Modelos financieros de tasas de interés

Carlos Ibarra-Valdez, UAM Iztapalapa

Introducción. *Una de las grandes subáreas de las finanzas matemáticas se dedica al estudio de modelos estocásticos dinámicos para tasas de interés.*

Las tasas son uno de los instrumentos más importantes en los mercados financieros y en los mercados en general. Constituyen una herramienta crucial de política financiera y económica para los bancos centrales de diversos países.

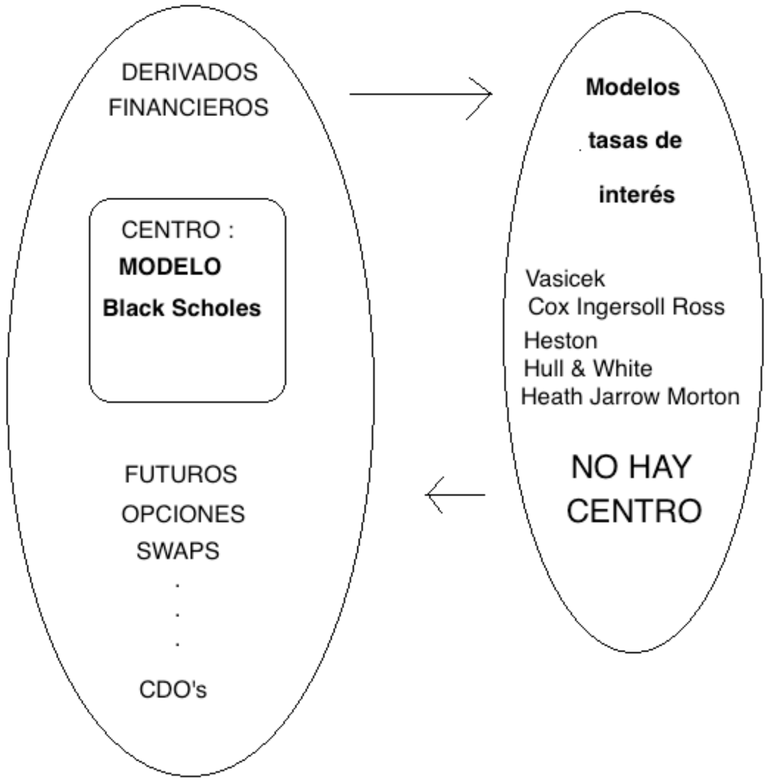
Las tasas de interés se estudiaban usualmente dentro de la teoría macro – económica, y bajo una tradición esencialmente determinística y de modelado muy simple. Esto dio lugar, a lo largo de décadas, a modelos y fórmulas muy sencillos que tenían ciertas virtudes pero también muchos defectos. Estaban muy lejos de poder modelar mínimamente la gran complejidad real que rodea a estos instrumentos financieros.

Una vez que en finanzas matemáticas se estableció el estándar de utilizar ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô para modelar los precios de activos y derivados financieros, este enfoque se llevó de manera natural a las tasas de interés. El primer modelo de este tipo, el de Vasicek, en fecha tan temprana como 1978, despertó un gran interés, y a partir de allí se sucedieron muchos otros, orientados a subsanar las que se consideraban entonces *como las principales deficiencias de ese primer modelo, sobre todo el hecho de que las tasas pudieran ser estrictamente negativas con probabilidad estrictamente positiva. En 1978 se consideraba como no aceptable, a pesar de que las tasas* **reales** *(descontando la inflación) habían sido observadas como negativas después de la segunda guerra mundial y en otras épocas históricas.*

Le siguieron modelos cada vez más sofisticados : Hull & White; Cox, Ingersoll & Ross; Ho & Lee; Heston; y a un nivel todavía más profundo, el modelo de Heath – Jarrow – Morton, que muchos consideran más como un marco de referencia completamente general, y cuya naturaleza matemática es infinito – dimensional.

La búsqueda sistemática, muy recientemente, de una teoría más comprehensiva para enmarcar y generalizar estos modelos de tasas de interés, involucra las ideas y las herramientas matemáticas desarrolladas por investigadores muy destacados, en especial T. Björk, D. Filipovic, J. Teichmann, D. Carmona, y varios otros. El marco matemático que se ha desarrollado en los últimos años es muy impresionante, bastante difícil e involucra fuertes dosis de análisis infinito – dimensional, así como ideas y herramientas de geometría diferencial, teoría matemática del control y 'cálculo conveniente'.

Además de la mayor dificultad intrínseca del tema, hay una situación crucial : ***no se tiene un 'benchmark' universalmente aceptado como el caso del modelo de Black Scholes en el área de derivados financieros****. Simplemente, no hay criterios, claros, definitivos, para* *decidir, dados dos ó más modelos, cuál es mejor. Al final haremos una propuesta tentativa en esta dirección.*



Referencias :

Björk (2005); D. Filipovic (2009); Carmona & Tehranchi (2006).

1 NOTA HISTÓRICA : las tasas de interés en la macroeconomía. Los modelos "tradicionales".

Principales : Escuela austríaca, Keynes, Pigou, etc.

"Gadget model" : IS LM, basado en Keynes.

Recientes (con robustez) : "Business cycles" Sargent, Hansen, Barro, Lucas, etc.

Crítica principal : *son modelos demasiado sencillos para describir la realidad anterior al advenimiento de los derivados financieros y cuando éstos empiezan a jugar un papel relevante, ya es imposible incluir sus efectos en los modelos tradicionales.*

La "irreal sencillez" de los modelos tradicionales involucra algunas de las características, más bien ***deficiencias*** *típicas de la teoría económica :*

i) Son esencialmente determinísticos;

ii) Son esencialmente "ceteris paribus", bidimensionales;

iii) No hay ejemplos ***teóricos*** *relevantes, sólo tipo Cobb – Douglas y las otras funciones utilizadas como ejemplos de funciones de utilidad;*

iv) Basados en análisis econométrico : ajustar los "datos" a un modelo ***predeterminado****;*

v) Los más recientes, que involucran 'robustez' aplican técnicas sofisticadas (control robusto) a modelos no sofisticados (Sargent & Hansen).

2 MODELOS ESTOCÁSTICOS SIMILARES A BLACK SCHOLES.

A continuación presentamos muy brevemente las definiciones básicas, así como algunos de los modelos más importantes.

Definiciones básicas.

Seguiremos muy de cerca los libros de Björk y de Filipovic.

****** La interacción práctica y teórica entre los mercados de bonos y la dinámica de las tasas. En la práctica : operaciones de mercado abierto de los bancos centrales. En teoría, lo veremos un poco.***

Las dinámicas de las tasas de interés son equivalentes a los movimientos financieros del mercado de bonos. Un ***bono con cero cupones que paga 1 $ al tiempo de madurez, T, tiene un precio*** $p(t,T)$ *para cada* $t \leq T$.

Las hipótesis básicas sobre este mercado son las siguientes :

- *Para cada* $T > 0$ *existe un mercado sin fricciones de T – bonos.*
- $p(T,T) = 1$
- $p(t,T)$ *es diferenciable en T.*

La ***estructura de plazo*** *del mercado de bonos no es muy informativa visualmente. Una mejor medida para ello son las* ***tasas de interés implicadas.*** *Hay una gran variedad de ellas.*

A. *La tasa 'forward' simple (o LIBOR) es la solución a la ecuación :*

$$1 + (T - S)L = \frac{p(t,S)}{p(t,T)}$$

B. *La tasa 'forward' continuamente compuesta es la solución a la ecuación*

$$e^{R(T-S)} = \frac{p(t,S)}{p(t,T)}$$

Esta terminología se usa normalmente en los mercados. Ambas tasas son equivalentes. En términos matemáticos, tenemos la siguiente serie de definiciones.

1. *La tasa 'forward' LIBOR para* $[S,T]$ *se define como*

$$L(t;S,T) = \frac{P(t,T) - P(t,S)}{(T-S)P(t,T)}$$

2. *La tasa de contado simple para [S,T] o tasa LIBOR de contado es*

$$L(S,T) = -\frac{P(S,T) - 1}{(T-S)P(S,T)}$$

3. *La tasa 'forward' continuamente compuesta para [S,T] contratada en t se define como*

$$R(t;S,T) = -\frac{logP(t,T) - logP(t,S)}{(T-S)}$$

4. La tasa 'de contado' continuamente compuesta para [S,T] se define como

$$R(S,T) = -\frac{logP(S,T)}{(T-S)}$$

5. La tasa instantánea 'forward' con madurez T, contratada en t se define como

$$f(t,T) = -\frac{\partial logP(t,T)}{\partial T}$$

*6. La **tasa corta instantánea al tiempo** t está dada por*

$$r(t) = f(t,t)$$

Comentarios : *las tasas 'spot' son tasas 'forward' en las que el tiempo de contrato coincide con el inicio del intervalo sobre el cual la tasa es efectiva, i.e., t = S. La tasa 'forward' instantánea es el límite de la tasa 'forward' continuamente compuesta cuando* $S \to T$. *Entonces puede ser interpretada como la tasa de interés sin riesgo contratada en t, y efectiva sobre el intervalo infinitesimal* $[t, t + dt]$.
La tasa que se usa más en los modelos más conocidos es la tasa corta instantánea, $r(t)$.

El proceso de la 'cuenta de dinero' se define como

$$B(t) = exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\},$$

este proceso puede ser estocástico, y no sólo variable en el tiempo.

Las principales relaciones dinámicas.

Para lo que sigue, así como pruebas heurísticas, ver Björk (2005). Con pruebas rigurosas, se encuentran estos resultados en Filipovic (2009). Supondremos lo siguiente.

Dinámica de la tasa corta :

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \qquad (*)$$

Dinámica del precio del bono :

$$dp(t,T) = p(t,T)m(t,T)dt + p(t,T)v(t,T)dW(t) \qquad (**)$$

Dinámica de la tasa 'forward' :

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \qquad (***)$$

Observación 1 : *las diferentes magnitudes pueden ser vectores o matrices, en particular el MB puede ser vectorial.*

Observación 2 : *se supone que las diversas funciones involucradas son continuamente diferenciables con respecto a la variable T, y que son suficientemente regulares en esa y en las otras variables para derivar bajo el signo integral e intercambiar los órdenes de diferenciación e integración.*

Bajo las anteriores hipótesis, tenemos el siguiente

Teorema : *suponiendo* (*), (**), (***), *las relaciones dinámicas básicas son como sigue.*

i) $a(t,T) = \frac{\partial v(t,T)}{\partial T}\, v(t,T) - \frac{\partial m(t,T)}{\partial T}$;

ii) $\sigma(t,T) = -\frac{\partial v(t,T)}{\partial T}$;

iii) $a(t,T) = \frac{\partial f(t,t)}{\partial T} + \alpha(t,t)$;

iv) $b(t) = \sigma(t,t)$;

v) $$dp(t,T) = p(t,T)\left\{r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2\right\}$$

$$+\ p(t,T)S(t,T)dW(t)$$

donde

$$A(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,s)ds\ ;\quad S(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,s)ds.$$

Comentario : *la demostración rigurosa de las relaciones anteriores es un ejercicio no trivial de cálculo estocástico que involucra, además de las herramientas básicas como la fórmula de Itô, algunos teoremas avanzados como la versión estocástica del Teorema de Fubini. Ver Filipovic (2009), sección 6.1.*

Los principales modelos de tasas de interés.

1. El modelo de Vasicek.

$$dr(t) = \big(b + \beta\, r(t)\big)dt + \sigma\, dW(t)$$

Esta EDE tiene solución explícita :

$$r(t) = r(0)e^{\beta t} + \frac{b}{\beta}\big(e^{\beta t} - 1\big) + \sigma e^{\beta t}\int_0^t e^{-\beta s}\, dW(s)$$

Se sigue que $r(t)$ *es un proceso gaussiano con media y varianza, respectivamente :*

$$r(0)e^{\beta t} + \tfrac{b}{\beta}\big(e^{\beta t} - 1\big); \qquad \tfrac{\sigma^2}{2\beta}\big(e^{2\beta t} - 1\big)$$

de lo cual se sigue una de las principales características del modelo de Vasicek :

$$P[r(t) < 0] > 0$$

Comentario general importante : *el enfoque que más se ha desarrollado para estudiar los sistemas dinámicos estocásticos que representan los principales modelos de* *estructura de plazo consiste, via las definiciones y relaciones fundamentales de más arriba, en un interjuego entre dos niveles : la dinámica de las tasas y la dinámica de los precios de los bonos :*

$$\boxed{dinámica\ de\ las\ tasas}$$

$$\uparrow\ \downarrow$$

$$\boxed{dinámica\ de\ los\ precios\ de\ bonos}$$

En ocasiones se resuelven los problemas en uno de ellas, y después se llevan los resultados al otro nivel. Si no hay soluciones explícitas, los análisis cualitativos y teóricos se llevan a cabo en uno, otro o ambos niveles, simultáneamente. Ver sobre todo Shreve (2004) vol. II, cap. 10 ('Term - structure models') para observar con cuidado este procedimiento 'sui generis'.

La dinámica general para los precios de los bonos se supone de la forma :

$$F(t;r;T) = exp(-\rho(t,T) - B(t,T)\,r)$$

veamos ahora un ejemplo concreto de lo anterior.

2. El modelo CIR (Cox – Ingersoll – Ross).

$$dr(t) = \big(b + \beta\, r(t)\big)dt + \sigma\, \sqrt{r(t)}\, dW(t)$$

La ecuación de estructura de plazo se convierte en

$$\frac{\partial B(t,t)}{\partial T} = \frac{\sigma^2}{2} B^2(t,T) - \beta\, B(t,T) - 1; \quad B(T,T) = 0$$

la cual es una ecuación de Riccati, que tiene solución explícita :

$$B(t,T) = \frac{2\big(e^{\gamma(T-t)} - 1\big)}{(\gamma - \beta)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \;\; ;$$

donde $\gamma = \sqrt{\beta^2 + 2\gamma^2}$. *E integrando se obtiene el otro factor de los exponentes para el proceso de los precios del bono :*

$$\rho(t,T) = \frac{2b}{\sigma^2} log\left(\frac{2e^{(\gamma-\beta)(T-t)/2}}{(\gamma-\beta)\big(e^{\gamma(T-t)}-1\big)+2\gamma}\right),$$

con lo cual ya obtuvimos los dos términos del exponente en la dinámica de precios del bono.

Enseguida listamos otros seis modelos famosos, muy utilizados en la literatura y en la práctica. Desarrollos relativamente detallados de los mismos y de sus principales propiedades pueden encontrarse en Filipovic (2009), Björk (2005) y Shreve (2004) vol. II.

3. El modelo de Dothan.

$$dr(t) = \beta\, r(t)dt + \sigma\, r(t)\, dW(t)$$

4. Black – Derman – Toy

$$dr(t) = \beta(t)\, r(t)dt + \sigma\, r(t)\, dW(t)$$

5. Black – Karasinski

$$d\ell(t) = \big(b(t) + \beta(t)\, \ell(t)\big)dt + \sigma\, dW(t)$$

6. El modelo de Ho – Lee

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma\, dW(t)$$

7. El modelo de Hull – White, extensión de Vasicek.

$$dr(t) = \big(b(t) + \beta(t)\, r(t)\big)dt + \sigma(t)\, dW(t)$$

8. El modelo de Hull – White, extensión del CIR.

$$dr(t) = \big(b(t) + \beta(t)\, r(t)\big)dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}\, dW(t)$$

La metodología de Heath – Jarrow – Morton.

En principio está basada en las expresiones ***muy*** *generales :*

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW(s)$$

$$\begin{aligned} r(t) &= f(t,t) \\ &= f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)dt + \int_0^t \sigma(s,t)dW(s) \end{aligned}$$

pero la metodología es un enfoque bastante profundo, donde, de acuerdo a muchos autores, aparece claramente *la naturaleza infinito – dimensional de los modelos de tasas de interés. El artículo original Heath, Jarrow & Morton (1992) dio lugar a una respuesta muy entusiasta y a diversos desarrollos, tanto financieros como metodológicos y matemáticos. Por ejemplo, los autores necesitaban para una de las demostraciones una versión específica del Teorema de Fubini estocástico, que en ese momento no estaba disponible en la literatura, y lo incluyeron en un apéndice del mismo artículo.*

Comentario final técnico sobre el mercado de bonos. *Una de las guías centrales para el desarrollo de la física en el siglo XX ha sido* ***el estudio de las simetrías****, así como las consecuencias de la* ***ruptura de la simetría.*** *Matemáticamente el estudio de simetrías está íntimamente relacionado con el 'análisis dimensional' y con la clasificación de familias complejas de objetos. La herramienta central para ello es la 'teoría de grupos', especialmente grupos de Lie. El ejemplo más notable ha sido la clasificación de las 'partículas elementales' en la física de los años sesenta.*
Las dimensiones, las simetrías y la teoría de grupos no han incidido en economía (salvo un par de excepciones aisladas) ni en finanzas (salvo una serie de trabajos sobre valuación de opciones). En el caso de los bonos, parecería ser un enfoque completamente apropiado, dada la mayor cantidad de parámetros y etiquetas que aparecen aquí (propuesta de Esteban Martina. Contacto : estebanmartina@gmail.com). Proponemos entonces el siguiente

Problema abierto 1 : *desarrollar una metodología para clasificar mercados complejos de bonos, susceptible de ser analizada con teoría de grupos de Lie o una herramienta similar.*

Problema abierto 2 (el principal) : ¿Cómo elegir un modelo?

Las generalizaciones recientes de la metodología HJM, es decir el enfoque de análisis infinito – dimensional a la teoría de estructuras de plazo es un acercamiento à la Grothendieck, que intenta 'barrer' toda la problemática e incluir todos los posibles modelos como casos particulares bajo hipótesis adicionales.

Sin embargo, lo demandante de la herramienta matemática hace que sean muy pocos investigadores en el mundo los que estén capacitados para trabajar en este enfoque (Björk, Teichmann, Filipovic, Carmona y otros pocos).

La mayoría de los que trabajan en el modelado de tasas de interés desde el 'paradigma Black Scholes se concentran en estudiar ó desarrollar modelos concretos y en ese contexto, la pregunta principal es la planteada en el Problema abierto 2.

Una propuesta provisional : Criterios de Robustez.

Concluímos estas plática con una propuesta tentativa para distinguir la "bondad" de dos ó más de los anteriores modelos de tasas de interés.

Es necesario advertir que el tratar de llevar esta idea a la práctica puede ser muy difícil, tanto desde el punto conceptual como técnico.

La propuesta es : *Estudiar la* ***robustez**** *de estos modelos con respecto a propiedades específicas (estabilidad, algunas cotas superiores para la solución, estimaciones de probabilidades, etc.).*

Digamos que se considera la propiedad $\mathbb{P}$. *Si el modelo A es robusto con respecto a* $\mathbb{P}$ *y el modelo B no lo es, decimos que A es un mejor modelo que B (en este sentido preciso).*

Un ejemplo concreto en esta dirección : *En el modelo de Vasicek, estimar el orden de magnitud en términos del tiempo de*

$$P[r(t) < 0]$$

e investigar si ésta es una ***propiedad robusta*** *del modelo de Vasicek.*

Se pueden plantear decenas de preguntas de este tipo, relativas a la robustez paramétrica ó incluso a la robustez funcional de los modelos.

(*) APÉNDICE : ROBUSTEZ

Definición : *una propiedad P de un modelo M es* **robusta** *sii se cumple para una familia de modelos 'cercanos' a M y prefijada de antemano.*

(**) *El ejemplo más importante, históricamente :* **Teorema de Kharitonov** *(1978) acerca de la estabilidad robusta de familias de polinomios. Es como sigue.*

Estabilidad robusta de familias de polinomios. Dado un polinomio

$$p(x) = a_n\, x^n + \cdots + a_0$$

su estabilidad, equivalente a que todas las raíces tengan *parte real estrictamente negativa,* puede analizarse, por ejemplo, mediante el criterio de Routh – Hurwitz.
Aquí la *familia de modelos* sería la colección $\mathcal{C}$ de polinomios

$$q(x) = b_n\, x^n + \cdots + b_0,$$

donde $b_k \in [l_k, u_k]$, $0 \le k \le n$, y desde luego los coeficientes de $p(x)$ se encuentran dentro de esos intervalos : $a_k \in [l_k, u_k]$, $0 \le k \le n$.

De hecho cada uno de esos intervalos puede considerarse como un 'entorno' de los respectivos coeficientes a_k, pero no son arbitrariamente pequeños, ni siquiera tienen que ser 'pequeños', están dados por las condiciones reales, prácticas, y son *fijos* (por ejemplo, digamos que la condición inicial para una EDO es $x(0) = 10$. Un intervalo del tipo que estamos considerando podría ser $[8.5, 11]$, lo cual puede ser bastante realista).

La familia completa de esos polinomios $\mathcal{C}$ es una "vecindad" del polinomio original $p(x)$. Obsérvese que $\mathcal{C}$ es una *colección infinita de polinomios* (de hecho es no numerable). Entonces, aquí tendríamos que la estabilidad del polinomio $p(x)$ *es una propiedad robusta*, sii todo $q \in \mathcal{C}$ es estable. ¿Cómo dar condiciones necesarias y suficientes? ¿Cómo comprobar simultáneamente la estabilidad de una familia tan grande? [Pregunta matemática : *¿cuál es exactamente la **cardinalidad** de* $\mathcal{C}$*?*]

Solución al problema de estabilidad robusta. La sorprendente respuesta que encontró Vladimir Kharitonov hace casi cuarenta años es que basta con estudiar la estabilidad de 4 polinomios.

(*Teorema de Kharitonov, 1978*) : $p(x)$ *es robustamente estable, con respecto a* $\mathcal{C}$, *si y sólo si los siguientes* ***cuatro*** *polinomios son estables:*

$$\mathcal{K}_1(x) = l_0 + l_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + l_4x^4 + l_5x^5 + \cdots$$
$$\mathcal{K}_2(x) = u_0 + u_1x + l_2x^2 + l_3x^3 + u_4x^4 + u_5x^5 + \cdots$$
$$\mathcal{K}_3(x) = l_0 + u_1x + u_2x^2 + l_3x^3 + l_4x^4 + u_5x^5 + \cdots$$
$$\mathcal{K}_4(x) = u_0 + l_1x + l_2x^2 + u_3x^3 + u_4x^4 + l_5x^5 + \cdots$$

Observación importante : *sólo debe verificarse la estabilidad de CUATRO polinomios, no importa qué tan grande sea n.*