Capítulo 1

Capítulo 2

Completez

2.1. Teorema de Baire

2.1 Definición. Sea S un espacio topológico y $E \subset S$. Se dice que E es denso en ningún lado, si $int(\overline{E}) = \emptyset$.

2.2 Observación. $int(\overline{E}) = \emptyset$ sii $\overline{(\overline{E})^c} = S$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que E es cerrado.

$int(E) = \emptyset \iff$ para todo elemento en la topología τ, V diferente del vació no está contenido en $E \iff$ existe $x \in V$ y $x \notin E \iff x \in V$ y $x \in E^c$ $\iff V \cap E^c$ es diferente del vacío.

2.3 Definición. Se dice que un conjunto es de primera categoría en S si se puede ver como la unión numerable de conjuntos densos en ningún lado. Si un conjunto de S no es de primera categoría, se dice que es de segunda categoría.

Propiedades:

1. Si $A \subset B$ y B es de primera categoría, entonces A es de primera categoría.

2. Cualquier unión numerable de conjuntos de primera categoría es de primera categoría.

3. Cualquier conjunto cerrado en S cuyo interior es vacío es de primera categoría en S.

4. Si h es un homeomorfismo de S en S y si $E \subset S$, entonces E y $h(E)$ son de la misma categoría.

Demostración. 1. Sea $A \subset B$, se puede ver que $A = A \cap B = \cup_{i=1}^{\infty}(A \cap X_i)$, donde cada X_i es denso en ningún lado.

4. Supongamos que E es de primera categoría, entonces $E = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$, donde cada X_i es denso en ningún lado. Aplicando h a E tenemos que $h(E) = \cup_{i=1}^{\infty} h(X_i)$. Suponemos que cada X_i es cerrado, luego $h(X_i)$ es cerrado ya que h^{-1} es continua, por demostrar que cada $h(X_i)$ es denso en ningún lado. Supongamos que no es así, es decir, existe $x \in int(h(X_i))$ luego,

$$h^{-1}(x) \in h^{-1} int(h(X_i)) \subset int(h^{-1}h(X_i)) = \emptyset,$$

lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, cada $h(X_i)$ es denso en ningún lado, y así, $h(E)$ es de primera categoría.

Si suponemos que E es de segunda categoría y $h(E)$ de primera, aplicamos h^{-1} a $h(E)$ y por lo anterior, llegamos a que E es de primera categoría. Si suponemos que E es de primera categoría y $h(E)$ de segunda categoría, entonces por la demostración anterior tenemos a una contradicción.

2.4 Teorema. Teorema de Baire: Si S es un espacio métrico completo (localmente compacto y de Hausdorff), entonces es de segunda categoría.

Por demostrar que dada cualquier colección numerable de conjuntos densos en ningún lado (X_i), existe un elemento $x \in S$ tal que x no está en ningún X_i, en otras palabras $S \neq \cup_{i=1}^{\infty} X_i$. Aún más, vamos a demostrar que la intersección de cualquier colección numerable de conjuntos abiertos y densos de S es densa. Dada (X_i) con cada X_i denso en ningún lado, definamos para cada $i = 1, 2, 3\cdots$, $V_i = \overline{X_i}^c$ que es una colección de abiertos y densos. Si demostramos que $\overline{\cap_{i=1}^{\infty} V_i} = S$, entonces $\cap_{i=1}^{\infty} V_i \neq \emptyset$, luego $S \neq \cup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Demostración. Supongamos que S es un espacio métrico completo. Sea $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos densos en ningún lado en S, $V_i = \overline{X_i}^c$ para cada $i = 1, 2, 3...$, $p \in S$ y W un abierto que lo contiene.

Por demostrar

$$W \cap (\cap_{i=1}^{\infty} V_i) \neq \emptyset.$$

Como V_1 es denso y abierto, existe x_1 y $r_1 < 1$ tal que

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subset W \cap V_1.$$

Como V_2 es abierto y denso, $\emptyset \neq V_2 \cap B(x_1, r_1)$, luego existen x_2 y $r_2 < 1/2$ tal que

$$\overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_1, r_1) \cap V_2 \subset \overline{B(x_1, r_1)},$$

Si continuamos este procedimiento, construimos una sucesión de conjuntos cerraros $(\overline{B(x_i, r_i)})_{i=1}^{\infty}$ tal que

1. $0 < r_n < 1/n$
2. $\overline{B(x_n, r_n)} \subset \overline{B(x_{n-1}, r_{n-1})}$
3. Además, $\overline{B(x_n, r_n)} \subset V_n$ para cada $n = 1, 2, 3 \cdots$.

Por 1 y 2 tenemos que (x_n) es una sucesión de Cauchy, y como S es completo existe $x \in S$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Por la construcción tenemos que $x \in \cap_{i=1}^{\infty}\overline{B(x_n, r_n)} \subset \cap_{i=1}^{\infty} V_i$ y $x \in \overline{B(x_1, r_1)} \subset W \cap V_1$. Por lo tanto, $\cap_{i=1}^{\infty} V_i$ es denso en S.

Así, $x \in \cap_{i=1}^{\infty} V_i = \cap_{i=1}^{\infty}(\overline{X_i})^c$, es decir, $x \in (S - \overline{X_i})$ para cada $i = 1, 2, 3...$ luego, $x \notin X_i$ para cada $i = 1, 2, 3 \cdots$ lo que nos dice que $S \neq \cup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Supongamos que S es locamente compacto y de Hausdorff. Sea (V_i) una colección de abiertos y densos de S y W un abierto no vacío en S. Por demostrar que $W \cap (\cap_{i=1}^{\infty} V_i) \neq \emptyset$.

Notemos que $W \cap V_1$ es abierto y no vacío, luego tomamos B_1 abierto no vacío tal que (y además, por ser T^2 tenemos)

$$\overline{B_1} \subset W \cap V_1.$$

Repitiendo este procedimiento n veces tenemos

$$\overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap V_n,$$

además, podemos tomar a cada $\overline{B_n}$ compacto.

Sea $K = \cap_{i=1}^{\infty}\overline{B_n}$, por la propiedad de la intersección finita, tenemos $K \neq \emptyset$. Luego, $x \in K \subset \cap_{i=1}^{\infty} V_i$, $x \in \overline{B_1} \subset W \cap V_1$. Así,

$$W \cap (\cap_{i=1}^{\infty} V_i) \neq \emptyset.$$

2.2. Teorema de Banach-Steinhaus

2.5 Definición. Supongamos que X y Y son espacios vectoriales topológicos y $\Gamma = \{\Lambda : X \to Y, \text{ lineal y continuo}\}$. Se dice que Γ es equicontinua, si para toda vecindad W de cero en Y, existe una vecindad V de cero en X tal que $\Lambda(V) \subset W$ para cada $\Lambda \in \Gamma$.

2.6 Teorema. Suponga que X y Y son espacios vectoriales topológicos y $\Gamma = \{\Lambda : X \to Y, \text{ lineal y continuo}\}$ es equicontinua y E es acotado en X. Entonces Y tiene un conjunto F acotado tal que $\Lambda(E) \subset F$ para cada $\Lambda \in \Gamma$.

Demostración. Sea $F = \cup\{\Lambda(E), \Lambda \in \Gamma\}$ y W una vecindad de cero en Y. Como Γ es una colección equicontinua, existe V vecindad de cero en X tal que $\Lambda(V) \subset W$ para cada $\Lambda \in \Gamma$. Como E es acotado, $E \subset tV$ para t suficientemente grande, luego $\Lambda(E) \subset t\Lambda(V) \subset tW$. Por lo tanto, $F \subset tW$, luego F es acotado.

2.7 Teorema (Banach-Steinhaus)**.** Supongamos que X y Y son espacios vectoriales topológicos, $\Gamma = \{\Lambda : X \to Y, \text{ lineal y continuo}\}$ y B es el conjunto de $x \in X$ tales que

$$\Gamma(x) = \{\Lambda(x) : \Lambda \in \Gamma\}$$

es acotado en Y. Si B es de segunda categoría en X, $B = X$ y Γ es equicontinua.

Demostración. Tomemos U y W vecindades balanceadas en Y tales que $\overline{U} + \overline{U} \subset W$.

Sea

$$E = \bigcap_{\Lambda\in\Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}).$$

Si $x \in B$, entonces $\Gamma(x) \subset nU$ para una n suficientemente grande ($\Lambda(x) \in nU$ para cada $\Lambda \in \Gamma$). Así, $x \in nE$, y por lo tanto, $B \subset \cup_{I=1}^{\infty} nE$. Como B es de segunda categoría al menos un nE lo és. Como $x \to nx$ es un homeomosfismo de X en X, el conjunto E es de segunda categoría en si mismo. Pero E es cerrado ya que cada Λ es continuo. Por lo tanto, existe $x \in int(E)$. Entonces $x - E$ contiene una vecindad del cero V en X, notemos además que $\Lambda(E) \subset \cap_{\Lambda\in\Gamma}\Lambda(\Lambda^{-1}(\overline{U})) \subset \overline{U}$,

$$\Lambda(V) \subset \Lambda(x) - \Lambda(E) \subset \overline{U} + \overline{U} \subset W$$

para cada $\Lambda \in \Gamma$. Por lo tanto, Γ es equitontinua.

Por demostrar que $X = B$. Sea $x \in X$ que es un conjunto acotado (por ser singular), por el teorema anterior, existe $F = \Gamma(x)$ acotado en Y tal que

$$\Lambda(x) \subset \Gamma(x),$$

por lo tanto, $x \in B$.

2.8 Teorema. Si $\Gamma = \{\Lambda : X \to Y, \textit{lineal y continuo}\}$ con X espacio métrico completo con métrica invariante (F-espacio), Y espacio vectorial topológico y los conjuntos

$$\Gamma(x) = \{\Lambda(x) : \Lambda \in \Gamma\}$$

son acotados en Y para cada $x \in X$, entonces Γ es equicontinua.

Demostración. Como X es de segunda categoría, aplicando el teorema anterior tenemos que Γ es equicontinua.

2.9 Teorema. Suponga que X y Y son espacios vectoriales topológicos y (Λ_n) es una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y.

1. Si C es el conjunto de todos los $x \in X$ tales que $(\Lambda_n x)$ es una sucesión de Cauchy y C es de segunda categoría en X, entonces $C = X$.

2. Si L es el conjunto de todos los $x \in X$ tales que $\Lambda x = \lim \Lambda_n x$ existe, L de segunda categoría en X y Y es un $F-espacio$, entonces $L = X$ y $\Lambda : X \to Y$ es continuo.

Demostración. 1. Como $(\Lambda_n x)$ es de Cauchy paca cada $x \in C$, $\Lambda_n x$ es acotada y C es de segunda categoría, entonces por el Teorema de Banch-Steinhaus (Λ_n) es equicontinua y $C = X$.

2. Notemos que $L = C$, ya que Y es completo además, L es de segunda categoría, luego por el Teorema de Banach-Steinhaus (Λ_n) es equicontinua y $C = L = X$. Sea W una vecindad del cero en Y, luego existe una vecindad de cero en Y, W_1 tal que $\overline{W_1} \subset W$, (Teo 1.11), como la sucesión (Λ_n) es equicontinua, existe V una vecindad de cero en X tal que $\Lambda_n(V) \subset W_1$, luego $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(V) \subset \overline{W_1} \subset W$. Por lo tanto, Λ es continua.

2.10 Teorema. Si (Λ_n) operadores definidos de X en Y, donde X es un F-espacio y Y un espacio vectorial topológico. Si $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n x = \Lambda x$ existe para cada $x \in X$, entonces Λ es continuo.

Demostración. Como $(\Lambda_n x)$ es acotado para cada $x \in X, \Gamma(x) = \{\Lambda_n x, n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en Y y como X es completo, por el Teorema de Banach-Steinhaus (Λ_n) es equicontinua. Para demostrar que Λ es continua el argumento es el mismo que en teorema anterior.

2.11 Teorema. Supongamos que X y Y son espacios vectoriales topológicos, K un compacto y convexo en X, Γ una colección de operadores lineales y continuos de X en Y y

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x, \Lambda \in \Gamma\}$$

son conjuntos acotados para cada $x \in K$, entonces existe un conjunto acotado $B \subset Y$ tal que $\Lambda(K) \subset B$ para cada $\Lambda \in \Gamma$.

Demostración. Sea $B = \cup\{\ \Gamma(x), x \in K\}$. Tomemos vecindades W y V de cero en Y tales que $\overline{U} + \overline{U} \subset W$. Sea

$$E = \bigcap_{\Lambda\in\Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}).$$

Notemos que si $x \in K$, entonces $\Gamma(x) \subset nU$ para algún n lo suficientemente grande, ya que $\Gamma(x)$ es acotado por hipótesis, ($\Lambda(x) \subset n\overline{U}$ para cada $\Lambda \in \Gamma$, luego $x \in \Lambda^{-1}(\Lambda(x)) \subset \Lambda^{-1}(n\overline{U})$, es decir, x está en la preimagen de $n\overline{U}$) luego $x \in nE$, además

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty}(K \cup nE).$$

Como E es cerrado (cada Λ es continua) y K es compacto, por el Teorema de Baire afirma que al menos un $K \cap nE$ tiene interior (relativo a K) diferente al vacío. Fijemos n_0 tal que $x_0 \in int(K \cap n_0E)$, ahora tomemos V una vecindad balanceada de cero en X tal que $K \cap (x_0 + V) \subset n_0E$.

Sea $p > 1$ fijo tal que $K \subset x_0 + pV$, (p existe ya que K es compacto). Si $x \in K$ y $z = (1 - p^{-1})x_0 + p^{-1}x$, entonces $z \in K$ ya que K es convexo, y también $z - x_0 = p^{-1}(x - x_0) \in V$ porque $x \in x_0 + pV$. Como $z \in nE$,

$$\Lambda(nE) = n\Lambda(E) \subset \overline{U},$$

para toda $\Lambda \in \Gamma$, además $x = pz - (p-1)x_0$, y como $\overline{U}$ es balanceado tenemos y $(p-1)n\overline{U} \subset pn\overline{U}$

$$\Lambda(x) \in pn\overline{U} - (p-1)n\overline{U} \subset pn\overline{U} + (p-1)n\overline{U} \subset pn(\overline{U} + \overline{U}) \subset pnW,$$

luego, $B \subset pnW$.

2.3. Teorema del mapeo abierto

Sea $f : S \to T$, donde S y T son espacios vectoriales topológicos. Se die que f es abierta en $p \in S$, si dada cualquier vecindad $V \subset S$ de p existe una vecindad W de $f(p)$ tal que $W \subset f(V)$. La función f es abierta, si es abierta en cada punto.

En otras palabras, decimos que f es abierta, si para cualquier U abierto en S, $f(U)$ es un conjunto abierto en T.

Nota: Un mapeo uno a uno, sobre y continuo es homeomorfismo, cuando es abierto.

2.12 Teorema. Supongamos que:

a) X es un F-espacio.

b) Y es un espacio vectorial topológico.

c) $\Lambda : X \to Y$ es lineal y continua en Y.

d) $\Lambda(X)$ es de segunda categoría.

Entonces

(i) $\Lambda(X) = Y$

(ii) Λ es abierto

(iii) Y es un F-espacio.

Demostración. Notemos que (ii) implica (i), ya que Y es el único subespacio vectorial abierto de Y.

Por demostrar (ii), sea V una de cero en X, veamos que existe una vecindad W de cero en Y tal que $W \subset \Lambda(V)$. Sea d una métrica invariante en X y $\tau_d = \tau_X$. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$V_n = \{x : d(x, 0) < 2_{-n} r\},$$

donde $r > 0$ y de tal manera que $V_0 \subset V$.

Probaremos que para alguna vecindad de cero W en Y

$$W \subset \overline{\Lambda(V_1)} \subset \Lambda(V). \tag{2.1}$$

Como $V_1 \subset V_2 - V_2$, (ya que Y es un espacio vectorial topológico), por b) del Teorema 1.13 tenemos

$$\overline{\Lambda(V_1)} \subset \overline{\Lambda(V_2) - \Lambda(V_2)} \subset \overline{\Lambda(V_2)} - \overline{\Lambda(V_2)}. \tag{2.2}$$

Probaremos que $int(\overline{\Lambda(V_2)}) \neq \emptyset$. Notemos que

$$\Lambda(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\Lambda(V_2),$$

como $\Lambda(X)$ es de segunda categoría en Y al menos un $k\Lambda(V_2)$ lo es. Recordemos que $y \to ky$ es un homemorfismo de Y en Y, así $\overline{\Lambda(V_2)}$ es de segunda categoría en Y. Por lo tanto, $int(\overline{\Lambda(V_2)}) \neq \emptyset$.

Ahora, probaremos la segunda inclusión de la expresión (2.1). Sea $y_1 \in \overline{\Lambda(V_1)}$ fijo, supongamos que para $n \geq 1$ y tomemos y_n tales que $y_n \in \overline{\Lambda(V_n)}$.

En la expresión (2.2) demostramos que $\overline{\Lambda(V_1)}$ contiene una vecindad del cero, el mismo argumento lo repetimos para $\overline{\Lambda(V_{n+1})}$, luego contiene una vecindad del cero.

Luego,

$$y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})} \cap \Lambda(V_n) \neq \emptyset,$$

existe $x_n \in V_n$ tal que $\Lambda(x_n) \in y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}$.

Sea $y_{n+1} = y_n - \Lambda(x_n)$, entonces $y_{n+1} \in \overline{\Lambda(V_{n+1})}$.

Como $d(x_n, 0) < 2^n r$, $n = 1, 2, ...$ las sumas $S_n = x_1 + ... + x_n$ forman una sucesión de Cauchy en X ($S_n + S_{n+1} = d(x_{n+1}, 0) < \epsilon$ para n lo suficientemente grande). Luego, S_n es convergente, es decir, existe $x \in X$ tal que $d(x, 0) < r$, lo que implica que $x \in V$,

$$\sum_{n=1}^{m} \Lambda(x_n) = \sum_{n=1}^{m} (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{m+1}.$$

Como $y_{n+1} \to 0$, cuando $n \to \infty$, por la continuidad de Λ tenemos que $y_1 = \Lambda(x) \in \Lambda(V)$, por lo tanto, se tiene la contención (2.1) se cumple.

Ahora, veamos que Y es un F-espacio. Recordemos que X/N es un F-espacio, donde $N = \{x : \Lambda(x) = 0\}$. Veamos que existe un isomorfismo de X/Y sobre Y.

Sea $f : X/N \to Y$, definido como $f(x + N) = \Lambda(x)$. Es claro que es uno a uno, por la linealidad. $\Lambda(x) = f(\pi(x))$, donde π es el mapeo cociente. Veamos que f es continua, para demostrarlo sea V un abierto en Y

$$f^{-1}(V) = \pi(\Lambda^{-1}(V)),$$

como Λ es continua $\Lambda^{-1}(V)$ es abierto y recordemos que π es un mapeo abierto, luego $f^{-1}(V)$ es abierto. Por lo tanto f es continua.

Sea E un abierto en X/N, entonces

$$f(E) = \Lambda(\pi(E)),$$

como π es continua y Λ es abierto, f^{-1} es continua. Luego, f es un homeomorfismo. Así, Y es un F-espacio.

2.13 Corolario. (i) Si Λ es un mapeo lineal continuo y sobre de X en Y con X y Y F-espacios, entonces Λ es abierto.

(ii) Si Λ satisface (i) y es uno a uno, entonces Λ^{-1} es continua.

(iii) Si X y Y son espacios de Banach y si $\Lambda : X \to Y$ es lineal, continua, uno a uno y sobre, entonces existen contantes positivas a, b tales que $a||x|| \leq ||\Lambda(x)|| \leq b||x||$ para todo $x \in X$.

(iv) Si $\tau_1 \subset \tau_2$ son topologías en X y (X, τ_1) y (X, τ_2) son F-espacios, entonces $\tau_1 = \tau_2$.

Demostración.
(i) Como $\Lambda(X) = Y$ y Y es un F-espacio, por el Teorema del mapeo abierto tenemos que Λ es abierta.

(ii) Sea $U \subset X$ abierto, como Λ es abierta, $\Lambda(U)$ es abierto, luego Λ^{-1} es continua.

(iii) Dado $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(0, \delta)$, entonces $||\Lambda(x)|| \leq 1$. Sea $x \in X$ con norma diferente de cero, $\dfrac{\delta x}{2||x||} \in B(0, \delta)$, luego

$$\left|\left|\Lambda\left(\frac{\delta x}{2||x||}\right)\right|\right| \leq 1,$$

por la linealidad tenemos

$$||\Lambda(x)|| \leq ||x||\frac{\delta}{2}.$$

Como Λ^{-1} es continua, dado $\epsilon = 1$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $y \in B(0, \delta_1)$, entonces $||\Lambda^{-1}(y)|| \leq 1$ luego

$$\left|\left|\Lambda\left(\frac{\delta_1 y}{2||y||}\right)\right|\right| = \frac{\delta_1}{2||y||}||\Lambda^{-1}(y)|| \leq 1,$$

además, Λ es uno a uno y sobre existe un único $x \in X$ tal que $\Lambda(x) = y$, remplazando $\Lambda(x)$ en la expresión anterior tenemos $\dfrac{\delta_1}{2}||\Lambda^{-1}\Lambda(x)|| \leq ||\Lambda(x)||$, así,

$$\frac{\delta_1}{2}||x|| \leq ||\Lambda(x)||.$$

(iv) Sea $I : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$, I es lineal continua, sobre, uno a uno por (i) I es abierta, luego si $U \in \tau_2$, $I(U) = U \in \tau_1$.

Nota: Por el Teorema 1.32, sabemos que si X es metrizable, Y espacio topológico y $\Lambda : X \to Y$ lineal, entonces es equivalente que Λ sea continua, acotada, y si $x_n \to 0$, entonces $\Lambda x_n \to 0$. Ahora, veamos que si además X y Y son espacio normados y $\Lambda : X \to Y$ lineal, entonces son equivalentes las siguientes aseveraciones

(1) Λ continua.

(2) Λ acotada.

(3) Si $x_n \to 0$, $\Lambda x_n \to 0$.

(4) Existe una contante positiva, a tal que $||\Lambda x|| \leq a||x||$ para todo $x \in X$.

Demostración. Como X es metrizable tenemos que las primeras 3 aseveraciones son equivalentes, además la continuidad implica (4). Veamos que (4) implica (3). Sea $x_n \to 0$, $||\Lambda(x_n)|| \leq a||x_n|| \leq a\epsilon$ para n suficientemente grande, por lo tanto $\Lambda x_n \to 0$, $n \to \infty$.

2.4. Teorema de la gráfica cerrada

Sea $f : X \to Y$, con X y Y conjuntos, la gráfica de f es $\{(x, f(x)), x \in X\} \subset X \times Y$. Si X y Y son espacios topológicos y $X \times Y$ tiene la topología usual del producto (la topología más pequeña que contiene los conjuntos $U \times V$, U abierto en X y V abierto en Y).

Si $f : X \to Y$ fuese continua, uno esperaría que la gráfica de f fuera cerrada.

2.14 Proposición. Si X es un espacio topológico, Y de Hausdorff y $f : X \to Y$ es continua, entonces la gráfica G de f es cerrada.

Demostración. Sea $\Omega = G^c$ en $X \times Y$, veamos que Ω es abierto. Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$, es decir, $f(x_0) \neq y_0$. Como Y es Hausdorff, y_0 y $f(x_0)$ tienen vecindades disjuntas V y W en Y, respectivamente. Como f es continua en x_0 existe una vecindad $U \subset X$ tal que $f(U) \subset W$.

La vecindad $U \times V$ de (x_0, y_0) está en Ω, por lo tanto Ω es abierto, y así G es cerrado.
Nota: No se puede omitir que Y sea de Hausdorff.

2.15 Teorema (Gráfica cerrada)**.** Suponga que:

1. X y Y son F-espacios.
2. $\Lambda : x \to Y$ es lineal.
3. $G = \{(x, f(x)), x \in X\}$ cerrado en $X \times Y$.

Entonces Λ es continuo.

Demostración. Notemos que $X \times Y$ es un espacio vectorial, si definimos la suma y el producto por un escalar como:

$$\alpha(x, y) + \beta(x_1, y_1) = (\alpha x + \beta x_1, \alpha y + \beta y_1).$$

Sean d_x y d_y métricas de X y Y, respectivamente, tales que $\tau_x = \tau_{d_x}$ y $\tau_y = \tau_{d_y}$.

Si definimos $d : (X \times Y) \ \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ como

$$d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = d_x(x_1, x_2) + d_y(y_1, y_2),$$

vemos que$d$ es una métrica y además es invariante.

Es claro que:

1) $d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] < \infty$.

2) Si $d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = 0$ sii $d_x(x_1, x_2) + d_y(y_1, y_2) = 0$ sii $d_x(x_1, x_2) = 0$ y $d_y(y_1, y_2) = 0$ sii $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.

3) Es claro que $d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = d[(x_2, y_2), (x_1, y_1)]$.

4) $d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = d_x(x_1, x_2) + d_y(y_1, y_2) \leq d_x(x_1, x_3) + d_x(x_3, x_2) + d_y(y_1, y_3) + d_y(y_3, y_2) = d[(x_1, y_1), (x_3, y_3)] + d[(x_3, y_3), (x_2, y_2)]$. Por lo tanto, es métrica.

Veamos que es invariante

$$\begin{aligned} d[((x_1, y_1) + (x_3, y_3)), ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))] &= d_x(x_1 + x_3, x_2 + x_3) \\ &\quad + d_y(y_1 + y_3, y_2 + y_3) \\ &= d_x(x_1, x_2) + d_y(y_1, y_2) \\ &= d((x_1, y_1), (x_2, y_a)) \end{aligned}$$

Veamos que $\tau_d = \tau$, la topología producto. Sea $\mathcal{B} = \{B((x, y), r) : (x, y) \in X \times Y, r > 0\}$ base de τ_d y $\mathcal{B}' = \{B_1 \times B_2, B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ con $\mathcal{B}_1$ base de τ_{d_x} y $\mathcal{B}_2$ base de τ_{d_y} (observemos que $\mathcal{B}_1 = \{B(x, r), x \in X, r > 0\}$, $\mathcal{B}_2 = \{B(y, r), y \in Y, r > 0\}$ ya que X y Y son espacio métricos). Veamos que para cualquier $(z, w) \in B((x, y), r)$ existe $B(x, r) \times B(y, r') \in \mathcal{B}'$ tal que $(z, w) \in B(x, r) \times B(y, r')$ y viceversa.

Si $(z, w) \in B((x, y), r)$, entonces $d[(z, w), (x, y)] < r$, así $d_x(x, z) < r$ y $d(w, y) < r$, por lo tanto $z \in B(x, r) \in B_1$ y $w \in B(y, r) \in B_2$, es decir, $(z, w) \in B(x, r) \times B(y, r) \in B_1 \times B_2$.

Sea $(z, w) \in B(x, r/2) \times B(y, r/2) \in \mathcal{B}'$, luego $d[(x, y), (z, w)] = d_x(x, z) + d_y(y, w) < r/2 + r/2 = r$ lo que implica que $(z, w) \in B((x, y), r) \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ generan la misma topología. Por lo tanto, $\tau_d = \tau$.

Ahora, veamos que (X, τ_d) es completo. Sea $(x_n, y_n) \in X \times Y$ tal que

$$d[(x_n y_n), (x_m, y_m)] \leq \epsilon$$

para n, m suficientemente grandes.

Luego, (x_n) y (y_n) son de Cauchy en (X, d_x), (Y, d_y), respectivamente, y como (X, d_x), (Y, d_y) son completos, existe x y y en X y Y tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$, $n \to \infty$. Es claro que $d[(x_n, y_n), (x, y)] \leq \epsilon$ para n suficientemente grande. Por lo tanto, $(X \times Y, \tau_d)$ es un F-espacio.

Notemos que G es un subespacio ya que Λ es lineal (sean $(x, \Lambda(x))$ y $(y, \Lambda(y))$ en G, $(x + y, \Lambda(x + y))$ está en G y sea β en el campo escalar, $(\beta x, \beta\Lambda(x)) = (\beta x, \Lambda(\beta x))$ y está en G). Además, suponemos que G es cerrado y está contenido en $X \times Y$ (espacio completo), luego G es completo. Por lo tanto, G es un F-espacio con la métrica restringida.

Definamos $\pi_1 : G \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ como:

$$\pi_1((x, \Lambda(x))) = x, \quad \pi_2((x, y)) = y.$$

Notemos que π_1 es lineal, uno a uno y continua definida de G (F-espacio) sobre un F-espacio X.

Veamos que π_1 es continua en $(0, 0)$, sea $\epsilon > 0$ por demostrar que existe $\delta > 0$ tal que, si $(x, \Lambda(x)) \in B((0, 0), \delta)$, entonces $d_x((0, (\pi_1(x, \Lambda(x))) = d_x(0, x) < \epsilon$, así $\epsilon = \delta$.

Ahora, veamos que π_2 es continua en $(0, 0)$, sea $\epsilon > 0$, por demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $(x, y) \in B((0, 0), \delta)$, entonces $d_y((0, y)) \leq \epsilon$. Luego, si $d_x((0, x)) + d_y((0, y)) < \delta$, tenemos que $d_y((0, y)) < \delta$, así $\epsilon = \delta$.

Por el Teorema del Mapeo Abierto, π_1 es un mapeo abierto, luego

$$\pi^{-1} : X \to G$$

es continua. Pero $\Lambda = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ y π_2 continua, luego Λ es continua.
Nota: La hipótesis 3) (G cerrado) es fundamental para la demostración que cambiemos esta hipótesis por 3'). Si x_n es una sucesión en X tal que los siguientes límites existen

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} \Lambda(x_n) = y,$$

entonces $y = \Lambda(x)$.

Probemos que 3') implica 3). Sea (x, y) un punto límite de G, como $X \times Y$ es metrizable,

$$(x, y) = \lim_{n \to \infty} (x_n, \Lambda(x_n))$$

para alguna sucesión (x_n) (es decir, $d[(x, y), (x_n, \Lambda(x_n))] < \epsilon$ para n suficientemente grande). Luego, $d_x(x, x_n) < \epsilon$ y $d_y(y, \Lambda(x_n)) < \epsilon$, es decir, $x_n \to x$ y $\Lambda(x_n) \to y$. Luego, por 3') $y = \Lambda(x)$, y así $(x, y) \in G$, luego G es cerrado.

Veamos que 3) implica 3'). Supongamos que G es cerrado, sea $(x, y) \in G$ es claro que $y = \Lambda(x)$, además existe $(x_n, \Lambda(x_n)) \in G$ tal que $(x_n, \Lambda(x_n)) \to (x, y)$.

2.5. Mapeos Bilineales

2.16 Definición. Sean X, Y, Z espacios vectoriales y $B : X \times Y \to Z$. Asociamos a cada $x \in X$ y cada $y \in Y$

$$B_x : Y \to Z, \quad B_y : X \to Z$$

tales que

$$B_x(y) = B(x, y) = B_y(x).$$

El mapeo B se dice ser bilineal si cada B_x y cada B_y lo es.

Si X, Y, Z son espacio vectoriales topológicos y si cada B_x y B_y es continuo, entonces B se dice ser separadamente continuo. Si B es continuo (con respecto a la topología producto) entonces B es separadamente continuo.

2.17 Teorema. Suponga que $B : X \times Y \to Z$ bilineal y separadamente continua, X un F-espacio y Y, Z espacios vectoriales topológicos. Entonces

$$B(x_n, y_n) \to B(x_0, y_0) \tag{2.3}$$

en Z, donde $x_n \to x_0$ y $y_n \to y_0$, (secuencialmente continuo). Si Y es metrizable, entonces B es continua.

Demostración. Sean U, W vecindades de cero en Z tales que $U + U \subset W$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$b_n(x) = B(x, y_n).$$

Como B es continua como función de y tenemos $\lim_{n \to \infty} b_n(x) = B(x, y_0)$ para cada $x \in X$.

Así, $(b_n(x))$ es un conjunto acotado en Z para cada $x \in X$ (por ser sucesión de Cauchy). Ya que cada b_n es un mapeo lineal y continua en un F-espacio X, por el Teorema (2.8) tenemos que (b_n) es equicontinua. Luego, existe una vecindad de cero V en X tal que

$$b_n(V) \subset U$$

para cada $n = 1, 2, 3....$ Recordemos que B es lineal en cada entrada, luego

$$\begin{aligned} b_n(x_n - x_0) &= b_n(x_n) - b_n(x_0) \\ &= B(x_n, y_n) - B(x_0, y_n) \end{aligned} \tag{2.4}$$

y

$$B(x_0, y_n - y_0) = B(x_0, y_n) - B(x_0, y_0).$$

Así,

$$b_n(x_n - x_0) + B(x_0, y_n - y_0) = B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0).$$

Si n es suficientemente grande, entonces $x_n \in x_0 + V$, así $b_n(x_n - x_0) \in U$ y $B(x_0, y_n - y_0) \in U$ ya que B es continua como función de y y $B(x_0, 0) = 0$. Así,

$$B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) \in U + U \subset W$$

para n grande. Luego, se tiene el resultado.

Si Y es metrizable, entonces $X \times Y$ lo es, luego por el Teorema 2.19, continuidad secuencuencial implica continuidad y por la hipótesis (2.3) se tiene el resultado.

2.18 Definición. Sea $f : X \to Y$ con X y Y espacios de Hausdorff, se dice que f es secuencialmente continua, si $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ para toda sucesión (x_n) en X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

2.19 Teorema. 1) Si $f : X \to Y$ es continua, entonces es secuencialmente continua.

2) Si $f : X \to Y$ es secuencialmente continua y X con base localmente numerable (en particular X metrizable), entonces f es continua.

Demostración.
1) Supongamos que f es continua. Sean (x_n) tal que $x_n \to x$ en X, V una vecindad de $f(x)$ en Y y $U = f^{-1}(V)$. Como f es continua, U es una vecindad de x, y por lo tanto, $x_n \in U$ para n suficientemente grande y $f(x_n) \in V$. Así, $f(x_n) \to f(x)$.

2) Sea $x \in X$ fijo, (U_n) una base local numerable de la topología de X en x y supongamos que f no es continua en x. Entonces una vecindad V de $f(x)$ en Y tal que $f^{-1}(V)$ no es vecindad de x. Como existe una sucesión (x_n) tal que $x_n \in U_n$ y $x_n \to x$, cuando $n \to \infty$, y además $x_n \notin f^{-1}(V)$. Entonces $f(x_n) \notin V$, así f no es secuencialmente continua.

Capítulo 3

Convexidad

3.1. Teorema de Hahn-Banach

3.1 Definición. El espacio dual de un espacio vectorial topológico X es el espacio vectorial X^* cuyos elementos son funcionales lineales y continuos definidos en X.

Note que la suma y multiplicación por un escalar en X^* están definidos como:

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)x = \Lambda_1 x + \Lambda_2 x, \quad (\alpha\Lambda)x = \alpha \cdot \Lambda x.$$

Es claro que estas operaciones hacen a X^* un espacio vectorial.

Será necesario usar el hecho de que todo espacio vectorial complejo es también un espacio vectorial real.

3.2 Teorema. Suponga:

a) M es un subespacio de un espacio vectorial real X, con X espacio vectorial topológico,

b) $p : X \to \mathbb{R}$ satisface que

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad (ptx) = tp(x),$$

si $x, y \in X$ y $t \geq 0$,

c) $f : M \to \mathbb{R}$ es lineal y $f(x) \leq p(x)$ en M.

Entonces existe un funcional lineal $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Lambda(x) = f(x), \quad x \in M$$

y

$$-p(-x) \le \Lambda(x) \le p(x), \quad x \in X.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $M \neq X$, sea $x_1 \in X$ tal que $x_1 \notin M$ y definimos

$$M_1 = \{x + tx_1, x \in M, t \in \mathbb{R}\}.$$

Veamos que M_1 es un espacio vectorial, sean $x' + t'x_1$ y $x'' + t''x_1$ en M_1 su suma es $x' + x'' + (t' + t'')x_1$ y α un escalar real, $\alpha(x' + t'x_1) = \alpha x' + \alpha t' x_1$, como M es subespacio tenemos el resultado.

Como

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \le p(x + y) \le p(x - x_1) + p(x_1 + y)$$

tenemos

$$f(x) - p(x - x_1) \le p(y + x_1) - f(y), \quad x, y \in M. \tag{3.1}$$

Como x varia en M, sea α la mínima cota superior de lado izquierdo de (3.1),

$$f(x) - \alpha \le p(x - x_1), \quad x \in M$$

y

$$f(y) + \alpha \le p(y + x_1), \quad y \in M.$$

Definimos f_1 en M_1 como $f_1(x + tx_1) = f(x) + t\alpha$, $x \in M$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces $f_1 = f$ en M y f_1 es lineal en M_1.

Sea $t > 0$ y tomemos $t^{-1}x$, luego $f(x/t) - \alpha \le p(x/t) - x_1)$ y

$$f(x) - t\alpha \le p(x - tx_1)$$

lo mismo para $t^{-1}y$ tenemos

$$f(y) + t\alpha \le p(y + tx_1),$$

así $f_1 \le p$ en M_1.

En la segunda parte de la demostración utilizaremos el Teorema de maximalidad de Hausdorff: Sea X un conjunto parcialmente ordenado, entonces existe un subconjunto maximal de X totalmente ordenado.

Sea $P = \{(M', f')\}$ tales que M' es subespacio de X con $M \subset M'$ y f' funcional lineal en M' $f' \le p$ y $f'|_M = f$ (extensión de f en M'). Definamos la siguiente relación, $(M', f') \le (M'', f'')$ sii $M' \subset M''$ y $f'' = f'$ en M', esta es una relación que define un orden parcial.

Sea Ω la subcolección maximal totalmente ordenada (por el Teorema maximal de Hausdorff) y $\Phi = \{M', (M', f') \in \Omega\}$, es claro que Φ está totalmente ordenada con respecto a la inclusión. Denotemos a la unión de todos los los elementos de Φ como $\widetilde{M}$, por lo tanto es subespacio de X. Si $x \in \widetilde{M}$, entonces existe $M' \in \Phi$ tal que $x \in M'$; definimos $\Lambda(x) = f'(x)$, donde f' es la funcional del par ordenado $(M', f') \in \Omega$.

Veamos que $X = \widetilde{M}$, y así, será fácil ver que Λ está bien definida en X, es lineal y $\Lambda \leq p$. Supongamos que $X \neq \widetilde{M}$, sea $x_1 \notin \widetilde{M}$, entonces $x \notin M'$ para toda $M' \in \Phi$, luego fijemos algún M'. Por la primera parte de la demostración, tenemos (M_1, f_1) tal que $M' \subset M_1$ y $f_1 = f'$ en M', pero esto contradice la propiedad maximal de Ω. Así, $X = \widetilde{M}$, $\Lambda \leq p$ y

$$-p(-x) \leq -\Lambda(-x) = \Lambda(x).$$

3.3 Teorema. Suponga que M es un subespacio de un espacio vectorial X, p es una seminorma en X y f es un funcional lineal en M tal que

$$|f(x)| \leq p(x), \quad x \in M.$$

Entonces f se extiende a una funcional lineal Λ en X que satisface

$$|\Lambda(x)| \leq p(x), \quad x \in X.$$

Si es campo escalar es real, es como el teorema anterior. ya que $p(-x) = p(x)$.

Demostración.

Suponga que el campo escalar en $\mathbb{C}$. Sea $u = Ref$ por el teorema anterior, existe una funcional real U en X tal que $U = u$ en M y $U \leq p$ en X.

Notemos que si f es una funcional lineal-compleja en X y u su parte real, entonces u es lineal-real y

$$f(x) = u(x) - iu(ix), \quad x \in X,$$

ya que $z = Rez - iRe(iz)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Si $u : X \to \mathbb{R}$ es lineal-real en un espacio vectorial complejo X y si f está definida como $f(x) = u(x) - iu(ix)$, entonces f es lineal.

Sea Λ funcional lineal-compleja en X con parte real U, por lo anterior, $\Lambda = f$ en M.

Para todo $x \in X$ le corresponde $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ tal que $\alpha\Lambda(x) = |\Lambda(x)|$. Luego,

$$|\Lambda(x)| = \Lambda(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x).$$

3.4 Corolario. Si X es un espacio normado y $x_0 \in X$, entonces existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda(x_0) = ||x_0||$ y $|\Lambda(x)| \leq ||x||$ para cada $x \in X$.

Demostración. Si $x_0 = 0$, entonces $\Lambda(x) = 0$. Si $x_0 \neq 0$, tememos $p(x) = ||x||$ que es una norma. Definamos $M = \{\alpha x_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$ subespacio vectorial y $f(\alpha x_0) = \alpha||x_0||$, notemos que f es lineal, $f(\alpha x_0 + \beta x_0) = f((\alpha+\beta)x_0) = (\alpha+\beta)||x_0||$, (observe que $f(\alpha x_0) = \alpha||x_0|| \leq |\alpha|\cdot||x_0||$ en M). Por el teorema anterior, existe una extensión lineal de f en X, Λ tal que $|\Lambda(x)| \leq ||x||$ en X y

$$\Lambda(\alpha x_0) = f(\alpha x_0) = \alpha||x_0||.$$

3.5 Teorema. Suponga que A y B son conjuntos disjuntos, no vacíos y convexos en un espacio vectorial topológico X.

1. Si A es un abierto, entonces existen $\Lambda \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$Re\Lambda(x) \leq \gamma \leq Re\Lambda(y)$$

para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

2. Si A es compacto, B cerrado y X localmente convexo, entonces existen $\Lambda \in X^*$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$Re\Lambda(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < Re\Lambda(y)$$

para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

Demostración. Es suficiente demostrar el resultado para el campo real. Porque si se cumple para el campo escalar real, entonces existe una funcional lineal-real Λ_1 en X con la propiedad 1) del Teorema 3.5 y si Λ es la funcional lineal-compleja en X cuya parte real es Λ_1, $(\Lambda(x) = \Lambda_1(x) - i\Lambda_1(ix))$ entonces $\Lambda \in X^*$ y cumple 1). Entonces supongamos que el campo es real.

1) Sean $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ elementos fijos, $x_0 = b_0 - a_0$ y $C = A - B + x_0$. Entonces C es una vecindad convexa del cero en X. Sea $p(x) = \text{ínf}\{t > 0, t^{-1}x \in C\}$ la funcional de Minkowski de C con $x \in X$, por el Teorema 1.35 tenemos que

$$p(x+y) \leq p(x) + p(t), \quad p(tx) = tp(x),$$

si $x, y \in X$ y $t \geq 0$. Como $A \cap B = \emptyset$, $x_0 \notin C$, tenemos $p(x_0) \geq 1$, (ya que C es absorbente).

Definimos $f(tx_0) = t$ sobre el subespacio generado por x_0, M. Si $t \geq 0$, entonces

$$f(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0),$$

si $t < 0$, entonces $f(tx_0) < 0 \leq p(tx_0)$. Así, $f \leq p$ por el Teorema 3.2, f se extiende a una funcional lineal Λ en X con $\Lambda \leq p$. En particular $\Lambda \leq 1$ en C y $\Lambda \geq -1$ en $-C$ ya que en C

$$\Lambda(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) \leq 1,$$

y en $-C$ tenemos

$$\Lambda(-(a - b + x_0)) = -\Lambda((a - b + x_0)) \geq -p(a - b + x_0) \geq -1,$$

es decir, $|\Lambda| \leq 1$ en una vecindad $C \cap (-C)$ de cero. Por el Teorema 1.18, $\Lambda \in X^*$, (Λ es continua sii Λ es acotada en alguna vecindad de cero).

Si ahora $a \in A,\ b \in B$, tenemos

$$\Lambda(a) - \Lambda(b) + 1 = \Lambda(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) < 1,$$

ya que C es abierto y $\Lambda(x_0) = 1$. Así, $\Lambda(a) < \Lambda(b)$.

Se continua con que $\Lambda(A)$ y $\Lambda(B)$ son subconjuntos disjuntos y convexos de $\mathbb{R}$ con $\Lambda(A)$ a la izquierda de $\Lambda(B)$. Como $\Lambda(A)$ es abierto, ya que A es abierto y toda funcional lineal no constante es un mapeo abierto. Luego, sea γ el punto final a la derecha de $\Lambda(A)$ (cota superior de $\Lambda(A)$).

2) Por el Teorema 1.10, existe una vecindad convexa de cero tal que $(A + V) \cap B = \emptyset$. Ahora, consideremos $A + V$ en lugar de A en la primera parte del teorema, luego existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda(A+V)$ y $\Lambda(B)$ son subconjuntos disjuntos y convexos de $\mathbb{R}$, con $\Lambda(A+V)$ abierto y está a la izquierda de $\Lambda(B)$. Como $\Lambda(A)$ es subconjunto compacto de $\Lambda(A + V)$ se tiene el resultado.

3.6 Corolario. Si X es un espacio localmente convexo, entonces X^* separa puntos de X.

DEMOSTRACIÓN. Sean x_1 y x_2 en X tales que $x_1 \neq x_2$, tomemos $A = \{x_1\}$ y $B = \{x_2\}$, luego apliquemos 2) del teorema anterior, así existen γ_1, γ_2 en $\mathbb{R}$ tales que

$$\Lambda(x_1) < \gamma_1 < \gamma_2 < \Lambda(x_2).$$

3.7 Teorema. Suponga que M es una subespacio de un espacio localmente convexo X y $x_0 \in X$. Si $x_0 \notin \overline{M}$, entonces existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda(x_0) = 1$, pero $\Lambda = 0$ para cada $x \in M$.

Demostración. Sea $A = \{x_0\}$ y $B = \overline{M}$ luego apliquemos 2) del teorema anterior, y así existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda(x_0)$ es disjunto de $\Lambda(M)$. Además, $\Lambda(M)$ es un subespacio propio del campo escalar real, esto implica que $\Lambda(M) = \{0\}$ y $\Lambda(x_0) \neq 0$, al funcional lo dividimos por $\Lambda(x_0)$.

3.8 Teorema. Si f es un funcional lineal y continuo en un subespacio M de un espacio X localmente convexo, entonces existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda = f$ en M.

Demostración. Suponga que f no es cero en M. Sea $M_0 = \{x \in M, f(x) = 0\}$ y tomemos $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = 1$. Como f es continua, x_0 no está en la M-clausura de M_0, luego no está en la X-clausura de M_0.

Por el Teorema 3.7, existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda(x_0) = 1$ y $\Lambda(x) = 0$ en M_0.

Si $x \in M$, entonces $x - f(x)x_0 \in M_0$, ya que $f(x_0) = 1$, De aquí

$$\Lambda(x) - f(x) = \Lambda(x) - f(x)\Lambda(x_0) = \Lambda(x - f(x)x_0) = 0.$$

Así, $\Lambda = f$ en M.

3.9 Teorema. Suponga que B es una conjunto convexo, balanceado y cerrado en un espacio localmente convexo X, $x_0 \in X$, pero $x_0 \notin B$. Entonces existe $\Lambda \in X^*$ tal que $|\Lambda(x)| \leq 1$ para cada $x \in B$, pero $\Lambda(x_0) > 1$.

Demostración. Sea $A = \{x_0\}$, por 2) del Teorema 3.5 existen $\Lambda \in X^*$, γ_1, γ_2 tales que $\Lambda(x_0) < \gamma_1 < \gamma_2 < \Lambda(b)$, $b \in B$. Note que $\Lambda(B)$ es convexo y balanceado

3.2. Topologías débiles

Sean τ_1 y τ_2 dos topologías de X y supongamos que $\tau_1 \subset \tau_2$, es decir, todo τ_1- abierto es también τ_2-abierto. Se dice que τ_1 es más débil que τ_2 (o bien que τ_2 es más fuerte que τ_1), note que no se incluye la igualdad hasta el momento. Si $I : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$, entonces es continua y $I : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es abierta.

3.10 Teorema. $\tau_1 \subset \tau_2$ son topologías de X, y si τ_1 es de Hausdorff y X es τ_2 compacto, entonces $\tau_1 = \tau_2$.

Demostración. Sea $F \subset X$ τ_2-cerrado, como X es τ_2-compacto, F es τ_2-compacto. Como τ_1 es de Hausdorff, F es τ_1-cerrado.

Recordemos que se definió la topología τ_N en el espacio cociente X/N, X espacio vectorial topológico, τ su topología y N subespacio cerrado de X,

$$\tau_N = \{E \subset X/N,\ \pi^{-1}(E) \in \tau\},$$

donde $\pi : X \to X/N$.

τ_N es la topología más fuerte en X/N tal que hace a π continua y la topología más débil que hace a π abierta, es decir, si τ' y τ'' son topologías en X/N y si π es τ'-continua y π es τ''- abierta, entonces

$$\tau' \subset \tau_N \subset \tau''.$$

Sea $F = \{f : X \to Y_f\}$, con Y_f espacio topológico, y τ la colección de todas las uniones de intersecciones finitas de conjuntos $f^{-1}(V)$, $f \in F$ y V abierto en Y_f.

Entonces τ es una topología en X y es la topología más débil en X que hace a cada $f \in F$ continua. Si τ' es otra topología con la propiedad de que hace a cada f continua, entonces $\tau \subset \tau'$. La topología τ se llama la topología más débil inducida por F o la F-topología de X.

3.11 Teorema. Si F es una familia de mapeos $f : X \to Y_f$, X un conjunto y cada Y_f un espacio de Hausdorff, y F separa puntos de X, entonces la F-topología de X es de Hausdorff.

DEMOSTRACIÓN. Si $p \neq q$ son puntos en X, entonces $f(p) \neq f(q)$ para alguna $f \in F$, los puntos $f(p)$ y $f(q)$ tienen vecindades disjuntas en Y_f cuyas imagenes inversas bajo f son abiertas y disjuntas.

3.12 Teorema. Si X es un espacio topológico compacto y si alguna sucesión (f_n) de funciones real-valuadas y continuas separan puntos en X, entonces X es metrizable.

DEMOSTRACIÓN. Sea τ la topología de X. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|f_n| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y sea τ_d la topología inducida por la métrica

$$d(p, q) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(p) - f_n(q)|.$$

Veamos que es métrica. Es claro que

1) $d(p, q) < \infty$.

2) $d(p,q) = d(q,p)$.

3) $d(p,q) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(p) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(q)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|f_n(p) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(q)| = d(p,z) + d(z,q)$.

4) $d(p,q) = 0$ sii $|f_n(p) - f_n(q)| = 0$ para cada n. Como f_n separa puntos $p = q$.

Como cada f_n es $\tau-$continuo y la serie converge uniformemente en $X \times X$, d es τ-continua en $X \times X$. Las bolas

$$B(p,r) = \{q \in X : d(p,q) < r\}$$

son τ-abiertas. Así, $\tau_d \subset \tau$. Pero τ_d es de Hausdorff, luego por el Teorema 3.10 $\tau_d = \tau$.

3.13 Lema. Suponga que $\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_n, \Lambda$ son funcionales lineales en un espacio vectorial X. Sea

$$N = \{x, \Lambda_1(x) = \Lambda_2(x) =, ... = \Lambda_n(x) = 0\}.$$

Las siguientes propiedades son equivalentes.

1. Existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tales que
$$\Lambda = \alpha_1\Lambda_1 + ... + \alpha_n\Lambda_n.$$
2. Existe $\gamma < \infty$ tal que $|\Lambda(x)| \leq \gamma \cdot \text{máx}_{1\leq i\leq n} |\Lambda_i(x)|$, $x \in X$.
3. $\Lambda(x) = 0$ para todo $x \in N$.

Demostración. Es claro que 1) implica 2) y 2) implica 3). Supongamos 3) y veamos que implica 1).

Sea Φ el campo escalar. Definamos $\pi : X \to \Phi^n$ como

$$\pi(x) = (\Lambda_1(x), ..., \Lambda_n(x)).$$

Si $\pi(x) = \pi(x')$, entonces por 3) $\Lambda(x) = \Lambda(x')$. Así, $\Lambda = F \circ \pi$ para algún funcional F en Φ^n. Como F es un funcional en Φ^n existe $\alpha_1, ...\alpha_n \in \Phi$ tales que

$$F(u_1, ..., u_n) = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n.$$

Luego,

$$\Lambda(x) = F(\pi(x)) = F(\Lambda_1(x), ..., \Lambda_n(x)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\Lambda_i(x).$$

Recordemos el Teorema 1.37: Suponga que $\mathcal{P}$ es una familia separadora de seminormas sobre un espacio vectorial X. Asociamos a cada $p \in \mathcal{P}$ y cada n entero positivo

$$V(p,n) = \{x : p(x) < 1/n\}.$$

Sea B la colección de todas las intersecciones finitas de los conjuntos $V(p,n)$. Entonces B es una base localmente convexa y balanceda para una topología τ en X, que convierte a X en un espacio localmente convexo tal que

- cada $p \in \mathcal{P}$ es continua,
- un conjunto $E \subset X$ es acotado sii cada $p \in \mathcal{P}$ es acotado en E.

3.14 Teorema. Sea X un espacio vectorial y X' es espacio vectorial formado por la familia separadora de funcionales lineales en X, $X' = \{\Lambda : X \to F\}$ tal que cada Λ es lineal y si $x_1 \neq x_2$, entonces $\Lambda(x_1) \neq \Lambda(x_2)$ para Λ funcional lineal. Entonces la $X'-$toplogía τ' hace a X localmente convexo y su dual es X'.

Demostración. Es claro que X' es cerrado bajo la suma y multipliación por un escalar y que $\Lambda(x_1) \neq \Lambda(x_2)$ para alguna $\Lambda \in X'$, donde x_1 y x_2 son puntos distintos.

Como $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son de Hausdorff, por el Teorema 3.11 tenemos que τ' es una topología de Hausdorff.

La linealidad de los elementos de X' hace que τ' sea traslación invariante. Si $\Lambda_1, ..., \Lambda_n \in X'$, $r_i > 0$ y si

$$V = \{x : |\Lambda(x)| < r_i, 1 \leq i \leq n\},$$

(notemos que la familia separadora de seminormas está cada por $p_\Lambda(x) = |\Lambda(x)|$) entonces V es convexo, balanceado y $V \in \tau'$ y la colección de V forman una base local para τ'. Así, τ' es una topología localmente convexa de X, por Teorema 1.37.

Notemos que $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = V$. Si x_1 y x_2 están en V,

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

además,

$$|\Lambda_i(\frac{x_1 + x_2}{2})| = \frac{1}{2}|\Lambda_i(x_1 + x_2)| < \frac{1}{2}r_i,$$

luego $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in V$. Es claro que $V \subset \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V$. Esto prueba que la suma es continua.

Ahora, veamos que la multiplicación por un escalar es continua. Suponga que $x \in X$ y α es un escalar. Entonces $x \in sV$ para alguna $s > 0$, si $|\beta - \alpha| < r$ y $y - x \in rV$ entonces

$$\beta y - \alpha x = (\beta - \alpha)y + \alpha(y - x)$$

está en V, siempre que r sea tan pequeño que

$$r(s + r) + |\alpha|r < 1.$$

De aquí la multiplicación por un escalar es continua.

Por lo tanto, τ' es una topología vectorial localmente convexa. Todo $\Lambda \in X^*$ es $\tau'-$continua. Suponga que Λ es un funcional lineal $\tau'-$continua en X, entonces $|\Lambda(x)| < 1$ para todo x en algún V. La condición 2) del Lema 3.13 implica 1): $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Lambda_i$, con $\Lambda_i \in X'$ y X' un espacio vectorial, luego $\Lambda \in X'$ Por lo tanto $X^* = X'$.

3.3. La topología débil de un espacio vectorial topológico

Suponga que X es un espacio vectorial topológico (con la topología τ) cuyo dual X^* separa puntos de X (sabemos que esto pasa en todo espacio localmente convexo X). La X^*-topología de X es llamada la topología débil de X.

Denotamos a X_w al espacio X dotado con la topología débil τ_w. El Teorema 3.14 implica que X_w es localmente convexo y su dual X^* también lo es.

Como toda $\Lambda \in X^*$ es $\tau-$continua y como τ_w es la topología más débil en X con esta propiedad, tenemos $\tau_w \subset \tau$. En este contexto la topología τ será llamada la topología original de X.

Por ejemplo, sea (x_n) una secesión en X. Se dice que $x_n \to 0$ originalmente significa que toda vecindad original de cero contiene todos los x_n con n suficientemente grande. Decir que $x_n \to 0$ débilmente significa que toda vecindad débil de cero contiene todos los x_n con n suficientemente grande. Como toda vecindad débil de cero contiene una vecindad de la forma

$$V = \{x : |\Lambda_i(x)| < r_i, 1 \leq i \leq n\}, \tag{3.2}$$

donde $\Lambda_i \in X^*$ y $r_i > 0$, es fácil ver que $x_n \to 0$ débilmente si y solo si $\Lambda x_n \to 0$ para toda $\Lambda \in X^*$.

Toda sucesión originalmente convergente converge débilmente, la implicación inversa no es verdadera en general.

A continuación veamos un ejemplo que ilustra este hecho. Sean H un espacio de Hilbert y $(e_n)_n$ la sucesión ortonormal. Por el Teorema de representación de Riesz, para cada $f \in X^*$ existe $z \in H$ tal que

$$f(x) =< x, z > .$$

Aplicando la desigualdad de Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < e_n, z > |^2 \leq ||z||^2,$$

con lo que la serie anterior es convergente y $< e_n, z > \to 0$. Como $f(e_n) =< e_n, z >$ lo anterior implica que e_n converge débilmente a cero. Sin embargo, (e_n) no es convergente en el sentido original, ya que

$$||e_n - e_m||^2 =< e_n - e_m, e_n - e_m >= 2,$$

si $n \neq m$.

Similarmente, un conjunto $E \subset X$ es débilmente acotado (E acotado como subconjunto de X_w) si y solo si para todo V de la forma (3.2) se tiene $E \subset tV$ para alguna $t = t(V) > 0$, esto pasa si y solo si le corresponde a cada $\Lambda \in X^*$ un número $\gamma(\Lambda) > 0$ tal que $|\Lambda(x)| \leq \gamma(\Lambda)$ para cada $x \in E$. En otras palabras, un conjunto $E \subset X$ es débilmente acotado si y solo si para cada $\Lambda \in X^*$ es acotada en E.

3.15 Teorema. Suponga que E es un subconjunto convexo de un espacio X localmente convexo. Entonces la clausura débil $\overline{E}_w$ de E es igual a la clausura original $\overline{E}$.

Demostración. Como $\tau_w \subset \tau$ tenemos que $\overline{E} \subset \overline{E}_w$. Sea $x_0 \in X$, $x_0 \notin \overline{E}$. Por la parte 2) del Teorema 3.5, existe $\Lambda \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \overline{E}$,

$$Re\Lambda(x_0) < \gamma < Re\Lambda(x).$$

El conjunto $\{x : Re\Lambda(x) < \gamma\}$ está en una vecindad débil de x_0 que no intersecta a E. Así x_0 no está en $\overline{E}_w$. Así, $\overline{E}_w \subset \overline{E}$.

3.16 Corolario. Sea X un espacio localmente convexo.

1. Un subconjunto de X es originalmente cerrado si y solo si es débilmente cerrado.

2. Un subconjunto convexo de X es originalmente denso si y solo si es débilmente denso.

1. Sea (X, d) un espacio métrico. $A \subset X$ es un conjunto G_δ en X si A es la intersección numerable de conjuntos abiertos en X.

   i) Determine la categoría del conjunto $\mathbb{Q}$.
   ii) ¿El conjunto $\mathbb{Q}$ es un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$, con la norma usual? (sugerencia: use el Teorema de Baire)

2. Sean X, Y y Z espacios de Banach, y sea $B : X \times Y \to Z$ bilineal y continua. Mostrar que existe $0 < M < \infty$ tal que

$$||B(x, y)|| \leq M||x|| \cdot ||y||$$

   con $x \in X$ y $y \in Y$. ¿ Se requiere que los espacios sean completos?

3. Para $1 \leq p < \infty$, sea lp el espacio de las funciones x (reales o complejas) definidas sobre el conjunto de los enteros positivos, tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty,$$

   por ejemplo para $p = 1$, l_1 es el espacio de las series absolutamente convergentes.
   i) Para $1 \leq p < \infty$ mostrar que lp es de Banach con la norma $||x||_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p)^{1/p}$.
   (dada cualquier sucesión de Cauchy, la idea es proponer el límite, ver que está propuesta está en lp y finalmente verificar que la sucesión de Cauchy converge al dicho límite).
   ii) Si $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, demostrar que el dual de lp es lq, es decir, $(lp)^* = lq$.

   Sugerencia: Sean $b = (b_i)$, $a = (a_i)$

$$T : lq \to (lp)^*$$
$$b \to f_b,$$

   donde $f_b(a) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i a_i$, para $(a_i) \in lp$. Demostrar que T es un isomorfismo isométrico.