Notas del Primer Capítulo del Libro Análisis Funcional de W. Rudin

Alejandra García García

Estas notas son el trabajo desarrollado dentro del seminario de Análisis que se ha impartido durante los primeros meses de este año en el Departamento de Matemáticas, UAM-I. Además de contener el primer capítulo del Libro Análisis Funcional de W. Rudin, se agrego algunas propiedades que son importantes saber dentro del Análisis Funcional.

1 Espacios Vectoriales Topológicos.

En muchos problemas de Análisis, no sólo se estudia una función o un operador, sino colecciones de estos. Muchas veces estas colecciones resultan ser espacios vectoriales sobre el campo de los números reales ($\mathbb{R}$) o complejos ($\mathbb{C}$). Por otro lado, en ocasiones necesitamos que tales espacios esten dotados de alguna topología para poder hablar continuidad, acotamiento,etc.; y en otras más, tenemos que conjuntar las dos ideas creando así un espacio vectorial topológico. En este trabajo consideraremos espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$ de los números reales $\mathbb{R}$ ó complejos $\mathbb{C}$.

1.1 Espacios Normados.

Definición 1 *Sea X un espacio vectorial, decimos que X es un* espacio normado *si existe una función*

$$\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$$

tal que a cada $x \in X$ le asocia el número real no negativo $\|x\|$, llamado norma *de x, tal que satisface:*

(a) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo $x, y \in X$.*

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ *para cada $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.*

(c) $\|x\| > 0$ *si* $x \neq 0$.

Todo espacio normado es un *espacio métrico*, donde la distancia $d(x, y)$ entre x y y es $\|x - y\|$. Las propiedades importantes que satisface una métrica d son:

1. $0 \leq d(x, y) < \infty$ para todo $x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ para todo $x, y \in X$.

Cabe señalar que en cualquier espacio métrico, la *bola abierta* con centro en x y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B_r(x) = \{y : d(x, y) < r\}.$$

En particular, si X es un espacio normado, los conjuntos

$$B_1(0) = \{x : \|x\| < 1\} \text{ y } \bar{B}_1(0) = \{x : \|x\| \leq 1\}$$

son las bolas unitarias abierta y cerrada, respectivamente.

Por otro lado, un subconjunto de un espacio métrico es abierto si y sólo si lo podemos expresar como la unión de bolas abiertas, y de esta forma podemos obtener su topología.

Definición 2 *Un* espacio de Banach *es un espacio normado tal que es completo bajo la métrica definida por la norma, en este sentido toda sucesión de Cauchy es convergente.*

1.2 Espacios Vectoriales.

Uno de los conceptos más importantes del Análisis Funcional es el de espacio vectorial que damos a continuación:

Definición 3 *Por un escalar, definimos a cualquier elemento del campo* $\mathbb{K}$. *Un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *es un conjunto* X*, tal que a sus elementos los llamamos vectores, y este tiene definidas dos operaciones,*

$$\begin{aligned} (+) &: X \times X \to X \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

suma de vectores y

$$\begin{aligned} (\cdot) &: \mathbb{K} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X} \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

producto por un escalar, tal que se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Para* $x, y, z \in X$ *tenemos*

   (a) $x + y = y + x$

   (b) $x + (y + z) = (x + y) + z$

   (c) *X tienen un único elemento* 0 *(el vector cero) tal que* $0 + x = x$ *para todo* $x \in X$.

   (d) *A cada* $x \in X$ *le corresponde un único vector* $-x \in X$ *tal que* $x + (-x) = 0$.

2. *Para cada* $x, y \in X$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *se cumple lo siguiente:*

   (a) $1x = x$

   (b) $\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$

   (c) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$

   (d) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

Así, decimos que un espacio vectorial es real si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; mientras que es complejo si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Notación 4 *Dados* $A, B \subset X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $x \in X$. *Denotaremos por:*

1. $\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}$,

2. $A + x := \{y + x : y \in A\}$,

3. $A - B := \{x - y : x \in A,\ y \in B\}$, *y*

4. $A + B := \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$.

Observemos que si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, entonces $\alpha (A + B) \subset \alpha A + \alpha B$; pues dado $w \in \alpha (A + B)$, $w = \alpha (x + y)$ para algunos $x \in A$, $y \in B$, entonces $w = \alpha x + \alpha y \in \alpha A + \alpha B$.

Un subconjunto S del espacio vectorial X es linealmente independiente si, para todo subconjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de S y $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ de $\mathbb{C}$, tenemos $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ siempre que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. En otro caso diremos que S es linealmente dependiente.

Definición 5 *Un subconjunto $Y \subset X$ es llamado subespacio vectorial de X si este es un espacio vectorial, con respecto a las mismas operaciones y estas son cerradas. Un espacio vectorial X tiene dimensión n ($dimX = n$) si X tiene una base $\{v_1, ..., v_n\}$; es decir, para cada $x \in X$ existe una única representación de la forma*

$$x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

para algunos $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Definición 6 *Si $dimX = n$ para algún n, decimos que X tiene dimensión finita. Si $X = \{0\}$, entonces $dimX = 0$.*

1.3 Espacios Topológicos.

Definición 7 *Un* espacio topológico *es una pareja (X, τ) tal que X es un conjunto y τ una colección de subconjuntos de X tales que satisfacen*

1. $\varnothing, X \in \tau$,
2. $U_1, ..., U_n \in \tau \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$,
3. $U_\alpha \in \tau, \forall \alpha \in \Delta \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} U_\alpha \in \tau$

Definición 8 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es* cerrado *si y sólo si su complemento A^c es abierto. La* cerradura *$\bar{A}$ de A es la intersección de todos los cerrados que contiene a A. El* interior *A° de A la definimos como la unión de todos los subconjuntos abiertos de A.*

Definición 9 *Una* vecindad *V de $x \in X$ es cualquier abierto que contiene a x. Decimos que (X, τ) es un espacio topológico de* Hausdorff *si para cada dos elementos distintos $x, y \in X$ existen dos vecindades ajenas U y W de x y y ,respectivamente.*

Definición 10 *Una familia de elementos en τ es una* cubierta abierta *de $A \subset X$ si la unión contiene a A. Un subconjunto $K \subset X$ es* compacto *si toda cubierta abierta de K tiene una subcubierta finita.*

Definición 11 *Una colección $\tau' \subset \tau$ es una* base *para τ si todo elemento de τ se puede expresar como la unión de elementos de τ'. Mientras que una colección γ de vecindades de un punto $x \in X$ es una* base local *de x si toda vecindad de x contiene un elemento de γ.*

Proposición 12 *Sean* (X, τ) *un espacio topológico,* $E \subset X$ *y* σ *la colección* $\{E \cap V : V \in \tau\}$*. Entonces,* σ *es una topología para* E*. En este caso decimos que* σ *es la topología en* E *heredada o inducida de* (X, τ)*.*

Si una topología τ es inducida por una métrica d, decimos que d y τ son *compatibles.*

Definición 13 *Un conjunto dirigido* $(\Delta, \preceq)$ *es un conjunto no vacío* Δ *tal que tiene asociado una relación* $\preceq$ *que es reflexiva* $(\alpha \preceq \alpha \forall \alpha \in \Delta)$*, simétrica, transitiva (es decir,* $(\Delta, \preceq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado) y* $\forall \alpha, \beta \in \Delta \exists \gamma \in \Delta$ *tal que satisface que* $\alpha \prec \gamma$ *y* $\beta \preceq \gamma$*.*

Definición 14 *Sean* X *un espacio topológico y* $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \subset X$*. Decimos que* $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ *es una red en* X *si* Δ *es un conjunto dirigido y* $\varphi : \Delta \to X$ *es una función tal que* $\varphi(\alpha) = x_\alpha$*.*

Observemos que si $\Delta = \mathbb{N}$, y $\mathbb{N}$ tiene el orden usual de $\mathbb{R}$, obtenemos una sucesión en X. Lo cual significa que las sucesiones son un caso particular de las redes.

Decimos que E si Δ es un conjunto dirigido y $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \subset E$. Además, la red $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ a $x \in E$

Definición 15 *Una red* $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ *(sucesión* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *) en un espacio topológico* (X, τ) *es* τ*-convergente a* $x \in X$ *(* $\lim_\alpha x_\alpha = x$ *o* $\lim_{n \to \infty} x_n = x$*, respectivamente) si y sólo si, por definición, para toda vecindad* U_x *de* x *existe* $\alpha_o \in \Delta$ *(* $n_0 \in \mathbb{N}$ *suficientemente grande, respectivamente) tal que* $x_\alpha \in U_x$*, siempre que* $\alpha \geq \alpha_o$ *(*$x_n \in U_x \forall n_0 \preceq n$ *).*

Nota : Debido a que más adelante hablaremos de distintas topologías asociadas a un mismo espacio X, y para especificar la topología que se está utilizando, si no es evidente, en lugar de decir que un subconjunto V de X es abierto (cerrado, compacto, etc.) con respecto a la topología τ dada en X diremos que es τ-*abierto* (τ-*cerrado*, τ-*compacto*, etc.) en X; o bien, que es abierto (cerrado, compacto, etc.) en (X, τ).

1.4 Espacios Vectoriales Topológicos.

Al hablar de espacios vectoriales topológicos consideraremos dos estructuras; una algebraica de espacio vectorial (para hablar de transformaciones lineales) y otra topológica (para hablar de continuidad). Estas dos estructuras deben ser compatibles; es decir, se tiene un espacio vectorial con una topología asignada que hace que las operaciones de suma y producto por escalares sean continuas.

Definición 16 *Un espacio vectorial topológico (e.v.t.) es una pareja* (X, τ), *donde* X *es un espacio vectorial sobre los reales* ($\mathbb{R}$) *o los complejos* ($\mathbb{C}$)*;* τ *es una topología en* X, *tal que la suma de vectores y la multiplicación por escalares son funciones continuas, es decir:*

(a) $+ : X \times X \to X$

$(x, y) \longmapsto x + y$ *es continua.*

(b) $\cdot : \mathbb{C} \times X \to X$ *ó* $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$

$(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ *es continua.*

Donde las topologías sobre $X \times X$ *y* $\mathbb{C} \times X$ ($\mathbb{R} \times X$) *son las topologías producto.*

Veremos ahora algunas propiedades de los conjuntos abiertos y cerrados, las cuales nos serán de gran utilidad posteriormente.

Lema 17 *Sea* (X, τ) *un espacio vectorial topológico. Para* $x_o \in X$, $V \subset X$ *abierto (cerrado),* $\lambda_o \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *y* $A \subset X$*; tenemos las siguientes propiedades:*

1. $x_o + V$ *es abierto (cerrado).*
2. $\lambda_o V$ *es abierto (cerrado).*
3. $A + V$ *es abierto.*

Demostración.

1.- Esta afirmación se debe a que la función

$$f : X \times X \to X \ ; \ (x, y) \longmapsto -x + y$$

es continua, pero también lo es, para $x_o \in X$ fijo, la función

$$i : X \hookrightarrow X \times X$$

dada por $i(z) = (x_o, z)$, para todo $z \in X$; así la función

$$f \circ i : X \to X \ ; \ y \longmapsto -x_o + y$$

es continua y como V es abierto (cerrado), tenemos $x_o + V = (f \circ i)^{-1}(V)$ es abierto (cerrado).

2.- Efectivamente, pues la función

$$f : \mathbb{C} \times X \to X \quad ; \quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x$$

es continua y, por otro lado, la función

$$j : X \to \mathbb{C} \times X$$

definida como $j(x) = (\lambda_o^{-1}, x)$, también es continua, por lo que la función

$$f \circ j : X \to X$$

queda definida por $(f \circ j)(x) = \lambda_o^{-1} x$, es continua y así $\lambda_o V = (f \circ j)^{-1}(V)$, de donde $\lambda_o V$ es abierto (cerrado) si V lo es.

3.- Probaremos que $A + V$ es abierto si V es un subconjunto abierto de E. La razón de esto es que $A + V = \bigcup_{x \in A} (x + V)$ y, como se sabe, unión de conjuntos abiertos es abierto y por (1), $x + V$ es abierto en (X, τ), así que también lo es $A + V$.

■

Notemos que muchos de los espacios de funciones o sucesiones habitualmente manejados en Análisis son espacios vectoriales topológicos.

Ejemplo 18 *(a)* $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ *donde* $\|\cdot\|_2$ *es la norma usual* $\left[\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, *es un* e.v.t. *Para probarlo basta utilizar las propiedades de norma.*

Estos espacios con cualquier otra norma equivalente a la anterior, por ejemplo $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ *, son espacios vectoriales topológicos.*

(b) Sea K *un subconjunto compacto y denotemos por*

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \mid f \textit{ es continua}\},$$

$C(K)$ *es un espacio vectorial y le podemos dar la topología generada por* $\|f\| = \sup_{t \in K} |f(t)|$ *. Con la cual* $C(K)$ *resulta ser un espacio vectorial topológico normado. Observemos que la norma está bien definida pues* K *es compacto y* f *es continua, por lo que el supremo existe.*

(c) Denotemos por (X, Ω, μ) *un espacio de medida. Para* $1 \leq p < \infty$ *consideremos al espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \;\; \textit{es } \Omega\textit{-medible y} \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

con la seminorma definida por $\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. Definimos por $L_p(\mu)$ al espacio cociente obtenido de $\mathcal{L}_p(\mu)$ identificando a las funciones iguales casi dondequiera, $f_1 = f_2$ a.e.($f_1(x) \neq f_2(x)$ $\Longleftrightarrow x \in B$, y B tiene medida cero). A este conjunto le podemos dar la topología generada por la norma: $\left\|\hat{f}\right\|_p := \|f\|_p$ ($f \in [f] = \hat{f}$) inducida por la seminorma anterior. Con esta topología normada, $L_p(\mu)$ es un espacio vectorial topológico.

(d) L^∞ es el espacio de funciones medibles esencialmente acotadas; es decir, de funciones tales que $|f(x)| \leq \lambda$ para casi todo x. Consideremos

$$f : X \to [0, +\infty]$$

donde f es medible y denotemos por S al conjunto de números reales $\{\alpha \in \mathbb{R} : \ \mu\left(f^{-1}\left((\alpha, +\infty]\right)\right) = 0\}$.

Si $S \neq \emptyset$, sea $\beta = \inf S$, y si $S = \emptyset$, sea $\beta = +\infty$. Como

$$f^{-1}\left((\beta, +\infty]\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left((\beta + \frac{1}{n}, +\infty]\right)$$

y la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero, se tiene que $\beta \in S$. A β se le llama el supremo esencial (sup-es) de f. En L^∞ daremos la norma definida por $\|f\|_\infty =$ sup-es$|f(x)|$.

Notemos que, por las observaciones anteriores, $|f(x)| < \lambda$ para casi todo $x \in X$ si y sólo si $\lambda \geq \|f\|_\infty$.

Definición 19 *Sea A un subconjunto de X.*

(a) *Decimos que A es* convexo *si $tA + (1-t)A \subset A$ para todo $0 \leq t \leq 1$ (en otras palabras, pedimos que $tx + (1-t)y \in A$ para todo par $x, y \in A$ y todo $t \in [0,1]$).*

(b) *A es* balanceado *si $\alpha A \subset A$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \leq 1$ (es decir, para todo $x \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \leq 1$, tenemos que $\alpha x \in A$).*

(c) *A es* absorbente *si para cada $x \in X$ existe $\alpha > 0$ tal que $\lambda x \in A$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leq \alpha$ (de otra manera, $\forall x \in X$, $\exists s > 0$ tal que $\forall\ |t| > s$ se tiene que $x \in tA$).*

(d) *Denotaremos por* $conv(A)$ *(*$bal(A)$*) a la* envolvente convexa (balanceada) *de* A*, es decir al convexo (balanceado) más pequeño que contiene a* A*.*

(e) *Por* $absconv(A)$ *denotaremos al* conjunto absolutamente convexo*, es decir balanceado y convexo, más pequeño que contiene a* A *y la llamaremos la envolvente convexa y balanceada de* A*.*

Obsérvese que si tenemos una función lineal, esta preserva la convexidad y manda conjuntos balanceados en conjuntos balanceados. Notemos además las siguientes propiedades de los conjuntos convexos y/o balanceados.

1. X es convexo, balanceado y absorbente.

2. Si $A \subset X$ es convexo (balanceado) y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces λA es convexo (balanceado).

   Es fácil ver que estas dos afirmaciones se cumplen.

   (a) Si A es convexo, dados x, $y \in \lambda A$ existen x_1,$y_1 \in A$ tales que $x = \lambda x_1$ y $y = \lambda y_1$; por lo que , por la convexidad de A, para cualquier $t \in [0, 1]$,

   $$tx+(1-t)y = t(\lambda x_1)+(1-t)(\lambda y_1) = \lambda(tx_1+(1-t)y_1) \in \lambda A.$$

   (b) En caso de que A sea balanceado, para cualquier elemento x de λA existe $x_1 \in A$ tal que $x = \lambda x_1$; es así como para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \leq 1$, $\alpha x = \alpha\,(\lambda x_1) = \lambda(\alpha x_1) \in \lambda A$.

3. En general $A + A \neq 2A$, por ejemplo si consideramos

   $$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ y } -1 \leq x \leq 1, \text{ ó } x = 0 \text{ y } -1 \leq y \leq 1\},$$

   obtenemos que $A + A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ y } -1 \leq y \leq 1\} \neq 2A$.

4. Sin embargo, si A es convexo, se tiene que $A + A = 2A$. Mejor aún, $sV + tV = (s + t)V$ para todo $s, t \in \mathbb{R}^+$, siempre que V sea convexo.

   La contensión $(s + t)V \subset sV + tV$ siempre se da. Por otro lado, si $z \in sV + tV$, entonces existen $x, y \in V$ tales que $z = sx + ty$; se sigue que

   $$(s + t)^{-1}z = (s + t)^{-1}(sx + ty) = (s + t)^{-1}sx + (s + t)^{-1}ty \in V$$

   por ser V convexo y $(s + t)^{-1}s + (s + t)^{-1}t = 1$; por lo tanto $z \in (s + t)V$. Finalmente concluimos que $(s + t)V = sV + tV$.

5. Si A y B son convexos, también lo son $A-B$ y $A+B$. Como un caso particular, dado que $\{x\}$ es convexo, para todo $x \in X$, $x+B$ es convexo.

   Demostración. Sean $a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2 \in A \pm B$ y $t \in [0,1]$. Entonces $t(a_1 \pm b_1)+(1-t)(a_2 \pm b_2) = ta_1 \pm tb_1 + (1-t)a_2 \pm (1-t)b_2 =$

   $[ta_1 + (1-t)a_2] \pm [tb_1 + (1-t)b_2] \in A \pm B$.

   De donde $A \pm B$ es convexo. ■

6. La cerradura de un conjunto convexo (balanceado) es convexo (balanceado).

   Demostración. Sea $B \subset X$ convexo (balanceado). Si $y, z \in \overline{B}$, $t \in [0,1]$ $(\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq 1)$ podemos elegir $\left(x_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha \in \Lambda}$ y $\left(x_\alpha^{(2)}\right)_{\alpha \in \Lambda}$ dos redes en B tales que $x_\alpha^{(1)}$ converge a y y $x_\alpha^{(2)}$ converge a z en X. Entonces $tx_\alpha^{(1)} + (1-t)x_\alpha^{(2)}$ $(\lambda x_\alpha^{(1)}$, respectivamente) converge a $ty+(1-t)z$ (converge a λy) por la continuidad de la multiplicación por escalares y la suma de vectores. Además, $\left(tx_\alpha^{(1)} + (1-t)x_\alpha^{(2)}\right)_{\alpha \in \Lambda}$, $\left(\left(\lambda x_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha \in \Lambda}\right)$, es una red en B, por tanto $ty + (1-t)z \in B$, $\left(\lambda y \in \overline{B}\right)$. ■

7. Intersección de conjuntos balanceados (convexos) también es balanceado (convexo).

8. Si $A \subset X$ es absorbente o balanceado, entonces $0 \in A$.

   Demostración. Esta afirmación es fácil de ver.

   Si A es absorbente, como $0 \in X$ existe $0 < \alpha = 2$, por ejemplo, tal que $\lambda \cdot 0 = 0 \in A$ siempre que $|\lambda| \leq \alpha$.

   Si A es balanceado, para todo escalar λ tal que $|\lambda| \leq 1$, $0 = \lambda \cdot 0 \in A$. ■

9. Si A es absorbente y $x \in X$, entonces $x + A$ no necesariamente es absorbente. Un claro ejemplo en $\mathbb{R}^n$ es $\overline{B_1(0)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq 1\}$ y $x = (2,2,...,2)$, $x \in \mathbb{R}^n$, pero $0 \notin x + \overline{B_1(0)}$.

   Este ejemplo también nos sirve para ver que:

10. Si A es balanceado, para $x \in X$ arbitrario, $x + A$ no necesariamente es balanceado.

11. Intersección finita de conjuntos absorbentes es absorbente.

12. $conv(A) = \bigcap\{B \subset X : A \subset B\ ,\ B$ convexo$\}$.

13. $bal(A) = \bigcap\{C \subset X : A \subset C \text{ , } C \text{ balanceado}\}$.

Ejemplo 20 *Algunos ejemplos de conjuntos balanceados, convexos y/o absorbentes son:*

(a) Todas las bolas abiertas de radio $\varepsilon > 0$ con centro en 0, $B_\varepsilon(0)$, son convexas, absorbentes y balanceadas en $X = \mathbb{R}^n$, en general esto es válido si X es un espacio normado.

(b) Todas las rectas η en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que no pasan por el origen son convexas, no balanceadas y no absorbentes.

(c) Toda recta en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen es balanceada y convexa pero no absorbente.

Definición 21 *Decimos que un subconjunto A de un espacio vectorial topológigo X es acotado si para cada vecindad V de 0 en X existe $s > 0$ tal que $A \subset tV$ para todo $t > s$.*

1.4.1 Invarianza

Decimos que una topología τ sobre un espacio vectorial X es invariante bajo traslaciones (homotecias) si todas las traslaciones (homotecias) son homeomorfismos.

Recordemos que una vecindad de x en un e.v.t. (X, τ) es un subconjunto V de X tal que $x \in V$, y existe U abierto con $x \in U \subset V$. Definimos por $\mathcal{N}_o(X, \tau)$ o simplemente por $\mathcal{N}_o(X)$, si no se presenta confusión, a la familia de vecindades de 0 en X, con respecto a la topología τ. Si $\mathcal{N}_o(X, \tau)$ es la familia de vecindades de cero, ahora la familia de conjuntos $a + U$, donde $U \in \mathcal{N}_o(X, \tau)$, es la familia de vecindades de a, para cualquier $a \in X$; a esta familia la denotamos por $\mathcal{N}_a(X)$ o por $\mathcal{N}_a(X, \tau)$ para específicar, si es que es necesario, con respecto a que topología estamos trabajando. Con esto obtenemos que la estructura topológica de X está determinada por la base de vecindades del origen o base local. Para el siguiente resultado, primero observemos que, por el lema 17, si U es una vecindad de 0, y $\lambda \in \mathbb{C}\diagdown\{0\}$, $0 \in \lambda U$ y es también una vecindad de cero.

Teorema 22 *Sean X un e.v.t., $a \in X$ y $\mathcal{N}_a(X)$ la familia de vecindades de a en X. Entonces:*

1. $\mathcal{N}_a(X) = a + \mathcal{N}_o(X)$.

2. $V \in \mathcal{N}_o(X)$ y $V \subset V_1$, implican $V_1 \in \mathcal{N}_o(X)$.

3. $V_1, V_2, ..., V_n \in \mathcal{N}_o(X) \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{N}_o(X)$.

4. $V \in \mathcal{N}_o \Longrightarrow \exists\, W \in \mathcal{N}_o(X)$ *tal que* $W + W \subset V$.

5. $V \in \mathcal{N}_o(X)$ *es invariante bajo homotecias.*

6. *Toda* $V \in \mathcal{N}_o(X)$ *es absorbente.*

7. *Existe un sistema fundamental de vecindades balanceadas del origen; es decir, para toda* $V \in \mathcal{N}_o(X)$ *existe* $W \in \mathcal{N}_o(X)$ *balanceada tal que* $W \subset V$.

Demostración. 1) Para cada $a \in X$, la traslación $f : X \to X$ dada por $f(x) = x + a$ es un homeomorfismo vista como función de X en sí mismo. Esto se debe a que es continua, y si $f(x) = x + a = y$, entonces $f^{-1}(y) = x = y - a$; por tanto f es una función uno a uno en X y además la función f^{-1} es su inversa, la cual es continua.

La contensión $\mathcal{N}_a(X) \supset a + \mathcal{N}_o(X)$ se tiene ya que, dada $U \in \mathcal{N}_o(X)$, existe $U' \in \mathcal{N}_o(X)$ abierto tal que $U' \subset U$ y por tanto, $a + U'$ es abierto, ver el lema 17, y $a \in a + U' \subset a + U$. A la inversa, sea $V \in \mathcal{N}_a(X)$, entonces existe $V' \in \mathcal{N}_a(X)$, abierto, con $V \supset V' = a + (-a + V')$. De donde $-a + V'$ es abierto y como $a \in V'$, $0 = -a + a \in (-a + V')$ tenemos que $-a + V' \in \mathcal{N}_o(X)$ y $-a + V' \subset -a + V = U$; así $U \in \mathcal{N}_o(X)$, por lo tanto $V = a + U$ para algún $U \in \mathcal{N}_o(X)$.

2) Sean V y V_1 como en las hipótesis. Entonces existe $U \in \mathcal{N}_o(X)$ abierto tal que $U \subset V$, por tanto $U \subset V_1$, es decir, $V_1 \in \mathcal{N}_o(X)$.

3) Como $V_1, V_2, ..., V_n \in \mathcal{N}_o(X)$, se tienen $U_1, U_2, ..., U_n \in \mathcal{N}_o(X)$ abiertos tales que $U_i \subset V_i$, para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \subset \bigcap_{j=1}^{n} V_j$ y 0 es un punto del abierto $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Por lo tanto $\bigcap_{j=1}^{n} V_j \in \mathcal{N}_o(X)$.

4) Para todo $V \in \mathcal{N}_o(X)$ podemos encontrar $U \in \mathcal{N}_o(X)$, abierto, tal que $U \subset V$. Ahora, consideremos la función continua

$$+ : X \times X \to X$$

definida por $(x, y) \longmapsto x + y$. Entonces, $(+)^{-1}(U)$ es abierto en $X \times X$, por lo que existen $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_o(X)$ abiertos tales que $V_1 \times V_2 \subset (+)^{-1}(U)$, esto implica que $V_1 + V_2 \subset U$. Por otro lado, tomemos $W := V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$; $0 \in W$ y W es abierto, ya que cada uno de los conjuntos que se están intersectando lo es. Por lo tanto $W \in \mathcal{N}_o(X)$ y es abierto. Ahora, como $W \subset V_1, V_2$, $W + W \subset V_1 + V_2 \subset U$; además $W = -W$ por construcción.

5) Efectivamente, (por el lema 17(2)) si U es abierto y $\lambda \in \mathbb{C}$, λU es abierto y si además $U \in \mathcal{N}_o(X)$, $\lambda U \in \mathcal{N}_o(X)$ pues $\lambda \cdot 0 = 0 \in U$.

Por tanto, si $V \in \mathcal{N}_o(X)$, elijamos $U \in \mathcal{N}_o(X)$ abierto tal que $U \subset V$, entonces $0 \in \lambda U \subset \lambda V$, donde $\lambda V \in \mathcal{N}_o(X)$.

6) Sea $V \in \mathcal{N}_o(X)$. La función

$$(\cdot) : \mathbb{C} \times X \to X \ , \quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x$$

es continua para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in X$.

Sea $x \in X$. Por la continuidad de la función $(\cdot)$, se puede considerar $\varepsilon > 0$ y $U \in \mathcal{N}_x(X)$ tales que $(\cdot)(B_\varepsilon(0) \times U) \subset V$; es decir, $\lambda x \in V$ siempre que $|\lambda| \leq \varepsilon$. De aquí que V es absorbente.

7) Sea $V \in \mathcal{N}_o(X)$. Por (4), podemos encontrar $W_1 \in \mathcal{N}_o(X)$ tal que $W_1 + W_1 \subset V$. Como la multiplicación por escalares es continua, existen $\delta > 0$ y $W_2 \in \mathcal{N}_o(X)$ tales que $\alpha W_2 \subset W_1$ si $|\alpha| \leq \delta$. Tomando a

$$W := \cup\{\alpha W : |\alpha| \leq \delta\},$$

se obtiene un conjunto balanceado, además $W \in \mathcal{N}_o(X)$ y
$W \subset W_1 \subset W_1 + W_1 \subset V$. ■

Podemos ver que el recíproco de este Teorema también es válido. De esta manera se puede caracterizar a los *espacios vectoriales topológicos* por medio de la base de vecindades de 0, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 23 *Sea X un espacio vectorial, denotemos por $\wp(X)$ al conjunto de partes de X. Supongamos que existe una función*

$$f : X \to \wp(\wp(X))$$

donde $f(a) = \mathcal{N}_a(X)$. Así, $\mathcal{N}_a(X)$ es una colección de subconjuntos de X. Supongamos además que $\mathcal{N}_a(X)$ satisface las propiedades 1-7 del Teorema anterior (22). Entonces existe una única topología tal que para toda a en X, $\mathcal{N}_a(X)$ es exactamente la familia de vecindades de a, y esta topología hace a X un e.v.t.

Demostración. Mostremos que en efecto la topología τ, para la cual $\mathcal{N}_a(X)$ es la base de vecindades de a siempre que $a \in X$, hace a X un espacio vectorial topológico.

Tomemos $\mathcal{N}_o(X)$ la base de vecindades de cero. Como valen las propiedades 1-7 del Teorema 22, $\mathcal{N}_a(X) = a + \mathcal{N}_o(X)$ para todo $a \in X$.

1) $+ : X \times X \to X$

$(x, y) \longmapsto x + y$ es continua con la topología producto:

Sea $(x_o, y_o) \in X \times X$. Para ver que $(+)$ es continua en (x_o, y_o) recordemos que cumple (4) del Teorema 22.

Sea $V_o \in \mathcal{N}_{x_o+y_o}(X)$ abierto, esto implica que $V_o = x_o + y_o + V$ para algún $V \in \mathcal{N}_o(X)$ abierto. Sea $W \in \mathcal{N}_o(X)$ abierto tal que $W + W \subset V$. Observemos que si $x \in x_o + W$ y $y \in y_0 + W$, entonces

$$x + y \in x_o + y_o + W + W \subset x_o + y_o + V = V_o,$$

con esto $(+)\left((x_o + W) \times (y_o + W)\right) \subset V_o$; por tanto $(+)$ es continua en (x_o, y_o).

2) Para demostrar que la multiplicación por escalares es continua, sean $\lambda_o$un escalar en $\mathbb{C}$ y $x_o \in X$, es decir $(\lambda_o, x_o) \in \mathbb{C} \times X$.

Sea $V_o \in \mathcal{N}_{\lambda_o x_o}(X)$, entonces existen $V, U \in \mathcal{N}_o(X)$, U balanceada, tal que $V_o = \lambda_o x_o + V$, y $U + U \subset V$. Por ser U absorbente, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\lambda - \lambda_o)\, x_o \in U$ si $|\lambda - \lambda_o| < \epsilon$. Así, tenemos que

$$\lambda x_o \in \lambda_o x_o + U \subset \lambda_o x_o + V = V_o$$

siempre que $|\lambda - \lambda_o| < \epsilon$. Por otro lado, como $\mathcal{N}_o(X)$ es invariante bajo homotecias $\mu V \in \mathcal{N}_o\,(X)$, para cada $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |\mu| < 1$. De modo que, como $|\lambda_o| + \varepsilon > 0$, podemos elegir $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\mu^{-n}\right| = |\mu|^{-n} = \left(\frac{1}{|\mu|}\right)^n \geq |\lambda_o| + \varepsilon.$$

Notemos que $|\mu|^n < 1$ y $|\lambda| - |\lambda_o| \leq |\lambda - \lambda_o| < \varepsilon$, de donde

$$|\lambda| < \varepsilon + |\lambda_o| \leq |\mu|^{-n}\,;$$

por lo que $|\lambda|\,|\mu^n| = |\lambda \mu^n| \leq 1.$ ...[1]

Sea $W = \mu^n U \in \mathcal{N}_o\,(X)$. Como U es balanceada, si $(x - x_o) \in W$ tenemos $\mu^{-n}(x - x_o) \in U$, de [1] tenemos como consecuencia que $\lambda\,(x - x_o) \in U$. Ahora, $\lambda x = \lambda_o x_o + (\lambda - \lambda_o) x_o + \lambda(x - x_o)$, por tanto

$$\lambda x \in \lambda_o x_o + U + U \subset \lambda_o x_o + V = V_o;$$

es decir $B_\varepsilon(\lambda) \times (x_o + W) \subset V_o$. Así la multiplicación por escalares es continua con la topología producto.

Por lo tanto (X, τ) es un espacio vectorial topológico con la topología τ generada por $\{\mathcal{N}_a(X)\}_{a \in X}$.

Ahora veamos la unicidad. Sea τ' una topología para la cual $\mathcal{N}_a(X)$ es la base de vecindades de a en X. Sea $U \in \tau$, entonces para $x \in U$ existe $V \in \mathcal{N}_a(X)$ tal que $V \subset U$ por lo que $U \in \tau'$ y de esta forma $\tau \leq \tau'$. De manera análoga obtenemos que $\tau' \leq \tau$. ■

En el espacio vectorial topológico X podemos asociar a cada $a \in X$ y cada escalar $\lambda \neq 0$ el operador traslación T_a y al operador multiplicación por el escalar M_λ, por las fórmulas

$$T_a(x) = x + a, \qquad\qquad M_\lambda(x) = \lambda x$$

para cada $x \in X$. entonces, debido a los resultados anteriores tenemos la siguiente proposición:

Proposición 24 *T_a y M_λ son homeomorfismos definidos de X en X.*

Una consecuencia de esta proposición es que todo espacio vectorial topológico (X, τ), τ es invariante bajo traslaciones: un subconjunto $A \subset X$ es abierto si y sólo si $a + A$ es abierto para todo $a \in X$.

2 Tipos de Espacios Vectoriales Topológicos.

En esta sección hablaremos de la clase de espacios vectoriales topológicos que más nos interesarán y que ocuparemos más adelante. En las siguientes definiciones por X denotamos al espacio vectorial topológico (X, τ).

1. X es un espacio vectorial topológico *localmente convexo* (e.v.t.l.c. o simplemente e.l.c.) si el origen tiene un sistema fundamental de vecindades convexas (es decir, para toda $V \in \mathcal{N}_o(E)$, existe $U \in \mathcal{N}_o(E)$, U convexo tal que $U \subset V$).

2. X es *localmente acotado* si 0 tiene una vecindad acotada.

3. X es *localmente compacto* si 0 tiene una vecindad cuya cerradura es compacta.

4. X es *metrizable* si τ es compatible con alguna métrica d.

5. X es un *F-espacio* si su topología τ es inducida por una métrica completa e invariante d (es decir, es invariante bajo traslaciones).

6. X es un *espacio de Fréchet* si X es un F-espacio localmente convexo.

7. X es *normable* si existe una norma definida en X tal que la métrica inducida por la norma es compatible con τ.

8. Espacios normados y espacios de Banach se definieron en la sección 1.

9. X tiene la *propiedad de Heine-Borel* si todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto.

Existen algunas relaciones entre estos espacios que demostraremos más adelante:

1. Si X es localmente acotado, entonces X tiene una base local numerable.

2. X es metrizable si y sólo si X tiene una base local numerable.

3. X es normable si y sólo si X es localmente convexo y localmente acotado.

4. X tiene dimensión finita si y sólo si X es localmente compacto.

5. Si un espacio localmente acotado X tiene la propiedad de Heine-Borel, entonces X tiene dimensión finita.

3 Propiedades de Separación.

Observemos que $K+V$ es una unión de las traslaciones abiertas $x+V$ de V $(x \in K)$. Así, el teorema siguiente implica la existencia de conjuntos abiertos ajenos que contienen a K y C, respectivamente.

Teorema 25 *Sean X un e.v.t., $K, C \subset X$ tales que K es compacto, C es cerrado y $K \cap C = \varnothing$. Entonces, existe V vecindad de cero tal que $(K+V) \cap (C+V) = \varnothing$.*

Demostración. Si $K = \varnothing$, tenemos que $K + V = \varnothing$, por lo que se cumple el teorema. Ahora, supongamos que $K \neq \varnothing$ y sea $x \in K$. Como C es cerrado y ajeno a K, $x \notin C$, y dado que la topología de X es invariante bajo traslaciones, por (4) del teorema 22 existe U_x vecindad simétrica de cero tal que $x+U_x+U_x+U_x$ no intersecta a C, y la simetría de U_x implican que

$$(x + U_x + U_x) \cap (C + U_x) = \varnothing$$

Consideremos las vecindades U_x para cada $x \in K$ como arriba, y por ser K un subconjunto compacto y $\{x + U_x : x \in K\}$ una cubierta abierta de K, existen un número finito de elementos $x_1, ..., x_n \in K$ tales que $K \subset (x_1 + U_{x_1}) \cup ... \cup (x_n + U_{x_n})$.

Sea $V = U_{x_1} \cap ... \cap U_{x_n}$. Entonces,

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U_{x_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U_{x_i} + U_{x_i})$$

Por lo que $(K + V) \cap (C + V) = \varnothing$. ■

Recordemos que $\mathcal{B}$ es una local de vecindades de cero si para cada vecindad W de cero existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset W$.

En la demostración del teorema anterior, como $C + V$ es abierto, tenemos que la cerradura de $K+V$ no intersecta a $C+V$; en particular, la cerradura de $K+V$ no intersecta a C pues V es una vecindad de cero.

Así, dada $\mathcal{B}$ una base local de cero y $K = \{0\}$, el cual es compacto, tenemos que dada $U \in \mathcal{B}$, $X - U = C$ es cerrado y no contiene al cero. Entonces, aplicando el Teorema anterior tenemos que existe W vecindad de cero tal que $(K + W) \cap (C + W) = \varnothing$. Sea $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset W$, entonces

$$V \cap (X - U + V) = (K + V) \cap (C + V) = \varnothing$$

ya que $K+V \subset K+W$ y $C+V \subset C+W$. Además, $(X-U) \cap \overline{V} = C \cap \overline{V}$ $= C \cap (\overline{K + V}) = \varnothing$ y con esto $\overline{V} \subset U$. De donde obtenemos:

Teorema 26 *Si $\mathcal{B}$ es una local de vecindades de cero para X un espacio vectorial topológico, entonces todo elemento en $\mathcal{B}$ contiene a la cerradura de algún elemento en $\mathcal{B}$.*

Otra consecuencia del Teorema 25 es la siguiente:

Teorema 27 *Todo espacio vectorial topológico es de Hausdorff.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Es claro que $K = \{x\}$ y $C = \{y\}$ son conjuntos compacto y cerrado respectivamente. Por el teorema 25 existe V vecindad de cero tal que $(x + V) \cap (y + V) = (K + V) \cap (C + V) = \varnothing$. Así que, en efecto X es de Hausdorff. ■

Ahora veamos algunas propiedades de la cerradura y el interior en un espacio vectorial topológico.

Teorema 28 *Sea X un espacio vectorial topológico. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si $A \subset X$, entonces $\bar{A} = \cap\{A + V : V$ es vecindad de cero$\}$.*

2. *Si $A \subset X$ y $B \subset X$, entonces $\bar{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.*

3. *Si Y es un subespacio de X, también $\overline{Y}$ lo es.*

4. *Si C es un subconjunto convexo de X, entonces $\overline{C}$ y C° también lo son.*

5. *Si $B \subset X$ es balanceado, entonces $\overline{B}$ es balanceado; y B° es balanceado siempre que $0 \in B^\circ$.*

6. *Si B es un subconjunto acotado de X, $\overline{B}$ también es acotado.*

Demostración.

1. $x \in \overline{A}$ si y sólo si $(x + V) \cap A \neq \varnothing$ para cada vecindad V de 0, pero esto sucede si y solamente si $x \in A - V$ para cada V vecindad de cero. Como $-V$ también es una vecindad de cero tenemos lo que se pide.

2. Sean $a \in \overline{A}$ y $b \in \overline{B}$; W una vecindad de $a+b$. Entonces, existen W_1 y W_2 vecindades de a y b, respectivamente, tales que $W_1 + W_2 \subset W$. Además, existen $x \in A \cap W_1$ y $y \in B \cap W_2$ pues $a \in \overline{A}$ y $b \in \overline{B}$; lo cual implica que $x + y \in (A + B) \cap W$. Por tanto, $a + b \in \overline{A + B}$.

3. Sean α y β escalares. Por la proposición 24 (la multiplicación por escalares es un homeomorfismo) $\alpha\overline{Y} = \overline{\alpha Y}$ si $\alpha \neq 0$; si $\alpha = 0$, estos dos conjuntos son iguales. Por el inciso anterior se cumple que
$$\alpha\overline{Y} + \beta\overline{B} = \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \overline{Y}.$$

4. La demostración de que $\overline{C}$ es convexo se vió en la sección de espacios vectoriales topológicos. Para ver que C° es convexo, como $C^\circ \subset C$ tenemos que
$$tC^\circ + (1 - t)\, C^\circ \subset C$$
para $0 < t < 1$. Pero tC° y $(1 - t)\, C^\circ$ son abiertos, así que $tC^\circ + (1 - t)\, C^\circ$ también lo es y por tanto $tC^\circ + (1 - t)\, C^\circ \subset C^\circ$.

5. La primera parte también se probó en la sección de espacios vectoriales topológicos. Para ver que $B \subset X$ es balanceado implica que B° es balanceado siempre que $0 \in B^\circ$, sea $0 < |\alpha| \leq 1$, entonces $\alpha B^\circ = (\alpha B)^\circ$ y como la multiplicación por escalares es continua se cumple que $\alpha B^\circ \subset \alpha B \subset B$ pues B es balanceado. Pero αB° es un abierto en B, entonces $\alpha B^\circ \subset B^\circ$. Si $\alpha = 0$ y $0 \in B^\circ$, entonces $\alpha B^\circ \subset B^\circ$ y en efecto B° es balanceado.

6. Sea V una vecindad de cero. Por el inciso 7 del teorema 22, existe W vecindad de cero tal que $\overline{W} \subset V$. Como B es acotado, $B \subset tW$ para t suficientemente grande. Para dicha t tenemos que $\overline{B} \subset t\overline{W} \subset tV$ como deseábamos.

■

Teorema 29 *En un espacio vectorial topológico X:*

1. *Toda vecindad de cero contiene una vecindad balanceada de cero, y*

2. *Toda vecindad convexa de* 0 *contiene una vecindad de* 0 *balanceada y convexa.*

Demostración.

1. Se da por el inciso 7 del teorema 22.

2. Sea $U = U$ una vecindad convexa de cero en X. Definamos al conjunto$V = \cap\{\alpha U : \alpha$ es un escalar y $|\alpha| = 1\}$. Dado que se cumple el inciso anterior, sea W una vecindad balanceada tal que $W \subset U$, y como W es balanceada se cumple que $\alpha^{-1}W = W$ siempre que α sea un escalar tal que $|\alpha| = 1$. Por otro lado, $W \subset \alpha U$ para cada $|\alpha| = 1$ y así $W \subset V$. Por tanto el interior de V, V° es una vecindad de cero y $V^\circ \subset U$. Como U es convexo, cada αU es convexo y V° también es convexo. Para ver que V° es balanceado sean $0 \leq r \leq 1$, y $|\beta| = 1$. Entonces,

$$r\beta V = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha U.$$

   Como cada αU es convexo que contiene a 0, tenemos que

$$r\alpha U \subset \alpha U$$

   es convexo. Además, $r\beta V \subset V$

■

El Teorema anterior se puede formular en términos de bases locales. Donde decimos que una base local de vecindades de cero $\mathcal{B}$ es *balanceada (convexa)* si cada elemento en $\mathcal{B}$ es balanceado (convexo).

Corolario 30 1. *Todo espacio vectorial topológico tiene una base local balanceada.*

2. *Todo espacio localmente convexo tiene una base local convexa.*

Recordemos además que también se cumple el teorema 26 para este tipo de bases locales.

Teorema 31 *Sean X un espacio vectorial y V una vecindad de cero.*

1. *Si $0 < r_1 < r_2 < ...$ y $r_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces*
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

2. *Todo subconjunto compacto K de X es acotado.*

3. *Si $\delta_1 > \delta_2 > ...$ y $\delta_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y si V es acotada, entonces la colección*
$$\{\delta_n V : n = 1, 2, 3, ...\}$$
es una base local para X.

Demostración.

1. Sea $x \in X$ fijo. Como la multiplicación por escalares $\alpha \longmapsto \alpha x$ definida del campo en X es continua, tenemos que el conjunto de todos los escalares tales que $\alpha x \in V$ es abierto, contiene a 0; e incluso contiene a $\frac{1}{r_n}$ para toda n suficientemente grande. Entonces, $\left(\frac{1}{r_n}\right) x \in V$ (es decir, $x \in r_n V$) para toda n suficientemente grande.

2. Sea W una vecindad de cero balanceada tal que $W \subset V$. Por (1) tenemos que
$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nW.$$
Como K es compacto, existe un número finito de naturales $n_1 < n_2 < ... < n_s$ tales que
$$K \subset n_1 W \cup n_2 W \cup ... \cup n_s W = n_s W$$
donde la igualdad se da ya que W es balanceada. Ahora, si $t > n_s$, se sigue que $K \subset tW \subset tV$ como queríamos.

3. Sea U una vecindad de cero en X. Si V es acotada, existe $s > 0$ tal que $V \subset tU$ para todo $t > s$. Si n es suficientemente grande tal que $s\delta_n < 1$, tenemos que $V \subset \left(\frac{1}{\delta_n}\right) U$. Esto implica que $\delta_n V \subset U$ para n suficientemente grande. Así que en efecto la colección $\{\delta_n V : n = 1, 2, 3, ...\}$ es una base local para X.

∎

4 Funciones Lineales.

Definición 32 *Sean X y Y conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una función definida de X en Y. Si $A \subset X$ y $B \subset Y$, denotamos como siempre por $f(A)$ a la imagen de A bajo f, y por $f^{-1}(B)$ a la preimagen de B:*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Supongamos ahora que X y Y son espacios vectoriales sobre un mismo campo de escalares. Decimos que una función $\Lambda : X \to Y$ es lineal si

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\Lambda(x) + \beta\Lambda(y)$$

para todo $x, y \in X$ y todo escalar α y β.

A las funciones lineales definidas de X en su campo de escalares las llamamos funcionales lineales.

Por ejemplo, los operadores multiplicación (ver proposición 24) por un escalar fijo M_λ son lineales pero los operadores traslación T_a no lo son, salvo cuando $a = 0$.

Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$, algunas propiedades de las funciones lineales, y cuyas demostraciones son algebraicas y fáciles de hacer, son las siguientes:

1. $\Lambda(0) = 0$.

2. Si A es un subespacio de X, entonces $\Lambda(A)$ es un subespacio de Y.

3. Si A es un conjunto convexo (balanceado), entonces $\Lambda(A)$ también lo es.

4. Si B es un subespacio de Y, entonces $\Lambda(B)$ es un subespacio de X.

5. Si B es un conjunto convexo (balanceado), entonces $\Lambda^{-1}(B)$ también lo es.

6. En particular, el conjunto

   $$\Lambda^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : \Lambda(x) = 0\} = N(\Lambda)$$

   es un subespacio de X, al que llamamos *espacio nulo* de Λ.

Ahora, veamos algunas propiedades sobre continuidad de funciones lineales.

Teorema 33 *Sean X y Y e. v. t. Si $\Lambda : X \to Y$ es una función lineal y continua en 0, entonces Λ es continua. De hecho, Λ es uniformemente continua, en el sentido: a cada vecindad de cero W en Y le corresponde una vecindad de cero V en X tal que*

$$x - y \in V \Longrightarrow \Lambda(x) - \Lambda(y) \in W.$$

Demostración. Sea W una vecindad de cero en Y. Debido a que Λ es continua en cero, existe V vecindad de cero en X tal que $\Lambda(V) \subset W$. Tomemos $x - y \in V$, como Λ es lineal tenemos que $\Lambda(x) - \Lambda(y) = \Lambda(x - y) \in W$. Esto último quiere decir que Λ mapea a la vecindad $x + V$ de x en la vecindad $\Lambda(x) + W$ de $\Lambda(x)$, por lo que Λ también es continua en x. ■

Teorema 34 *Sea X un e.v.t. Si $f : X \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal, no constante cero, entonces son equivalentes:*

(a) f es continua.

(b) $\exists\, U \in \mathcal{N}_o(X)$ tal que $f(U)$ es acotado en $\mathbb{C}$.

(c) $N(f)$ es cerrado.

(d) $N(f)$ no es denso en X.

(e) f es continua en 0.

(f) $x \longmapsto |f(x)|$ es una seminorma continua.

Demostración.

$(a) \Longrightarrow (b)$. Sea $\varepsilon > 0$; de la continuidad de f, existe $U \in \mathcal{N}_o(X)$ tal que $U \subset f^{-1}(B_\varepsilon(0))$. De esto concluimos que $f(U) \subset B_\varepsilon(0)$; así que $f(U)$ es acotado en $\mathbb{C}$.

$(b) \Longrightarrow (e)$. Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existen $M > 0$ y $U \in \mathcal{N}_o(X)$ tal que $|f(y)| \leq M$ para todo $y \in U$. Entonces $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in \frac{1}{M}U$. Por tanto, $\left|f(\frac{\varepsilon}{2}x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $x \in \frac{1}{M}U$. Es así como $f(\frac{\varepsilon}{2M}U) \subset B_\varepsilon(0)$, donde $\frac{\varepsilon}{2M}U \in \mathcal{N}_o(X)$. Concluimos que f es continua en cero.

$(e) \Longrightarrow (a)$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veremos que $f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda))$ es abierto en X. Para el caso en que $f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda)) = \emptyset$, es trivial; por lo que se puede suponer que $f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda)) \neq \emptyset$. Sea $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda))$, consideremos $B_\delta(f(x)) \subset B\varepsilon(\lambda)$ con $\delta = \min\{|f(x) - \lambda|, \varepsilon - |f(x) - \lambda|\}$ si $f(x) \neq \lambda$ y $\delta = \varepsilon$ si $f(x) = \lambda$. Sabemos que $f^{-1}(B_\delta(0)) = f^{-1}(B_\delta(f(x)) - f(x))$ y por ser f continua en cero, existe $V \in \mathcal{N}_o(X)$ abierto tal que $f(y) \in B_\delta(0)$ siempre que $y \in V$. Definamos al $V' := x + V$. Sea

$z \in V'$, entonces $z-x \in V$ y por tanto $f(z)-f(x) = f(z-x) \in B_\delta(0)$; es decir $V' \subset f^{-1}(B_\varepsilon(\lambda))$, con $V' \in \mathcal{N}_x(X)$ abierto, como se necesitaba.

$(a) \Longrightarrow (c)$. Es inmediato, ya que $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{C}$, y como f es continua $N(f) = f^{-1}(\{0\})$ es cerrado en X.

$(c) \Longrightarrow (d)$. Como $N(f)$ es cerrado y f no es la constante cero, entonces $\overline{N(f)} = N(f) \subsetneqq X$. Por lo que $N(f)$ no puede ser denso en X.

$(d) \Longrightarrow (b)$. Como $N(f)$ no es denso ($f \neq 0$), existe $x_o \in X \setminus \overline{N(f)}$, entonces $0 \in -x_o + X \setminus \overline{N(f)}$ el cual es abierto. Por este motivo, existe $U \in \mathcal{N}_o(X)$ balanceado tal que $U \subset -x_o + X \setminus \overline{N(f)}$. De modo que $x_o + U \subset X \setminus \overline{N(f)}$; entonces $f(x_o + y) \neq 0$ para todo $y \in U$. Además, como f es lineal

$$f(x_o) \neq -f(y) = f(-y).$$

Afirmamos que $|f(x_o)|$ es cota para $f(U)$: Supongamos que no, entonces existe $z \in U$ tal que $|f(z)| > |f(x_o)| > 0$; de donde $\frac{|f(x_o)|}{|f(z)|} < 1$. Como U es balanceada, si definimos $\alpha = \frac{f(x_o)}{f(z)}$ para $y = \alpha z$ se tiene que

$$f(y) = \alpha f(z) = f(x_o).$$

Por lo tanto $f(x_o) = f(z)$ para algún $z \in U$, lo que es una contradicción. Así concluimos que $f(U)$ es acotada.

$(a) \Longleftrightarrow (f)$. Claramente se da, como f es lineal y además continua, $|f|$ es una seminorma y también continua, donde la vecindad que nos sirve para $|f|$ es la misma que para f. De manera análoga, si $|f|$ es una seminorma continua, f también es continua. ■

Corolario 35 *Toda funcional lineal $f : X \to \mathbb{C}$ continua manda acotados en acotados.*

Demostración.

Es inmediata del teorema anterior incisos (a) y (b). ■

5 Espacios dimensionalmente finitos.

Recordemos que un espacio de Banach es un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ tal que es completo con respecto a la métrica definida por $\|\cdot\|$ como:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

para todo $x, y \in X$. Además, en espacios métricos, ser completo es equivalente a que toda sucesión $d-$Cauchy es convergente.

Los espacios de Banach más simples son $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, que son espacios vectoriales topológicos sobre el campo de los números reales ó complejos y de dimensión n, ambos dotados con la topología euclidiana dada por la norma

$$\|z\|_1 = \left(|z_1|^2 + ... + |z_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

para $z = (z_1, ..., z_2) \in \mathbb{R}^n$ ó $z = (z_1, ..., z_2) \in \mathbb{C}^n$. Otras normas en estos espacios son las siguientes

$$\|z\|_2 = |z_1| + ... + |z_n|$$

y

$$\|z\|_3 = \max_{1 \leq i \leq n} \{|z_i|\}$$

Estas tres normas definen la misma topología en $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

Si X es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{C}$ tal que $dim(X) = n$, entonces toda base $\{x_1, ..., x_n\}$ de X induce un isomorfismo

$$\begin{aligned} L \ : \ X &\to \mathbb{C}^n \\ x_i &\longmapsto e_i \end{aligned}$$

donde $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$.

Ahora vamos a probar que esta función también debe ser homeomorfismo y en consecuencia la topología de $\mathbb{C}^n$ es la única topología vectorial que puede tener un espacio vectorial topológico complejo de dimensión n.

Lema 36 *Sean X un espacio vectorial topológico complejo y $f : \mathbb{C}^n \to X$ lineal. Entonces, f es continua.*

Demostración. Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^n$, y consideremos $f(e_k) = u_k$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$. Entonces, $f(z) = z_1u_1 + ... + z_nu_n$ para todo $z \in \mathbb{C}^n$. Como la multiplicación por escalares y la suma de vectores son funciones continuas en X, tenemos que efectivamente, f es continua. ■

Teorema 37 *Sean $n \in \mathbb{N}$, X un espacio vectorial topológico y Y un subespacio de X de dimensión n. Entonces*

(a) Todo isomorfismo $f : \mathbb{C}^n \to Y$ es homeomorfismo, y

(b) Y es cerrado.

Demostración.

(a) Sea S la esfera de radio 1 en $\mathbb{C}^n$. Entonces, $z \in S$ si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = 1$. Por otro lado, recordemos que si B es la bola unitaria abierta, $z \in B$ si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 < 1$.

Sea $f : \mathbb{C}^n \to Y$ un isomorfismo, es decir es lineal y biyectiva. Definamos $K = f(S)$, por el lema anterior f es continua y por tanto K es compacto. Como $f(0) = 0$ y f es biyectiva, $0 \notin K$. Entonces, existe una vecindad balanceada V de 0 en X tal que no intersecta a K. Además, $E = f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap Y)$ pues f es isomorfismo y así $E \cap S = \emptyset$.

Como f es lineal, E es balanceada y convexa. Esto implica que $E \subset B$ pues $0 \in E$, y en consecuencia $f^{-1}(V \cap Y) \subset B$. Pero $f^{-1}(x) = (f_1^{-1}(x), ..., f_n^{-1}(x))$, donde cada $f_i^{-1} : Y \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal para cada $1 \leq i \leq n$. Y así f_i^{-1} es acotado en una vecindad de 0, $V \cap Y$, para cada $1 \leq i \leq n$, por lo que f_i^{-1} es continua para toda $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto f es un homeomorfismo.

(b) Sean $p \in \bar{Y}$, $f : \mathbb{C}^n \to Y$ y V como en el inciso anterior. Ya que V es absorbente, $p \in tV$ para algún $t > 0$. Entonces, $Y \cap tV \subset f(tV) \subset f(t\bar{B})$, y como $t\bar{B}$ es compacto tenemos que $f(t\bar{B})$ es cerrado en X. Ahora, $p \in f(t\bar{B}) \subset Y$ pues f es homeomorfismo de $\mathbb{C}^n$ en Y.

■

Teorema 38 *Todo espacio vectorial topológico localmente compacto X tiene dimensión finita.*

Demostración. Sabemos que 0 tiene una vecindad V cuya cerradura es compacta. Por el Teorema 31 V y $\overline{V}$ son acotados y los conjuntos $2^{-n}V$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ forman una base local para X.

Como $\overline{V}$ es compacto, existen $x_1, ..., x_m \in X$ tales que

$$\overline{V} \subset \left(x_1 + \frac{1}{2}V\right) \cup ... \cup (x_m + V).$$

Sea Y el espacio generado por $\{x_1, ..., x_m\}$. Entonces, $\dim Y \leq m$. Por el teorema 37, Y es un subespacio cerrado de X.

Dado que $V \subset Y + \frac{1}{2}V$ y $\lambda Y = Y$ para todo escalar $\lambda \neq 0$, se sigue que

$$\frac{1}{2}V \subset Y + \frac{1}{4}V = \frac{1}{2}\left(Y + \frac{1}{2}V\right)$$

y así
$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$
Procediendo de la misma manera obtenemos lo siguiente:
$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(Y + 2^{-n}V\right).$$

Pero $\{2^{-n}V\}$ es una base local, entonces $V \subset \overline{Y}$ (ver inciso (1) del teorema 28), pero $Y = \overline{Y}$, por lo que $kV \subset Y$ para $k = 1, 2, 3, ...$ Con esto concluimos que $Y = X$, por (1) del Teorema 31, y por lo tanto $\dim X \leq m$ ■

Teorema 39 *Si X es un espacio vectorial topológico localmente acotado con la propiedad de Heine-Borel, entonces X tiene dimensión finita.*

Demostración. Por hipótesis, el cero tiene una vecindad acotada Vy, por (6) del Teorema 28, $\overline{V}$ también es acotado. Como X tiene la propiedad de Heine-Borel, todo cerrado y acotado es compacto y así $\overline{V}$ es compacto. Por tanto X es localmente compacto y por el resultado anterior es de dimensión finita. ■

5.1 Metrización.

Recordemos que una topología τ sobre un conjunto X es metrizable si existe una métrica d en X tal que es compatible con τ. En este caso, todas las bolas de radio $\frac{1}{n}$ con centro en x forman una base local para x. Esto da una condición necesaria para la metrizabilidad de espacios vectoriales topológicos.

Teorema 40 *Si X es un espacio vectorial topológico con una base local numerable, entonces se puede definir una métrica d en X tal que*

1. *d es compatible con la topología de X.*
2. *las bolas abiertas con centro en 0 son balanceadas, y*
3. *d es invariante: $d(x+z, y+z) = d(x,y)\,\forall x, y, z \in X$.*

   Si, además, X es localmente convexo, entonces a d la podemos elegir de tal manera que satisface (1), (2), (3) y

4. *todas las bolas abiertas son convexas.*

5.2 Sucesiones y redes de Cauchy.

1. Sea d una métrica definida en X un conjunto no vacío. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es de Cauchy si $\forall\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon\ \forall n, m > N$. Si cada sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X, entonces decimos que (X, d) es un espacio métrico completo.

2. Sea τ una topología para el espacio vectorial X. ahora, de igual manera que el inciso anterior definimos una sucesión y una red de Cauchy para el espacio vectorial (X, τ). Sea $\mathtt{B}$ una base local para τ.

   (a) Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es de Cauchy si para todo $V \in \mathtt{B}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in V$ siempre que $n, m > N$.

   (b) Generalizando el concepto de sucesión, decimos que una red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\gneqq} \subset X$ es de Cauchy si dado $V \in \mathtt{B}$ existe $\alpha_0 \in \gneqq$ tal que $x_\alpha - x_\beta \in V$ siempre que $\alpha, \beta > \alpha_0$.

Usualmente diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ (una red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\gneqq} \subset X$ es de $d-$Cauchy ó $\tau-$Cauchy si lo es para la topología inducida por la métrica d ó para τ, respectivamente.

Observación 41 *Observemos que la definición de sucesión de Cauchy la tenemos aún fuera del marco de una métrica, pero para ver en general que un espacio vectorial topológico es completo no nos basta considerar sólo a las sucesiones. Notemos además que, de bases locales distintas para una misma topología obtenemos las mismas sucesiones ó redes de Cauchy.*

3. Sea X un espacio vectorial topológico cuya topología τ es compatible con la topología generada por una métrica invariante d. Entonces, tenemos que $d(x_n, x_m) = d(x_n - x_m, 0)$ y como las d-bolas con centro en el origen forman una base local para τ, entonces : *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es $d-$Cauchy si sólo si es τ-Cauchy.*

   En consecuencia, cualesquiera dos métricas invariantes en X, tales que son equivalentes con τ, tienen las mismas sucesiones de Cauchy y las mismas sucesiones convergentes. Así que tenemos lo siguiente:

Afirmación 42 *Sea X un espacio vectorial topológico. Si d_1 y d_2 son métricas invariantes tales que inducen la misma topología en X, entonces:*

(a) d_1 y d_2 tienen las mismas sucesiones de Cauchy;

(b) d_1 es completa si y sólo si d_2 es completa.

Es importante notar que la condición de ser invariante es necesaria, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 43 *Consideremos a $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales y definamos las siguientes dos métricas:*

$d_1(x,y) = |x-y|$ *y* $d_2(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$

La primera métrica es la usual de $\mathbb{R}$; mientras que las segunda, de las propiedades de $\mathbb{R}$ es claro que toma valores no negativos, es simétrica y satisface la desigualdad del triángulo. Veamos que $d_2(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Para esto, consideremos las funciones $\phi_1 : [0, +\infty \to [0,1)$, $\phi_1(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$, $\phi_2 : (-\infty, 0] \to [0,1)$, $\phi_1(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$, las cuales son biyectivas. Lo cual quiere decir que si $d_2(x,y) = 0$ x y y deben tener el mismo signo, inclusive $x = y$ por la inyectividad de ϕ_1 y ϕ_2.

Por otro lado, d_1 y d_2 inducen la misma topología en $\mathbb{R}$. Pero d_2 no es invariante pues $d_2(1,0) = \frac{1}{2}$ y $d_2(2,1) = \frac{1}{6}$. Ahora, sea $\{n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es d_2- Cauchy pero no converge.

Teorema 44 *Sean (X, d_1) y (X, d_2) espacios métricos, con (X, d_1) completo. Si $E \subset X$ cerrado, $f : E \to Y$ continua y $d_2(f(x_1), f(x_2)) \geq d_1(x_1, x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in E$, entonces $f(E)$ es cerrado.*

Demostración. Sea $y \in \overline{f(E)}$, entonces existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ una sucesión tal que $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Por lo que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y. Así que de la hipótesis tenemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X. Pero X es d_1-completo, lo cual implica que existe $x \in X$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ en (X, d_1). Como E es d_1-cerrado $x \in E$ y de la continuidad de f $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$. Por tanto $y \in f(E)$ y así $f(E)$ es cerrado. ■

Teorema 45 *Sean (X, τ) un espacio vectorial topológico, Y un subespacio vectorial topológico de X y supongamos que Y es un F-espacio (bajo la topología heredada de X). Entonces, Y es un subespacio vectorial topológico cerrado de X.*

Demostración. Recordemos que para ser F-espacio la topología debe ser inducida por una métrica invariante completa. Sea d una métrica invariante en Y compatible con la topología inducida $\tau|_Y$.

Sean $B_{\frac{1}{n}} = \left\{ y \in Y : d(y,0) < \frac{1}{n} \right\}$, U_n una vecindad de 0 en X tal que $Y \cap U_n = B_{\frac{1}{n}}$ y V_n una vecindad de 0 en X simétrica tal que

$$V_n + V_n \subset U_n \ \text{ y } \ V_{n+1} \subset V_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $x \in \overline{Y}^X$, veamos que $x \in Y$ y así Y es cerrado. Para esto, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos al conjunto

$$E_n = Y \cap (x + V_n)$$

Si $y_1, y_2 \in E_n$, entonces $y_1 - y_2 \in Y$, por ser Y un subespacio vectorial de X. Además, $y_1 - y_2 \in V_n + V_n \subset U_n$ y por tanto $y_1 - y_2 \in B_{\frac{1}{n}}$.

Además, los diámetros de los conjuntos E_n tienden a cero. Como cada E_n es no vacío y dado que Y es completo, tenemos que las $Y-$cerraduras de los conjuntos E_n coinciden en exactamente un punto y_0.

Sea W una vecindad de cero en X, y definamos

$$F_n = Y \cap (x + W \cap V_n).$$

Al igual que arriba; ya que cada F_n es no vacío, las Y-cerraduras de los conjuntos F_n tienen un punto en común y_w. Pero $F_n \subset E_n$ para cada n, por lo que $y_w = y_0$. Por otro lado, como $F_n \subset x + W$ tenemos que $y_0 \in \overline{x+W}^X$, y esto para todo W. Entonces, tenemos que $y_0 = x$ y así $x \in Y$. Por lo tanto $Y = \overline{Y}$. ■

Teorema 46 1. *Si d es una métrica invariante bajo traslaciones en un espacio vectorial X, entonces*

$$d(nx,0) \leq nd(x,0)$$

para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

2. *Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio vectorial topológico metrizable, tales que $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces existen escalares positivos γ_n tales que $\gamma_n \to \infty$ y $\gamma_n x_n \to 0$.*

Demostración. La afirmación (1) se sigue de que

$$d(nx,0) \leq \sum_{k=1}^{n} d\left(kx, (k-1)\,x\right) = nd\left(x,0\right).$$

Para probar (2), sea d una métrica invariante bajo traslaciones, compatible con la topología de X. Como $d\left(x_n, 0\right) \to 0$, existe una sucesión decreciente de enteros positivos n_k tales que $d\left(x_n, 0\right) < k^{-2}$ si $n > n_k$. Sea $\gamma_n = 1$ si $n < n_1$ y $\gamma_n = k$ si $n_k \leq n < n_{k+1}$. Para cada n, se cumple lo siguiente

$$d\left(\gamma_n x_n, 0\right) = d\left(k x_n, 0\right) \leq kd\left(x_n, 0\right) < k^{-1}.$$

Por lo que $\gamma_n x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. ■

6 Acotación y Continuidad.

6.0.1 Conjuntos Acotados.

Recordemos la siguiente definición ya dada anteriormente:

Definición 47 *Sea* (X,τ) *un e.v.t. y* $A \subset X$. A *es acotado (*τ*-acotado) si para cualquier* $V \in \mathcal{N}_o(X)$ *existe* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $A \subset \alpha V$.

Esta definición equivale a que pidamos que dado $V \in \mathcal{N}_o(X)$ existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset \lambda V$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \geq \alpha$.

Notemos que en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ esta definición coincide con la definición de conjunto acotado que ya conocemos. Además, se tiene que cualquier vecindad de 0 en X absorbe a todo acotado, lo cual es natural.

Cabe señalar que si d es una métrica compatible con la topología τ en X un espacio vectorial tenemos que los conjuntos $\tau-$acotados y los conjuntos d-acotados no necesariamente son los mismos, aún si d es invariante.

Sin en cambio, si X es un espacio normado y d es una métrica inducida por una norma, entonces las dos nociones de acotación coinciden.

Por otro lado, si (X,d) es una métrica y d es reemplazada por $d_1 = \frac{d}{1+d}$ una métrica invariante la cual induce la misma topología que d, no coinciden los conjuntos acotados: en el ejemplo 43 $(1,\infty)$ es d_2-acotado en $\mathbb{R}$, pero no es d_1-acotado.

También, del teorema 31, tenemos que todo subconjunto compacto de un espacio vectorial topológico es acotado. Pero, por ejemplo si $x \neq 0$ y $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$, entonces A no es acotado: esto se debe a que si V es una vecindad de cero tal que $x \notin V$, entonces $nx \notin nV$ para todo n, lo cual implica que $E \not\subset nV$. Observemos que esto nos da como resultado que cualquier subespacio no trivial de X no puede ser acotado.

Afirmación 48 *Toda sucesión de Cauchy en un espacio vectorial topológico es acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X un espacio vectorial topológico. Sean V y W dos vecindades balanceadas de 0 tales que $V + V \subset W$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in V$ $\forall n, m \geq N$. Esto implica que $x_n \in x_N + V$ $\forall n \geq N$.

Sea $s > 1$ tal que $x_N \in sV$. De aquí que

$$x_n \in sV + V \subset sV + sV \subset sW$$

para todo $n \geq N$. Por lo que $x_n \in tW$ para todo n y para t suficientemente grande, ya que V y W son balanceadas y $\{x_1, ..., x_{N-1}\}$ un conjunto finito. ■

Además, del Teorema 28 tenemos que las cerraduras de conjuntos acotados también son acotados.

Teorema 49 *Sean X un e.v.t. y $A \subset X$. A es acotado si y sólo si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A y cualquier sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de escalares que tiende a cero, la sucesión $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en X.*

Demostración. Supongamos que A es acotado y que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en A. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares que tiende a cero y sea $V \in \mathcal{N}_o(X)$. Entonces existe $W \in \mathcal{N}_o(X)$, W balanceado, tal que $W \subset V$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset \alpha W$, dicho α existe por ser A acotado.

Para $\beta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\beta \geq \alpha$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{1}{\beta}$ para $n \geq n_0$ por ser $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a cero. Entonces, como $|a_n\beta| = |a_n|\,\beta < 1$ y W es balanceado,

$$a_n\beta W \subset W \subset V$$

para todo $n_0 \leq n$ por lo tanto $a_n x_n \in V$, siempre que $n \geq n_0$; es decir, $(a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al origen en X.

Supongamos ahora que A no es acotado, entonces existe $U \in \mathcal{N}_o(X)$ tal que $\beta A \subsetneqq U$ para toda $\beta \in \mathbb{R}^+$. Sea n un entero positivo y $\beta = \frac{1}{n}$. Entonces existe $x_n \in A$ tal que $\frac{1}{n}x_n \notin U$. De esta manera, para cada $n \in \mathbb{N}$ obtenemos x_n y podemos formar la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en A tales que $(\frac{1}{n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge al origen en E y sin embargo $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero. ■

Por ser un poco diferentes a lo que usualmente tenemos en $\mathbb{R}^n$ daremos algunas propiedades de los conjuntos acotados.

Proposición 50 *Sea X un e. v. t. Si $A, B \subset X$ son acotados, entonces:*

a) *Todo subconjunto de A es acotado.*

b) *$\overline{A}$ es acotado.*

c) *$\mu \cdot A$ es acotado para todo $\mu \in \mathbb{C}$.*

d) *$A \cup B$ es acotado.*

e) *$A + B$ es acotado.*

f) $conv(A)$ *es acotado si* X *es localmente convexo.*

Demostración.

a) Sean $C \subset A$ y $V \in \mathcal{N}_o(X)$. De la definición de acotado, existe $\alpha > 0$ tal que $C \subset A \subset \alpha V$, que es lo que se pide.

b) Sea $V \in \mathcal{N}_o(X)$, como X es un espacio vectorial topológico existe una base fundamental de vecindades cerradas de 0, así que existe $W \in \mathcal{N}_o(X)$ tal que W es cerrado y $W \subset V$. Por ser A acotado, para W existe $\alpha > 0$ tal que $A \subset \alpha W$. Y al ser W cerrado $\overline{A} \subset \alpha W$ y por lo tanto $\overline{A} \subset \alpha W \subset \alpha V$, de donde $\overline{A}$ es acotado.

c) Puesto que A es acotado, para toda $V \in \mathcal{N}_o(X)$ existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset \alpha V$. Entonces $\mu A \subset \mu\alpha V = \alpha\,|\mu|\,V$. Luego basta que tomemos, para la vecindad V y el conjunto μA, el real positivo $\alpha\,|\mu|$.

d) Sea $V \in \mathcal{N}_o(X)$. Como X es un e.v.t. existe $W \in \mathcal{N}_o(X)$, W balanceado, tal que $W \subset V$. Si α_1 y α_2 son dos números reales positivos tales que $A \subset \alpha_1 W$ y $B \subset \alpha_2 W$ entonces, si denotamos por α al máximo de α_1 y α_2, tenemos que $A \subset \alpha W$ y $B \subset \alpha W$, por consiguiente $A \cup B \subset \alpha W \subset \alpha V$. Finalmente, de aquí se deduce que $A \cup B$ es acotado.

e) Sea $V \in \mathcal{N}_o(X)$, por el mismo argumento que el inciso anterior, existe $W \in \mathcal{N}_o(X)$, W balanceada tal que $W + W \subset V$. Si $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $A \subset \alpha_1 W$ y $B \subset \alpha_2 W$, defínamos como α al máximo entre α_1 y α_2, $A \subset \alpha W$ y $B \subset \alpha W$. Así, $A + B \subset \alpha W + \alpha W = \alpha(W + W) \subset \alpha V$. Por lo que $A + B$ es acotado.

f) Demostremos ahora que $conv(A)$ es acotado. Por ser A acotado y X un e.l.c., para toda $V \in \mathcal{N}_o(X)$, existe $W \in \mathcal{N}_o(X)$, W convexo, $W \subset V$ tal que $A \subset \alpha W$ para alguna $\alpha > 0$. Pero

$$conv(A) = tA + (1-t)A \subset t(\alpha W) + (1-t)(\alpha W).$$

Además, como W es convexo, también lo es αW. Así pues, tenemos

$$\alpha W(t{+}(1{-}t)) = \alpha W \subset \alpha V \text{ y } conv(A) \subset (\alpha W)\,(t{+}(1{-}t)) = \alpha W \subset \alpha V,$$

de modo que $conv(A)$ es acotado.

Esto completa la demostración. ■

6.1 Funciones Lineales Acotadas.

Sean X y Y espacios vectoriales topológicos y $\Lambda : X \to Y$ una función lineal.

Definición 51 *Decimos que* Λ *es acotada si manda conjuntos acotados en conjuntos acotados; es decir,* $\Lambda(E)$ *es acotado para cada subconjunto acotado* E *de* X.

Teorema 52 *Sean X y Y espacios vectoriales topológicos y $\Lambda : X \to Y$ una función lineal. Entonces: $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c)$, donde*

(a) *Λ es continua.*

(b) *Λ es acotada.*

(c) *Si $x_n \to 0$, entonces $\{\Lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.*

(d) *Si $x_n \to 0$, entonces $\Lambda(x_n) \to 0$.*

Además, si X es metrizable, entonces las afirmaciones anteriores son equivalentes.

Demostración.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Sea $E \subset X$ acotado y W una vecindad de cero en Y. Como Λ es continua (y $\Lambda(0) = 0$) existe V vecindad de cero en X tal que $\Lambda(V) \subset W$. Pero, por ser E es acotado existe $s > 0$ tal que $E \subset tV$ para cada $t \geq s$. Por lo que

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tW$$

para todo $t \geq s$. Así que $\Lambda(E)$ es acotado.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Es claro ya que si $x_n \to 0$, $\{x_n\}$ es acotado y como Λ es acotada también $\{\Lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

Si X es metrizable obtenemos las siguientes implicaciones:

$(c) \Longrightarrow (d)$ Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to 0$; entonces, por el teorema 46, existe una sucesión $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\gamma_n \to \infty$ y $\gamma_n x_n \to 0$. Por hipótesis, $\{\Lambda(\gamma_n x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en Y. Por el teorema 49, $\Lambda(x_n) = \gamma_n^{-1}\Lambda(\gamma_n x_n) \to 0$ como queríamos.

$(d) \Longrightarrow (a)$ Supongamos que Λ no es continua, entonces existe W una vecindad de cero en Y tal que $\Lambda^{-1}(W)$ no contiene ninguna vecindad de 0 en X. Como X es metrizable tiene una base local numerable, esto implica que podemos encontrar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to 0$ pero $\Lambda(x_n) \notin W$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto último contradice (d), y tenemos lo que se pide.

■

7 Seminormas y Convexidad Local.

Como sabemos, las propiedades que tienen los espacios métricos facilitan el trabajo en muchas cuestiones; además, si se generalizan algunos resultados a veces es necesario que los espacios en los que estamos trabajando conserven propiedades similares a las de los espacios métricos.

Los espacios localmente convexos están estrechamente ligados con las seminormas, que son funciones que conservan, excepto una, las propiedades que tiene una norma, por lo que mantienen cierta relación con los espacios métricos.

En esta sección daremos la definición de seminorma, junto con otras propiedades que tenemos para algunas familias de seminormas.

Definición 53 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una seminorma en X es una función*

$$\rho : X \to [0, \infty)$$

tal que:

(*i*) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, $x, y \in X$ *(subaditiva).*

(*ii*) $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$, $x \in X$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$ *(lineal positiva).*

Entonces, una seminorma ρ es una norma si

$$(c)\rho(x) \neq 0 \text{ si } x \neq 0.$$

Definición 54 *Una familia $\wp$ de seminormas es separante en X si para cada $x \neq 0$ existe $p \in \wp$ tal que $\rho(x) \neq 0$.*

Veamos ahora una seminorma que es de gran utilidad en la teoría de espacios localmente convexos.

Sea $A \subset X$ absorbente. Por ejemplo, toda vecindad de cero en un espacio vectorial topológico es absorbente y to subconjunto absorbente contiene al origen. La "*Funcional subaditiva de Minkowski de A*" está dada por

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in A\} = \inf\{t > 0 : x \in tA\}$$

para cada $x \in X$. Notemos que la funcional de Minkowski de A está bien definida ya que, al ser A absorbente $\{t > 0 : t^{-1}x \in A\} \neq \emptyset$; por otro lado, por definición $0 \leq \mu_A(x) < \infty$ para todo $x \in X$.

Ahora, veremos que las seminormas en X, un e. v. t., son precisamente las funcionales de Minkowski de conjuntos absorbentes, convexos y balanceados. Además, las seminormas son relativamente cerradas en convexidad local, esto se debe a que: en todo espacio localmente convexo existe una familia separante de seminormas continuas. A la inversa, si $\wp$`es una famila` separante de seminormas en X un e.v.t., entonces a $\wp$ la podemos utilizar para definir una topología localmente convexa en X, con lo propiedad de que toda seminorma $\rho \in \wp$ es continua.

Teorema 55 *Sea ρ una seminorma definida sobre X un e.v.t. Entonces:*

(a) $\rho(0) = 0$.

(b) $|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y)$ $\forall x, y \in X$.

(c) $\rho(x) \geq 0$ $\forall x \in X$.

(d) $\{x \in X : \rho(x) = 0\}$ *es un subespacio de* X.

(e) *El conjunto* $B = \{x : \rho(x) < 1\}$ *es convexo, balanceado, absorbente y* $\rho = \mu_B$.

Demostración. La afirmación (a) se cumple ya que $\rho(\alpha x) = |\alpha| \rho(x)$, con $\alpha = 0$. Mientras que, por la subaditividad de ρ tenemos que

$$\rho(x) = \rho(x - y + y) \leq \rho(x - y) + \rho(y)$$

y por tanto $\rho(x) - \rho(y) \leq \rho(x - y)$. De la misma manera, intercambiando x y y, obtenemos que (b) también se cumple pues $\rho(x - y) = \rho(y - x)$.

Si $y = 0$ en (b), tenemos que $\rho(x) \geq 0$ $\forall x \in X$, y así también tenemos (c).

Para probar (d), supongamos que $\rho(y) = \rho(x) = 0$ y sean α, β escalares, de (c)

$$0 \leq \rho(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| \rho(x) + |\beta| \rho(y) = 0$$

por lo que $\alpha x + \beta y \in \{w \in X : \rho(w) = 0\}$. Por último, probemos ($e$).

Por ser ρ lineal positiva, es claro que B es balanceado. Si $x, y \in B$ y $0 < t < 1$, entonces

$$\rho(tx + (1 - t)y) \leq t\rho(x) + (1 - t)\rho(y) < 1$$

y $tx + (1 - t)y \in B$, mientras que si $t = 1$ $\rho(tx + (1 - t)y) = \rho(x) < 1$. Así que B es convexo.

B es absorbente pues para cada $x \in X$ y $s > \rho(x)$ se cumple que $\rho(s^{-1}x) = s^{-1}\rho(x) < 1$, e inclusive $\mu_B(x) < s$. De aquí que $\mu_B \leq \rho$, pero si $0 < t \leq \rho(x)$, entonces $\rho(t^{-1}x) \geq 1$ y $t^{-1}x \notin B$. Esto implica que $\rho(x) \leq \mu_B(x)$, lo que completa la demostración. ■

Teorema 56 *Sean X un e.v.t. y $A \subset X$ absorbente y convexo. Entonces:*

(1) $\mu_A (x + y) \leq \mu_A (x) + \mu_A (y)$.

(2) $\mu_A (tx) = t\mu_A (x)$ *si* $t > 0$.

(3) *Si A es balanceado, μ_A es una seminorma.*

(4) *Si* $B = \{x : \mu_A (x) < 1\}$ *y* $C = \{x : \mu_A (x) \leq 1\}$, *entonces* $B \subset A \subset C$ *y* $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.

Demostración.

(1) Recordemos que como A es convexo, se tiene que $(s + t) A = sA + tA$ para todo $s, t \in \mathbb{R}^+$. Además,

$$\mu_A (x) = inf\{t > 0 : t^{-1}x \in A\} = inf\{t > 0 : x \in tA\} \quad \text{y}$$

entonces dado $\varepsilon > 0$ existen $\lambda_r, \lambda_s > 0$ tales que:

$$\begin{aligned} \lambda_r &\leq \mu_A (x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{con} \quad \lambda_r^{-1}x \in A \quad (x \in \lambda_r A), \text{ y} \\ \lambda_s &\leq \mu_A (y) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{con} \quad \lambda_s^{-1}y \in A \quad (y \in \lambda_s A). \end{aligned}$$

Ya que A es absorbente.

Se sigue que $\lambda_r + \lambda_s \leq \mu_A (x) + \mu_A (y) + \varepsilon$ y $(x+y) \in \lambda_r A + \lambda_s A = (\lambda_r + \lambda s)A$, lo cual implica que $(\lambda_r + \lambda_s)^{-1} (x + y) \in A$.

Teniendo en cuenta que $\mu_A (x + y) = \{t > 0 : t^{-1}(x + y) \in A\}$, y que $\mu_A (x + y) \leq \lambda_r + \lambda_s$, obtenemos $\mu_A (x + y) \leq \lambda_r + \lambda_s \leq \mu_A (x) + \mu_A (y) + \varepsilon$; es decir, $\mu_A (x + y) \leq \mu_A (x) + \mu_A (y) + \varepsilon$ para todo ε positivo.

De aquí que $\mu_A(x + y) \leq \mu_A (x) + \mu_A (y)$, $\forall x, y \in X$. Por lo tanto μ_A es subaditiva.

(2) Si $t = 0$, $tx = 0$, con lo que $\mu_A (tx) = \mu_A (0) = 0 = t\mu_A (x)$. Mientras que si $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} t\mu_A (x) &= t \inf\{s > 0 : s^{-1}x \in A\} = inf\{ts > 0 : s^{-1}x \in A\} \\ &= inf\{ts > 0 : s^{-1}t^{-1}tx \in A\} = inf\{ts > 0 : (ts)^{-1}\, tx \in A\} \\ &= inf\{k > 0 : k^{-1} (tx) \in A\} = \mu_A (tx). \end{aligned}$$

(3) Si A es balanceado, tenemos que $|\alpha| \leq 1$, entonces $\alpha A \subset A$. Sea $\alpha \neq 0$, entonces $|\alpha| > 0$ y

$$\begin{aligned} |\alpha| \mu_A(x) &= |\alpha| \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in A\} = \inf\{|\alpha| t > 0 : t^{-1}x \in A\} \\ &= \inf\{|\alpha| t > 0 : \alpha |\alpha|^{-1} t^{-1}x \in \alpha |\alpha|^{-1} A\} \\ &= \inf\{|\alpha| t > 0 : \alpha |\alpha|^{-1} t^{-1}x \in A\} \\ &= \inf\{s > 0 : \alpha s^{-1}x \in A\} = \mu_A(\alpha x). \end{aligned}$$

Si $\alpha = 0$ se cumple por (2). Por tanto μ_A es una seminorma.

(4) Es claro que si $\mu_A(x) < 1$, entonces $x \in A$ pues para $\mu_A(x) < t < 1$,como $0 \in A$ por ser absorbente y $t^{-1}x \in A$, $x = t(t^{-1}x) + (1-t)0 \in A$. Así, $B \subset A$; para la otra contención, es claro que si $x \in A$, $\mu_A(x) \leq 1$ por lo que tenemos que $B \subset A \subset C$ como queríamos. Observemos además que B y C también son convexos y absorbentes:

Sean $x, y \in B$ $(x, y \in C)$ y $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \mu_A(tx + (1-t)y) &\leq \mu_A(tx) + \mu_A((1-t)y) \\ &= t\mu_A(x) + (1-t)\mu_A(y) < t + (1-t) = 1 \end{aligned}$$

$(\leq t + (1-t) = 1$ respectivamente) por lo que $tx + (1-t)y \in B$ $(tx + (1-t)y \in C$ resp.). Así que B y C son convexos. Para ver que son absorbentes sea $x \in X$, como A es absorbente existe $s > 0$ tal que $x \in tA$ $\forall t > s$ (es decir, $t^{-1}x \in A$ $\forall t > s$), lo que implica que $\mu_A(x) \leq s < t$ y por la linealidad positiva de μ_A tenemos que $\mu_A\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t}\mu_A(x) \leq \frac{s}{t} < 1$. Con esto podemos considerar a μ_B y μ_C sus respectivas funcionales de Minkowski de B y C respectivamente.

Ahora, para la igualdad $\mu_B = \mu_A = \mu_C$, dadas las contenciones $A \subset B \subset C$ tenemos que

$$t^{-1}x \in B \Longrightarrow t^{-1}x \in A \Longrightarrow t^{-1}x \in C$$

por tanto $\mu_C(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$. Resta probar que $\mu_B(x) \leq \mu_C(x)$, para esto sean $x \in X$ y $\mu_C(x) < s < t$. Entonces, $\mu_C\left(\frac{x}{s}\right) < 1$ y así $\frac{x}{s} \in C$, $\mu_A\left(\frac{x}{s}\right) \leq 1$, $\mu_A\left(\frac{x}{t}\right) \leq \frac{s}{t} < 1$. De aquí que $\frac{x}{t} \in B$ y $\mu_B(x) \leq t$ y esto pasa para todo $t > \mu_C(x)$, por tanto $\mu_B(x) \leq \mu_C(x)$.

■

Observemos que en esta demostración, para garantizar que μ_A es una seminorma, solamente se necesitó que A fuera un conjunto absorbente, balanceado y convexo. Así, para cualquier conjunto absorbente, absolutamente convexo se puede definir una seminorma en X.

Proposición 57 *Sea* (X,τ) *un e.v.t. y* $V \in \mathcal{N}_o(X)$, *V abierto, balanceado y convexo. Entonces existe una única seminorma* ρ *en* X *tal que*

$$V = \{x \in X : \rho(x) < 1\}.$$

Demostración.

Sea $V \in \mathcal{N}_o(X)$, como en las hipótesis y $\rho = \mu_v$, donde

$$\begin{aligned} \rho \;=\; \mu_v &: X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\longmapsto \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in V\} \end{aligned}$$

esta función es la "*Funcional subaditiva de Minkowski de V*"; ρ está bien definida. Por el resultado anterior ρ es una seminorma.

Sólo falta verificar que $V = \{x \in E : \rho(x) < 1\}$ y que ρ es única.

Primero demostremos que $V = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$:

Para esto, sea $x \in X$ tal que $\rho(x) < 1$, entonces se puede elegir $0 < t < 1$ con $t^{-1}x \in V$, pero por la convexidad de V, como $x = t(t^{-1}x) + (1-t)0$, $x \in V$. De donde, $\{x \in X : \rho(x) < 1\} \subset V$.

A la inversa, sea $y \in V$ arbitraria. Para esta y fija consideremos

$$\varphi : (0, +\infty) \to X$$

definida por $\varphi(t) = t^{-1}y$ para cada t. La continuidad de φ la tenemos de que la función $t \to t^{-1}$ es continua en $(0,+\infty)$ y de las propiedades de espacio vectorial topológico. Por estas razones, al ser V abierto

$$\varphi^{-1}(V) = \{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$$

también es abierto. Por otro lado, dado que $y \in V$, tenemos $1 \in \varphi^{-1}(V)$; por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $1 - \varepsilon \in \varphi^{-1}(V)$ (es decir, $1 - \varepsilon \in \{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$) y como $\rho(y) = inf\{t > 0 : t^{-1}y \in V\}$, obtenemos que $\rho(y) \leq 1 - \varepsilon < 1$. De aquí concluimos que $y \in \{x : \rho(x) < 1\}$. Así, $V \subset \{x \in X : \rho(x) < 1\}$; en consecuencia $V = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$, como se quería.

Por último, veamos que efectivamente ρ es única con la característica anterior.

Supongamos que existe $q : X \to [0, +\infty)$ tal que

$$\{x \in X : \rho(x) < 1\} = \{y \in E : q(y) < 1\}.$$

Entonces,

$$\{x \in X : \rho(x) < r\} = \{y \in X : q(x) < r\}, \qquad ...[1]$$

para cualquier $r > 0$. Sea $x \in X$ y $\alpha = \rho(x)$. Por definición de $\rho(x)$, tenemos que para toda $\delta > 0$, $\rho(x) < \alpha + \delta$, y por [1] $q(x) < \alpha + \delta$, $\forall$ $\delta > 0$. En consecuencia $q(x) \leq \alpha = \rho(x)$.

De la misma manera se puede concluir que $\rho(x) \leq q(x)$, para todo $x \in X$. Por lo tanto $\rho(x) = q(x)$, para todo $x \in X$. $\blacksquare$

La proposición anterior es de suma importancia, ya que en cualquier espacio vectorial se puede definir una topología usando una familia de seminormas, de la siguiente manera:

Sea X un espacio vectorial y $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de seminormas en X, donde I es un conjunto de índices. Definimos $B_{\alpha,r} = (r^{-1}\rho_\alpha)^{-1}(-1,1) = (\rho_\alpha)^{-1}(-r,r) = \{x : \rho_\alpha(x) < r\}$ para todo $\alpha \in I$ y para todo $r > 0$ y tomamos $\mathcal{N}_o(X)$ de manera que $V \in \mathcal{N}_o(X)$ si y sólo si existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ y $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{\alpha_i, r_i} \subset V$. De esta forma, es fácil determinar a $\mathcal{N}_x(X)$ como $x + \mathcal{N}_o(X)$.

Notemos que $B_{\alpha,r} \in \mathcal{N}_o(X)$ y por consiguiente $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{\alpha_i, r_i} \in \mathcal{N}_o(X)$.

Teorema 58 *Sea $\mathfrak{B}$ una base local balanceada y convexa en X un e. v. t. A cada $V \in \mathfrak{B}$ le asociamos su funcional de Minkowski μ_V. Entonces,*

(a) *$V = \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}$, para todo $V \in \mathfrak{B}$, y*

(b) *$\{\mu_V : V \in \mathfrak{B}\}$ es una familia separante de seminormas continuas en X.*

Demostración. Es claro que (a) se cumple por la proposición anterior y por el Teorema 57, para cada $V \in \mathfrak{B}$, μ_V es una seminorma. Para ver que $\{\mu_V : V \in \mathfrak{B}\}$ es una familia separante y cada seminorma μ_V es continua en X, si $r > 0$, se sigue de (a) del Teorema 55 que

$$|\mu_V(x) - \mu_V(y)| < r$$

siempre que $x - y \in rV$. Por lo tanto μ_V es continua. Por otro lado, si $x \in X - \{0\}$ entonces $x \notin V$ para algún $V \in \mathfrak{B}$. Para esta V, $\mu_V(x) \geq 1$, lo cual implica que $\{\mu_V : V \in \mathfrak{B}\}$ es separante. $\blacksquare$

Teorema 59 *Sean X un espacio vectorial topológico y $\wp$ una familia de seminormas separante en X. Para cada $p \in \wp$ y $n \in \mathbb{N}$, consideremos los conjuntos*

$$V(p,n) = \left\{x \in X : p(x) < \frac{1}{n}\right\}$$

Sea $\mathfrak{B}$ la colección de todas las intersecciones finitas de conjuntos $V(p,n)$. Entonces $\mathfrak{B}$ es una base local convexa y balanceada para alguna topología τ en X. Además $\mathfrak{B}$ determina una topología localmente convexa en X tal que (*a*) *Cada $p \in \wp$ es continua.*

(*b*) *$E \subset X$ acotado si y sólo si cada $p \in \wp$ es acotada en E.*

Demostración.

(*a*) Definimos a los subconjuntos abiertos $A \subset X$ como todas las uniones arbitrarias de las traslaciones de elementos de $\mathfrak{B}$; los cuales claramente forman una topología:

(*i*) $\varnothing = (x + V(p,n)) \cap V(p,n)$, donde $p \in \wp$ es tal que $p\,(x) \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\frac{2}{n} < p\,(x)$. Esto se debe a que, si $y \in V(p,n)$ y tomamos $p\,(x+y)$ se tiene que, por ser p seminorma,

$$p\,(x) - p\,(y) = p\,(x) - p\,(-y) \leq p\,(x+y)\,, \quad . \; . \; . \qquad (*)$$

por lo que

$$\frac{2}{n} \leq p\,(x) \leq p\,(x+y) + p\,(y)\,,$$

y como $p\,(y) \leq \frac{1}{n}$ obtenemos que $\frac{1}{n} \leq p\,(x+y)$.
Por otro lado, $X = \bigcup_{x \in X} (x + (V(p,n)))$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

(*ii*) Es claro que uniones arbitrarias e intersecciones finitas de elementos tales que son uniones arbitrarias de traslaciones de elementos en $\mathfrak{B}$ vuelven a ser de esta forma.

Al mismo tiempo, estos conjuntos abiertos definen una topología τ en X que es invariante bajo traslaciones; además, cada elemento de $\mathfrak{B}$ es convexo, balanceado y $\mathfrak{B}$ es base local para τ.

Sea $x \in X - \{0\}$, entonces $p\,(x) > 0$ para algún $p \in \wp$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n} < p\,(x)$, $x \notin V(p,n)$, por tanto $0 \notin x - V(p,n)$ (mismo argumento que en (*)) y $x \notin \overline{\{0\}}$. Como la topología τ es invariante bajo traslaciones, todo subconjunto formado por un sólo punto $x \in X$ es cerrado, así que $\{0\} = \overline{\{0\}}$.

Ahora, probemos que la suma de vectores y la multiplicación por escalares son continuas. Sea U una vecindad de cero en X. Entonces,

$$V(p_1, n_1) \cap ... \cap V\,(p_m, n_m) \subset U$$

para algunos $p_1, ..., p_{n_m} \in \wp$ y $n_1, ..., n_m \in \mathbb{N}$. Sean

$$V = V(p_1, 2n_1) \cap ... \cap V\,(p_m, 2n_m)\,.$$

Como cada $p \in \wp$ es subaditiva, $V + V \subset U$. Esto prueba que la suma es continua.

Supongamos ahora que $x \in X$, α un escalar, y U y V como arriba. Entonces, $x \in sV$ para algún $s > 0$. Sea $t = \frac{s}{1+|\alpha|s}$, y si $y \in x + tV$ y $|\alpha - \beta| < \frac{1}{s}$, entonces

$$\beta y - \alpha x = \beta (y - x) + (\beta - \alpha) x$$

lo cual implica que

$$|\beta| \, tV + |\beta - \alpha| \, sV \subset V + V \subset U$$

donde $|\beta| \, t \leq 1$ y V es balanceado. Con esto, la multiplicación por escalares es continua.

Así, X es un espacio localmente convexo, y de la definición de $V(p, n)$ tenemos que toda $p \in \wp$ es continua en cero y por tanto continua en todo $x \in X$ por (b) del Teorema 56.

(b) Finalmente, supongamos que $E \subset X$ acotado y sea $p \in \wp$. Como $V(p, 1)$ es vecindad de cero, $E \subset kV(p, 1)$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por lo que $p(x) < k$ para todo $x \in E$, y así p es acotada en

A la inversa, supongamos que cada $p \in \wp$ es acotada en E y sea U una vecindad de cero en X. Entonces, $U \supset V(p_1, n_1) \cap ... \cap V(p_m, n_m)$ para algunas $p_1, ..., p_m \in \wp$ y $n_1, ..., n_m \in \mathbb{N}$. Como cada $p \in \wp$ es acotada en E existen $M_i > 0$ tales que $p_i(x) < M_i$ para todo $x \in E$ y $1 \leq i \leq m$. Si $n > M_i n_i$ para cada , entonces $E \subset nU$ y por tanto E es acotado. ■

Recordemos que si X es un espacio vectorial topológico localmente convexo (e.v.t.l.c. o simplemente e.l.c.), entonces el origen tiene un sistema fundamental de vecindades convexas (es decir, para toda $V \in \mathcal{N}_o(X)$, existe $U \in \mathcal{N}_o(X)$, U convexo tal que $U \subset V$).

Los espacios localmente convexos se caracterizan por medio de las seminormas. Esto lo veremos en el siguiente Teorema, donde utilizamos las seminormas de Minkowski asociadas a los conjuntos abiertos, balanceados y convexos como se construyó en el teorema 57 y la proposición 57.

Teorema 60 *Sea* (X, τ) *un e.v.t.* X *es un e.l.c. si y sólo si existe* $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ *una familia de seminormas que determinan a* τ*.*

Demostración.

Veamos primero que dado un espacio localmente convexo podemos dar una familia de seminormas que determinan la topología.

Como X es un e.l.c. sea $\mathfrak{B}_o$ una base de vecindades del origen en X formada por conjuntos abiertos, balanceados y convexos, por tanto absorbentes. Por la proposición 57, dada $V \in \mathfrak{B}_o$ existe una única seminorma ρ_V tal que

$$B = \{x : \rho_V(x) < 1\}.$$

Consideremos $\{\rho_V\}_{V\in\mathfrak{B}_o}$; esta es una familia de seminormas es separante tales que determinan la topología original en X.

Por otro lado, si $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una familia de seminormas en X que determinan su topología, tomemos a

$$B_{\rho_\alpha} = \{x : \rho_\alpha(x) < 1\} = (\rho_\alpha)^{-1}(-1, 1)$$

para cada $\alpha \in \Delta$. Estos conjuntos son abiertos, balanceados y convexos. Pero la familia de seminormas anterior define la topología en X; es decir,

$$\mathfrak{N} = \{\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i B_{\rho_{\alpha_i}} : \alpha_i \in \Delta, \varepsilon_i > 0, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$$

es una base para la topología τ en X. Notemos que cada uno de los elementos de $\mathfrak{N}$ son también abiertos, balanceados y convexos. Por tanto X es un espacio localmente convexo. ■

Ejemplo 61 *(a) Al espacio $C^\infty([a,b])$ de funciones reales o complejas infinitamente diferenciables en $[a,b]$ le asociamos la topología generada por las seminormas*

$$\rho_m(f) = \sup_{a\leq t\leq b} | f^{(m)}(t) |$$

para cada $m = 0, 1, 2, ...$; donde $f^{(m)}$ denota la $m-$ésima derivada, y para $m = 0$ a la función f. Por el Teorema anterior, y con esta topología, el espacio $C^\infty([a,b])$ resulta ser un e.l.c.

(b) Si S es un conjunto cualquiera, consideremos el espacio vectorial de todas las funciones reales o complejas sobre S. A este espacio lo podemos dotar de una topología de e.l.c., la topología de la convergencia puntual, que está determinada por las seminormas:

$$\rho_t(f) = |f(t)|$$

para cada $t \in S$. Con la cual resulta ser un e.l.c.

(c) A cualquier espacio vectorial le podemos dar una topología de e.l.c. tomando la topología que tiene por base de vecindades del origen a todos los subconjuntos de X balanceados, convexos y absorbentes. Esta es la topología más fina de e.l.c. que se puede dar en un espacio. Con esa topología todas las seminormas resultan ser continuas y el espacio resulta ser de Hausdorff.

Observemos que si $\wp = \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una familia separante numerable de seminormas en X, por el Teorema 59, induce una topología τ con una base local numerable. Esto último implica que es metrizable.

Además, podemos definir una métrica invariante bajo traslación y compatible; esto es, directamente de $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tenemos definida la métrica

$$d(x,y) = \max_{i\in\mathbb{N}} \frac{c_i p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)}$$

donde $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión fija en $\mathbb{R}^+$ tal que converge a 0.

Teorema 62 *Sea X un espacio vectorial topológico. Entonces, X es normable si y sólo si 0 tiene una vecindad convexa y acotada.*

Demostración. Si X es normable y $\|\cdot\|$ es su norma tal que es compatible con su topología, entonces la bola unitaria es convexa y acotada. A la inversa, sea V una vecindad convexa y acotada de 0. Por el Teorema 22 y la proposición 51, V contiene una vecindad de cero balanceada, convexa y acotada U. Definamos $\|x\| = \mu_U(x)$, $x \in X$, donde μ_U es la funcional de Minkowski de U. Por (3) del Teorema 31, $\{rU : r > 0\}$ forman una base local para la topología de X. Además, de la definición de la funcional de Minkowski y dado que U es abierto tenemos

$$rU = \{x : \|x\| < r\} = \{x : \mu_U(x) < r\}$$

para todo $r > 0$. Si $x \neq 0$, entonces existe $r > 0$ tal que $x \notin rU$ y así $\|x\| \geq r$. Esto implica que $\|x\| = \mu_U(x)$ es una norma. Y con esto, en efecto la topología de la Norma coincide con la topología original por ser U una vecindad acotada. ■

8 Espacios Cociente.

Hasta ahora hemos visto algunos resultados importantes para espacios vectoriales topológicos; pero si tenemos un espacio cociente X, con respecto a alguno de sus subespacios, nos podemos preguntar si le podemos asignar una topología que esté relacionada con la estructura de X.

Sean X un espacio vectorial y N un subespacio vectorial de X. Denotemos, como se hace usualmente, al espacio cociente de X sobre N como X/N y definamos

$$\pi : X \to X/N$$

bajo la regla $x \longmapsto \pi(x) =: [x] = x + N$, la función cociente. A $[x] = x + N$ la llamamos la clase de x modulo N. La suma y la multiplicación por escalares se definen como

$$\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y), \ \pi(\alpha x) = \alpha\pi(x) \ . \ . \ . \ . \ .(1)$$

Observemos que $\alpha\pi(x) = N$ si $\alpha = 0$, pues el vector cero de X/N es $\pi(0) = N$. Dado que N es un espacio vectorial, las operaciones definidas arriba están bien definidas. Además, notemos que $\pi(x) = \pi(x')$ siempre que $x - x' \in N$ y si $\pi(y) = \pi(y')$ entonces

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x') + \pi(y'), \qquad \alpha\pi(x) = \alpha\pi(x') \ldots \quad (2)$$

Esto se debe a la siguiente observación: Si $A \subset X$, entonces $\pi(A) = A + N$, por lo que $\pi^{-1}(A+N) = \pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{y\in N} y + A$:

Por una parte, si $y \in N$, entonces $\pi(y+A) \subset \pi(A)$, de donde $y + A \subset \pi^{-1}(\pi(A))$. Por otro lado, $z \in \pi^{-1}(A+N) \Longrightarrow z + N \in A + N \Longrightarrow z + N = x + N$, para algún $x \in A$; luego entonces, $[z] = [x]$, y esto ocurre si y sólo si $z - x \in N$. Entonces $z \in x + N$, lo cual indica que $z \in A + y$, para algún $y \in N$.

Por (1), π es una función lineal con espacio nulo N.

Supongamos ahora que $X = (X, \tau)$ es un e. v. t. y $N \subset X$ un subespacio cerrado, esto es, un subespacio lineal y cerrado con respecto a la topología τ. Denotemos por τ_N a la colección de todos los conjuntos $A \subset X/N$ tales que $\pi^{-1}(A) \in \tau$; es decir, $U \subset X/N$ es τ_N-abierto si y sólo si, por definición, $\pi^{-1}(U)$ es abierto en (X, τ). Entonces, τ_N es una topología en X/N llamada la *topología cociente*. De las propiedades de espacio vectorial topológico de X, y de la estructura algebraica de X/N se tiene que la topología cociente τ_N en X/N también es vectorial topológica. Además, π manda conjuntos abiertos en conjuntos abiertos.Estas propiedades se demuestran en el siguiente teorema.

Definición 63 *Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que una función $f : X \to Y$ es abierta si mapea conjuntos abiertos de X en conjuntos abiertos de Y.*

De esta manera, una función lineal entre espacios vectoriales topológicos es abierta si y sólo si mapea vecindades de 0 en vecindades de 0.

Teorema 64 *Sea $X = (X, \tau)$ un e. v. t. y N un subespacio cerrado de X. Consideremos a τ_N definida como arriba, entonces:*

(a) *τ_N es una topología vectorial en X/N; la función cociente $\pi : X \to X/N$ es lineal, continua y abierta.*

(b) *Si $\mathfrak{B}$ es una base local para τ, entonces la colección de todos los conjuntos $\pi(V)$, con $V \in \mathfrak{B}$, forman una base local para τ_N.*

(*c*) *Cada una de las siguientes propiedades de X son heredadas a X/N: ser localmente convexo, localmente acotado, metrizable y normable.*

(*d*) *Si X es un F-espacio, ó un espacio de Fréchet, ó un espacio de Banach, X/N también lo es.*

Demostración.

(*a*) Como la imagen inversa respeta uniones e intersecciones tenemos lo siguiente:

$$\pi^{-1}(A \cap B) = \pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B) \text{ y } \pi^{-1}(\cup E_\lambda) = \cup \pi^{-1}(E_\lambda),$$

así que dados $A, B, E_\lambda \in \tau$, para cada λ, obtenemos que $\pi^{-1}(A \cap B)$, $\pi^{-1}(\cup E_\lambda) \in \tau_N$; $\varnothing = \pi^{-1}(\varnothing) \in \tau_N$, $X = \pi^{-1}(X/N) \in \tau_N$. Por lo que τ_N en efecto es una topología para X/N. Además, ya que la imagen inversa respeta las diferencias entre conjuntos, un conjunto $A \subset X/N$ es τ_N-cerrado si y sólo si $\pi^{-1}(A)$ es $\tau-$cerrado. En particular, todo punto $\pi(x) \in X/N$ es cerrado; pues por hipótesis N es cerrado, las traslaciones por un vector son continuas y $\pi^{-1}(\pi(x)) = N + x$ es cerrado.

Para la continuidad de π se da gracias a la definición de τ_N (la imagen inversa de abiertos es abierta).

Ahora, sabemos que $\widehat{M} \subset X/N$ es τ_N-abierto si y sólo si $\pi^{-1}(\widehat{M}) \subset X$ es τ-abierto. Así, si $M \subset X$ es τ-abierto, tenemos que $\pi(M)$ es τ_N-abierto en X/N, ya que $\pi^{-1}(\pi(M)) = \bigcup\limits_{y \in F} y + M$.

Por lo tanto π es abierta.

Para la continuidad de la multiplicación por escalares y la suma de vectores tomemos W una vecindad de cero en X/N, entonces existe una vecindad V de cero en X tal que $V + V \subset \pi^{-1}(W)$, el cual es abierto. De aquí que $\pi(V) + \pi(V) \subset \pi^{-1}(W)$, y dado que π es abierta $\pi(V)$ es una vecindad de cero en X/N. Con esto hemos probado que la suma de vectores es continua.

Por otro lado, ya que $\pi^{-1}(W)$ es vecindad de cero y la multiplicación por escalares es continua en X, dado $\alpha \in \mathbb{C}$ existe $B_\varepsilon(\alpha)$, una bola de radio $\varepsilon > 0$ alrededor de α en $\mathbb{C}$, y U una vecindad de cero en X tal que $\beta y \in \pi^{-1}(W)$ para cada $y \in U$ y $\beta \in B_\varepsilon(\alpha)$. Entonces,

$$\beta U \subset \pi^{-1}(W) \Longrightarrow \beta\pi(U) \subset \pi(W)$$

y $\pi(U)$ es vecindad de cero. Con esto, la multiplicación por escalares también es continua en $\pi(0)$ y por tanto continua en X/N.

(b) De (a), si $\mathfrak{B}$ es una base local para τ, entonces la colección de todos los conjuntos $\{\pi(V) : V \in \mathfrak{B}\}$, forman una base local para τ_N por definición de π además de ser abierta, esto hace que se satisfaga (b).

(c) Para la primera propiedad:

(i) Sea $X = (X, \tau)$ un e.l.c. y N un subespacio cerrado de X. Sea Γ una familia dirigida de seminormas en X que definen la topología τ. Entonces la familia $\widehat{\Gamma}$ de todas las seminormas

$$\hat{\rho} : X \diagup N \to [0, \infty\}$$

definidas por $\pi(x) \longmapsto \inf_{y \in N} \rho(x+y)$, $\rho \in \Gamma$, definen la topología cociente τ_N. Por lo que $X \diagup N$ con la topología cociente es localmente convexo.

Veamos que en efecto la función $\hat{\rho} : X \diagup N \to \mathbb{R}$ vía la regla $\pi(x) \longmapsto \inf\limits_{y \in N} \rho(x+y)$, donde $\rho \in \Gamma$, es una seminorma:

(1) Mostremos que $\hat{\rho}$ saca escalares positivos. Sean $[x] \in X \diagup N$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Para el caso en que $\lambda = 0$, se da trivialmente pues $0 \in N$, y así

$$0 = \hat{\rho}([0]) = \hat{\rho}(\lambda[x]) = \inf_{y \in N} \rho(\lambda x + y) = \inf_{y \in N} \rho(y) = 0 = \lambda \hat{\rho}([x]).$$

En otro caso tenemos

$$\hat{\rho}(\lambda[x]) = \inf_{y \in N} \rho(\lambda x + y) = \inf_{y \in N} \rho(\lambda x + \lambda y) = \inf_{y \in N} \rho(\lambda(x+y)),$$

pero por ser ρ una seminorma en X, se sigue que

$$\inf_{y \in Ne} \rho(\lambda(x+y)) = \inf_{y \in N} |\lambda|\, \rho(x+y) = |\lambda| \inf_{y \in N} \rho(x+y) = |\lambda|\, \hat{\rho}([x]).$$

Por lo que $\hat{\rho}(\lambda[x]) = |\lambda|\, \hat{\rho}([x])$, para todo $[x] \in X \diagup N$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

(2) Nos falta ver que $\hat{\rho}$ es subaditiva, es decir, satisface la desigualdad del triángulo. Sean $[x]$, $[z] \in X \diagup N$, y $\lambda \in \mathbb{C}$, así:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}([x]+[z]) = \hat{\rho}([x+z]) &= \inf_{y \in N} \rho((x+z)+y) = \inf_{y \in N} \rho(x+z+2y) \\ &= \inf_{y \in N} \rho((x+y)+(z+y)) = (*);\end{aligned}$$

pero, como ρ es una seminorma en X, siempre se da

$$\rho(x+y+z+y) \leq \rho(x+y) + \rho(z+y),\ \forall y \in N.$$

Entonces

$$(*) = \inf_{y\in N} \rho(x+y+z+y) \leq \inf_{y\in N} \rho(x+y) + \inf_{y\in N} \rho(z+y) = \hat{\rho}([x]) + \hat{\rho}([z]).$$

De esto obtenemos que

$$\hat{\rho}([x]+[z]) \leq \hat{\rho}([x]) + \hat{\rho}([z]).$$

Además, por definición, al ser ρ una seminorma, $\hat{\rho}$ es no negativa. Con esto concluimos que $\hat{\rho}$ definida así es una seminorma en X/N.

Llamemos $\tau_{\widehat{\Gamma}}$ a la topología generada por la familia de seminormas $\widehat{\Gamma}$ obtenida como arriba. Ahora, observemos que $\hat{\rho}\circ\pi : X \to \mathbb{R}$ y que tenemos $\hat{\rho}\circ\pi(x) \leq \rho(x)$, $\forall x \in X$, $\forall \rho \in \Gamma$. Entonces para $\varepsilon > 0$ arbitrario se cumple:

$$\rho^{-1}(B_\varepsilon(0)) \subset (\hat{\rho}\circ\pi)^{-1}(B_\varepsilon(0)).$$

De modo que

$$\pi(\rho^{-1}(B_\varepsilon(0))) \subset \pi((\hat{\rho}\circ\pi)^{-1}(B_\varepsilon(0))) = \hat{\rho}^{-1}(B_\varepsilon(0)).$$

Con esto $\tau_{\widehat{\Gamma}} \leq \tau_N$ en X/N.

Para la otra contensión, sea $W \in \mathcal{N}_o(X/N, \tau_N)$. Elegimos $\rho \in \Gamma$ y $\varepsilon > 0$ tales que $[x] \in W$ si $\rho(x) < \varepsilon$; usando que Γ es una familia de seminormas dirigida. Consideramos ahora, $V \in \mathcal{N}_o(X/N, \tau_{\widehat{\Gamma}})$,

$$V := \{[x] \in X/N : \hat{\rho}([x]) < \varepsilon\}.$$

Dado $[x] \in V$, $\rho(x+y) < \varepsilon$ para algún $y \in N$; es decir, $[x] = [x+y] \in W$, para algún $y \in N$. Esto es, $V \subset W$, y $W \in \mathcal{N}_o(X/N, \tau_{\widehat{\Gamma}})$. En consecuencia $\tau_N = \tau_{\widehat{\Gamma}}$ en X/N.

(ii) Si X es localmente acotado, existe V una vecindad de cero acotada y por el Teorema 52, ya que π es lineal y continua es acotada, $\pi(V)$ también es una vecindad acotada de $\pi(0)$ en X/N. Entonces, X/N también es localmente acotado.

(iii) Sea (X,d) un espacio métrico con d una métrica invariante que define su topología. Definamos $\hat{\rho} : X/N \to [0,\infty)$ como

$$\hat{\rho}(\pi(x), \pi(y)) = \inf\{d(x-y, z) : z \in N\}.$$

Sean $x, x', y, y' \in X$ tales que $\pi(x) = \pi(x')$ y $\pi(y) = \pi(y')$, entonces $x - x', y - y' \in N$. De donde

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\pi(x), \pi(y)) &= \inf\{d(x-y, z) : z \in N\} = \inf\{d(0, z+x-y) : z \in N\}\\ &= \inf\{d(x'-y', z+x-y+x'-y') : z \in N\} = (*)\end{aligned}$$

por ser d invariante bajo traslaciones, pero $x-y+x'-y'+N=N$ pues N es espacio vectorial y $x-x', y-y' \in N$. Entonces,

$$(*) = \inf\{d\,(x'-y', z) : z \in N\} \in [0, \infty)$$

por lo que $\hat{\rho}$ está bien definida. Veamos que $\hat{\rho}$ es una métrica invariante en $X \diagup N$:

(a) $0 = \hat{\rho}\,(\pi\,(x), \pi\,(y)) = \inf\{d\,(x-y, z) : z \in N\} = \inf\{d\,(x, y+z) : z \in N\}$, pero esto significa que $x \in y+N$ ya que $y+N$ es cerrado en X (podemos dar una sucesión $(y+z_n) \subset y+N$ tal que $d\,(x, y+z_n) < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Con lo cual $x-y \in N$ y $\pi\,(x) = \pi\,(y)$. Así que $0 = \hat{\rho}\,(\pi\,(x), \pi\,(y)) \Longleftrightarrow \pi\,(x) = \pi\,(y)$.

(b) Es claro que $\hat{\rho}\,(\pi\,(x), \pi\,(y)) = \hat{\rho}\,(\pi\,(y), \pi\,(x))$.

(c) Para mostrar la desigualdad del triángulo, sean $x, y, w \in X$ y consideremos

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}\,(\pi\,(x), \pi\,(y)) &= \inf\{d\,(x-y, z) : z \in N\} = \inf\{d\,(x-y, 2z) : z \in N\} \\
&= \inf\{d\,(x-z, z+y) : z \in N\} \\
&\leq \inf\{d\,(x-z, w) + d\,(w, z+y) : z \in N\} \\
&\leq \inf\{d\,(x-z, w) : z \in N\} + \inf\{d\,(w, z+y) : z \in N\} \\
&= \inf\{d\,(x-w, z) : z \in N\} + \inf\{d\,(w-y, z) : z \in N\} \\
&= \hat{\rho}\,(\pi\,(x), \pi\,(w)) + \hat{\rho}\,(\pi\,(w), \pi\,(y))
\end{aligned}$$

Con esto, $\hat{\rho}$ es una métrica en $X \diagup N$. Además, $\hat{\rho}$ es invariante:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}\,(\pi\,(x), \pi\,(y)) &= \inf\{d\,(x-y, z) : z \in N\} = \inf\{d\,((x+w)-(y+w), z) : z \in N\} \\
&= \hat{\rho}\,(\pi\,(x+w), \pi\,(y+w)) = \hat{\rho}\,(\pi\,(x)+\pi\,(w), \pi\,(y)+\pi\,(w)).
\end{aligned}$$

Al mismo tiempo que $\hat{\rho}$ es compatible con la topología cociente τ_N ya que

$$\pi\,(\{x : d\,(x, 0) < r\}) = \{\pi\,(x) : \hat{\rho}\,(\pi\,(x), 0) < r\}.$$

(iv) Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, podemos definir

$$\|\pi\,(x)\|' = \inf\{\|x-z\| : z \in N\}$$

la cual es una norma en $X \diagup N$:

(a) Sea $\pi\,(x) \in X \diagup N$ tal que $0 < \|\pi\,(x)\|' = \inf\{\|x-z\| : z \in N \Longrightarrow 0 < \|x-0\| = \|x\|$ya que $0 \in N$ y N es subespacio cerrado de X . Como $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, $x \neq 0$. Ahora, $x \notin N$ pues en caso contrario $0 < \|\pi\,(x)\|' \leq \|x-x\| = 0$.

(b) Es claro que

$$\begin{aligned}\|\alpha\pi(x)\|' &= \|\pi(\alpha x)\|' = \inf\{\|\alpha x - z\| : z \in N\} \\ &= \inf\{\|\alpha(x-z)\| : z \in N = \inf\{|\alpha|\,\|x-z\| : z \in N \\ &\leq |\alpha| \inf\{\|x-z\| : z \in N\} = |\alpha|\,\|\pi(x)\|'.\end{aligned}$$

(c) Para mostrar la desigualdad del triángulo, sean $x, y, w \in X$ y consideremos

$$\begin{aligned}\|\pi(x)+\pi(y)\|' &= \|\pi(x+y)\|' = \inf\{\|x+y-z\| : z \in N\} \\ &= \inf\{\|x+y-2z\| : z \in N\} \\ &\leq \inf\{\|x-z\| + \|x-z\| : z \in N\} \\ &\leq \inf\{\|x-z\| : z \in N\} + \inf\{\|y-z\| : z \in N\} \\ &= \|\pi(x)\|' + \|\pi(y)\|'\end{aligned}$$

(d) Nos resta probar que $\hat{\rho} : X/N \to [0,\infty)$ dada por

$$\hat{\rho}(\pi(x), \pi(y)) = \inf\{d(x-y,z) : z \in N\}$$

como en (iii) es una métrica completa si d es completa.

Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de $\hat{\rho}-$Cauchy en X/N. Entonces, podemos elegir una subsucesión $\{u_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ tal que $\hat{\rho}\left(u_{n_i}, u_{n_{i+1}}\right) < 2^{-i}$. Sea $x_1 \in X$ tal que $\pi(x_1) = u_{n_1}$; como $\hat{\rho}(u_{n_1}, u_{n_2}) < 2^{-1}$ y N es un subespacio cerrado, existe $x_2 \in X$ tal que $\pi(x_2) = u_{n_2}$ y $d(x_1, x_2) < 2^{-1}$. Inductivamente, supongamos que $x_k \in X$ y es tal que $\pi(x_k) = u_{n_k}$. Sea $x_{k+1} \in X$ tal que $\pi(x_{k+1}) = u_{n_{k+1}}$ y $d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-k}$, el cual existe pues $\hat{\rho}\left(u_{n_i}, u_{n_{i+1}}\right) < 2^{-i}\ \forall i \in \mathbb{N}$ y por ser N un subespacio cerrado. La sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ así construida es una sucesión de Cauchy en X, por tanto converge a x, para algún $x \in X$. Esto quiere decir que $\hat{\rho}(\pi(x), u_{n_i}) \leq d(x, x_i) \to 0$, cuando $i \to \infty$. Concluimos que en efecto $\{u_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ es $\hat{\rho}-$convergente en X/N y $\hat{\rho}$ es una métrica completa. n argumento similar se puede hacer para espacios de Fréchet y espacios de Banach.

■

Teorema 65 *Sean X un espacio vectorial topológico, N y F subespacios de X tales que N es cerrado y F tiene dimensión finita. Entonces, $N+F$ es cerrado.*

Demostración. Sea π la función cociente definida de X en X/N anteriormente y consideremos a X/N con su topología cociente. Ya que π es lineal, $\pi(F)$ es un subespacio vectorial de dimensión finita de X/N; pues X/N es un espacio vectorial. Por el Teorema 37, $\pi(F)$ es cerrado en X/N. Dado que $N+F=\pi^{-1}(\pi(F))$ y π es continua, concluimos que $N+F$ es cerrado. ■

Proposición 66 $(X/\ N,\tau_N)$ *τ_N es de Hausdorff si y sólo si N es un subespacio cerrado en X.*

Demostración. En el Teorema anterior se probo que π es abierta.

Sea $\mathcal{N}_0(X)$ la base de vecindades abiertas y balanceadas de 0 en (X,τ). Entonces, $[a]+\pi(\mathcal{N}_0(X))$ es una base de vecindades de $[a]$ en $(X/\ N,\tau_N)$, para todo $[a]\in X/\ N$. Donde $\pi(\mathcal{N}_o(X))$ satisface:

1) Si $V\in\pi(\mathcal{N}_o(X))$, V es balanceado y absorbente, por ser π lineal y continua.

2) τ_N es una topología lineal; es decir, la suma de vectores y producto por escalares son continuas.

Si τ_N es Hausdorff, $\{[0]\}\subset X/\ N$ es τ_N-cerrado, así que $\pi^{-1}([0])=N$ es τ-cerrado. Si F es τ-cerrado y $x\in X/\ N-\{[0]\}$, podemos encontrar $U\in\mathcal{N}_o(X)$ tal que $(x+U)\cap F=\emptyset$, de donde $\pi(x)\notin\pi(U)$. Por lo que $\pi(x)+\pi(U)\in\mathcal{N}_{\pi(x)}(X/\ N)$ y es tal que $\pi(x)+\pi(U)\subset X/\ N-\{[0]\}$. En consecuencia, $\{[0]\}$ es τ_N-cerrado en $X/\ N$, y así τ_N es de Hausdorff.
■

8.1 Seminormas y Espacios Cociente.

Como vimos anteriormente, si $X=(X,\tau)$ es un e.l.c. y $\mathcal{N}_o(X)$ es una base de vecindades de cero en X formada por conjuntos absolutamente convexos, tenemos que $\Gamma:=\{\mu_U : U\in\mathcal{N}_o(X)$, donde μ_U es la seminorma de Minkowski de $U\}$ es una familia dirigida y separante de seminormas para la topología τ en X.

Observación 67 *Para $U\in\mathcal{N}_o(X)$, definamos $N_U=N(\mu_U)=\mu_U^{-1}(0)$, el cual es un subespacio cerrado de X, ya que μ_U es continua. Mostremos que $\mu_U^{-1}(0)=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}U$:*

Si $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}U$, entonces $x=\frac{1}{n}y_n$, donde $y_n\in\frac{1}{n}U$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Esto implica que $\mu_U(x)\leq\frac{1}{n}\mu_U(y_n)\leq\frac{1}{n}$, para todo $n\in\mathbb{N}$, por lo que $\mu_U(x)=0$; es decir, $x\in\mu_U^{-1}(0)$. A la inversa, sea $x\in\mu_U^{-1}(0)$; esto significa que $\mu_U(x)=0$, de donde $x\in\mu_U^{-1}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\{z\in E:\mu_U(z)\leq\frac{1}{n}\}=\frac{1}{n}U$, para todo $n\in\mathbb{N}$, por lo que $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}U$.

Consideremos al espacio cociente, que en este caso es de Hausdorff, X/N_U, y definamos la norma:

$$\|\cdot\|_{U} : X/N_U \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\};\ \|x+N_U\|_{U} := \mu_{U}(x).$$

La cual esta bien definida, pues $x+N_U = y+N_U$ si y sólo si $x-y \in N_U$, es decir, $|\mu_{U}(x)-\mu_{U}(y)| \leq \mu_{U}(x-y) = 0$, por tanto $\mu_{U}(x) = \mu_{U}(y)$. Además, es una seminorma por como se definió, y se cumple que $\mu_{U}(x) = 0$ si y solamente si $x \in N_U$, lo cual pasa si y sólo si $x = [0]$. Así, $\left(X/N_U, \|\cdot\|_{U}\right)$ es un espacio normado.

De esta manera, definimos a la función cociente canónica

$$\pi_{U} : X \to X/N_U;\ x \longmapsto x+N_U = [x] = \pi_{U}(x),$$

y dotamos a X/N_U con la topología cociente τ_{U}. Entonces, π_{U} es claramente una función lineal y afirmamos que es (τ, τ_{U})-continua:

$$B_{\|\cdot\|_{U}} = \{[x] : \mu_{U}(x) \leq 1\} = \{[x] : x \in U\},$$

por lo que $\pi_{U}^{-1}(B_{\|\cdot\|_{U}}) = U \in \mathcal{N}_o(X)$. Ahora, llamemos $\widetilde{X/N_U}$ a la compleción de X/N_U. Entonces, la función inclusión $X/N_U \hookrightarrow \widetilde{X/N_U}$ es $(\tau_{U}, \widetilde{\tau}_{U})$-continua. De donde $\pi_{U} : X \to \widetilde{X/N_U}$ es una función continua.

Este mismo procedimiento se puede seguir para cualquier seminorma ρ definida sobre un espacio vectorial topológico X. con esto la norma:

$$\hat{\rho} : X/N_\rho \to [0, \infty\};\ \ \widehat{\rho}([x]) = \rho(x)$$

donde $N_\rho = \{x : \rho(x) = 0\}$, el cual es un subespacio de X. Así, $\widehat{\rho}$ esta bien definida, pues $[x] = [y]$ si y sólo si $x-y \in N_\rho$, es decir, $|\rho(x)-\rho(y)| \leq \rho(x-y) = 0$, por tanto $\rho(x) = \rho(y)$. Además, es una seminorma por como se definió, y se cumple que $\rho(x) = 0$ si y solamente si $x \in N_\rho$, lo cual pasa si y sólo si $[x] = [0]$. Por lo tanto $\left(X/N_\rho, \|\cdot\|_{\rho} = \widehat{\rho}\right)$ es un espacio normado.

9 Ejemplos.

9.1 Los espacios $C(\Omega)$.

Si Ω es un subconjunto abierto y no vacío de algún espacio euclidiano, entonces Ω es la unión de una cantidad numerable de conjuntos compactos $K_n \neq \varnothing$ los cuales podemos elegir de tal manera que K_n está contenida en el interior de K_{n+1} $(n = 1, 2, 3, ...)$. Esto se cumple ya que si $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{K}^m$ es abierto, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$F_n = \{x \in \Omega : d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\},$$

donde cada F_n es cerrado. Como $B_n(0) = \{x \in \mathbb{K}^m : \|x\| \leq n\}$ es compacto, entonces $K_n = B_n(0) \cap F_n \subset \Omega$ también es compacto. Además, se cumplen las siguientes propiedades:

i) $K_n \subset K_{n+1}^o, \ \forall n \in \mathbb{N}$,

ii) $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} Kn$ y

iii) Si $E \subset \Omega$ es compacto, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $E \subset K_n$:

Dado que E es compacto, $d(E, \Omega^c) > 0$ y E es acotado, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(E, \Omega^c) > \frac{1}{n_0}$ y $E \subset B_{n_0}(0)$. Esto implica que $E \subset K_{n_0}$.

Definamos ahora a $C(\Omega)$ como el espacio vectorial de todas las funciones continuas de Ω en el campo de los números complejos, a $C(\Omega)$ le asignamos la topología generada por la familia separante de seminormas (ver Teorema 59)

$$p_n(x) = \sup\{|f(x)| : x \in K_n\}.$$

Por como construimos a los conjuntos K_n, $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n \leq ...$, los conjuntos

$$V_n = \left\{ f \in C(\Omega) : p_n(f) < \frac{1}{n} \right\}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

forman una base local convexa para $C(\Omega)$. Recordemos que como $\wp = \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una familia separante numerable de seminormas en X, $C(\Omega)$ es metrizable; y además, podemos definir una métrica invariante bajo traslación y compatible con esta topología; esto es, directamente de $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ podemos definir la métrica

$$\frac{2^{-n} p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)} \leq d(f,g) = \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^{-n} p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)} \leq p_n(f-g) \qquad \forall n \in \mathbb{N}..... (*)$$

Veamos que esta métrica es completa: Sea $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión d-Cauchy en $C(\Omega)$, entonces

$$\frac{2^{-n} p_n(f_i - f_j)}{1 + p_n(f_i - f_j)} \leq d(f_i, f_j) \to 0$$

cuando $i, j \to \infty$, y esto para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde $p_n(f_i - f_j) \to 0$, si $i, j \to \infty$, y así $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión uniformemente convergente sobre K_n a alguna $f \in C(\Omega)$, y esto $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto implica que, de la desigualdad $(*)$, $d(f, f_i) \to 0$, siempre que $i \to \infty$; esto significa que d es una métrica completa. Con esto concluimos que $C(\Omega)$ es un espacio de Fréchet.

Por (b) del Teorema 59, un subconjunto $E \subset C(\Omega)$ es acotado si y sólo si existen $0 < M_n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $p_n(f) \leq M_n$ para toda $f \in E$; esto significa que

$$|f(x)| \leq M_n \qquad \text{si } f \in E \text{ y } x \in K_n.$$

Por construcción, cada V_n contiene una función f para la cual p_{n+1} es tan grande como se quiera, tenemos que V_n no es acotada. Entonces $C(\Omega)$ no es localmente acotado y por tanto no normable.

9.2 Los Espacios L^p, $0 < p < 1$.

Para el siguiente ejemplo recordemos algunas definiciones de Teoría de la Medida:

En adelante X es un conjunto no vacío.

Definición 68 *Sea Ω una familia de subconjuntos de X. Decimos que Ω es un σ-*álgebra *si satisface lo siguiente:*

1. *$\emptyset, X \in \Omega$,*
2. *Si $A \in \Omega$, entonces $A^c \in \Omega$,*
3. *Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de elementos de Ω, entonces*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega.$$

Definición 69 *Un par ordenado (X, Ω), donde X es un conjunto no vacío y Ω un σ-álgebra de subconjuntos de X, lo llamamos* espacio medible*: y a todo conjunto $A \in \Omega$ lo llamamos Ω-medible.*

Definición 70 *A una función $\mathbb{R}$-valuada definida en X es* Ω-medible *si*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \Omega$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Mientras que una función $f : X \to \mathbb{C}$, $f = f_1 + i f_2$ es medible si y sólo si f_1 y f_2 son Ω-medibles.

Definición 71 *Una* medida *es una función extendida $\mathbb{R}$-valuada $f : \Omega \to [0, +\infty]$ con Ω un σ-álgebra de subconjuntos de X, tal que*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$*

2. $\mu(E) \geq 0 \ \forall E \in \Omega$

3. μ *es aditiva numerable:* $E_n \in \Omega \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

Definición 72 *Un* espacio de medida *es una tripleta* (X, Ω, μ) *tal que* X *es un conjunto no vacío,* Ω *es un* σ*-álgebra de subconjuntos de* X*, y* μ *es una medida definida en* Ω*.*

Definición 73 *Si* P *es una propiedad en* (X, Ω, μ) *un espacio de medida se cumple* μ*-casi donde quiera si* $\exists N \in \Omega$ *tal que* $\mu(N) = 0$ *y* P*se vale en* $X \diagdown N$*.*

Por ejemplo, $f(x) = g(x)$ μ-casi donde quiera si $f(x) = g(x) \ \in \forall x \notin N$ para algún $N \in \Omega$ tal que $\mu(N) = 0$.

Sea $X = \mathbb{R}$, el *álgebra de Borel* B es el σ-álgebra generada por los intervalos abiertos (a, b) en $\mathbb{R}$. La *medida de Lebesgue* esta definidad por:

$$\lambda((a, b)) = b - a$$

donde $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Sea $0 < p < 1$ fijo. Definimos a L^p como el conjunto de todas las funciones Lebesgue medibles en $[0, 1]$ tales que

$$\Delta(f) = \int_0^1 |f(t)|^p \, dt < \infty$$

con la identificación de funciones tal que dos de estas coinciden casi donde quiera.

Como $0 < p < 1$, tenemos

$$(a + b)^p \leq a^p + b^p \qquad \forall a, b \geq 0.$$

Entonces, $\Delta(f + g) \leq \Delta(f) + \Delta(g)$ y si definimos por

$$d(f, g) = \Delta(f - g)$$

d es una métrica invariante en L^p.

Por otro lado, sabemos que dada esta métrica en L^p, (L^p, d) es un espacio completo. Además, las bolas

$$B_r = \{f \in L^p : \Delta(f) < r\}, r > 0$$

forman una base local para la topología d en L^p. Además,

$$\Delta(f) = \int_0^1 |f(t)|^p \, dt < r$$

si y sólo si $\int_0^1 \left|\frac{f(t)}{r^{\frac{1}{p}}}\right|^p dt < 1$, lo cual implica que $B_1 = r^{\frac{1}{p}} B_r$, esto para todo $r > 0$. De aquí que B_1 es acotada y (L^p, d) es un F-espacio localmente acotado.

Afirmación 74 *Los únicos subconjuntos de (L^p, d) convexos y abiertos son $\emptyset$ y L^p.*

Para probar esto, supongamos que $V \neq \varnothing$ es abierto y convexo en L^p. Como la traslación por un vector fijo es una función continua $-y + V = V'$ es abierto; mientras que si $-y + x, -y + z \in -y + V$, con $x, z \in V$,

$$\begin{aligned} t(-y+x) + (1-t)(-y+z) &= t(-y) + tx + (1-t)(-y) + (1-t)z \\ &= -y + tx + (1-t)z \in -y + V \end{aligned}$$

por lo que $-y + V$ es convexo. Entonces, podemos suponer que $0 \in V$ y que es abierto y convexo. Así que existe $r > 0$ tal que $B_r \subset V$. Sea $f \in L^p$; como $p < 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^{p-1}\Delta(f) < r$. Por la continuidad de la integral indefinida de $|f|^p$, podemos encontrar n puntos $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$ tales que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p \, dt = n^{-1}\Delta(f) \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Definamos $g_i(t) = nf(t)$ si $x_{i-1} < t \leq x_i$, $g_i(t) = 0$ en otro caso. Entonces, $g_i \in V$ ya que de la igualdad anterior tenemos lo siguiente

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p \, dt = \Delta(g_i) = n^{p-1}\Delta(f) < r \qquad (1 \leq i \leq n).$$

y $B_r \subset V$. Como V es convexo y $f = \frac{1}{n}(g_1 + ... + g_n)$, obtenemos que $f \in V$ y con esto concluimos que $V = L^p$, como queríamos.

De esta propiedad de los subconjuntos convexos de L^p tenemos la siguiente consecuencia.

La función constante 0 es la única función lineal y continua de L^p sobre cualquier espacio localmente convexo Y, si $0 < p < 1$. En particular, 0 es la única función continua en estos L^p espacios.

Demostración. Supongamos que $\Lambda : L^p \to Y$ es una función lineal y continua, donde Y es un espacio localmente convexo. Sea $\mathfrak{B}$ una base local convexa y balanceada de Y. Si $W \in \mathfrak{B}$, entonces $\Lambda^{-1}(W)$ es convexo, abierto y no vacío, al menos $0 \in \Lambda^{-1}(W)$. De aquí que $\Lambda^{-1}(W) = L^p$. En consecuencia, $\Lambda(L^p) \subset W$ para cada $W \in \mathfrak{B}$. Esto implica que $\Lambda(f) = 0$ para toda $f \in L^p$. ■

Ejercicios del primer capítulo del libro: W. Rudin, Functional Analysis.

1. Sea X un espacio vectorial. Prueba las siguientes afirmaciones:
   (a) La unión (intersección) arbitraria de subconjuntos balanceados de X es balanceada.
   (b) La intersección arbitraria de subconjuntos convexos de X es convexa.
   (c) Si Γ es una colección de subconjuntos convexos tal que Γ es totalmente ordenado por inclusión, entonces la unión de todos los elementos de Γ es convexo.
   (d) Demuestra que las afirmaciones de los dos incisos anteriores se cumplen si en lugar de subconjuntos convexos consideramos subespacios vectoriales.
   (e) Sea $B = \{(z_1, z_2)\epsilon C^2 : |z_1| \leq |z_2|\}$. Demuestra que B es balanceado pero su interior no.

2. Supongamos que
   (a) X y Y son espacios vectoriales topológicos,
   (b) $L : X \to Y$ es lineal,
   (c) N es un subespacio cerrado de X,
   (d) $\pi : X \to X/N$ es la función cociente, y
   (e) $Lx = 0$ para todo $x\epsilon N$.

   Prueba que existe una única $f : X/N \to Y$ tal que $L = f \circ \pi$ (es decir, $Lx = f(\pi(x))$ para todo $x\epsilon X$).Demuestra que: f es lineal; L es continua si y sólo si f es continua; y que L es abierta si y sólo si f es abierta.

3. Sean X y Y espacios vectoriales topológicos con $dim(Y) < \infty$,$L : X \to Y$ lineal, y $L(X) = Y$
   (a) Prueba que L es una función abierta.
   (b) Si además el núcleo de L es cerrado, prueba que entonces L es continua.

4. Supongamos que M es un subespacio denso de X un espacio vectorial topológico, Y es un F-espacio, y que $L :, M \to Y$ es continua (donde M tiene la topología heredada de X). Prueba que L tiene una extensión lineal y continua $\tilde{L} : X \to Y$. Sugerencia:ver el ejercicio 19 de Rudin.