sea  $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ , con  $v_1 = u$  y  $v_k = v$ , una trayectoria de longitud mínima. Como  $\mu(G) = n$ , el conjunto  $V(G)$  es el conjunto de visibilidad

mutua de  $G$ . Luego  $|V(P) \cap V(G)| \geq 3$  lo cual contradice la definición de que  $V(G)$  sea un conjunto de visibilidad mutua, pues  $P$  es cualquier trayectoria de longitud mínima. Por lo que  $G = K_n$ .

Ahora probaremos la condición suficiente. Supongamos que  $G$  es la gráfica completa de  $n$  vértices. Entonces, todos sus vértices son adyacentes entre sí, y la trayectoria de mínima longitud entre cualquier par es de longitud uno. Por lo tanto, todos los vértices de  $G$  son mutuamente visibles, y  $\mu(G) = n$ . □

**TEOREMA 4.** *El número de visibilidad mutua de la trayectoria  $P_n$ ,  $n \geq 2$ , es  $\mu(P_n) = 2$ .*

*Demostración.* Sea  $P_n = (x_1, \dots, x_n)$  una  $(x, y)$ -trayectoria, donde  $x_1 = x$  y  $x_n = y$ . Claramente,  $S = \{x, y\}$  es un conjunto de visibilidad mutua. Para demostrar que es máximo, procederemos por contradicción, supongamos que existen al menos tres vértices  $x_i, x_j, x_k$  en  $P_n$  que son mutuamente visibles. Sin pérdida de generalidad, sea  $i < j < k$ . Entonces,  $x_j$  se encuentra en la trayectoria mínima entre  $x_i$  y  $x_k$ , por lo que  $V(P) \cap \{x_i, x_j, x_k\} = \{x_i, x_j, x_k\}$ , y no cumple la condición de visibilidad mutua. Esto prueba que no puede haber más de dos vértices mutuamente visibles en la trayectoria. Por lo tanto,  $\mu(P_n) = 2$ . □



FIGURA 5. Conjunto máximo de visibilidad mutua en  $P_n$

**TEOREMA 5.** *El número de visibilidad mutua del ciclo  $C_n$ , con  $n \geq 3$ , es  $\mu(C_n) = 3$ .*

*Demostración.* Supongamos, por contradicción, que  $\mu(C_n) > 3$ . Se sigue que un conjunto máximo de visibilidad mutua  $S$  de  $C_n$  tiene al menos cuatro vértices, digamos  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que aparecen en ese orden en el ciclo. Observemos que entre  $v_1$  y  $v_3$  hay exactamente dos trayectorias, una pasa por  $v_2$  y la otra pasa por  $v_4$ . Así, no pueden ser vértices mutuamente visibles. Por lo tanto,  $\mu(C_n) \leq 3$ .

Para probar que  $\mu(C_n) = 3$ , basta con tomar los vértices  $v_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}, v_{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1}, v_{n-1}$  como el conjunto de vértices de visibilidad mutua (véase la figura 6). □

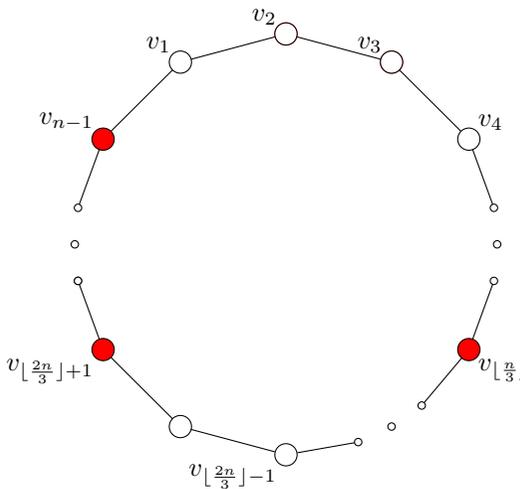


FIGURA 6. Conjunto máximo de visibilidad mutua en  $C_n$

TEOREMA 6. *Sea  $G$  la gráfica bipartita completa  $K_{i,n}$ , con  $n \geq 3$  e  $i \in \{1, 2\}$ . El número de visibilidad mutua de  $G$  es  $\mu(G) = n + i - 1$ .*

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica como en las hipótesis. Primero notemos que  $|V(G)| = n + i$ , con  $i \in \{1, 2\}$ .

Primero supongamos que  $i = 1$ , por el teorema 3 se tiene que  $\mu(G) \leq n + i - 1$  y por el teorema 1 se tiene que  $\mu(G) \geq \Delta(G) = n + i - 1$ . Por lo tanto,  $\mu(G) = n + i - 1$ .

Ahora supongamos que  $i = 2$ . Al igual que en el caso previo, tenemos por el teorema 3 que  $\mu(G) \leq n + i - 1$ . Sea  $V_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  y  $V_2 = \{u, v\}$  la partición de la gráfica. Demostraremos que  $S = V_1 \cup \{u\}$ , que tiene cardinalidad  $n + i - 1$ , es un conjunto de visibilidad mutua. Para cualesquiera dos vértices  $w_i$  y  $w_j$  en  $V_1$ , se tiene que  $w_i, v, w_j$  es una trayectoria de longitud mínima tal que  $S \cap \{w_i, v, w_j\} = \{w_i, w_j\}$  y para cualquier vértice  $w_i$  y  $u$ , se tiene  $S \cap \{w_i, u\} = \{w_i, u\}$ . Se sigue que  $S$  es un conjunto de visibilidad y, así,  $\mu(G) \geq n + i - 1$ . Por lo tanto,  $\mu(G) = n + i - 1$ .

Por lo que, el número de visibilidad mutua de la gráfica bipartita  $K_{i,n}$ , con  $i \in \{1, 2\}$ , es  $\mu(G) = n + i - 1$ . □

El siguiente corolario es consecuencia del teorema 6, se sigue de que  $S_{n+1} = K_{1,n}$  (véase la figura 7).

COROLARIO 7. *El número de visibilidad mutua de la estrella  $S_n$ ,  $n \geq 4$ , es  $\mu(S_n) = n - 1$ .*

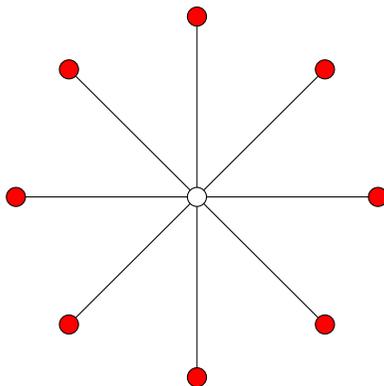


FIGURA 7. Conjunto máximo de visibilidad mutua en  $S_9$

PROPOSICIÓN 8. *Cualquier trayectoria de una gráfica  $G$  está contenida en una trayectoria maximal.*

*Demostración.* Sean  $P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$  una trayectoria en  $G$ . Si  $\deg_G(v_0) = 1 = \deg_G(v_k)$ , entonces  $P$  es maximal

En otro caso, tendríamos que  $\deg_G(v_0) \geq 2$  o  $\deg_G(v_k) \geq 2$ ; sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\deg_G(v_k) \geq 2$ . Así, existe un vértice  $v_q \in N(v_k) \setminus \{v_{k-1}\}$ , por lo que  $P^q = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_q)$  es una trayectoria estrictamente más larga que contiene a  $P$  como subtrayectoria.

Repetiendo este procedimiento, y como la gráfica es finita, se obtiene una trayectoria  $P'$  que contiene a  $P$  como subtrayectoria y que es maximal. □

El siguiente es un resultado conocido sobre árboles.

PROPOSICIÓN 9 ([1]). *En un árbol  $T$ , para todo par de vértices  $v_i, v_k \in V(T)$  existe una única trayectoria  $P = (v_i, \dots, v_k)$ .*

COROLARIO 10. *Sea  $T$  un árbol. Dada una trayectoria  $P = (v_x, \dots, v_y)$  en  $T$  con  $v_x$  y  $v_y$  hojas de  $T$ , todo vértice de  $P$  distinto de  $v_x$  y  $v_y$  no es hoja.*

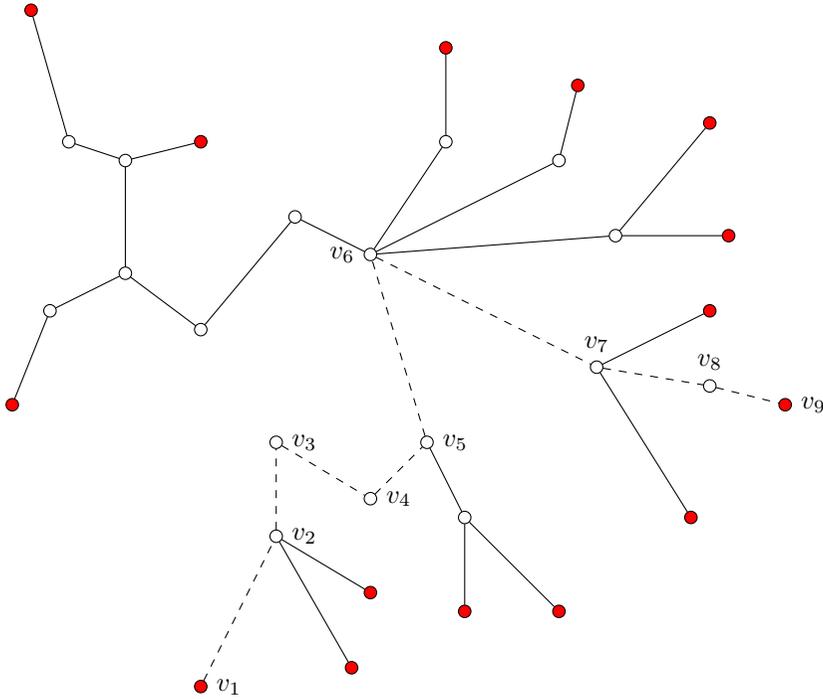


FIGURA 8. La trayectoria  $P = (v_1, v_2, \dots, v_9)$  que tiene como extremos las hojas  $v_1, v_9$  es única y cualquier vértice interno no es una hoja

TEOREMA 11. *El número de visibilidad mutua de un árbol  $T$  es igual a su número total de hojas; es decir,  $\mu(T) = |L(T)|$ , donde  $L(T)$  es el conjunto de hojas del árbol  $T$ .*

*Demostración.* Primero demostraremos que  $\mu(T) \leq |L(T)|$ . Por contradicción, supongamos que  $\mu(T) > |L(T)|$ . Entonces, existe un vértice  $v_a \in V(T)$  que no es hoja y que está en el conjunto de vértices de visibilidad mutua. Tomemos una trayectoria  $P = (v_1, v_2, \dots, v_a)$  donde  $v_1 \in L(T)$ . Por la proposición 8, se tiene que  $P$  está contenida en una trayectoria  $P^z = (v_1, v_2, \dots, v_a, \dots, v_z)$ , donde  $v_1, v_z \in L(T)$ . Pero como la trayectoria entre  $v_1$  y  $v_z$  es única, tendríamos que  $V(P) \cap L(T) = \{v_1, v_a, v_z\}$  lo cual es una contradicción, pues toda trayectoria contiene a dos vértices de visibilidad mutua. Por lo tanto,  $\mu(T) \leq |L(T)|$ .

Ahora demostraremos que  $|L(T)| \leq \mu(T)$ . Sean cualesquiera  $v_x, v_y \in L(T)$  con  $v_x \neq v_y$ . Por la proposición 9, tomamos la trayectoria  $P^* = (v_x, \dots, v_y)$ . Además, por el corolario 10, para todo  $v_k \in V(P^*) \setminus \{v_x, v_y\}$ , se tiene que  $v_k$  no pertenece al conjunto de visibilidad mutua de  $T$ . Así, toda trayectoria mínima entre hojas está libre de intersección con otras hojas, por lo que  $L(T)$  es un conjunto de visibilidad mutua. Por la maximalidad,  $|L(T)| \leq \mu(T)$ . Por lo tanto,  $|L(T)| = \mu(T)$ .  $\square$

Para ejemplificar el teorema 11, véase la figura 8.

TEOREMA 12. *Sea  $G$  la gráfica bipartita completa  $K_{m,n}$ , tal que  $m, n \geq 3$ . Entonces, el número de visibilidad mutua de  $G$  es  $\mu(G) = m + n - 2$ .*

*Demostración.* Primero, nótese que no todos los vértices pueden ser de visibilidad mutua. Esto se sigue del teorema 3, por lo que  $\mu(G) \leq m + n - 1$ .

Luego, supongamos que existe un único vértice  $v$  en  $G$  que no es de visibilidad mutua. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $v$  está en  $S_1$ , donde  $S_1, S_2$  son los subconjuntos de vértices de  $V(G)$  de cardinalidad  $m$  y  $n$ , respectivamente, y que  $S_2$  es un conjunto de visibilidad mutua. Por hipótesis  $m \geq 3$ , entonces existen al menos otros

dos vértices  $x, y \in S_1$  tales que no son adyacentes entre sí. Obsérvese que la trayectoria de longitud mínima entre  $x$  y  $y$  es  $P = (x, w, y)$ , donde  $w$  es cualquier vértice en  $S_2$ . Pero por hipótesis,  $w$  es un vértice de visibilidad mutua, lo cual contradice la definición, ya que  $w$  está en la trayectoria mínima entre  $x$  y  $y$ . El caso es análogo si  $v$  está en  $S_2$ .

Por lo tanto, debe haber al menos dos vértices que no sean de visibilidad mutua, uno en  $S_1$  y otro en  $S_2$ ; esto es,  $\mu(G) \leq n + m - 2$ .

Para probar la desigualdad inversa, basta con tomar dos vértices que no sean de visibilidad mutua, uno en cada subconjunto  $S_1$  y  $S_2$ . Véase la figura 9. □

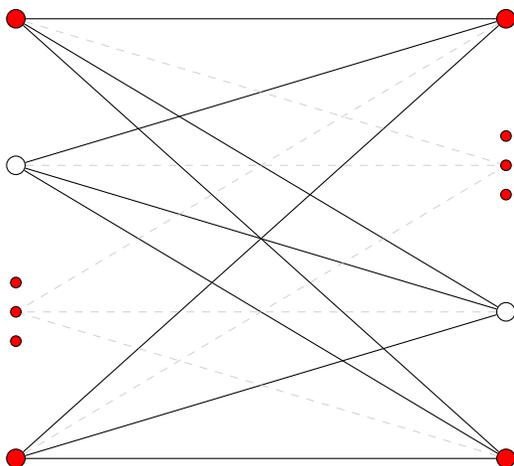


FIGURA 9. Conjunto máximo de visibilidad mutua en  $K_{m,n}$

El teorema 13 es la generalización de los teoremas 6 y 12.

**TEOREMA 13.** *Sea  $G$  la gráfica  $k$ -partita completa  $K_{S_1, S_2, \dots, S_k}$ . Se cumple que:*

1. Si  $|S_i| \geq 3$ , para toda  $1 \leq i \leq k$ , entonces  $\mu(G) = |V(G)| - 2$ .
2. Si existe un  $j \in [1, k]$  tal que  $|S_j| \leq 2$ , entonces  $\mu(G) = |V(G)| - 1$ .

La demostración del teorema 13 es análoga a las demostraciones de los teoremas 6 y 12, respectivamente, basta con excluir del conjunto de visibilidad mutua a un vértice de cada conjunto de la partición (ver figura 10).

En rejillas  $P_m \square P_n$ , donde  $m \leq 3$ , nos encontramos con algunos casos particulares. Estos son:

1.  $\mu(P_1 \square P_n) = 2$ , con  $n \geq 2$ , pues en este caso la rejilla es una trayectoria, véase la figura 11.
2. Cuando  $\min\{m, n\} = 2$ , tenemos dos casos:
  - a)  $P_2 \square P_2$  es el ciclo  $C_4$ ; por el teorema 5 se tiene que  $\mu(P_2 \square P_2) = 3$ , véase la figura 12 (a).
  - b)  $\mu(P_2 \square P_n) = 4$  con  $n \geq 3$ , véanse las figuras 12 (b) y (c).
3. Cuando  $\min\{m, n\} = 3$ , obtenemos dos casos, véase la figura 13:
  - a)  $\mu(P_3 \square P_3) = 5$ , véase la figura 13 (a).
  - b)  $\mu(P_3 \square P_n) = 6$  con  $n \geq 4$ , véanse las figuras 13 (b) y (c).

Y para  $m, n \geq 4$ , podemos enunciar un caso general, véase figura 14.

**TEOREMA 14.** *Si  $P_m \square P_n$  es una rejilla tal que  $m > 3$  y  $n > 3$  entonces*

$$\mu(P_m \square P_n) = 2 \cdot \min\{m, n\}.$$

*Demostración.* Consideremos las trayectorias  $P_m = (u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$  y  $P_n = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ . Tomemos una trayectoria de la forma  $(u_i v_0, u_i v_1, \dots, u_i v_{n-1})$  en  $P_m \square P_n$ . Así, para cada  $0 \leq i \leq m - 1$ , tenemos que dicha trayectoria puede incluir a lo más dos vértices a cualquier conjunto de visibilidad mutua; por lo

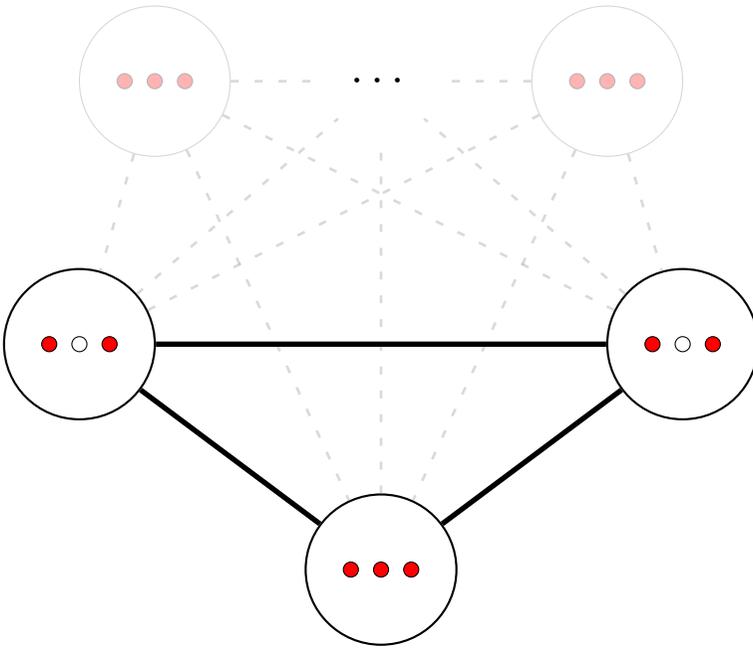


FIGURA 10. Conjunto máximo de visibilidad mutua en la gráfica  $k$ -partita completa



FIGURA 11.  $\mu(P_1 \square P_2) = 2$  y  $\mu(P_1 \square P_3) = 2$

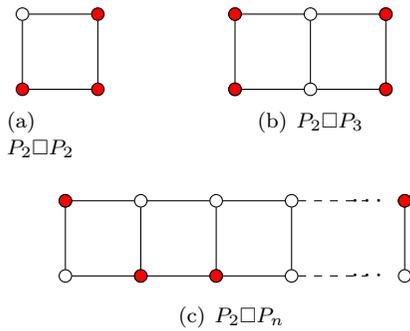


FIGURA 12.  $P_2 \square P_2$ ,  $P_2 \square P_3$  y  $P_2 \square P_n$  y sus vértices de visibilidad mutua, los vértices en color rojo

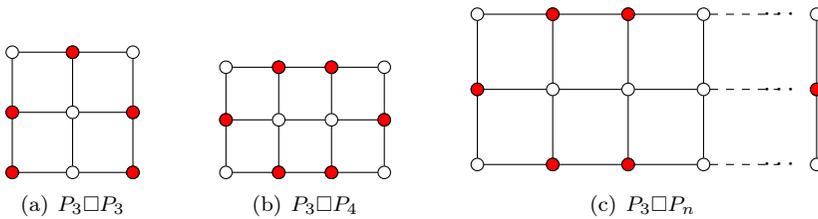


FIGURA 13.  $P_3 \square P_3$ ,  $P_3 \square P_4$  y  $P_3 \square P_n$

que  $\mu(P_m \square P_n) \leq 2m$ . De igual manera, cada una de las trayectorias de la forma

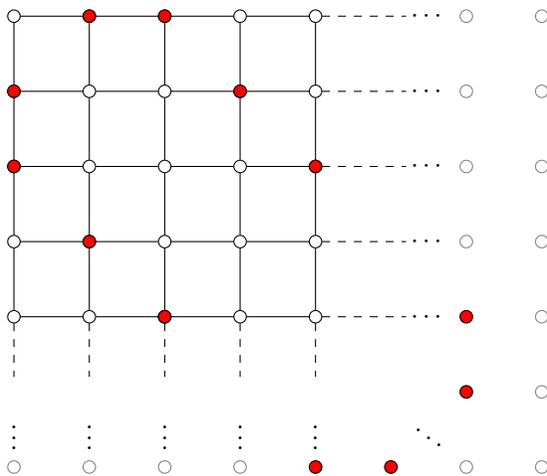


FIGURA 14.  $P_m \square P_n$

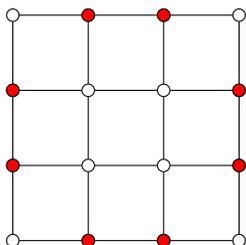


FIGURA 15.  $P_4 \square P_4$

$(u_0v_j, u_1v_j, \dots, u_{m-1}v_j)$ , con  $0 \leq j \leq n - 1$ , puede incluir a los más dos vértices a cualquier conjunto de visibilidad mutua, así  $\mu(P_m \square P_n) \leq 2n$ .

Ahora, demostraremos que  $\mu(P_m \square P_n) = 2 \min\{m, n\}$ . Tomemos  $k = \min\{m, n\}$ . Para  $k = 4$ , se puede considerar una subgráfica de la forma  $P_4 \square P_4$ , donde el único conjunto de visibilidad mutua máximo es:

$$\{u_0v_1, u_0v_2, u_1v_3, u_2v_3, u_3v_2, u_3v_1, u_2v_0, u_1v_0\}$$

(véase la figura 15). Así,  $\mu(P_4 \square P_4) = 8$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $m = 4$ . Ya que hay dos vértices del conjunto de visibilidad mutua por cada trayectoria vertical u horizontal entonces  $\mu(P_4 \square P_n) = 8 = 2 \min\{4, n\}$ .

Sea  $k \geq 5$ ; consideremos la gráfica  $P_k \square P_k$  y el conjunto de vértices

$$\{u_1v_0, u_2v_0, u_0v_1, u_3v_1, u_{j-2}v_j, u_{j+2}v_j\} \cup \{u_{k-4}v_{k-2}, u_{k-1}v_{k-2}, u_{k-3}v_{k-1}, u_{k-2}v_{k-1}\},$$

para  $j \in \{2, \dots, k - 3\}$ . Éste es conjunto de visibilidad mutua que tiene a lo más dos vértices de cada trayectoria, por lo que  $\mu(P_m \square P_n) \geq 2 \min\{m, n\}$ . Así,  $\mu(P_m \square P_n) = 2 \min\{m, n\}$ .  $\square$

Para el caso de los cilindros debemos considerar otros aspectos. Cada trayectoria vertical contiene a lo más dos vértices de un conjunto de visibilidad mutua y cada ciclo horizontal contiene a lo más tres vértices de un conjunto de visibilidad mutua. Obsérvese que el conjunto de visibilidad mutua de la figura 16 no parece tener simetrías evidentes, por lo que resulta más difícil demostrar que ese conjunto es máximo en el caso de los cilindros.

Por los teoremas 4 y 5 se tiene  $\mu(P_s) = 2$  y  $\mu(C_t) = 3$ , para todo  $t > s \geq 2$ . Entonces:

TEOREMA 15. Si  $s \geq 2$  y  $t \geq 3$  entonces  $\mu(P_s \square C_t) \leq \min\{3s, 2t\}$ .

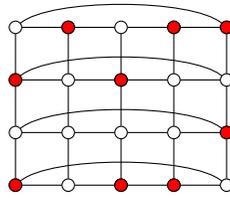


FIGURA 16.  $P_4 \square C_5$

*Demostración.* Sea  $(u_0v_i, u_1v_i, \dots, u_{s-1}v_i)$  una trayectoria vertical contenida en el cilindro, con  $0 \leq i \leq t - 1$ , entonces tiene a los más dos vértices del conjunto de visibilidad mutua. Como hay  $t$  trayectorias verticales en  $P_s \square C_t$ , se sigue que  $\mu(P_s \square C_t) \leq 2t$ .

Ahora sea  $(u_jv_0, u_jv_1, \dots, u_jv_{t-1}, u_jv_0)$  un ciclo horizontal con  $0 \leq j \leq s - 1$ , cada uno con a lo más tres vértices en el conjunto de visibilidad mutua. Ya que tenemos  $s$  ciclos, se sigue que  $\mu(P_s \square C_t) \leq 3s$ . Así,  $\mu(P_s \square C_t) \leq \min\{2t, 3s\}$ .  $\square$

**TEOREMA 16.** Sean  $t, s$  y  $k$  enteros no negativos con  $s > k$ . Si  $M$  es un conjunto de visibilidad mutua de  $P_k \square C_t$ , entonces  $M$  también es un conjunto de visibilidad mutua de  $P_s \square C_t$ .

*Demostración.* Sea  $M$  el conjunto de visibilidad mutua de  $P_k \square C_t$  y supongamos que  $M$  no lo es en  $P_s \square C_t$ . Así, existen dos vértices  $u, v \in M$  tales que toda trayectoria mínima entre ellos contiene al menos otro vértice de  $M$ . Pero como  $s > k$ , se tiene que  $P_k \square C_t$  es una subgráfica de  $P_s \square C_t$ , por lo que  $P_k \square C_t$  contiene tanto a  $u, v$ , y al menos otro vértice en  $M$ . Esto contradice que  $M$  sea un conjunto de visibilidad mutua en  $P_k \square C_t$ . Por lo tanto  $M$  no es conjunto de visibilidad mutua de  $P_k \square C_t$ .  $\square$

**AGRADECIMIENTOS.** Las y los autores agradecen al Séptimo Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas, llevado a cabo en mayo de 2025, por abrir los espacios que permitieron este trabajo de colaboración, en el que también participó el estudiante Raúl Arturo Gaytán Ruiz de la Unidad Cuajimalpa de la Universidad Autónoma Metropolitana.

La organización del Séptimo Taller de Otoño Metropolitano de Matemáticas Discretas fue posible gracias a los recursos aportados por las unidades Cuajimalpa e Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana.

REFERENCIAS

[1] Chartrand, G., Zhang, P., *A First Course in Graph Theory*, Dover Publications, 2012.  
 [2] Korže, D., Vesel, A., *Mutual-visibility sets in Cartesian products of paths and cycles*, University of Maribor, Slovenia, 2023.

*Ilán A. Goldfeder*  
 Universidad Autónoma Metropolitana,  
 Unidad Iztapalapa,  
 División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
 Departamento de Matemáticas.  
 Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
 Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México  
 e-mail: igoldfeder@izt.uam.mx

*Nahid Yelene Javier Nol*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Iztapalapa,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas.  
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México  
e-mail: [nahid@xanum.uam.mx](mailto:nahid@xanum.uam.mx)

*Aldo Lozano Piña*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Iztapalapa,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas.  
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México  
e-mail: [cbi2252800438@xanum.uam.mx](mailto:cbi2252800438@xanum.uam.mx)

*Luis Josías López Barrios*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Iztapalapa,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas.  
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México  
e-mail: [cbi2203009967@izt.uam.mx](mailto:cbi2203009967@izt.uam.mx)

*Raúl Vélez Limón*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Iztapalapa,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas.  
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México  
e-mail: [cbi2223045914@izt.uam.mx](mailto:cbi2223045914@izt.uam.mx)

*Miryam S. N. Mielke Méndez*

Universidad Autónoma Metropolitana,  
Unidad Iztapalapa,  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,  
Departamento de Matemáticas.  
Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco 186, Col. Leyes de Reforma, 1<sup>a</sup> sección  
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México, México  
e-mail: [cbi2193053291@izt.uam.mx](mailto:cbi2193053291@izt.uam.mx)