1. Problemas. Cálculo Diferencial de Varias Variables

Cálculo en una y varias variables- Propedeútico

Mayo de 2012

1. Encuentre $\alpha(t)$ dado que $\alpha'(t) = \vec{c}$, $\alpha(0) = \vec{a}$.

2. Encuentre $\alpha(t)$ dado que $\alpha''(t) = (\cos 2t)\,\vec{i} + (\sin 2t)\,\vec{j}$
$$\alpha'(0) = 2\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}, \alpha(0) = \frac{3}{4}\vec{i} + \vec{j}.$$

3. Considerando $\alpha(t) = (\sin t, \cos t)$, muestre que $\alpha(t)$ y $\alpha''(t)$ son paralelos ¿En algún instante $\alpha(t)$ y $\alpha''(t)$ tendrán la misma dirección?

4. Sea $\Gamma(t) = \vec{f}(t) \cdot \left[\vec{g}(t) \times \vec{h}(t)\right]$. Calcule $\Gamma'(t)$.

5. Determine el o los puntos de interseccón entre la curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ con el plano $4x + 2y + z = 24$. Encuentre el ángulo de intersección entre la curva y la normal a este plano.

6. Considere una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$ y el cambio de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Encuentre fórmulas para $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

7. Mostrar que si $u = \frac{xy}{x+y}$ entonces $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$

8. Asumiendo que $f(x, y) = g(x)+h(y)$ con $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables, muestre que $f_{xy} = f_{yx}$.

9. Muestre que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2, entonces $u(x, y) = g(x+y)+g(x-y)$ es tal que $u_{xx} = u_{yy}$.

10. Sean
$$f(x, y) = \left(\sin y + x^3, e^{2x+y}\right)$$
y
$$g(u, v) = (u + v, u + \cos v)$$
    a) Encontrar la expresión para $g \circ f$.
    b) Calcular $D(g \circ f)(0, 0)$ mediante la regla de la cadena.

11. Sean $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función diferenciable y $g(X) = \cos(H(X) \cdot H(X))$. Calcular $Dg(X)$.

12. Si $h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y), w(x))$, donde f, u, v, w son diferenciables, calcular $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$.

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable y considere el cambio de variables a coordenadas esféricas

$$x = r\cos\theta\sin\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\varphi$$

para la función $f = f(x,y,z)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta}$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ en términos de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$.

14. Sea $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ la temperatura en $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Si una partícula se mueve sobre la hélice $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ entonces calcule la temperatura en la posición de la partícula en el instante t y su variación instantánea (de la temperatura en tal instante).

15. Use el siguiente problema para mostrar que no es posible aplicar la regla de la cadena cuando f no es diferenciable. Para ello considere la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   a) Muestre que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen en $(0,0)$.

   b) Sea $g(t) = (at, bt)$, a, b constantes. Muestre que $f \circ g$ es diferenciable y que $(f \circ g)'(0) = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$. Pero que $\nabla f(0,0) \cdot g'(0) = 0$.

16. Use el hecho que

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$$

y la regla de la cadena para mostrar que

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x,y)dy = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

17. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función par (i.e. $f(X) = f(-X)$). Muestre que si f es diferenciable y par entonces es posible determinar $Df(\overline{0})$. Encuentre su valor.

18. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (e^x\cos y, e^2\sin y)$. Decir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifique su respuesta.

   (a) Esta función no tiene inversa local y es globalmente inyectiva.

   (b) Esta función tiene inversa local y no es globalmente inyectiva.

(c) Esta función tiene inversa local y es globalmente inyectiva.

(d) Esta función no tiene inversa local y no es globalmente inyectiva.

19. Suponiendo que una montaña tiene forma de un parabolide eliptico $z = c - ax^2 - by^2$, $a, b, c > 0$ y x, y son coordenadas este-oeste y norte-sur, y z es la altura sobre el nivel del mar (x, y, z medidos en metros). En el punto $(1, 1)$, ¿en qué dirección crece la altitud más rápidamente? Si una canica se soltara en $(1, 1)$ ¿en que dirección comenzaría a rodar?

20. Para las funciones $f(x, y)$ y $\alpha(t)$ dadas, encontrar los valores máximo y mínimo que alcanza la función f a lo largo de $\alpha(t)$: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\alpha(t) = (\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

21. Sea $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Demuestre que el plano tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es ortogonal al vector $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. De una interpretación.

22. Encontrar el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$, en el punto $(1, -2, 5)$. Dar el significado geométrico del gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^2$ para esta superficie.

23. Encontrar los puntos del hiperboloide $9x^2 - y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ para los cuales su plano tangente es paralelo al plano $9x - y - 4z - 1 = 0$.

24. Suponiendo que la altura de una montaña sobre cada punto (x, y) de un plano horizontal está determinada por la función $z = 1 - 2x^2 - y^2$

    (a) Determine la dirección en la cual la altura aumenta lo más rápido posible partiendo del punto $(1, 1, -2)$ en la montaña.

    (b) Encuentre las coordenadas del punto más alto de la montaña.

    (c) Encuentre la dirección en la cual se moverá una canica que se suelta en el punto $(1, 1, -2)$ sobre la montaña.

25. ¿En qué dirección se anula la derivada direccional de $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ en el punto $(1, 1)$?

26. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ en el punto $(3, 5, -4)$.

27. Un insecto se encuentra en un medio tóxico. El nivel de toxicidad está dado por $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. Si el insecto se encuentra en el punto.

28. Sea $z = \frac{f(x,y)}{y}$ ($y \neq 0$ y f diferenciable). Mostrar que $z + y\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

29. Sea $h(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ la altura de una montaña sobre el punto (x,y). ¿En qué dirección, a partir del punto $(1,0)$, debemos caminar para ascender de la manera más rápida posible?

30. **a)** Dar un enunciado cuidadoso de la regla de la cadena para el siguiente problema.

    b) Sean $f(x,y) = x^2 + y$, $h(y) = (\sin 3u, \cos 8u)$. Sea $g(u) = f(h(u))$. Calcular $\frac{dg}{du}$ en $u = 0$ usando

    i) Cálculo directo.

    ii) Regla de la cadena.

31. En el instante $t = 0$, una partícula sale despedida de la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ en el punto $(1,1,1)$ en dirección normal a la superficie, a una velocidad de 10 unidades por segundo. ¿En qué instante atraviesa la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 103$?

32. Supóngase que $u(x,t)$ satisface la ecuación diferencial $u_t + uu_x = 0$ y que x, como función $x = f(t)$ de t satisface $\frac{dx}{dt} = u(x,y)$. Demostrar que $u(f(t),t)$ es constante como función de t.

33. **a)** Sean F una función de una variable y f una función de dos variables. Demostrar que el vector gradiente de $g(x,y) = F(f(x,y))$ es paralelo al vector gradiente de $f(x,y)$.

    b) Sean $f(x,y), g(x,y)$ funciones tales que $\nabla f = \lambda \nabla g$, para una cierta función $\lambda(x,y)$. ¿Cuál es la relación entre las curvas de nivel de f y g? Explicar por qué podría existir una función F tal que $g(x,y) = F(f(x,y))$.

34. Sea f una función diferenciable y definamos $u = g(x,y)$ como

$$u = g(x,y) = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

    a) Mostrar que u satisface la ecuación diferencial de la forma

$$x^2u_x - y^2u_y = uG(x,y.)$$

    b) Encontrar la función $G(x,y)$.

35. Sea $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3$ para todo punto en el plano. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es cierta?

(a) f tiene todos sus extremos relativos sobre la recta $x = y$.

(b) f tiene todos sus extremos relativos sobre la parábola $x = y^2$.

(c) f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$.

(d) f tiene un mínimo absoluto en $(2/3, 2/3)$.

(e) f tiene un mínimo absoluto en $(1, 1)$.

36. ¿Cuál de los valores siguientes es un mínimo para la expresión $x + 4z$ como función definida en todo $\mathbb{R}^3$, sujeta a la condición $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$?

(a) 0

(b) -2

(c) $-\sqrt{34}$

(d) $-\sqrt{35}$

(e) $-5\sqrt{2}$