Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Iztapalapa

Universidad Autónoma Metropolitana
Iztapalapa

Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales

Un modelo estocástico para los precios de futuros del petróleo

TESIS

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias

PRESENTA

Brenda Haydee Arredondo Pérez

Directores de tesis:

Dr. Esteban Martina
Dr. Juan Ruiz de Chávez

20 de abril de 2012

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Iztapalapa

Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales

Un modelo estocástico para los precios de futuros del petróleo

TESIS

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias

PRESENTA

Brenda Haydee Arredondo Pérez

Directores de tesis:
Dr. Esteban Martina
Dr. Juan Ruiz de Chávez

9 de abril de 2012

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
16 ABR 2012
DIVISION C. B. I.
POSGRADO
UNIDAD IZTAPALAPA

Agradecimientos

En estas líneas deseo expresar mi sincero reconocimiento a todos aquellos que, directa o indirectamente, forman parte de este logro.

Comienzo con mis padres, por su amor y su apoyo incondicional. Especialmente le agradezco a mi madre, por haber sido mi mejor amiga, mi aliada, mi ejemplo y por que donde esté se que me esta cuidando. Esta tesis es en tu memoria mamá. Te quiero con todo mi corazón.

Le agradezco a mi esposo Cristian, por su infinita paciencia, por su tierna compañía y su inagotable apoyo. Gracias por compartir mi vida y mis logros, esta tesis también es tuya. Te amo infinitamente.

Agradezco a mis hermanos por la compañía y el apoyo que me brindan. Se que cuento con ellos siempre.

Una mención muy especial merecen mis asesores, el Dr. Esteban Martina y el Dr. Juan Ruiz de Chávez, por su tiempo, tolerancia (¡mucha!), entusiasmo y apoyo, pero sobre todo gracias por dirigir este trabajo y haber confiado en mi persona. También le agradezco al Dr. Esteban Martina el tema de esta tesis, el cual me ha permitido entrar en contacto con temas e ideas que me han conmocionado. También aprecio enormemente la lectura minuciosa y los provechosos comentarios hechos por el Dr. Juan Ruiz de Chávez. ¡Gracias por todo!

A todos mis profesores, amigos y compañeros les doy gracias por la convivencia y por haberme compartido sus conocimientos.

Finalmente, agradezco a la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa por la beca CONACYT y apoyos que me otorgaron durante mis estudios de maestría, pero sobre todo por la ecuación que me proporcionaron.

Índice general

Resumen

Para modelar adecuadamente la dinámica de las variables financieras se requiere, sin duda alguna, de la teoría de procesos estocásticos. Una de las ramas de esta teoría que han cobrado creciente importancia es el cálculo estocástico debido a su utilidad en el modelado continuo. En este trabajo se proponen dos modelo de dos factores para los precios de futuros del petróleo, los cuales son un ejemplo más de la importancia del uso de la teoría del cálculo estocástico en finanzas. En el desarrollo de este trabajo se da un breve antecedente de las herramientas necesarias para modelar dichos precios, tales como, los procesos de Itô, el famosos lema de Itô, la ecuación de Kolmogorov hacia atrás y el teorema de Girsanov, entre otras herramientas matemáticas. La base del modelo I es el trabajo hecho por Muth y Sargent, el cual emplea la teoría de expectativas racionales. Esta teoría se utilizó a partir de los años 60´s y se usó para describir las situaciones económicas en las que el resultado depende de lo que la gente espera que suceda. Esencialmente este modelo se inspira en el trabajo de Eduardo Schwartz y Cortázar [1](2002).

El segundo modelo que se propone se fundamenta en el modelo I. Este nuevo modelo es posible llevarlo a un espacio libre de riesgo bajo la nueva medida de probabilidad, hecho que es importante en finanzas. Esto es factible gracias al Teorema de Girsanov, con el cual se hace el cambio de medida de probabilidad en R^2, sin suponer que hay independencia de los procesos, situación que a nuestro conocimiento no se encuentra en la literatura.

Introducción

Como es bien sabido el petróleo [2] es un recurso natural no renovable y actualmente también es la principal fuente de energía en los países tanto desarrollados como en vía de desarrollo. El petróleo es muy importante pues la vida sin ese material no podría ser como la conocemos. Del crudo obtenemos gasolina y diesel para nuestros autos y autobuses y combustible para barcos y aviones. Lo usamos para generar electricidad, obtener energía calorífica para fábricas, hospitales y oficinas y diversos lubricantes para maquinaria y vehículos. La industria petroquímica usa productos derivados de él para hacer plásticos, fibras sintéticas, detergentes, medicinas, conservadores de alimentos, hules y agroquímicos. El petróleo [3] ha transformado la vida de las personas y la economía de las naciones. Su descubrimiento creó riqueza, modernidad, pueblos industriales prósperos y nuevos empleos, motivando el crecimiento de las industrias petroquímicas.

Existe un mercado grande de precios del petróleo al contado y futuros. En este trabajo nos enfocaremos en el mercado de futuros, éste mercado es gigantesco, muy líquido y representativo de la situación económica de los commodities y hay muchas bolsas en el mundo que negocian con contratos futuros. La bolsa NYSE ofrece contratos de futuros a distinto plazo, la Bolsa de Comercio de Chicago (www.cbot.com) y la Bolsa Mercantil de Chicago (www.cme.com) son las dos bolsas de futuros más grandes de Estados Unidos de América. Las dos bolsas más importantes de Europa son Euronext (www.euronext.com), la cual se fusionó con la Bolsa de Valores de Nueva York (www.nyse.com) en 2006, y Eurex (www.eurexchage.com) copropiedad de Deutsche Borse (Bolsa Alemana) y la Bolsa Suiza, todas las bolsas mencionadas con anterioridad son solo algunas de las más importantes en el mundo. La bolsa de futuros permite negociar entre sí a las personas que desean comprar o vender mercancías en el futuro. El precio del petróleo y en especial el precio de sus futuros es, por lo tanto, un tema de gran importancia.

Desde hace años existe un gran interés por modelar dichos precios. Este interés surge de la creciente volatilidad de los mismos y ha habido varios esfuerzos para aplicar la teoría moderna de opciones. Hay literatura [1],[5], [7],[20] de modelos de valuación de activos relacionados con el petróleo cuyo subyacente es el precio del mismo. Por otra parte sabemos que los modelos realizados con la teoría de derivados dependen fuertemente del precio, de la volatilidad, del rendimiento y la correlación entre los procesos estocásticos, ejemplo de ello es el modelo de dos factores de Schwartz y Gibson [1]. Los precios de los instrumentos financieros vinculados al petróleo requiere el conocimiento del comportamiento estocástico del activo subyacente. Según Schwartz [1] el riesgo del precio de los productos básicos tiene un enorme impacto sobre los beneficios de las empresas y esto puede ser cubierto con éxito en la medida en que el proceso estocástico de la materia prima subyacente se conoce, por lo que los modelos propuestos en la literatura tienen como base el determinar el proceso estocástico del precio del commodity, es decir de la materia prima (en este caso el petróleo).

Schwartz comenta en su artículo que los modelos estocásticos del comportamiento de los precios de las materias difieren en el papel desempeñado por el rendimiento y el precio del comodity, en el número de factores usados para describir la incertidumbre. El concepto de factor se refiere a aquel elemento que influya para determinar el precio del futuro de la materia prima, es decir, el precio, el inventario, el rendimiento de conveniencia, etc. Los primeros modelos suponen un rendimiento constante y un proceso de un factor (precio del subyacente), ejemplo de ello es el modelo de Brennan y Schwartz [20] (1985), en el cual se describe que el comportamiento del precio sea el movimiento browniano geométrico. Esta especificación del camino aleatorio de los precios de los productos básicos se utilizó hasta hace una década, cuando comenzó a ser incluido la reversión a la media en los modelos, como una respuesta a la evidencia de la volatilidad de los rendimientos futuros. Hablar de un factor significa tener poca información sobre el comportamiento estocástico de los futuros: como ejemplo de esto se tiene los modelos de Schwartz (1997) [5], Cortázar y Schwartz (1997) [1]. Una consecuencia no deseada de los modelos de un factor, es que todas las posibles estimaciones de los futuros están perfectamente correlacionadas, un hecho que desafía la evidencia empírica.

Para tener un comportamiento estocástico más realistas, los modelos de dos factores con reversión a la media fueron introducidos, ejemplos de ello son Gibson y Schwartz [7] (1990), Schwartz [5] (1997), Schwartz y Smith (2000). Estos modelos estocásticos se han adoptado con bastante lentitud, y una posible razón para esto podría ser que aunque los modelos de dos factores se comportan razonablemente bien la mayoría de las veces, para algunas condiciones del mercado se comportan mal, haciendo estimaciones al día un tanto dudosas. Además, la mayoría de los procedimientos de estimación de parámetros propuestos en la literatura son bastante complicadas y requieren el uso de muchos datos, al no tener esto se traduce en pérdida de información importante. Una característica importante en los modelo mencionados es que se supone que la volatilidad es constante, lo que hace que el modelo sea realmente sencillo al momento de estimar los parámetros. Sin embargo en el modelo de Gibson y Schwartz se tiene un modelo no estándar, debido a que los movimientos brownianos correspondientes a cada uno de los procesos estocásticos (el precio y el rendimiento de conveniencia) están correlacionados.

Para entender mejor el modelo propuesto por Gibson y Schwartz, en el cual se utilizan como factores el precio y el rendimiento de conveniencia, Schwartz explica en su artículo el rendimiento de conveniencia. El precio de los futuros de un activo financiero que no paga dividendos es igual al precio spot del activo más la tasa de interés (costos de financiación) durante la vigencia del contrato de futuros. Cualquier pago de dividendos sobre el activo financiero se debe restar de los costos de transporte. En el caso de los productos básicos, los precios de futuros suelen ser más bajos que el precio de contado (precio spot) más la tasa de interés durante la vigencia del contrato de futuros. Este "déficit", que es como un dividendo implícito que se acumula para el dueño de la mercancía en cuestión, pero no al titular del contrato de futuros, es lo que se conoce como rendimiento de conveniencia de la mercancía.

A pesar de que los modelos de dos factores son una buena estimación para determinar el valor del futuro, surgen los modelos de tres factores que parecen ser mejores para explicar las variaciones de día a día en futuros de materias primas a plazo. Existen muy pocos ejemplos de este tipo de modelos en la literatura. Schwartz (1997) [5] presenta un modelo de tres factores, pero su tercer factor es calibrado utilizando precios de los bonos en vez de los precios de futuros de productos básicos. El modelo de tres factores propuesto en el artículo de Cortázar y Schwartz [1] está relacionado con el trabajo de Schwartz (1997), pero estos tres factores se calibran utilizando sólo los precios de los productos básicos. En esta tesis no se da un modelo de tres factores, pero sería interesante en el futuro proponerlo.

El objetivo de este trabajo es proponer un modelo estocástico de dos factores que influyen en la estructura de los precios futuros del petróleo. Este modelo se inspira en el artículo de Eduardo Schwartz y Cortázar [1] (2002), el que se basa en el modelo de dos factores de Gibson y Schwartz y en la teoría de expectativas racionales. Esta fue desarrollada por John F. Muth [24] en 1961. El modelo que se da tiene como factores el precio y el inventario. Se opta por el factor inventario y no por el rendimiento de conveniencia, pues se cree que forma un papel muy importante en la determinación de los precios del petróleo. Además el inventario está relacionado con el rendimiento de conveniencia. En este modelo se obtiene el precio del futuro en función de los factores y sus volatilidades.

En el primer capítulo se presentan los preliminares necesarios para el desarrollo del tema. Se comienza tocando algunos conceptos de probabilidad y el Movimiento Browniano Geométrico el cual describe el comportamiento de un gran número de precios de activos. Se dan algunos aspectos de la integral de Itô y una parte de la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales son la herramienta principal para la modelación de la dinámica de muchos procesos estocásticos, incluyendo el modelo que se propondrá en este trabajo. En esta sección se explora la relación estrecha entre una ecuación diferencial estocástica y ciertas ecuaciones diferenciales parciales parabólicas y en particular se estudian las ecuaciones de Kolmogorov. Se da también la versión multidimensional del teorema de Girsanov la cual será útil en la obtención del modelo neutro al riesgo, hecho en este trabajo.

En el segundo capítulo se estudia el concepto de derivados, en particular los mercados de futuros, ya que la mayoría de operaciones de los commodities (mercancías) se efectúan en el mercado de futuros. Se da el concepto de rendimiento de conveniencia, el cual refleja las expectativas del mercado con respecto a la disponibilidad futura del commodity, es decir, cuanto mayor sea la posibilidad de que ocurra situaciones de escasez mayor será el rendimiento de conveniencia. La relación estrecha entre el rendimiento de conveniencia y los inventarios son importantes para este trabajo, pues como ya se menciono uno de los factores en este trabajo es el inventario, el cual nos ayudará a determinar los precios de futuros. También se introducen algunos conceptos de mercados completos y de la teoría de arbitraje.

En el capítulo tres se describe el modelo de dos factores de Schwartz y Gibson [1], en el que se describen dos procesos estocásticos que influyen en la estructura de los precios de futuros del petróleo: uno de los factores es el precio del petróleo, el cual sigue un movimiento browniano geométrico y el otro factor es el rendimiento de conveniencia que se modela como un proceso estocástico de Ornstein-Ulenbeck. El modelo de Schwartz y Gibson aporta a este trabajo la idea de manejar a la volatilidad constante y tomar correlacionados a los movimientos brownianos asociados a estos procesos.

El cuarto capítulo ofrece un pequeño panorama de la teoría de expectativas racionales, la cual se desarrolló en respuesta a los defectos percibidos en teorías basadas en expectativas adaptativas. Las expectativas adaptativas, nos dicen que las expectativas sobre el valor futuro de una variable económica se basan en valores del pasado. Por ejemplo, la gente predice la inflación mirando a la inflación en años anteriores y bajo esta teoría se tiene que si la economía sufre un constante aumento de las tasas de inflación (tal vez debido a las políticas del gobierno), la gente siempre subestimará la inflación. Este resultado puede considerarse como poco realista, porque tarde o temprano estos individuos se dan cuenta de la tendencia de la información pasada y la tomaron en cuenta en la formación de sus expectativas. La hipótesis de expectativas racionales que se exponen en este capítulo va en este sentido, en el que se supone que los individuos tienen toda la información disponible para la formación de sus expectativas. A pesar de que las expectativas pueden resultar incorrectas, estás no se desviarán de forma sistemática de los valores esperados.

La hipótesis de expectativas racionales ha sido usada para apoyar algunas conclusiones radicales sobre la política económica. Un ejemplo de esto es la propuesta de una política ineficiente desarrollada por Thomas Sargent y Wallace Neil [18]. Durante la década de 1970 las expectativas racionales parecían haber hecho que la teoría macroeconómica anterior en gran medida fuera obsoleta, lo cual culminó con la crítica de Lucas [18]. Sin embargo, aunque esto ha fracasado, en teoría ha sido ampliamente adoptada a lo largo de la macroeconomía moderna como un supuesto de modelado y no como una proposición de política económica.

En el capítulo cinco y como resultado del capítulo previo, se describe el modelo estocástico para los precios de futuros del petróleo, el cual es proveniente de la teoría de expectativas racionales, que en si se basa en el modelo de Muth-Sargent. En el espíritu de este modelo que describe el comportamiento del mercado de bienes, se propone un modelo continuo que posteriormente se reescribe como dos ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales describen a el precio y el inventario. Por último se utiliza el lema de Ito-Doeblin y la condición de no arbitraje para obtener una ecuación diferencial parcial estocástica para los futuros. Debido a que se obtienen dos ecuaciones estocásticas acopladas, no es posible llevar el modelo a un espacio libre de riesgo, ya que en este caso no se cumplen las hipótesis del Teorema de Girsanov. Por lo tanto se plantea un segundo modelo, el cual si es posible llevar a un espacio libre de riesgo $(\omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_(t > 0), \tilde{P})$, debido a que las ecuaciones diferenciales estocásticas propuestas, las cuales describen a los dos factores: inventario y precios, están basadas en el comportamiento del movimiento browniano geométrico, es decir estas ecuaciones se modelan de forma semejante que el movimiento browniano geométrico, lo que nos da como resultados que se pueda aplicar el Teorema de Girsanov y así obtener el modelo neutro al riesgo. Además este modelo se espera que sea mejor que el modelo uno, ya que en éste se obtienen las razones de cambio relativas.

Capítulo 1

Antecedentes para el análisis del modelo estocástico de dos factores

1.1. Conceptos básicos de teoría de probabilidad

Notaciones

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}_+$ el conjunto de los reales positivos, entendiéndose por positivos si son mayores a cero, $\overline{\mathbb{R}}$ el conjunto de reales extendidos $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{Z}$ el conjunto de enteros y $\mathbb{N}$ los enteros positivos. Si E es un conjunto no vacío, entonces una σ-álgebra de subconjuntos de E, es una colección $\mathcal{E}$ de subconjuntos de E tal que, $E \in \mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ es cerrada bajo las operaciones de complementación y de unión numerable. Si A es una colección de subconjuntos de E, $\sigma(A)$ denotará la σ-álgebra generada por A, es decir, la mínima σ-álgebra que contiene a A.

La pareja $(E, \mathcal{E})$, que consiste de un conjunto no vacío E y una σ-álgebra $\mathcal{E}$ de subconjuntos de E se llama un **espacio medible**.

Sean $(E, \mathcal{E})$ y $(F, \mathcal{F})$ dos espacios medibles; una función $f : E \to F$ se dice que es una **función medible** con respecto de las σ-álgebras $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$, si para todo $A \in \mathcal{F}$, se tiene $f^{-1}(A) = \{x \in \mathrm{E} : f(x) \in \mathrm{A}\} \in \mathcal{E}$. Si $A \subseteq E$, la **función indicadora** de A, la denotaremos por I_A.

Si E es un espacio topológico, la σ-álgebra generada por los abiertos de E es llamada la **σ-álgebra de Borel** de E y la denotaremos por $\mathfrak{B}(E)$.

Aquí una medida sobre un espacio medible $(E, \mathcal{E})$ siempre será positiva, en caso contrario diremos que es una medida con signo. Un **espacio de medida** es una terna $(E, \mathcal{E}, \mu)$, donde $(E, \mathcal{E})$ es un espacio medible y μ es una medida en $(E, \mathcal{E})$.

Un **espacio de probabilidad** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de medida tal que $P(\Omega) = 1$.

Si una proposición concerniente a los puntos de un espacio de medida $(E, \mathcal{E}, \mu)$ es cierta para todos los puntos del conjunto E, excepto en los puntos de un conjunto $A \subset E$ tal que $\mu(A) = 0$, entonces se dice que la propiedad es cierta **casi donde quiera**, abreviado c.d. Si el espacio es un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, entonces se dice que la propiedad es cierta casi seguramente, abreviado c.s. Cuando trabajemos con varias medidas de probabilidad, si una propiedad es cierta **casi seguramente** respecto de la probabilidad P, a esta la denotaremos por P-c.s.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Si $(E, \mathcal{E})$ es un espacio medible entonces cualquier aplicación $X : \Omega \to E$ que sea medible es llamada **variable aleatoria**, abreviado v.a. La fórmula $\mu_X(A) = P\{X^{-1}(A)\}$, para toda $A \in \mathcal{E}$, define una medida de probabilidad μ_X en $(E, \mathcal{E})$, llamada la **distribución** de X .Aquí utilizaremos la notación $\mu_X(A) = P[X \in \text{A}]$. Si X es una v.a. con valores reales, entonces la **esperanza** de X se define como $EX = \int_\Omega X dP$, siempre que esta integral exista. Si además f es una función medible de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ entonces $Ef(X) = \int_\Omega f d\mu_X$, siempre que ambas integrales existan.

Definición 1. *Dos subconjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ se dice que son **independientes** si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definición 2. *Un **proceso estocástico** es una colección parametrizada de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \geq 0}$, definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y con valores en $\mathbb{R}^n$.*

Definición 3. *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ tiene*

*i) **Incrementos independientes** si y sólo si $\forall\ 0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, los incrementos*

$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *son v.a. independientes.*

*ii) **Incrementos estacionarios** si y sólo si $X_t - X_s$ tiene la misma distribución que $X_{t+h} - X_{s+h}$, $\forall h > 0$.*

Definición 4. *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible.*

*a) Una **filtración** en $(\Omega, \mathcal{F})$ es una familia de σ-álgebras de Ω, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ tales que:*

i) $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ para toda $t > 0$.

ii) Si $s, t \in \mathbb{R}$, $s, t > 0$ y $s \leq t$, entonces $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

b) Sea $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ una medida de probabilidad. Se dice que$\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$ es una ***filtración completa*** *si el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es completo y todos los conjuntos de probabilidad cero están en $\mathcal{F}_0$.*

c) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad equipado con una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\mathrm{T}]}$. Sea $\{X_t\}_{t\in[0,\mathrm{T}]}$ una sucesión de variables aleatorias indexadas por $t \in [0, \mathrm{T}]$, se dice que la sucesión de variables es un proceso estocástico ***adaptado****, si para cada t, la variable aleatoria X_t es $\mathcal{F}_t$-medible.*

Definición 5. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t>0})$ un espacio de probabilidad filtrado. Un proceso $\{H_t\}_{t\geq 0}$ es* ***admisible*** *como integrando estocástico si:*

i) H_t es $\mathcal{F}_t$-adaptado.

ii) $\int_0^t E[H^2(s)]dt < \infty$.

Definición 6. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ un espacio de probabilidad filtrado. Un proceso $\{H_t\}_{t\geq 0}$ es* ***previsible simple*** *si y solo si existe una partición $\pi = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ de $[0, T]$ con $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ y v.a. $Z_1, \cdots, Z_n$ tal que:*

i) Z_i es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-medible.

ii) $E[Z_i^2] < \infty$.

iii) $H_t = \begin{cases} Z_i & \text{si } t_{i-1} \leq t < t_i \\ Z_n & \text{si } t = T \end{cases}$

Definición 7. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t>0})$ un espacio de probabilidad filtrado, y $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adaptado. Decimos que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es:*

a) un proceso ***integrable*** *o de* ***cuadrado integrable****, respectivamente, si*

$$E|X_t| < \infty, \ \text{ó } E|X_t|^2 < \infty,$$

respectivamente.

b) una ***submartingala*** *si para todo $t \geq 0$ se tiene $EX_t^+ < +\infty$ y $E[X_t/F_s] \geq X_s$ c.s. para $s \leq t$ (donde X_t^+ es la parte positiva de X_t).*

c) una ***supermartingala*** *si cada v.a. X_t^- es integrable y $E[X_t/F_s] \leq X_s$ c.s., $s \leq t$ (donde X_t^- es la parte negativa de X_t).*

d) una ***martingala*** *si cada v.a.* X_t *es integrable y* $E[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s$ *c.s.*

e) de ***variación cuadrática finita****, si existe un proceso, al que denotaremos por* $([X,X]_t)_{t\geq 0}$*, que sea creciente y tal que para toda* $t \geq 0$ *y toda sucesión de particiones* $\{\pi_n\}_{n\geq 1}$ *del intervalo* $[0,t]$ *con*

$$\pi_n = \{t_i^n | i = 0, ..., n\} \text{ y } |\pi_n| \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$$

(donde $|\pi_n| = \text{máx}\{|t_{i+}^n - t_i^n|, i = 0, ..., n-1\}$*) se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n}(X_{t_{k-1}^n} - X_{t_{k-1}^n})^2 \rightarrow_{n\rightarrow\infty}^{P} [X,X]_t,$$

es decir $[X,X]_t$ *es límite en probabilidad de la variación cuadrática* $\sum_{k=1}^{n}(X_{t_{k-1}^n} - X_{t_{k-1}^n})^2$.

El proceso $([X,X]_t)_{t\geq 0}$ *es llamado la* ***variación cuadrática*** *de* $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

Definición 8. *Una función* $V : t \rightarrow V_t$ *de* $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ *en* $\mathbb{R}$ *se dice que es de variación finita si para todo* t *se tiene:*

$$\mathrm{Var(V)_t = sup\{\sum_{i=1}^{n} |V_{t_{i+1} - V_{t_i}}|, 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n+1} = t\} < \infty.}$$

La función $\mathrm{Var(V)_t}$ *se llama la variación de* V *en* $[0,t]$.

Teorema 1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad.*

i) La variación cuadrática del movimiento Browniano es:

$$[B,B]_t = t.$$

Demostración [13] pag. 102.

En la siguiente sección se definirá el movimiento browniano.

Comentarios: El concepto de procesos estocástico es fundamental para el desarrollo de la teoría financiera en ambientes de riesgo. Estos procesos son útiles para describir el comportamiento aleatorio de las variables financieras en el tiempo: los precios de los activos, las tasas de interés, los tipos de cambio, etc. Usualmente, en los modelos financieros se requiere que los precios, presentes y pasados, de los activos sean conocidos para producir pronósticos. Esta idea es la razón por la que se introduce el concepto de filtración, el cual nos representa la información disponible en el tiempo t. El hecho de que la filtración esté aumentando significa que hay más y más información conocida conforme el tiempo transcurre y que la información pasada no se olvida.

1.2. Movimiento Browniano

1.2.1. Movimiento Browniano

En 1827, mientras el médico y botánico escocés Robert Brown examinaba partículas de polen[1] (de Clarckia Pulchella) en el microscopio, observo que cuando estas se encontraban suspendidas en agua y en otros líquidos se movían sin cesar en forma errática. En un principio, Brow pensó que las partículas tenían movimiento propio e incluso vida. Posteriormente, el fenómeno se asoció no sólo con partículas de polen, sino también con partículas de materia inorgánica como el polvo fino de algunos materiales (vidrio, carbon, roca, etc.). Fué hasta principios del siglo XX, cuando se demostró que el movimiento irregular de las partículas de polen se debía al golpeteo constante de las moléculas invisibles de agua sobre las moléculas visibles de las partículas de polen. En 1905, el físico Albert Einstein escribe un artículo sobre mecánica estadística que proporciona la formulación matemática del movimiento browniano, la cual se deriva que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula en un liquido, en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo.

En 1900, el matemático Louis Bachelier en su tesis " Theorie de la speculation " sobre el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la bolsa de París, se anticipó a Einstein con la formulación matemática del movimiento browniano, abordando un problema completamente diferente al de la mecánica estadística o al del movimiento erratico de partículas de polen suspendidas en agua.

Definición 9. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad fijo, el **movimiento Browniano (estándar y unidimensional)** es una función*

$$B : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que para cada $t \geq 0$, la función $B(t, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathcal{F})$, que en forma breve se denotará como $\{B_t\}_{t\geq 0}$.

*Para cada $w \in \Omega$, la función $B(\cdot, w) : [\infty, 0) \to \mathbb{R}$ es continua en $[\infty, 0)$, estás funciones son llamadas **trayectorias**.*

La familia $\{B_t\}_{t\geq 0}$ satisface las siguientes condiciones:

i) $B_0 = 0$ casi seguramente, es decir, $P\{w \in \Omega : B_0(w) = 0\} = 1$

ii) Para cualquier conjunto de tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, los incrementos

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

[1] [16]

son independientes y estacionarios.

iii) Para cualquier par de tiempos t y s con $0 \leq s < t$, $B_t - B_s \rightsquigarrow N(0, t-s)$.

iv) $B_\bullet(w)$ *es una función continua de* $\mathbb{R}_+$ *en* $\mathbb{R}$.

Se puede definir el movimiento browniano no estándar sustituyendo la condición iii) por $B_t - B_s \rightsquigarrow N(0, c(t-s))$, donde c es una constante positiva.

Definición 10. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ *un espacio de probabilidad filtrado, un Movimiento Browniano d-dimensional es un proceso* $B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)$ *que satisface las siguientes propiedades:*

i) Cada B_t^i, *con* $i = 1, ..., d$ *es un movimiento browniano en* $\mathbb{R}$.

ii) Los procesos B_t^i *y* B_t^j *son independientes si* $i \neq j$

iii) Para cada $t \geq 0$ *el vector de variables aleatorias* B_t *es* $\mathcal{F}_t$*-medible.*

iv) Para cualquier par de tiempos t y s con $0 \leq s < t$, *el vector de incrementos* $B_s - B_t$ *son independientes de la filtración* $\mathcal{F}_t$.

Comentarios: Como ya se comento el movimiento browniano describe el comportamiento de las partículas de polen y después de investigaciones sobre este fenómeno se obtuvo una formulación matemática.

El movimiento browniano, sin lugar a dudas se encuentra implícita o explícitamente en casi toda la teoría financiera en tiempo continuo en ambientes estocásticos. Por esta razón para el modelo que se abordará en esta tesis es relevante conocer dicho proceso. En finanzas se utiliza el movimiento Browniano Geométrico[2] para describir el comportamiento de los precios, este movimiento tiene las propiedades de ser un proceso gaussiano y de Markov.

1.3. Integral de Itô, ecuaciónes diferenciales estocásticas y ecuaciones de Kolmogorov

Como ya se menciono la integral de Itô es fundamental para la teoría de calculo estocástico, por esta razón se verá la construcción de la integral de Itô para procesos generales a partir de

[2]Su ecuación se muestra en el ejemplo 1

procesos simples, además de darán algunos teoremas y algunas propiedades importantes de esta integral.

Por otro lado tenemos la subsección de ecuaciones diferenciales estocásticas en la cual se mencionan algunos teoremas. En está subsección el objetivo es saber utilizar bien estas ecuaciones, así como saber resolverlas.

En la ultima subsección se hace una relación entre la teoría del calculo estocástico y la ecuación de Kolmogorov, es decir se ve como a partir de ambas se obtiene la misma ecuación diferencial parcial. Además se dan varios ejemplos de la ecuación de densidad de transición. Toda la teoría que se verá en esta sección es parte fundamental para el modelo de precios futuros del petróleo.

1.3.1. Integral de Itô para procesos previsibles simples

Para poder definir la integral de Itô en general, primero se define para integrandos de procesos previsibles simples $H(t)$ y después se extiende a procesos no simples como limite de procesos previsibles simples. Este proceso se describe a continuación:

Sea $\pi = \{t_0, t_1, ...t_n\}$ una partición de $[0, T]$, tal que $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$.

Supongamos que $H(t)$ es constante en t sobre cada intervalo $[t_j, t_{j+1})$, es decir que H(t) sea un proceso previsible simple. La importancia de que este proceso sea previsible recae en que para definir la integral es necesario que este sea adaptado.

Se define la integral de Itô para los procesos previsibles simples como:

$I(H)_t = H(t_0)[B_t - B_{t_0}] = H(0)B_t, 0 < t \leq t_1$

$I(H)_t = H(0)B_t + H(t_1)[B_t - B_{t_1}], t_1 < t \leq t_2$

$I(H)_t = H(0)B_t + H(t_1)[B_t - B_{t_1}] + H(t_2)[B_t - B_{t_2}], t_2 < t \leq t_3$

En general si $t_k < t \leq t_{k+1}$, entonces

$$I(H)_t = \sum_{j=0}^{k-1} H(t_j)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] + H(t_k)[B_t - B_{t_k}]. \tag{1.1}$$

El proceso $I(H)_t$ es la integral de Itô para procesos previsibles simples, el cual se denota:

$$I(H)_t = \int_0^t H(s)dB_s.$$

Teorema 2. *La integral de Itô definida en la ecuación 1.1 es una martingala.*

Demostración. [13] pág. 128.

Teorema 3. ***(Isometría de Itô)*** *La integral de Itô definida en la ecuación 1.1 satisface:*

$$E[I(H)_t^2] = E\left[\int_0^t H^2(s)dB_s\right].$$

Demostración. [13] pág. 128.

Teorema 4. *La variación cuadrática al tiempo t de la integral de Itô definida en la ecuación 1.1 es:*

$$[I(H), I(H)]_t = \int_0^t H^2(s)ds.$$

Demostración. [13] pág. 131.

1.3.2. Integral de Itô para integrandos generales

Teorema 5. *Sea $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano en $\mathbb{R}$ definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P,)$. Sea $\{H(t)\}_{t\in[0,\mathrm{T}]}$ un proceso admisible, entonces existe una sucesión $\{H_n(t)\}_{t\in[0,\mathrm{T}]}$ de procesos previsibles simples tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T E|H(t) - H_n(t)|^2 dt = 0.$$

Teorema 6. *Sea $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano en $\mathbb{R}$ definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P,)$. Sea $\{H(t)\}_{t\in[0,\mathrm{T}]}$ un proceso admisible entonces existe una sucesión $\{H_n(t)\}_{t\in[0,\mathrm{T}]}$ de procesos previsibles simples, tal que $I(H_n)_t = \int_0^t H_n(s)dB_s$, entonces $I(H_n)_t$ converge en L^2 a un proceso $I(H)_t$ en $[0,T]$, es decir:*

$$\lim_{n\to\infty} E[\sup_{0\leq t\leq T} |I(H)_t - I(H_n)_t|^2] = 0.$$

Usando estos dos teoremas se ve la generalización de la integral de Itô para integrandos generales (procesos admisibles), ahora si podemos hablar de las propiedades y de como se define un proceso de Itô, y así poder emplearlos durante los siguientes capítulos.

Definición 11. ***(Proceso de Itô).*** *Sea $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano en $\mathbb{R}$ definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un proceso de Itô es un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in[0,\mathrm{T}]}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de la forma:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s)ds + \int_0^t v(s)dB_s. \tag{1.2}$$

donde: X_0 es el valor del proceso al tiempo t=0, $u(s)$ y $v(s)$ son procesos admisibles.

Teorema 7. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad.*

i) Sea $X_t = \int_0^t H(s)dB_s$, $(t \geq s)$, con $H(s)$ un proceso admisible, entonces:

$$[X, X]_t = \left[\int_0^t H(s)dB_s, \int_0^t H(s)dB_s\right]_t = \int_0^t H^2(s)ds.$$

Demostración [13] pag. 134 (vi).

ii) Sea X_t un proceso de Itô definido en la ecuación 1.2, entonces:

$$[X, X]_t = \int_0^t v^2(s)ds$$

Demostración [13] pag. 143.

iii) Sean X y Y dos procesos de Itô, entonces

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [X, Y]_t.$$

Definición 12. *Sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Itô, y sea $\{\Gamma(t)\}_{t\geq 0}$ un proceso adaptado, tal que $E\{\int_0^t \Gamma(s)^2 u(s)^2 ds\}$ y $\int_0^t \Gamma(s)v(s)dB_s$ sean finitas para cada $t > 0$, entonces se define la integral con respecto al proceso de Itô como:*

$$\int_0^t \Gamma(s)dX_s = \int_0^t \Gamma(s)u(s)ds + \int_0^t \Gamma(s)v(s)dB_s.$$

Teorema 8. *Sean $\{H_t\}_{t\geq 0}$ y $\{G_t\}_{t\geq 0}$ dos procesos admisibles definidos en $(\Omega, \mathcal{F}, P,)$, entonces se tienen las siguientes propiedades:*

i)

$$\textit{la integral} \int_0^t H(s)dB_s, \ \textit{es } \mathcal{F}_t - \textit{medible}$$

ii)

$$\textit{el proceso } \left\{\int_0^t H(s)dB_s\right\}_{0\leq t\leq T} \quad \textit{es una } \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} - \textit{martingala.}$$

iii) ***(Isometría de Itô)***

$$E\left[\left(\int_0^t H(s)dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t H^2(s)dB_s\right].$$

iv)

$$\int_0^t (\beta H(s) + \alpha G(s))dB_s = \beta \int_0^t H(s)dB_s + \alpha \int_0^t G(s)dB_s.$$

v)

$$\int_0^T H(s)dB_s = \int_0^t H(s)dB_s + \int_t^T H(s)dB_s.$$

Demostración [12] pag. 30 y [13] pag. 134.

Teorema 9. ***(Fórmula de Itô en dimensión uno).*** *Sea X_t un proceso de Itô definido en la ecuación 1.2 y sea $f(t,x)$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, entonces para $t \geq 0$:*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)d[X,X]_s =$$

$$f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)v(s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)u(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)v^2(s)ds.$$

Demostración [13] pag. 138.

En notación diferencial:

$$df(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)d[X,X]_t.$$

Ejemplo 1. *Sea un proceso de Itô dado por:*

$$S_t = \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

donde μ y σ son constantes.

En finanzas este proceso modela el comportamiento del precio del activo, donde, μ es el rendimiento medio esperado y σ es la volatilidad instantánea por unidad de tiempo. En este caso se dice que el precio S_t del activo sigue un movimiento Browniano geométrico.

Sea $g(t, S_t) \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, entonces por la formula de Itô obtenemos:

$$dg(t,S_t) = (\frac{\partial g}{\partial s}(t,S_t)\mu S + \frac{\partial g}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial^2 s}(t,S_t)\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial g}{\partial s}(t,S_t)\sigma S dB_t.$$

Teorema 10. ***(Fórmula de Itô-Doeblin multi-dimensional[11])***

Sea X_t un proceso de Itô n-dimensional, dado por $dX_t = udt + vdB_t$.

donde: $X_t = (X_1(t), ..., X_n(t))', u = (u_1, ..., u_n)', dB(t) = (dB_1(t), ..., dB_m(t))'$,

$$v = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nm} \end{pmatrix}$$

y sea $f(t,x) \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}-1})$,entonces la fórmula de Itô n-dimensional en su forma diferencial es:

$$df(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X_t)dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)d[X^i,X^j]_t$$

donde: $d[X_t^i, X_t^j]_t = \delta^{ij}dt$, ($\delta^{ij} = 1, si\ i = j, 0\ si\ i \neq j$).

Demostración. Ver [12] pags. 48-49.

1.3.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Definición 13. *Sea el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, entonces se define la* ***ecuación diferencial estocástica*** *como:*

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = Z. \end{cases}$$

Una solución de la ecuación anterior en $[0, T]$ es un proceso $X_t : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ que satisface casi seguramente:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Teorema 11 (Existencia y unicidad de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas)**.** *Sea* $T > 0$ *y* $\mu(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times R^n \to R^{n\times m}$, *funciones medibles tales que satisfacen:*

a)μ *y* σ *son continuas,*

b)$\forall t \in [0, \mathrm{T}]$ *y* $\forall x, y \in \mathbf{R^n}$*:* $\|\mu(t, x) - \mu(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq k\|x - y\|$,

c)$\forall t \in [0, \mathrm{T}]$ *y* $\forall x \in \mathbf{R^n}$*:* $\|\mu(t, x)\| + \|\sigma(t, x)\| \leq C(1 + \|x\|)$.

Sea $X_0 = Z$ *v.a., la cual es independiente de la* σ*-álgebra generada por* $B_s(\cdot)$ *y tal que*

$$E[|Z|^2] < \infty,$$

entonces la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \ 0 \leq t \leq T \\ X_0 = Z. \end{cases}$$

tiene solución continua única $X_t(\omega)$*, con la propiedad de que* $X_t(\omega)$ *es adaptado a la filtración* $\mathcal{F}_t^Z$ *generada por* Z *y* $B_s(\cdot)$*, con* $s \leq t$ *y*

$$E[\int_0^T |X_t|^2 dt] < \infty.$$

Demostración [12] pag. 69.

Ejemplo 2. *Observe que si tenemos la ecuación diferencial estocástica de* X_t *dada por:*

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = x_0, \end{cases} \quad \textit{donde: } \mu \textit{ y } \sigma \textit{ son constantes.}$$

Como μ y σ son constantes entonces cumplen inmediatamente las condiciones del teorema 11, por lo que existe una solución y es única. Veamos que $Z_t = \log(X_t)$ es solución de la ecuación diferencial estocástica, aquí $Z_t = f(X_t, t) = log(X_t)$, entonces por la formula de Itô se obtiene que

$$Z_t - Z_0 = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} dX_s - \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 X_s^2 ds$$

$$Z_t - Z_0 = 0 + \int_0^t \frac{1}{X_s} dX_s - \int_0^t \frac{1}{2X_s^2} \sigma^2 X_s^2 ds$$

sustituyendo dX_s en la ecuación anterior:

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \frac{1}{X_s} (\mu X_s ds + \sigma X_s dB_s) - \int_0^t \frac{1}{2X_s^2} \sigma^2 X_s^2 ds$$

$$\Rightarrow Z_t = Z_0 + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) ds + \int_0^t \sigma B_s$$

$$\Rightarrow Z_t = \log(X_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) t + \sigma B_t$$

$$\Rightarrow Z_t = \log(x_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) t + \sigma B_t$$

Por lo tanto

$$X_t = \exp\{Z_t\} = x_0 \exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) t + \sigma B_t\}, \tag{1.3}$$

es solución de la ecuación diferencial estocástica.

Definición 14. *Se denota por*

$$p(t_0, t_1; x, y)^3$$

la densidad (en la variable y) de la variable X_{t_1}, con la condición de que $X_{t_0} = x$. En otras palabras, para h Borel-medible

$$E_{t_0,x} h(X(t_1)) = \int_{\mathbb{R}} h(y) p(t_0, t_1; x, y) dy.$$

La propiedad de Markov dice que para $0 \leq t_0 \leq t_1$ se tiene

$$E_{t_0,x}[h(X(t_1))|\mathcal{F}_t] = \int_{\mathbb{R}} h(y) p(t_0, t_1; x, y) dy.$$

[3] La densidad de transición p cumple con las condiciones en la definición 2.1, [17] pag. 47.

Ejemplo 3. ***(Movimiento Browniano con deriva)***

Considere la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu dt + dB_t,$$

para el intervalo $[t_0, t_1]$ *la ecuación anterior es equivalente a*

$$X_{t_1} = X_{t_0} + \mu(t_1 - t_0) + (B_{t_1} - B_{t_0}),$$

como $X_{t_0} = x$, *entonces*

$$X_{t_1} = x + \mu(t_1 - t_0) + (B_{t_1} - B_{t_0}),$$

sabiendo que el valor esperado de X_{t_1} *es* $x + \mu(t_1 - t_0)$ *y su varianza es* $(t_1 - t_0)$, *la densidad de transición de la variable* X_{t_1} *es:*

$$p(t_0, t_1; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \exp\left\{-\frac{(y - (x + \mu(t_1 - t_0)))^2}{2(t_1 - t_0)}\right\}.$$

Notemos que p *depende de* t_1 *y* t_0 *únicamente, esto es en la diferencia* $(t_1 - t_0)$. *Esto sucede siempre y cuando las variables* $\mu(t, x)$ *y* $\sigma(t, x)$ *no depende de* t.

Ejemplo 4. ***(Movimiento Browniano Geométrico)***

Considere la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

con condición inicial $X_{t_0} = x$, *por el ejemplo 2, la solución de la ecuación diferencial estocástica para dados dos tiempos* t_0 *y* t_1 *esta dada por:*

$$X_{t_1} = x \exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_1 - t_0) + \sigma(B_{t_1} - B_{t_0})\}. \tag{1.4}$$

Como la variable aleatoria $B_{t_1} - B_{t_0}$ *tiene densidad*

$$\mathbb{P}(B_{t_1} - B_{t_0} \in db)^{4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \exp\left\{-\frac{(b - E(B_{t_1} - B_{t_0}))^2}{2(t_1 - t_0)}\right\} db, \tag{1.5}$$

sabiendo que $E(B_{t_1} - B_{t_0}) = E(B_{t_1 - t_0}) = 0$, *entonces*

$$\mathbb{P}(B_{t_1} - B_{t_0} \in db) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \exp\left\{-\frac{b^2}{2(t_1 - t_0)}\right\} db.$$

[4] Ver [18] pag. 56

Ahora haciendo un cambio de variable, $b = B_{t_1} - B_{t_0}$ e $y = X_{t_1}$, la ecuación 1.4 la reescribimos como:

$$y = x\exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_1 - t_0) + \sigma b\}, \tag{1.6}$$

por otro lado la ecuación 1.6 es equivalente a que

$$b = \frac{1}{\sigma}[\log\frac{y}{x} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_1 - t_0)], \tag{1.7}$$

de donde la derivada $\frac{dy}{db} = \sigma y$ es equivalentemente $db = \frac{dy}{\sigma y}$.

Observe que como b tiene la densidad descrita en la ecuación 1.5, entonces para obtener la densidad (aplicada a y) de X_{t_1}, basta obtener la densidad (aplicada a b) de X_{t_1}, ya que se bajo un cambio de variable se obtuvo que la ecuación 1.4 sea equivalente a 1.6, y además como 1.6 es equivalente a la ecuación 1.7, la cual es función de b. Por lo tanto en base a esta observación se tiene que la densidad de X_{t_1} resulta ser:

$$p(t_0, t_1; x, y)dy = \mathbb{P}(X_{t_1} \in dy) =$$
$$\frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}}\exp\left\{-\frac{1}{2(t_1 - t_0)\sigma^2}[\log\frac{y}{x} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_1 - t_0)]^2\right\}dy.$$

Teorema 12. ***(Representación de Feynman-Kac[5])***

Considere la ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x_0, \end{cases}$$

y sea $h(y)$ una función Borel-medible. Para $T > 0$ y $t \in [0, \mathrm{T}]$ se define la función $g(t, x) = E_{t,x}h(X(T)) = \int_{\mathbb{R}} h(y)p(t, T; x, y)dy$, tal que $E_{t,x}|h(X(T))| < \infty$, $\forall\ t, x$, entonces $g(t, x)$ satisface la siguiente ecuación diferencial parcial con valores a la frontera:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x)\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(t, x) = 0. \\ g(T, x) = h(x). \end{cases}$$

Proposición 1. ***(Operador diferencial)***. *Sea $f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, se define el operador diferencial asociado a f como:*

$$(Af)(x) = \frac{\sigma^2(x)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + b(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x),$$

entonces el proceso $M_t = f(X_t) - \int_0^t Af(X_s)ds$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala, donde $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una solución de la ecuación diferencia estocástica $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$.

[5] [13] pag. 268

Observemos: Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una solución de $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$, tal que $X_0 = x$, entonces por la Proposición 1, dada una función $f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, se tiene:

$$E(f(X_t)) = E(f(X_0)) + E\left(\int_0^t Af(X_s)ds\right) = f(x) + E\left(\int_0^t Af(X_s)ds\right),$$

ahora por el Teorema 11 se sabe que $\forall t \in [0, \mathrm{T}]$ y $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\|\mu(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1 + \|x\|)$, entonces $E\left(\int_0^t Af(X_s)ds\right)$ es finita pues:

$$E\left(\int_0^t Af(X_s)ds\right) = {}^6 E\left(\sup_{s\leq T}|Af(X_s)|\right) \leq K\left(1 + E\left(\sup_{s\leq T}|X_s|^2\right)\right) < \infty.$$

Por el Teorema de Lebesgue [7]($x \to Af(x)$ cuando $s \to X_s$, ambas son funciones continuas) entonces:

$$\frac{d}{dt}E(f(X_t))|_{t=0} = \lim_{t\to 0} E\left(\frac{1}{t}\int_0^t Af(X_s)ds\right) = Af(x).$$

Por lo que el operador diferencial A es llamado el generador infinitesimal. Este generador se define a continuación para $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición 15. ***(Generador infinitesimal)***

Sea X_t un proceso de Itô como en el teorema 10, y sea $h \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}-1})$, entonces el generador infinitesimal A se define como:

$$(Ah)(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x)\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n C_{ij}(x)\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

donde: C se puede expresar en forma matricial como $C(x) = \sigma(x)\sigma^T(x)$, con $\sigma^T(x)$ la transpuesta de la matriz $\sigma(x) = (\sigma_{ij}(x))_{i,j}$.

1.3.4. Ecuación de Kolmogorov

Proposición 2. ***(Ecuación de Kolmogorov hacia atrás)***. *Considere $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$, y sea $p(t_0, t_1; x, y)$ la densidad de transición, entonces la ecuación de Kolmogorov hacia atrás es:*

$$-\frac{\partial}{\partial t_0}p(t_0, t_1; x, y) = \mu(t_0, x)\frac{\partial}{\partial x}p(t_0, t_1; x, y) + \frac{\sigma^2(t_0, x)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(t_0, t_1; x, y).$$

[6] Ver [15] Teorema 5.3, pgs. 58-59

[7] Ver [15]

En el caso de que μ y σ sean funciones sólo de x, y $p(t_0, t_1; x, y)$ dependa de t_1 y t_0 únicamente en la diferencia $\tau = t_1 - t_0$, entonces se puede reescribir $p(\tau; x, y)$ en lugar de $p(t_0, t_1; x, y)$, y la ecuación de Kolmogorov hacia atrás quedaría:

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} p(\tau; x, y) = \mu(x) \frac{\partial}{\partial x} p(\tau; x, y) + \frac{\sigma^2(x)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(\tau; x, y).$$

Ejemplo 5. ***(Movimiento Browniano con deriva)***

Del ejemplo 3 sabemos que dada $dX_t = \mu dt + dB_t$, su densidad de transición es:

$$p(t_0, t_1; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \exp\left\{ -\frac{y - (x + \mu(t_1 - t_0))^2}{2(t_1 - t_0)} \right\},$$

entonces como la densidad de transición depende de $\tau = t_1 - t_0$, por lo tanto p se puede reescribir como $p(\tau; x, y)$, una vez reescrita la densidad de transición, tomemos las parciales de p:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p = \left[-\frac{1}{2\tau} + \frac{\mu(y - x - \mu\tau)}{\tau} + \frac{(y - x - \mu\tau)}{2\tau^2} \right] p.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p = \frac{(y - x - \mu\tau)}{\tau} p.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(y - x - \mu\tau)}{\tau} p \right) + \frac{(y - x - \mu\tau)}{\tau} \frac{\partial}{\partial x} p = -\frac{1}{\tau} p + \frac{(y - x - \mu\tau)^2}{2\tau^2} p.$$

Entonces

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} p + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p = \left[\frac{\mu(y - x - \mu\tau)}{\tau} - \frac{1}{2\tau} + \frac{(y - x - \mu\tau)}{2\tau^2} \right] p = \frac{\partial}{\partial \tau} p,$$

la cual es la ecuación de Kolmogorov hacia atrás.

Ejemplo 6. ***(Movimiento Browniano Geométrico)***

Por el ejemplo 4, dado $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$, su densidad de transición es:

$$p(t_0, t_1; x, y) dy = \mathbb{P}(X_{t_1} \in dy) =$$
$$\frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(t_1 - t_0)\sigma^2} [\log \frac{y}{x} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_1 - t_0)]^2 \right\}.$$

De la misma forma que en el ejemplo anterior se puede verificar que p satisface la ecuación de Kolmogorov hacia atrás, es decir:

$$\mu x \frac{\partial}{\partial x} p + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p = \frac{\partial}{\partial \tau} p.$$

Proposición 3. ***(Ecuación general de Kolmogorov hacia atrás)***. *Considere $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$ n- dimensional, y sea $p(t_0, t_1; x, y)$ la densidad de transición, entonces la ecuación de Kolmogorov hacia atrás es:*

$$(\frac{\partial}{\partial t_0}p + Ap)(t_0, t_1; x, y) = 0,$$

donde: A es el generador infinitesimal.

Observe que en la ecuación de Kolmogorov hacia atrás se mantienen constantes las variables t_1 e y, y las variables son t_0 y x, las cuales son llamadas variables hacia atrás.

Proposición 4. ***(Ecuación general de Kolmogorov hacia adelante)***. *Considere $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$ n-dimensional, y sea $p(t_0, t_1; x, y)$ la función de densidad de transición, entonces la ecuación de Kolmogorov hacia adelante es:*

$$\frac{\partial}{\partial t_1}p(t_0, t_1; x, y) = A^*p(t_0, t_1; x, y),$$

donde A^* es el adjunto[8] del generador A y esta dado por:

$$A^* = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

.

con, $C(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^T(t, x)$.

*La ecuación de Kolmogorov hacia adelante también es conocida como la ecuación de **Fokker-Planck**.*

Observe que en la ecuación hacia atrás se mantienen constantes t y x, y las variables son T e y, las cuales son llamas variables hacia adelante.

Relación entre el cálculo estocástico y la ecuación de Kolmogorov hacia atrás.

Considere

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \tag{1.8}$$

[8]Es decir $\langle A\phi, \psi\rangle = \langle \phi, A^*\psi\rangle$, para $\phi, \psi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, donde $\langle \cdot, \cdot\rangle$ denota el producto interior en L^2, ver demostración en el apéndice C

sea $h(y)$ una función Borel-medible y definamos

$$v(t,x) = E_{t,x}h(X(T)),\ \text{para } 0 \leq t \leq T,$$

entonces teniendo en cuenta que

$$v(t,x) = \int_{\mathbb{R}} h(y)p(T-t;x,y)dy,$$

de donde:

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) = -\int_{\mathbb{R}} h(y)\frac{\partial}{\partial t}p(T-t;x,y)dy,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) = \int_{\mathbb{R}} h(y)\frac{\partial}{\partial x}p(T-t;x,y)dy,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) = \int_{\mathbb{R}} h(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(T-t;x,y)dy,$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) =$$
$$\int_{\mathbb{R}} h(y)[-p(T-t;x,y) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}p(T-t;x,y) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(T-t;x,y)]dy, \tag{1.9}$$

como la densidad de transición $p(T-t;x,y)$ satisface la ecuación de Kolmogorov hacia atrás, es decir

$-p(T-t;x,y) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}p(T-t;x,y) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(T-t;x,y) = 0$, por lo tanto por la ecuación 1.9 se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) = 0.$$

Sea $(0,\xi)$ la condición inicial de la ecuación 1.5. Para simplificar la notación se escribirá E en lugar de $E_{0,\xi}$.

Teorema 13. *Sea $X_0 = \xi$, el proceso $v(t,X_t)$ satisface la propiedad de martingala:*

$$E[v(t,X_t)|\mathcal{F}_s] = v(t,X_s),\ 0 \leq s \leq t \leq T.$$

La formula de Itô aplicada a $v(t,X_t)$, implica que

$$dv(t,X_t) = \frac{\partial}{\partial t}v(t,X_t)dt + \frac{\partial}{\partial x}v(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,X_t)d[X,X]_t,$$

en su forma integral

$$v(t,X_t) - v(0,X_0) =$$

$$\int_0^t [\frac{\partial}{\partial t}v(s,X_s)+\mu(X_s)\frac{\partial}{\partial x}v(s,X_s)+\frac{1}{2}\sigma^2(X_s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(s,X_s)]ds+\int_0^t \sigma(X_s)\frac{\partial}{\partial x}v(s,X_s)dB_s,$$

por el teorema 13 tenemos que $v(t, X_t)$ es martingala, por lo que la integral $\int_0^t[\frac{\partial}{\partial t}v(s,X_s) + \mu(X_s)\frac{\partial}{\partial x}v(s,X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(s,X_s)]ds$ es cero para todo t, es decir es cero para cualquier intervalo en $[0,t]$, por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,X_t)+\mu(X_t)\frac{\partial}{\partial x}v(t,X_t)+\frac{1}{2}\sigma^2(X_t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,X_t)=0, \text{casi en todos lados respecto a medida dx} \tag{1.10}$$

Por lo tanto dados estos dos distintos argumentos, uno basado en la ecuación de Kolmogorov hacia atrás y el otro basado en la formula de Itô, se llega a la misma conclusión.

Comentarios: Para modelar adecuadamente la dinámica de las variables financieras se requiere, sin duda alguna, de la teoría de procesos estocásticos. Una de las ramas de esta teoría que han cobrado creciente importancia, debido a su utilidad en el modelado continuo, es el cálculo estocástico. Por lo tanto en este capítulo se describieron teoremas y conceptos importantes del cálculo estocástico, los cuales serán empleados para modelar los precios de futuros del petróleo. Cabe destacar que el uso de los procesos de Itô son muy importantes en los modelos financieros, pues con estos procesos se ha descrito el comportamiento del precio, el rendimiento de conveniencia, tasas, etc.

1.4. Martingalas y el teorema de Girsanov

1.4.1. Martingalas

Las martingala desempeña un papel esencial en el modelado de los mercados financieros y en la valuación teórica de muchos instrumentos que estos utilizan.

Definición 16. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado. Una aplicación $T : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ es llamada un tiempo de paro si para todo $t \in \mathbb{R}_+$ el evento $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{\mathrm{t}}$. Notemos que $\{T = \infty\} = \{T < \infty\}^c \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ y también $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{\mathrm{t}} \Leftrightarrow \{T > t\} \in \mathcal{F}_{\mathrm{t}}$. Es evidente que cualquier constante no negativa es un tiempo de paro. En caso de que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sea continua por la derecha, el que T sea tiempo de paro relativo a ella equivale a pedir que $\{T < t\} \in \mathcal{F}_{\mathrm{t}}$ para todo $t \geq 0$. Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso y T es un tiempo de paro, se denotará por $\{X_t^T\}_{t\geq 0}$ el proceso detenido en T, i.e. tal que $X_t^T(\omega) = X_{T(\omega)\wedge t}(\omega)$ para todo $t \geq 0$.*

Definición 17. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t>0})$ un espacio de probabilidad filtrado, y $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adaptado. Decimos que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala local si existe una sucesión $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$, de tiempos de paro relativos a la filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$, llamada sucesión localizante, tal que* *i) para todo* $\omega \in \Omega$ *y* $n \in \mathbb{N}$

$$\tau_n(w) \leq \tau_{n+1}(w),$$

ii) para casi todo $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n(w) = \infty,$$

iii) para cada $n \in \mathbb{N}$, *el proceso* $(I_{\{\{\tau_n\}_{n>0}\}} X^{\tau_n})_{t\geq 0}$ *es martingala, donde* $(I_{\{\{\tau_n\}_{n>0}\}} X^{\tau_n})_t(\omega) = I_{\{\{\tau_n\}_{n>0}\}}(\omega) X_t^{\tau_n}(\omega)$

Interpretación de una martingala como un juego justo

Si X_t representa el valor del juego al tiempo t, sea $X_t - X_s$ las ganancias netas en la posición t-s.

Por lo tanto la mejor predicción para las ganancias netas para un juego justo es:

$E[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] = E[X_t|\mathcal{F}_s] - E[X_s|\mathcal{F}_s] = E[X_t|\mathcal{F}_s] - X_s = 0$ c.s..

Es decir esto sucederá si y sólo si $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$.

por lo tanto, habrá un juego justo si y sólo si X_t es martingala.

Ejemplo 7. *Sea* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de v.a.i. tales que* $X_n \in \mathcal{L}^1$, *y sea* $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *El proceso* $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ *resulta ser una caminata aleatoria que inicia en 0, entonces:*

i) $\sigma(X_1, ..., X_n) = \sigma(S_0, ..., S_n) = \mathcal{F}_n$, *donde* $\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0) = \{\emptyset, \Omega\}$. *Como la* σ*-álgebra esta generada por las* S_n*'s, por lo que la* σ*-álgebra está en función de las* S_n, *por lo tanto* S_n *es adaptado a la filtración* $\mathcal{F}_n$.

ii) $E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[\sum_{i=1}^{n+1} X_i|\mathcal{F}_n] = \sum_{i=1}^{n} X_i + E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + E(X_{n+1})$. *En base a esta ecuación veamos que condiciones se necesitan para que el proceso sea: martingala, supermartingala ó submartingala.*

- *Si* $E(X_j) = 0, \forall j \in \mathbb{N}$ *entonces* $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una martingala.*
- *Si* $E(X_j) \leq 0, \forall j \in \mathbb{N}$ *entonces* $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una supermartingala.*
- *Si* $E(X_j) \geq 0, \forall j \in \mathbb{N}$ *entonces* $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una submartingala.*

Ejemplo 8. *Sea* $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una filtración y sea* $\xi \in \mathcal{L}^1$. *Defínase* $Z_n = E[\xi|\mathcal{F}_n]$, *entonces:*

i)Por definición Z_n *es* $\mathcal{F}_n$*-medible, por lo tanto* $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es adaptado a la filtración* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$.

ii)

$$E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[E[\xi|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = E[\xi|\mathcal{F}_n] = Z_n.$$

Por lo tanto el proceso $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una martingala.*

Definición 18. *Considere un espacio de probabilidad fijo* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *equipado con una filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. *Un proceso* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *adaptado a la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *es una semimartingala continua si se puede escribir como:*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

donde $\{M_t\}_{t>0}$ *es una martingala local continua, nula en cero y* $\{A_t\}_{t>0}$ *es un proceso adaptado continuo de variación finita y nulo en cero.*

Proposición 5. *Toda semimartingala continua es de variación cuadrática finita y esta variación cuadrática resulta ser su corchete*[9].

Demostración [15] pag. 87.

Teorema 14. *Considere un espacio de probabilidad fijo* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *equipado con una filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. *Sea* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *un proceso adaptado con valores en* $\mathbb{R}^n$ *de trayectorias continuas. Supongase que* X *es una martingala local y que las cordenadas* X_t^i *satisfacen*

$$(a) \quad d[X_t^i, X_t^j] = \delta^{ij} dt, \ (\delta^{ij} = 1, si\ i = j, 0\ si\ i \neq j),$$

entonces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *es un movimiento browniano.*

Notemos que de la unicidad del corchete para martingalas continuas en la condición (a) es equivalente a que:

$$X_t^i X_t^j - \delta^{ij} t \text{ es una martingala local.}$$

Demostración [15] pag. 96.

[9]Se refiere al corchete $[\cdot,\cdot]_t$

1.4.2. El teorema de Girsanov

El teorema de Girsanov construye explícitamente una medida de probabilidad que permite transformar "un movimiento Browniano con tendencia" en un movimiento Browniano sin tendencia[10], este último definido en un espacio de probabilidad equivalente. Este teorema constituye una herramienta fundamental en la valuación teórica de muchos y diversos productos derivados.

En está sección se verán algunos teoremas importantes sobre la nueva medida de probabilidad $\tilde{P}$, los cuales nos ayudarán a abordar el teorema de Girsanov, ya que en este se hace el cambio de medida de probabilidad de P a $\tilde{P}$. El teorema de Girsanov que se verá en esta sección es para el caso del movimiento browniano, el cual no se demostrará, pero se desarrolla un ejemplo en el cual se explica como se encuentra la nueva medida de probabilidad.

Teorema 15. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea Z una variable aleatoria no negativa c.s., con la propiedad de que $E(Z) = 1$, entonces para $A \in \mathcal{F}$ se define*

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega),$$

$\tilde{P}$ es una nueva medida de probabilidad absolutamente continua con respecto a P. Además si X es una variable aleatoria no negativa, entonces

$$\tilde{E}(X) = E(XZ).$$

Si Z es estrictamente positiva c.s., entonces

$$E(Y) = \tilde{E}(\frac{Y}{Z}).$$

Demostración [13] pag. 33.

Teorema 16. *Dado $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ un espacio de probabilidad filtrado, sea t tal que $0 \leq t \leq T$, y sea Y una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible, entonces*

$$\tilde{E}(Y) = E(YZ(t)),$$

donde, $Z(t) = E[Z|\mathcal{F}_t]$[11]

[10] Se refiere a la deriva (drift)

[11] Z es llamada la derivada Radon-Nikodým y se denota por $Z = \frac{d\tilde{P}}{dP}$, ver [13].

Demostración:

$$\tilde{E}(Y) = E(YZ(t)) = E(E[YZ|\mathcal{F}_t]) = E(YE[Z|\mathcal{F}_t]) = E(YZ(t)).\diamond$$

Teorema 17. *Dado $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ un espacio de probabilidad filtrado, sean s, t, tales que $0 \leq s \leq t \leq T$, y sea Y una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible, entonces*

$$\tilde{E}[Y|\mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z(s)} E[YZ(t)^{12}|\mathcal{F}_s].$$

Demostración:

i) Es claro que $\tilde{E}[Y|\mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z(s)} E[YZ(t)|\mathcal{F}_s]$ es $\mathcal{F}_s$-medible.

ii)Por definición de esperanza condicional se tiene la siguiente igualdad:

$$\int_A \frac{1}{Z(s)} E[YZ(t)|\mathcal{F}_s] d\tilde{P} = \int_A Y d\tilde{P},\ \forall A \in \mathcal{F}_s, \tag{1.11}$$

el lado izquierdo de la ecuación 1.11 se puede reescribir como

$$\int_A \frac{1}{Z(s)} E[YZ(t)|\mathcal{F}_s] d\tilde{P} = \tilde{E}(I_A \frac{1}{Z(s)} E[YZ(t)|\mathcal{F}_s]).$$

Ahora definamos $Y' = \frac{1}{Z(s)} E[YZ(t)|\mathcal{F}_s]$, entonces usando el Teorema 16 se tiene $\tilde{E}(Y') = E(Y'Z(s))$, es decir

$$\tilde{E}(I_A \frac{1}{Z(s)} E[YZ(t)|\mathcal{F}_s]) = E(I_A E[YZ(t)|\mathcal{F}_s]) = E(E[I_A YZ(t)|\mathcal{F}_s]) = E(I_A YZ(t))$$

de nuevo definamos $\hat{Y} = I_A Y$, entonces usando el Teorema 16 se tiene $\tilde{E}(\hat{Y}) = E(\hat{Y}Z(t))$, por lo que

$$\tilde{E}(I_A \frac{1}{Z(s)} E[YZ(t)|\mathcal{F}_s]) = E(I_A YZ(t)) = \tilde{E}(I_A Y) = \int_A Y d\tilde{P}.\diamond$$

Teorema 18. ***Girsanov (en una dimensión)***. *Sea W_t con $0 \leq t \leq T$ un movimiento Browniano en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración correspondiente. Sea $\theta(t)$, $0 \leq t \leq T$ un proceso adaptado. Definimos*

$$Z_t = exp\{-\int_0^t \theta(s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u) du\}.\ Sea\ \ Z = Z_T,\ entonces\ E(Z) = 1.$$

[12] Como en el teorema 16.

$$Sea\ \tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta(u)du.$$

Ahora definamos una nueva medida de probabilidad

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega)dP(\omega),\ \forall A \in \mathcal{F},$$

supongamos que se cumple

$$E[\int_0^t \theta^2(u)Z^2(u)du] < \infty,$$

entonces el proceso $\tilde{W}_t,\ 0 \leq t \leq T$ es un movimiento Browniano bajo la medida de probabilidad $\tilde{P}$.

Demostración [13] pag. 213.

Teorema 19. ***Girsanov (miltidimensional)***. *Sea $W(t) = (W_1(t), ..., W_d(t))$ un movimiento Browniano de dimensión d en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración correspondiente. Sea $\theta(t) = (\theta_1(t), ..., \theta_d(t)),\ 0 \leq t \leq T$ un proceso adaptado de dimensión d. Definimos*

$$Z_t = exp\{-\int_0^t \theta(s) \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(u)\|^2 du\}.\ Sea\ \ Z = Z_T,\ entonces\ E(Z) = 1.$$

$$Sea\ \tilde{W(t)} = W(t) + \int_0^t \theta(u)du.$$

Ahora definamos una nueva medida de probabilidad

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega)dP(\omega),\ \forall A \in \mathcal{F},$$

supongamos que se cumple

$$E[\int_0^t \|\theta(u)\|^2 Z^2(u)du] < \infty,$$

entonces el proceso $\tilde{W}(t),\ 0 \leq t \leq T$ *es un movimiento Browniano de dimensión d, bajo la medida de probabilidad* $\tilde{P}$.

Ejemplo 9. *En este ejemplo se muestra como a partir de un proceso de Itô se construye la nueva medida de probabilidad y un nuevo proceso de Itô, tal que este proceso resulte ser una martingala bajo la nueva medida de probabilidad. Esto se logra con el teorema de Girsanov.*

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t>0}, P)$ *un espacio de probabilidad filtrado y sea* $\{B_t\}_{t>0}$ *un movimiento browniano, consideremos el siguiente proceso:*

$$Y_t = x + \int_0^t \sigma(Y_s)dB_s + \int_0^t b(Y_s)ds,$$

definamos

$$X_t = Y_t - \int_0^t b(Y_s)ds = x + \int_0^t \sigma(Y_s)dB_s,$$

como x es una constante y la integral $\int_0^t \sigma(Y_s)dB_s$ *es una martingala, por lo tanto el proceso* X_t *es martingala respecto a la medida P.*

Notemos que $d[Y,Y]_s = \sigma^2(Y_s)ds = d[X,X]_s$.

Ahora

$$\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{F}_t = \exp\{\int_0^t H_s dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 \sigma^2(Y_s)ds\}$$

es martingala positiva con respecto a P de esperanza 1, la cual es la exponencial de Doleans[13]*:* $\varepsilon(\int_0^t H_s)dX_s) = \varepsilon(L_t) = M_t$,

donde $L_t = \int_0^t H_s ds$, *y* M_t *satisface* $M_t = 1 + \int_0^t M_s dL_s$.

[13] La exponencial de Doleans se define como la solución de la ecuación diferencial estocástica $dY_t = Y_t dX_t$, y se denota como $\varepsilon(X)$. Cuya solución es $Y_t = \exp(X_t - X_0 - \frac{1}{2}[X,X]_t)$.

Por el teorema de Girsanov

$$X_t - \int_0^t \frac{1}{H_s} d[X, M]_s = X_t - [L, X]_t = X_t - \int_0^t d[X, H \cdot X]_s = X_t - \int_0^t H_s \sigma^2(Y_s) ds,$$

estas igualdades se dan, ya que:

$d[X, M]_s = M_s H_s \sigma^2(Y_s) ds,$

$[X, M]_s = \int_0^t H_s \sigma^2(Y_s) ds,$

$d[X, H \cdot X]_s = H_s \sigma^2(Y_s) ds.$

Por lo tanto si tomamos

$H_s = \dfrac{-b(Y_s)}{\sigma^2(Y_s)}$ *obtenemos la* $\tilde{P}$*-martingala.*

y $Y_t = X_t + \displaystyle\int_0^t b(Y_s) ds$ *es martingala respecto a la medida* $\tilde{P}$.

Comentarios: La utilidad de usar el teorema de Girsanov es para generar ambientes de neutralidad al riesgo en la valuación de productos derivados, es decir, ambientes en donde el precio de un producto derivado no depende de las preferencias del riesgo de los agentes, es necesario cambiar la tendencia del proceso que originalmente guía al precio del subyacente. En este caso una simple aplicación de éste teorema proporciona el resultado deseado, que en nuestro caso la implementación de éste teorema es de suma importancia, ya que nos permite llevar el modelo con riesgo a un ambiente de neutralidad al riesgo.

Capítulo 2

Instrumentos financieros, Arbitraje y mercados completos, Futuros

En los últimos años los mercados de derivados han adquirido una importancia cada vez mayor en el mundo de las finanzas y las inversiones. Para todo aquel que quiera ser un profesional de las finanzas, es fundamental saber como operan estos mercados. Por esta razón la teoría que encontrarán en este capitulo es retomada de algunos de los libros mencionada en la bibliografía [4], [12].

En este capitulo analizamos rápidamente, algunas características de los derivados, y en particular, los mercados de futuros, ya que estos son importantes para esta tesis, pues en el capitulo 5 se da un modelo para los precios de futuros del petróleo.

2.1. Instrumentos financieros

La naturaleza dinámica de los mercados financieros ha dado como resultado el uso extensivo de una gran variedad de instrumentos financieros como mecanismos para la cobertura de los riesgos implicados en las distintas operaciones de negocios modernos (administración de riesgo y administración de activos y pasivos). Su importancia es vital para el desarrollo económico en todos los niveles. Por lo que un instrumento financiero es cualquier contrato que de origen tanto a un activo financiero de una empresa como a un pasivo financiero o instrumento de capital de otra empresa.

- Un activo financiero puede ser:

1. efectivo,
2. un derecho contractual para recibir de otra empresa efectivo u otro activo financiero,
3. un derecho contractual para intercambiar instrumentos financieros con otra empresa bajo condiciones que son potencialmente favorables, o
4. un instrumento de capital de otra empresa

- Un pasivo financiero es cualquier obligación contractual para:
    1. entregar efectivo u otro activo financiero a otra empresa, ó
    2. intercambiar activos financieros con otra empresa bajo condiciones que son potencialmente desfavorables;

Los instrumentos financieros incluyen tanto instrumentos primarios, como cuentas por cobrar, cuentas por pagar y valores de capital, así como instrumentos derivados: como opciones financieras, futuros y contratos anticipados, swaps de tasas de interés y swaps de divisas.

2.1.1. Derivados financieros

Un derivado financiero es un instrumento financiero cuyo valor se basa en el precio de otro activo, de ahí su nombre. El activo del que depende toma el nombre de activo subyacente[1], por ejemplo el valor de un futuro sobre el oro se basa en el precio del oro. Los subyacentes utilizados pueden ser muy diferentes, acciones, índices bursátiles, valores de renta fija, tipos de interés o también materias primas.

Los derivados se pueden catalogar de tres formas:

1. Opciones:
    - Un Call es una opción de compra que otorga al tenedor el derecho más no la obligación de comprar un activo en una fecha específica a cierto precio.
    - Put[Opción put] es una opción de venta que otorgada al tenedor el derecho más no la obligación de vender un activo en una fecha específica a cierto precio.

    El precio establecido en ambos contratos se conoce como precio de ejercicio o precio strike.
2. Swaps son contratos para intercambiar flujos de efectivo en el futuro de acuerdo a una formula establecida.

[1] Ver apéndice A

3. Contratos futuros, forward. Diremos que un contrato futuro al igual que un contrato forward son acuerdos para comprar o vender un activo en una fecha específica en el futuro a un precio determinado.

A continuación veamos un gráfico que muestra la utilidad de los inversionistas en función del precio final de la acción de una opción de compra y una de venta, suponiendo que son opciones europeas, de modo que se ejercen sólo a su vencimiento:

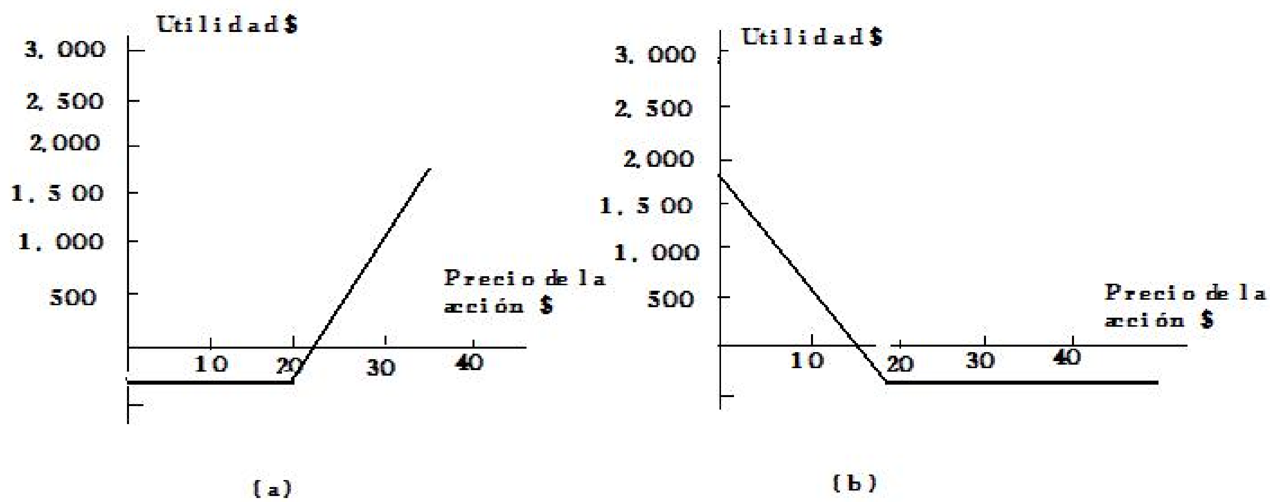

Figura 2.1: Utilidad neta de: a) comprar un contrato que consiste en 100 opciones de compra sobre Intel con un precio de ejercicio de 20 y b) comprar un contrato que consiste en 100 opciones de venta de abril sobre Intel con un precio de ejercicio de 17.50

Los derivados financieros se pueden catalogar dependiendo del subyacente en:

- Financieros
    - Sobre tipo de interés.
    - Sobre acciones.
    - Sobre divisas.
    - Sobre bonos.
    - Sobre riesgo crediticio.
- No financieros

    - Sobre recursos básicos / “commodities”, materias primas:
        - metales.
        - cereales.
        - cítricos.
        - energía (petróleo, gas, electricidad...).
        - otros.

- Otros más:
    - Sobre condiciones climáticas.
    - Sobre índices generales de precios e inflación.
    - Los bonos de carbono.

Las características generales de los derivados financieros son los siguientes:

- Su valor cambia en respuesta a la variación del precio del activo subyacente. Existen derivados sobre productos agrícolas y ganaderos, metales, productos energéticos, divisas, acciones, índices bursátiles, tipos de interés, etc.
- Requiere una inversión inicial neta muy pequeña o nula, respecto a otro tipo de contratos que tienen una respuesta similar ante cambios en las condiciones del mercado. Lo que permite mayores ganancias como también mayores pérdidas.
- Se liquidarán en una fecha futura.
- Pueden cotizarse en mercados organizados (como las bolsas) o no organizados (“Over the counter”)

Puesto que los principales derivados financieros son los futuros y las opciones, las formas en que son utilizados son las siguientes:

Los Futuros son utilizados de la siguiente forma:

1. Para cubrirse del riego de la variación de un valor subyacente a un costo mínimo.
2. Para invertir efectivo temporalmente hasta que se puedan comparar los valores que uno desee; esto es, los Futuros nos dan la oportunidad de sustituir temporalmente inversiones de una manera rápida y barata.
3. Son un método para especializarse en la sección de acciones ya que remueven el riesgo de movimientos generales en el mercado.

4. Son un medio de modificar asignaciones en acciones *versus* bonos rápidamente y a bajo costo, sin afectar el mercado en los valores individuales.

Por su parte, las Opciones son utilizadas de la siguiente manera:

1. Para ajustar el riesgo y rendimiento de una posición determinada a un costo muy bajo.
2. Para cubrirse de los riesgos de movimientos en los precios y en cantidades; es decir, las Opciones son mejores que los futuros cuando la cantidad que uno desea proteger es incierta.

2.2. Arbitraje y mercados completos

En esta sección se presentan la noción de arbitraje y las principales ideas de mercados completos en tiempo continuo.

Supongamos que el precio de un activo S_t está modelado por el movimiento browniano geométrico

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Definición 19. *Un portafolio de inversión es definido como un proceso* $\phi = (\phi_t)_{0\leq t\leq T} = ((H_t^0; H_t))$ *con valores en* $\mathbb{R}_2$*, adaptado a la filtración natural* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *del movimiento browniano, es decir hay un espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, P, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ *tal que el proceso* B_t *es un movimiento browniano con respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *y a la medida de probabilidad* P*, a esta probabilidad se le llama "medida de probabilidad del mercado"; los componentes* H_t^0 *y* H_t *son las cantidades de activos sin riesgo y con riesgo respectivamente que tiene el portafolio al tiempo* t*.*

Definición 20. *El valor del portafolio al tiempo* t *está dado por*

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t;$$

donde S_t^0 *es el precio de los activos sin riesgo al tiempo* t*.*

Definición 21. *El portafolio se llama auto-financiable si se cumple*

$$V_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t.$$

Notemos que aplicando la fórmula de integración por partes a la definición del valor del portafolio obtenemos:

$$
\begin{aligned}
dV_t &= H_t^0 dS_t^0 + dH_t^0 S_t^0 + d[H^0, S^0]_t \\
&\quad + H_t dS_t + dH_t S_t + d[H, S]_t \\
&= H_t^0 dS_t^0 + dH_t^0 S_t^0 + H_t dS_t + dH_t S_t.
\end{aligned}
$$

Que V_t cumpla con la igualdad en la definición 21 indica que un portafolio auto-financiable es un portafolio donde las variaciones de su valor provienen únicamente de los cambios o variaciones en los precios de los activos que lo integran[2].

Definición 22. *Una medida de probabilidad P^* se dice que es neutra al riesgo si*

(i) P^* y la medida de probabilidad del mercado P son equivalentes.

(ii) Bajo P^*, el proceso del precio descontado del activo con riesgo es una martingala.

Definición 23. *Un portafolio $\phi = \phi_{0\leq t\leq T} = (H_t^0, H_t)$ es admisible si es auto-financiable y si el valor descontado $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t\tilde{S}_t$ del correspondiente portafolio es no negativo para toda $t \geq 0$, y además cumple que $sup_{t\in[0;\mathrm{T}]}\tilde{V}_t$ es de cuadrado integrable bajo P^*.*

Lema 1. *Sea P^* una medida de probabilidad neutra al riesgo y sea $V_t(\phi)$ el valor del portafolio al tiempo t. Con la medida P^* el valor descontado del portafolio es una martingala.*

Definición 24 (Arbitraje y Arbitraje fuerte)**.** *. (a) Un arbitraje es un portafolio ϕ, admisible y auto-financiable para el que existe $T \in \mathrm{I}$ tal que*

1. $P[V_0(\phi) = 0] = 1;$
2. $P[V_T(\phi) \geq 0] = 1;$
3. $E[V_T(\phi) > 0] > 0.$

(b) Un arbitraje fuerte es un portafolio ϕ admisible y auto-financiable para el que existe $T \in \mathrm{I}$ tal que

1. $P[V_0(\phi) = 0] = 1;$
2. $P[V_T(\phi) > 0] = 1.$

[2]basado en tesis de Miguel Angel pag. 20

Entonces un arbitraje fuerte es un "almuerzo gratis"(free lunch), mientras que un arbitraje es un "billete de lotería".

Definición 25. *Se dice que una opción es replicable ó simulable si existe un portafolio admisible tal que el valor del portafolio al tiempo T (donde T es la fecha de maduración de la opción) es igual al pago terminal de la opción.*

Teoremas Fundamentales de Valuación de Activos

Teorema 20 (Primer Teorema Fundamental)**.** *Si un modelo de mercado tiene una medida de probabilidad neutra al riesgo, entonces no hay arbitraje.*

Demostración. Ver [13] pág. 231.

Definición 26. *Un modelo de mercado se dice que es completo si cualquier opción es replicable.*

Definición 27 (Segundo Teorema Fundamental)**.** *Consideremos un modelo de mercado que tiene una medida de probabilidad neutra al riesgo. Entonces el modelo de mercado es completo si y sólo si la medida neutra al riesgo es única.*

Demostración. Ver [13] pág. 232.

2.3. Futuros

Los futuros son productos derivados que pueden ser usados como un instrumento para la formación eficiente de precios en el mercado de los diferentes activos y como un medio de protección o cobertura contra riesgos de especulación o de inversión. Los futuros sobre productos físicos estandarizados tales como productos agrícolas, metales, petróleo y sus derivados, han sido utilizados desde hace muchos años.

Los mercados de futuros se remotan hasta la Edad media. En principio se crearon para satisfacer las necesidades de agricultores y negociantes. Pero el mercado de futuros, tal como se conoce ahora inició en el año de 1865 en la Bolsa de Chicago, las operaciones que se realizaban eran principalmente con granos. En 1972 tuvo lugar la iniciación de contratos futuros en moneda extranjera. La Bolsa de Chicago fue la primera en negociar con estos contratos. Ahora en la actualidad los futuros son uno de los principales instrumentos financieros.

2.3.1. Contratos Futuros

Los contratos a futuro ó simplemente futuros, al igual que los contratos forward, son acuerdos que obligan a una de las dos partes a comprar y a la contraparte a vender un activo financiero a un precio establecido en una fecha futura. Sin embargo, a diferencia de los contratos forward que se negocian sobre mostrador, los contratos futuros se cotizan y operan en una bolsa de futuros. Este tipo de contratos tiene características estandarizadas, principalmente, en lo que se refiere a el tamaño y a la fecha de vencimiento. Los contratos futuros son impersonalizados, es decir, las dos partes que intervienen en el contrato no se conocen entre sí. Por lo que para reforzar el cumplimiento de los contratos, cada una de las partes entrega una cantidad, esta recibe el nombre de margen o aportación inicial, a la persona que se le entrega este margen es a la Cámara de Compensación, la cual asegura el cumplimiento de las obligaciones adquiridas, también liquida diariamente los contratos, maneja márgenes y administra el riesgo de incumplimiento, a cambio de esta comisión.

Definición 28 (Valor presente de un futuro sobre un activo de inversión)**.** *Consideremos un contrato futuro sobre un activo de inversión con un precio inicial S_0, entonces $F_{t,T}$ y S_0 están relacionados:*

$$F_{t,T} = S_0 \exp^{r(T-t)} \tag{2.1}$$

donde:

- *T: tiempo hasta la fecha de entrega en un contrato de futuros.*
- *S_0: precio del activo subyacente.*
- *$F_{t,T}$: precio del futuro.*
- *r: tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente.*
- *t: tiempo en la que se ejerce el contrato de futuros.*

Ahora una manera de comprobar la ecuación 2.1, es:

Considere la estrategia siguiente: Compre una unidad del activo y tome una posición corta en un contrato de futuros para venderlo en F en el tiempo T. Esto cuesta S_0 al tiempo t y ciertamente le genera una entrada de efectivo de F en el tiempo T. Por lo tanto S_0 debe ser igual al valor presente de F, es decir $S_0 = F_{t,T} \exp^{-r(T-t)}$ o equivalentemente a $F_{t,T} = S_0 \exp^{r(T-t)}$.

Analizando la ecuación 2.1, tenemos lo siguiente:

Si $F_{t,T} > S_0 \exp^{r(T-t)}$, los arbitrajistas pueden comprar el activo y vender en corto contratos futuros sobre dicho activo. Si $F_{t,T} < S_0 \exp^{r(T-t)}$, pueden vender en corto el activo y tomar una posición larga[3] en contratos sobre dicho activo.

La incertidumbre sobre el comportamiento de los precios en un mercado constituye el principal elemento determinante de la existencia de los mercados de futuros. A continuación se presenta el funcionamiento del mercado:

Valuación diaria de precios de mercado (mark-to-market)

La bolsa de futuros como cualquier otro mercado organizado y reconocido por las autoridades financieras, al final de cada jornada tiene la obligación de reportar precios futuros de cierre, los cuales cambian día a día dependiendo de la oferta y demanda de dichos contratos. Con los precios de cierre, los agentes valúan sus posiciones y revisan si, ese día, se han generado perdidas o ganancias. En el caso de mercados de subyacentes, las perdidas o ganancias por la valuación diaria a precios de cierre no se liquidan, mientras que en la bolsa de futuros las perdidas ó ganancias diarias sí se liquidan a precios de cierre. Es decir, las perdidas o ganancias que obtiene cada uno de los participantes en el mercado, se van realizando diariamente, de acuerdo con los movimientos del precio del valor subyacente, y por ende del precio futuro. De acuerdo a los flujos que se generan, las operaciones con futuros resultan en un juego de suma cero, en el sentido de que lo que pierde un participante lo gana el otro, esto es, la suma de perdidas o ganancias es igual a cero.

Comentarios: Por lo anterior, la diferencia de forma entre los contratos forward y los contratos futuros es la estandarización de los últimos. La diferencia de fondo es que los contratos futuros se liquidan diario, mientras que los contratos forward se liquidan hasta el vencimiento. De esta manera, un contrato futuro que vence dentro de N días se puede ver como la suma de N contratos forward, cada uno con vigencia de un día.

También los futuros financieros permiten a los agentes económicos administrar el riesgo del mercado con costos bajos de transacción. Además, el riesgo de crédito de estos instrumentos es mínimo debido a la asociación de la bolsa de futuros con una cámara de compensación y liquidación, la cual a cambio de una comisión actúa como contraparte de todas las partes y administra el riesgo de incumplimiento de las obligaciones generadas en los contratos.

[3] ver apéndice A

2.3.2. Futuros sobre commodities

Los Commodities[4] son generalmente materias primas como los metales preciosos, petróleo, productos alimenticios etc., los precios de estos productos son imprevisibles. Estos productos son comercializados, por lo general, por personas que no tienen necesidad de la materia prima, por ejemplo pueden sólo estar espéculando sobre la orientación de oro sin querer almacenar o hacer joyas. La mayoría de operaciones se efectúan en el mercado de futuros, lo que da por resultado que existan ofertas para comprar o vender la mercancía en algún momento en el futuro. El acuerdo entre las personas participantes en el futuro se cierra antes de que los productos básicos deban entregarse.

En esta subsección primero analizaremos los futuros de commodities que son activos de inversión como el oro y la plata, y después los futuros de activos de consumo que son el petróleo, el gas, los cereales, entre otros.

Ingresos y costo de almacenamiento

La ecuación 2.1 muestra que al no haber costos de almacenamiento e ingresos, el precio a plazo de un commodity que es un activo de inversión se obtiene por medio de:

$$F_{t,T} = S_0 \exp^{r(T-t)} .$$

Los costos de almacenamiento se manejan como un ingreso negativo, supongamos que U es el valor presente de todos los costos de almacenamiento durante la vida de un contrato de futuros, entonces con base a la ecuación $F_{t,T} = (S_0 - I) \exp^{r(T-t)}$, la cual determina el valor de un activo de inversión que proporciona ingresos con valor presente I durante la vida de un contrato de futuros, se deduce que el valor de un futuro que presenta un costo de almacenamiento es:

$$F_{t,T} = (S_0 + U) \exp^{r(T-t)} \tag{2.2}$$

El siguiente ejemplo, proporciona una aplicación de esta fórmula.

Ejemplo 10 (**Precio de futuros de oro**). *Considere un contrato de futuros sobre oro a un año. Supongamos que no hay ingresos y que el almacenamiento del oro cuesta 2 dólares por onza al año, realizando el pago al final del año. El precio spot es de 600 dólares y la tasa libre*

[4] Ver [4] pag. 113

de riesgo es de 5 porciento anual para todos los vencimientos. Estos corresponden a r=0.05, $S_0 = 600$, $T = 1$, *y*

$$U = 2e^{-0{,}05\times 1} = 1{,}90.$$

Con base a la ecuación 2.4, el precio del futuro teórico, F, se obtiene por medio de

$$F = (600 + 1{,}90)e^{-0{,}05\times 1} = 632{,}76.$$

Analicemos que sucede cuando el precio de futuros es demasiado alto:

Supongamos que el precio real de futuros de oro es mayor a 632.76 dólares, es decir de 700 dólares. Un arbitrajista puede:

1. *Adquirir en préstamo 60,000 dólares a una tasa de interés libre de riesgo del 5 porciento para comprar 100 onzas de oro.*
2. *Vender en corto un contrato de futuros de oro para entregar en un año.*

El contrato de futuros asegura que el oro adquirido pueda venderse en 70,000 dólares. Si se usan 63,076 dólares para pagar los intereses y el principal sobre el préstamo y 200 dólares para pagar el almacenamiento, la ganancia neta es

70,000-63,076-200=6,724 dólares.

Ahora analicemos que sucede cuando el precio de futuros es demasiado bajo:

Ahora supongamos que el precio del futuro es menor a 632.76 dólares, es decir de 610 dólares. Un inversionista que ya posee 100 onzas de oro con fines de inversión puede:

1. *Vender el oro en 60,000 dólares.*
2. *Tomar una posición larga en un contrato de futuros de oro para entregar en un año.*

Los 60,000 se invierten a una tasa libre de riesgo del 5 porciento durante un año y aumentan a 63,076 dólares. El contrato de futuros asegura que el oro pueda readquirirse a 61,000 dólares. El inversionista ahorra 200 dólares en costo de almacenamiento. Por lo tanto, el contrato de futuros mejora la posición del inversionista en

63,076-61,000+200=2,276 dólares.

Por otra parte, si los costos de almacenamiento incurridos en cualquier momento son proporcionales al precio del commodity, también se manejan como rendimiento negativo, en este caso, basandose en la ecuación $F_{t,T} = S_0 \exp^{(r-q)(T-t)}$, la cual determina el valor de un futuro que tiene un rendimiento promedio anual q, sobre un activo durante la vida de un contrato de futuros con una composición continua, se tiene que el valor del futuro de un activo con éste costo de almacenamiento es:

$$F_{t,T} = S_0 \exp^{(r+u)(T-t)} \tag{2.3}$$

donde u representa los costos anuales de almacenamiento como una porción del precio spot neto de cualquier rendimiento ganado sobre el activo.

Commodities de consumo

Por lo general, los commodities consumibles en comparación con los activos de inversión, están sujetos a importantes costos de almacenamiento. Ahora revisaremos con detalle las estrategias de arbitraje que se usan para determinar los precios futuros a partir de precios spot[5]. Ahora supongamos que en vez de la ecuación 2.4, tenemos

$$F_{t,T} > (S_0 + U) \exp^{r(T-t)}. \tag{2.4}$$

para aprovechar esta oportunidad, un arbitrajista puede implementar la estrategia siguiente:

1. Adquirir en préstamo un monto de $S_0 + U$ a la tasa libre de riesgo y usarlo para comprar una unidad del commodity, y pagar los costos de almacenamiento
2. Vender en corto un contrato a plazo sobre una unidad del commodity.

Si consideramos el contrato de futuros como un contrato a plazo, esta estrategia genera utilidad de $F - (S_0 + U) \exp^{r(T-t)}$ en el tiempo T. En el ejemplo 11 se ilustra esto para el oro. No hay ningún problema al implementar la estrategia para algún commodity. Sin embargo, a medida que los arbitrajistas los hacen, S_0 tendría que aumentar y F disminuiría hasta que la ecuación 2.6 ya no fuera cierta. Por lo que concluimos que 2.6 no puede sostenerse durante ningún periodo significativo.

[5]En el caso de algunos commodities, el precio spot depende del lugar de entrega. Asumiremos que el lugar de entrega para contratos con precio spot y de futuros es el mismo

Ahora supongamos que

$$F_{t,T} < (S_0 + U) \exp^{r(T-t)} . \tag{2.5}$$

En el caso de los activos de inversión, como el oro y la plata, podemos argumentar que muchos inversionistas mantienen el commodity únicamente con fines de inversión. Cuando observen la desigualdad de la ecuación 2.7, considerarán que es rentable, pues para obtener la oportunidad de arbitraje, tienen que hacer:

1. Vender el commodity, ahorrar los costos de almacenamiento e invertir el producto a la tasa de interés libre de riesgo.
2. Tomar una posición larga en un contrato a plazo.

Nuevamente el ejemplo 11 ilustra esta estrategia. El resultado que nos da esto es una utilidad libre de riesgo al vencimiento del contrato de $(S_0 + U) \exp^{r(T-t)} - F$ respecto de la posición que habrían tenido los inversionistas si hubieran mantenido el commodity. Se concluye que la ecuación 2.7 se puede sostenes durante mucho tiempo. Por lo tanto como no se pueden sostener las ecuaciones 2.6 y 2.7 durante mucho tiempo, entonces debemos tener $F_{t,T} < (S_0 + U) \exp^{r(T-t)}$.

En el caso de commodities que no son mantenidos significativamente con fines de inversion, el argumento anterior no es valido. Los individuos y las empresas que mantienen en inventario un commodity de este tipo lo hacen por su consumo, no por su valor como una inversión. Se niegan a vender el commodity y a comprar contratos a plazos porque estos no pueden consumirse, por ejemplo, los futuros de petróleo no pueden usarse para abastecer una refinería. Por lo tanto, no hay nada para evitar que la ecuación 2.7 se sostenga. Por lo que, todo lo que podemos afirmar de un commodity de consumo es que se cumpla

$$F_{t,T} \leq (S_0 + U) \exp^{r(T-t)} . \tag{2.6}$$

Si los costos de almacenamiento se expresan como una proporción u del precio spot, el resultado equivalente es

$$F_{t,T} \leq S_0 \exp^{(r+u)(T-t)} . \tag{2.7}$$

[**Rendimiento de conveniencia u oportunidad (Convinience yield)**]

Observemos que en las ecuaciones 2.8 y 2.9 no se tiene una igualdad, esto es por que los usuarios de un commodity de consumo pueden considerar que la prioridad del commodity físico proporciona beneficios que no obtienen los tenedores de contratos futuros. Por ejemplo, una refinería de petróleo no considera de la misma manera un contrato de futuros sobre petróleo crudo que el petróleo crudo mantenido en inventario, ya que éste es un insumo para el proceso de refinamiento, en tanto que un contrato de futuros no puede utilizarse con este propósito. En general, la propiedad del activo físico permite a un fabricante mantener en operación el proceso de producción y quizás beneficiarse de situaciones de escasez local temporal, un contrato de futuros no hace lo mismo. Los beneficios de mantener el activo físico se conoce en ocasiones como el **rendimiento de conveniencia** que proporciona el commodity.

Ahora si se conoce el monto en dólares de los costos de almacenamiento y este monto tiene un valor presente U, el rendimiento de conveniencia y, se define de tal manera que

$$F \exp^{y(T-t)} = (S_0 + U) \exp^{r(T-t)} .$$

Si los costos de almacenamiento por unidad son una proporción constante, u, del precio spot, y, se define de tal manera que

$$F \exp^{y(T-t)} = S_0 \exp^{(r+u)(T-t)} .$$

es decir

$$F = S_0 \exp^{(r+u-y)(T-t)} . \tag{2.8}$$

El rendimiento de conveniencia simplemente mide el grado en el que el lado izquierdo es menor que el lado derecho de la ecuación 2.8 ó 2.9. En el caso de activos de inversión, el rendimiento de conveniencia debe ser cero; de otro modo hay oportunidades de arbitraje, como las del ejemplo 11.

En general el rendimiento de conveniencia refleja las expectativas del mercado con respecto a la disponibilidad futura del commodity. Cuanto mayor sea la posibilidad de que ocurra situaciones de escasez mayor será el rendimiento de conveniencia. Si los usuarios del commodity tienen grandes inventarios, hay poca posibilidad de escasez en el futuro cercano y el rendimiento de conveniencia tiende a ser bajo. Por otro lado, los inventarios bajos dan lugar a altos rendimiento de conveniencia.

Comentarios: Como ya se dijo el rendimiento de conveniencia es inversamente proporcional a los niveles de inventario, es decir existe una dependencia del inventario, éstas es una de las razones fundamentales para pensar que el inventario es un factor determinante para predecir los precios de futuros del petróleo, ya que el inversionista puede obtener beneficios monetarios al tener existencia en inventarios de la mercancía en cuestión. Por esta razón en este trabajo se pretende incluir el inventario en el modelo estocástico para los precios de futuros del petróleo.

Capítulo 3

El modelo de Black-Scholes y el modelo estocástico de Schwartz de dos factores

Debido a que en la teoría financiera el modelo de Black-Scholes es fundamental para el desarrollo de otros trabajos, en este capítulo se explica una forma de obtener dicho modelo. Además se desarrollará el modelo estocástico de Schwartz de dos factores, el cual es un modelo de los precios de futuros para el petróleo y es la base del trabajo hecho en esta tesis.

3.1. El modelo de Black-Scholes

Consideremos un movimiento Browniano $\{B_t\}_{t\geq 0}$, definido sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, P, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$. Supongamos que el precio del activo al tiempo t es S_t, y que éste esta conducido por el movimiento browniano geométrico, es decir

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{3.1}$$

Una vez que se determinó el proceso S_t, se prosigue a dar el valor del precio de una opción, la cual claramente es función de los distintos parámetros que intervienen en las cláusulas del contrato, tales como:

- K= el precio de ejercicio,
- T-t= la vida del contrato,
  donde:

- T es la fecha de vencimiento y,
- t es la fecha de inicio del contrato.

Es claro que el valor de la opción también dependerá de las propiedades del activo, es decir depende de las variables:

- S_t= el precio del activo,
- μ= rendimiento esperado,
- σ=la volatilidad,
- r= tasa de interés, que se tenga en el mercado de crédito a fin de calcular el valor del dinero en el tiempo.

Por lo que el valor de la opción al tiempo t se puede escribir como

$$V_t = V(S_t, K, T-t, \sigma, \mu, r). \tag{3.2}$$

Tomando a S_t y t como las variables relevantes en el contrato, entonces para mayor comodidad de la notación, el valor de la opción se puede reescribir como $V_t = V_t(S_t, t)$.

Ahora aplicando la formula de Itô al valor V_t de la opción se obtiene

$$dV(S_t, t) = (\frac{\partial V}{\partial s}\mu S_t + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\sigma^2 S_t^2)dt + \frac{\partial V}{\partial s}\sigma S_t dB_t. \tag{3.3}$$

Considere ahora un portafolio con w_1 unidades del activo S_t y w_2 unidades de la opción $V_t(S_t, t)$. Denotemos a π_t como el valor del portafolio, entonces

$$\pi_t = w_1 S_t + w_2 V_t(S_t, t), \tag{3.4}$$

ahora por auto-financiabilidad del portafolio tenemos que

$$d\pi_t = w_1 dS_t + w_2 dV_t(S_t, t). \tag{3.5}$$

Sustituyendo los valores de dS_t y $dV_t(S_t, t)$ en la ecuación 3.5, se tiene que:

$$d\pi_t = (w_1 + w_2\frac{\partial V}{\partial s})\mu S_t dt + (w_1 + w_2\frac{\partial V}{\partial s})\sigma S_t dB_t + w_2(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\sigma^2 S_t^2)dt. \tag{3.6}$$

La ecuación anterior contiene dos tipos de términos: los términos de tendencia (drift) multiplicados por dt, y el término aleatorio multiplicado por dB_t. Este último término modela el riesgo del mercado del portafolio, el cual se puede eliminar si se escoge adecuadamente las cantidades w_1 y w_2 en la conformación del portafolio. Por lo tanto a fin de eliminar el riesgo del portafolio se selecciona w_1 y w_2 de tal manera que se anule el término estocástico de la ecuación 3.6, es decir

$$w_1 + w_2 \frac{\partial V}{\partial s} = 0,$$

claramente existen infinitas posibilidades, pero si por ejemplo se toma $w_1 = -\frac{\partial V}{\partial s} := -\Delta$ y $w_2 = 1$, se tiene

$$d\pi_t^{(\Delta)} = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\sigma^2 S_t^2)dt. \tag{3.7}$$

Es usual referirse a esta elección particular de $w_1 = -\Delta$ y $w_2 = 1$ como cobertura Delta. Por lo tanto si se emplea esta cobertura en la ecuación 3.4, se obtiene

$$\pi_t^{(\Delta)} = V_t(S_t, t) - \Delta S_t, \tag{3.8}$$

lo cual significa que se está cubriendo una venta en corto de Δ unidades del subyacente de una opción, entonces el portafolio resultante con esta cobertura es $\pi_t^{(\Delta)} = V_t(S_t, t) - \Delta S_t$. Si esta cantidad se deposita en un banco que paga una tasa de interés r, entonces el cambio del valor del portafolio, durante el tiempo dt, es

$$d\pi_t^{(r)} = \pi_t^{(\Delta)} r dt = (V_t(S_t, t) - \Delta S_t) r dt. \tag{3.9}$$

En este caso dt es el tiempo en el que se aplica la tasa r.

Ahora si existe oportunidad de arbitraje, es decir, oportunidades de generar ganancias libres de riesgo, entonces los mercados no están en equilibrio. Recíprocamente, si los mercados están en equilibrio, entonces no existen oportunidades de arbitraje. Por lo tanto, bajo el supuesto de no arbitraje, se tiene que

$$d\pi_t^{(r)} = d\pi_t^{(\Delta)}. \tag{3.10}$$

Reescribiendo la ecuación 3.10 se obtiene

$$(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\sigma^2 S_t^2)dt = (-\frac{\partial V}{\partial s} S_t + V) r dt, \tag{3.11}$$

que es equivalentemente a

$$(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\sigma^2 S_t^2) + \frac{\partial V}{\partial s} S_t r - V r = 0, \tag{3.12}$$

la cual es conocida como la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

Las condiciones de frontera con las cuales se determina una solución única a la ecuación 3.12 son las siguientes:

- $V_{futuro} = F(0,t) = 0$ y $F = \text{máx}(S_T - K, K - S_T), \text{con } T = t.$
- $V_{call} = C(0,t) = 0$ y $C = \text{máx}(S_T - K, 0).$
- $V_{put} = P(0,t) = 0$ y $P = \text{máx}(K - S_T, 0).$

Observe que la ecuación 3.12 es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica. Las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas están relacionadas con la ecuación de difusión de calor, la cual tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.13}$$

esta relación se debe a que algunas veces para poder resolver la ecuación 3.12 se tienen que hacer transformaciones[1] para llevarla a su forma canónica, es decir para obtener la ec. 3.13.

3.2. Ec. diferencial parcial para futuros

En esta sección se determina la ecuación diferencial parcial de un futuro, empleando los mismos argumentos que en la sección anterior.

Nuevamente considere un movimiento Browniano $\{B_t\}_{t\geq 0}$, definido sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, P, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$. Aquí también se supone que el precio del activo al tiempo t es S_t, y qué éste esta conducido por movimiento Browniano geométrico, es decir

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{3.14}$$

Suponiendo esto y sabiendo que los futuros dependen del precio del subyacente S_t y de t, entonces aplicando la formula de Itô a el valor de los futuros $F_t(S_t,t)$ se tiene

$$dF(S_t,t) = (\frac{\partial F}{\partial s}\mu S_t + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\sigma^2 S_t^2)dt + \frac{\partial F}{\partial s}\sigma S_t dB_t. \tag{3.15}$$

Considere ahora un portafolio con w_1 unidades de S_t y w_2 unidades de $F_t(S_t,t)$. Definamos π_t como el valor del portafolio, entonces

$$\pi_t = w_1 S_t + w_2 F_t(S_t,t), \tag{3.16}$$

entonces por auto-financiamiento del portafolio se tiene

$$d\pi_t = w_1 dS_t + w_2 dF_t(S_t,t), \tag{3.17}$$

[1] Al aplicar las transformaciones descritas en el apéndice B se obtiene una ecuación de calor

sustituyendo las ecuaciones 3.14 y 3.15 en 3.17 se obtiene la siguiente expresión para el cambio del valor del portafolio:

$$d\pi_t = (w_1 + w_2\frac{\partial F}{\partial s})\mu S_t dt + (w_1 + w_2\frac{\partial F}{\partial s})\sigma S_t dB_t + w_2(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\sigma^2 S_t^2)dt. \tag{3.18}$$

Así como en la derivación del modelo de Black-Scholes, aquí también se tiene que la ecuación anterior contiene dos tipos de términos: los términos de tendencia (drift), multiplicados por dt y el término aleatorio, multiplicado por dB_t. De igual forma este último término modela el riesgo de mercado del portafolio, el cual se puede eliminar si se escoge adecuadamente w_1 y w_2 en la conformación del portafolio. Es decir, a fin de eliminar el riesgo del portafolio se selecciona w_1 y w_2 de tal manera que se anule el término estocástico de la ecuación 3.18, es decir

$$w_1 + w_2\frac{\partial F}{\partial s} = 0.$$

Claramente existen infinitas posibilidades, pero si por ejemplo se toma $w_1 = -\frac{\partial F}{\partial s} := -\Delta$ y $w_2 = 1$, se tiene

$$d\pi_t^{(\Delta)} = (\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\sigma^2 S_t^2)dt. \tag{3.19}$$

Como ya se vio en Black-Scholes es usual referirse a esta elección particular de $w_1 = -\Delta$ y $w_2 = 1$ como cobertura Delta. Por lo tanto si se emplea esta cobertura en la ecuación 3.16, se obtiene

$$\pi_t^{(\Delta)} = -\Delta S_t + F_t(S_t, t), \tag{3.20}$$

lo cual significa que se está cubriendo una venta en corto de Δ unidades del activo, por lo que el portafolio resultante con esta cobertura es $\pi_t^{(\Delta)} = -\Delta S_t + F_t(S_t, t)$. Ahora si esta cantidad se deposita en un banco que paga una tasa de interés r, entonces el cambio del valor del portafolio, durante el tiempo dt, es

$$d\pi_t^{(r)} = \pi_t^{(\Delta)} r dt = (-\Delta S_t + F_t(S_t, t))r dt. \tag{3.21}$$

En este caso dt es el tiempo en el que se aplica la tasa r.

Bajo el supuesto de no arbitraje, se tiene que

$$d\pi_t^{(r)} = d\pi_t^{(\Delta)}. \tag{3.22}$$

Reescribiendo la ecuación anterior se obtiene

$$(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\sigma^2 S_t^2)dt = (-\frac{\partial F}{\partial s}S_t + F(S_t, t))r dt, \tag{3.23}$$

equivalentemente

$$(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}\sigma^2 S_t^2) + \frac{\partial F}{\partial s}S_t r - F(S_t, t)r = 0, \tag{3.24}$$

Observemos que la ecuación 3.24 es semejante a la ecuación diferencial parcial dada en el modelo de Brennan y Schwartz (1985)[20], excepto por que en el modelo de Brennan aparece la parcial de F con respecto a S_t multiplicado por el rendimiento de conveniencia (convinience yield).

3.3. El modelo estocástico de Schwartz de dos factores

El trabajo hecho por Schwartz-Cortazar es un modelo de dos factores de la estructura temporal de los precios futuros del petróleo que puede estimarse a partir de los datos disponibles de precios de futuros. Para Schwartz-Cortazar es importante tener una base para iniciar dicho modelo, es decir, parte de un modelo estocástico de un factor, el cual describe que el precio esta conducido por un movimiento browniano geométrico.

3.3.1. Modelo de un factor

El modelo de un factor es el primero que supone que los precios al contado de las materias primas siguen la ecuación diferencial estocástica:

$dS_t = k(\mu - \ln S_t)S_t dt + \sigma S_t dB_t,$

es decir, el precio esta conducido por un movimiento browniano geométrico.

Definamos a $X_t = \ln S_t$ y apliquemos la formula de Itô, entonces se obtiene:

$$dX_t = k(\alpha - X_t)dt + \sigma dB_t \tag{3.25}$$

donde: $\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2k}$ es el rendimiento de conveniencia a largo plazo, y $k > 0$ es el coeficiente de reversión a la media.

Observemos que el proceso estocástico que cumple con 3.25 es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck[9]. Ahora en la sección que sigue se procede a ver el modelo de dos factores propuesto por Schwartz-Cortazar.

3.3.2. El modelo de dos factores de Schwartz-Cortazar y su modelo libre de riesgo

Debido que para describir los precios futuros del petróleo, no basta con saber únicamente cual es su dinámica, también es necesario tener una idea de que factores influyen directamente en el comportamiento de estos, es decir factores como el rendimiento de conveniencia, el inventario, la tasa de interés, etc.. Como se describió en el capitulo anterior, el rendimiento de conveniencia es importante para determinar el precio de un commodity, por lo que Schwartz toma este rendimiento como uno de los factores clave para obtener los precios futuros del petróleo.

Sea S_t el precio al contado del petróleo y sea δ_t el rendimiento de conveniencia, Schwartz-Cortazar (1997)[1][5] propone el modelo de dos factores como

(I) para la dinámica del precio del petróleo

$$dS_t = (\mu - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dB_1(t), \tag{3.26}$$

(II) y para el rendimiento de conveniencia,

$$d\delta_t = k(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dB_2(t), \tag{3.27}$$

con

$d[B_1, B_2]_t = \rho dt,$

donde, S_t es el precio del petróleo, δ_t es el rendimiento de conveniencia, k es el coeficiente de reversión a la media, α es el rendimiento de conveniencia a largo plazo, μ representa el rendimiento total a largo plazo del petróleo, $\sigma_1 > 0$ y σ_2 son las volatilidades correspondientes a cada proceso, $B_1(t)$ y $B_2(t)$ son movimientos Brownianos, y ρ es la correlación asociada a estos movimientos.

El proceso de la dinámica de los precios que propone Swchartz en la ecuación 3.26 sigue un movimiento browniano geométrico. Por otro lado el proceso para el rendimiento de conveniencia instantáneo descrito por la ecuación 3.27 es un proceso de Orstein-Ulenbeck. Notemos que si en lugar de que δ_t esté determinado por la ecuación 3.27, éste fuera un nuevo proceso, de tal manera que $\delta_t = k \ln S_t$, entonces el modelo de dos factores descrito con anterioridad se reduce al modelo de un factor, es decir,

aplicando la formula de Itô-Doeblin a $\delta_t = k \ln S_t$, se obtiene

$$d\delta_t = k((\mu + \sigma_1^2) - \delta_t)dt + \sigma_1 dB_1(t),$$

por otro lado si δ_t es constante este se reduce al modelo de Brennan-Schwartz [2].

Debido a que es necesario utilizar procesos estocásticos neutrales ante el riesgo o de riesgo ajustado, entonces el modelo que propone Schwartz tiene que ser llevado a un espacio libre de riesgo, por lo que estos procesos ajustados al riesgo para el precio y el rendimiento de conveniencia se obtienen usando el teorema de Girsanov [3]. A continuación se hace en detalle el cambio de medida de probabilidad, usando el teorema mencionado:

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t>0}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado y sea $B_t = (B_1(t), B_2(t))$ el movimiento browniano sobre $\mathbb{R}^2$, consideremos el siguiente proceso:

$$\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t)) = (\frac{\mu - r}{\sigma_1}, \frac{k\lambda}{\sigma_2}),$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo, y λ es la prima de riesgo[4] del rendimiento de conveniencia.

Tenemos que

(i) El procesos $\theta(t)$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$, pues cada uno de los procesos en cada entrada del vector son adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$, ya que son constantes.

(ii) $Z_t = \exp\{-\int_0^t \theta(s) \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(u)\|^2 du\}$ es martingala, entonces $E(Z_T) = 1$.

Demostración de (ii):

Como se cumple la condición de Novikov $E[\exp\{\frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(u)\|^2 du\}] < \infty$, entonces por definición de Z_t, se tiene que el proceso Z_t es martingala.

Ahora veamos que se cumple que $E(Z_T) = 1$.

Una demostración sencilla es usar el hecho de que Z_t es martingala, es decir, $E(Z_t) = E(Z_0) = 1$. $\diamond$

[2] Ver [21] pag. 18

[3] Ver Teorema 18 del capítulo I.

[4] Rendimiento adicional esperado en una inversión por aceptar el riesgo inherente a ella, en contraposición de otra inversión sin riesgo.

Otra opción es la siguiente:

$$Z_t = exp\{-\int_0^t \theta(s) \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(u)\|^2 du\} =$$

$$exp\{-\int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma_1} dB_1(s) - \int_0^t \frac{k\lambda}{\sigma_2} dB_2(s) - \frac{1}{2}\int_0^t (\frac{\mu - r}{\sigma_1})^2(u)du - \frac{1}{2}\int_0^t (\frac{k\lambda}{\sigma_2})^2 du\} =$$

$$exp\{-\frac{\mu - r}{\sigma_1}B_1(t) - \frac{t}{2}(\frac{\mu - r}{\sigma_1})^2 - \frac{k\lambda}{\sigma_2}B_2(t) - \frac{t}{2}(\frac{k\lambda}{\sigma_2})^2\}$$

Ahora

$$E(Z_t) = E(exp\{-\frac{\mu - r}{\sigma_1}B_1(t) - \frac{k\lambda}{\sigma_2}B_2(t) - \frac{t}{2}[(\frac{\mu - r}{\sigma_1})^2 + (\frac{k\lambda}{\sigma_2})^2]\}) =$$

$$E(exp\{-\frac{\mu - r}{\sigma_1}B_1(t) - \frac{k\lambda}{\sigma_2}B_2(t)\})exp\{-\frac{t}{2}[(\frac{\mu - r}{\sigma_1})^2 + (\frac{k\lambda}{\sigma_2})^2]\},$$

como $B_1(t) \stackrel{d}{=} t^{\frac{1}{2}}B_1(1)$ y $B_2(t) \stackrel{d}{=} t^{\frac{1}{2}}B_2(1)$ con $B_1(1),\ B_2(1) \rightsquigarrow N(0,1)$, entonces

$$E(exp\{-\frac{\mu - r}{\sigma_1}B_1(t)\}) = E(exp\{-\frac{\mu - r}{\sigma_1}t^{\frac{1}{2}}B_1(1)\}) = exp\{\frac{t}{2}(\frac{\mu - r}{\sigma_1})^2\},$$

y

$$E(exp\{\frac{k\lambda}{\sigma_2}B_2(t)\}) = E(exp\{-\frac{k\lambda}{\sigma_2}t^{\frac{1}{2}}B_2(1)\}) = exp\{\frac{t}{2}(\frac{k\lambda}{\sigma_2})^2\},$$

por lo tanto $E(Z_t) = 1.\diamond$

Ahora definamos a

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega)dP(\omega),\ \forall A \in \mathcal{F},$$

entonces por el Teorema de Girsanov $B^*(t) = (B_1^*(t), B_2^*(t))$ se define como

$$B^*(t) = (B_1(t), B_2(t)) + (\int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma_1}du, \int_0^t \frac{k\lambda}{\sigma_2}du) =$$

$$(B_1(t) + \frac{\mu - r}{\sigma_1}t, B_2(t) + \frac{k\lambda}{\sigma_2}t),$$

el cual resulta ser un movimiento browniano en $\mathbb{R}^2$ bajo la nueva medida de probabilidad $\tilde{P}$.

Por lo tanto en su forma diferencial se tiene que:

$$dB_1(t) = dB_1^*(t) - \frac{\mu - r}{\sigma_1} dt$$

y

$$dB_2(t) = dB_2^*(t) - \frac{k\lambda}{\sigma_2} dt$$

Sustituyendo a $dB_1(t)$ y $dB_2(t)$ en las ecuaciones 3.26 y 3.27 se tiene:

- para los precios

$$dS_t = (\mu - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t dB_1(t) =$$
$$(\mu - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t (dB_1^*(t) - \frac{\mu - r}{\sigma_1} dt) =$$
$$(r - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t dB_1^*(t),$$

- el rendimiento de conveniencia instantáneo,

$$d\delta_t = k(\alpha - \delta_t) dt + \sigma_2 dB_2(t) =$$
$$k(\alpha - \delta_t) dt + \sigma_2 (dB_2^*(t) - \frac{k\lambda}{\sigma_2} dt) =$$
$$[k(\alpha - \delta_t) - \lambda] dt + \sigma_2 dB_2^*(t).$$

Por lo tanto, el modelo libre de riesgo de dos factores bajo la medida de probabilidad $\tilde{P}$ está dado por:

$$dS_t = (r - \delta_t) S_t dt + \sigma_1 S_t dB_1^*(t) \tag{3.28}$$
$$d\delta_t = [k(\alpha - \delta_t) - \lambda] dt + \sigma_2 dB_2^*(t). \tag{3.29}$$

Además como el corchete es invariante bajo el cambio de probabilidad, entonces se sigue satisfaciendo: $d[B_1^*, B_2^*]_t = \rho dt$

donde ρ es el coeficiente de correlación.

Observemos que el modelo descrito por las ecuaciones 3.28 y 3.29 es semejante al modelo de Gibson-Schwartz[5], en el cual se hace el supuesto de que la tasa de interés es determinista. En la práctica, se puede ver que la volatilidad del rendimiento de conveniencia (convinience yield) es un orden de magnitud mayor que la volatilidad de los tipos de interés. En consecuencia, dejando que la tasa r sea término estocástico nos da mucho mejor el modelo cualitativo. Sin embargo este modelo tiene una variante, la cual es λ y esta aparece en el rendimiento de conveniencia.

Por otra parte la estimación estadística de un modelo sólo puede hacerse a partir de observaciones del mercado, en consecuencia, ya no se puede hacer directamente de las especificaciones de un modelo de riesgo neutral dado por las ecuaciones 3.28 y 3.29 . Tenemos que trabajar hacia atrás y recuperar la dinámica de las variables del estado bajo la estructura de probabilidad objetiva ó histórica . Esto nos exige hacer suposiciones sobre los precios del mercado de riesgo, λ y S_t, es decir cada valor del precio al azar debe tener su propio precio de riesgo. La suposición más simple es que λ sea constante.

Bajo este supuesto, la dinámica histórica de dos factores es exactamente de la misma forma que para la medida neutra al riesgo. De hecho, el modelo sigue siendo lineal, y se podrían estimar todos los parámetros empíricamente utilizando el método estándar de filtros de Kalman [21].

3.3.3. Ecuación diferencial parcial

Así para la obtención de la Ecuación diferencial parcial estocástica, apliquemos la fórmula de Itô-Doeblin a $F(S_t, \delta_t, t)$:

$$dF(S_t, \delta_t, t) = \frac{\partial F}{\partial s} dS_t + \frac{\partial F}{\partial \delta} d\delta_t + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} d[S,S]_t + 2\frac{\partial F}{\partial s \partial \delta} d[S,\delta]_t + \frac{\partial^2 F}{\partial \delta^2} d[\delta,\delta]_t\right\}$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial s}(r-\delta)FS + \frac{\partial}{\partial \delta}(k(\alpha-\delta)-\lambda)F + \frac{\partial^2}{\partial \delta s}(\sigma_1\sigma_2\rho)FS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\sigma_1^2 S^2)F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \delta^2}(\sigma_2^2)F - \frac{\partial F}{\partial T}\right\} dt$$

$$+\frac{\partial F}{\partial \delta}\sigma_2 dB_2^*(t) + \frac{\partial F}{\partial s}\sigma_1 S_t dB_1^*(t)$$

Aplicando la propiedad de no arbitraje y sabiendo que $\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial T}$, entonces:

[5] Ver [7] pag. 3

$$\frac{\partial}{\partial s}(r-\delta)FS+\frac{\partial}{\partial \delta}(k(\alpha-\delta)-\lambda)F+\frac{\partial^2}{\partial \delta s}(\sigma_1\sigma_2\rho)FS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\sigma_1^2S^2)F+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \delta^2}(\sigma_2^2)F-\frac{\partial F}{\partial T}=0 \quad (3.30)$$

con condicion de frontera $F(S_t,\delta_t,T=0)=S_0$

Para encontrar la solución se propuso lo siguiente:

Sea

$F(S_t,\delta_t,T)=S_0\exp(A_0(T)+A_1(T)\delta_t+A_2(T)T)$

con $A_0(0)=A_1(0)=A_2(0)=0$,

solución al problema diferencial parcial con valores iniciales.

Ahora tomando las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función F y sustituyendo en la ecuación 3.30 se obtiene

$$F(r-\delta)+A_1(T)(k(\alpha-\delta)-\lambda)F+\frac{F}{2}\left(2A_1(T)\sigma_1\sigma_2\delta+A_1^2(T)\sigma_2^2\right)-F(\frac{\partial A_0(T)}{\partial T}+\frac{\partial A_1(T)}{\partial T}\delta+$$

$$\frac{\partial A_2(T)}{\partial T}T+A_2(T))=0$$

Para que la ecuación anterior se satisfaga, se tiene que cumplir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial A_1(T)}{\partial T}+A_1(T)k=-1 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial A_2(T)}{\partial T}T+A_2(T)=0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial A_0(T)}{\partial T}=r+A_1(T)k\alpha-A_1(T)\lambda+A_1(T)\sigma_1\sigma_2\delta+A_1^2\sigma_2^2 \quad (3.33)$$

De la ecuación 3.32, obtenemos inmediatamente que $A_2(T)=0$. La ecuación 3.31 se resuelve por factor integrante, con lo cual se obtiene que:

$$A_1 = -\frac{1}{k}[1 - \exp(-kT)]$$

Sustituyendo $A_1(T)$ en ecuación 3.33 y resolviendo se tiene

$$A_0(T) = \left(r - \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{k} - \hat{\alpha} + \frac{\sigma_1^2}{2k^2}\right)T + \left(\sigma_1\sigma_2\rho - \frac{\sigma_1^2}{k^2} + k\hat{\alpha}\right)\frac{(1 - \exp(-kT))}{k^2} + \frac{\sigma_2^2}{4}\frac{(1 - \exp(-2kT))}{k^3},$$

donde $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{k}$.

Por lo tanto, la solución a la EDPE con valores a la frontera esta dada por:

$$F(S_t, \delta_t, T) = S\exp((r - \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{k} - \hat{\alpha} + \frac{\sigma_1^2}{2k^2})T + (\sigma_1\sigma_2\rho - \frac{\sigma_1^2}{k^2} +$$

$$k\hat{\alpha})\frac{[1 - \exp(-kT)]}{k^2} + \frac{\sigma_2^2}{4}\frac{(1 - \exp(-2kT))}{k^3} - \frac{\delta}{k}(1 - \exp(-kT))),$$

la cual coincide con la solución de Jamshidiam y Fein [23].

Observemos que $F(S_t, \delta_t, T)$ satisface la ecuación de Kolmogorov hacia adelante, la cual coincide con la ecuación 3.30, por lo tanto, F es función de densidad de transición.

3.3.4. El modelo parsimonioso de Schwartz

En esta sección, se modifica el modelo descrito en la sección anterior a fin de obtener una representación parsimoniosa del modelo de dos factores. Esta modificación es esencial para comprender la extensión a un modelo de tres factores. Schwartz-Cortazar ha mostrado que el modelo se puede escribir de una manera más simple con menos parámetros, razón por la cual le llama modelo parsimonioso [1], [5].

Definamos una nueva variable y tal que al rendimiento de conveniencia δ_t se le reste el rendimiento de conveniencia a largo plazo α.

$$y = \delta_t - \alpha. \tag{3.34}$$

Definamos v como el retorno de precios a largo plazo del petróleo, el cual se define como la diferencia entre el rendimiento de conveniencia a largo plazo (α) y el rendimiento total a largo plazo (μ). Esto es

$$v = \mu - \alpha, \tag{3.35}$$

con estos cambios de variable obtenemos

$$dS_t = (v - y)S_t dt + \sigma_1 S_t dB_1(t), \tag{3.36}$$

$$d\delta_t = -kydt + \sigma_2 dB_2(t). \tag{3.37}$$

En esta formulación del modelo se trata de que los factores S_t e y sean variables de estado no transitivos[6] y, por lo tanto, para transformar los procesos originales 3.36 y 3.37 en los procesos ajustados al riesgo se asigna una prima de riesgo a cada proceso. Es decir se define λ_i con $i = 1, 2$ como la prima de riesgo asociada a los factores, así usando el Teorema de Girsanov, los procesos ajustados al riesgo son

$$dS_t = (v - y - \lambda_1)S_t dt + \sigma_1 S_t dB_1^*(t), \tag{3.38}$$

$$d\delta = [-ky - \lambda_2]dt + \sigma_2 dB_2^*(t), \tag{3.39}$$

$$d[B_1^*, B_2^*]_t = \rho dt.$$

Cabe destacar que el modelo parsimonioso, tiene un parámetro menos que el otro modelo de Schwartz, y además tiene la misma capacidad explicativa, pero es más parsimonioso y es la base del modelo de tres factores que desarrolla Schwartz, el cual no se mencionará en este trabajo, pues el objetivo es describir un modelo de dos factores basado en el modelo de Schwartz.

Comentarios: Para el modelo de dos factores de Swchartz-Cortazar se describe al subyacente como un proceso de Itô, así mismo se utiliza un proceso de Itô para modelar el rendimiento de conveniencia (convinience yield), el cual es importante para describir los precios futuros, pues con este factor integrado en el modelo, el inversionista puede obtener y no obtener beneficios monetarios al tener existencia en inventarios de la mercancía en cuestión. Por esta razón se pretende incluir el inventario directamente en el modelo de dos factores para futuros del petróleo.

[6] Ver apéndice A y http://es.wikipedia.org/wiki/Microeconomía

Capítulo 4

Expectativas racionales

4.1. Breve antecedente

La teoría de las expectativas racionales es un modelo considerado como una escuela de pensamiento económico y es ampliamente utilizada como una técnica de modelado en todas las ramas de la economía, ésta teoría la propuso por primera vez John F. Muth [19](de la Universidad de Indiana) en la década de los 60's. Él utilizó éste término para describir las muchas situaciones económicas en las que el resultado depende en parte de lo que la gente espera que suceda. Por ejemplo, el precio de un producto agrícola, depende del número de hectáreas de plantas, que a su vez depende de la cosecha de los agricultores y de lo que esperan vender. Del mismo modo, el precio de una acción o bono depende en parte de lo que los compradores y vendedores supongan sobre el nivel de inflación en el futuro.

Además de Muth, muchos economistas como AC Pigou, John Maynard Keynes, y John R. Hicks [18], creen que las expectativas de la gente sobre el futuro juega un papel central en la determinación del ciclo económico. Keynes se refiere a esto como "olas de optimismo y pesimismo", lo cual ayuda a determinar el nivel de actividad económica. Pero los defensores de la teoría de expectativas racionales van más a fondo en su análisis de estás, pues la influencia entre las expectativas y los resultados de flujo van en ambos sentidos, es decir en la formación de sus expectativas, la gente trata de predecir lo que realmente ocurrirá, ellos utilizan el hecho de que las normas funcionan bien porque los mayores "beneficios"se dan para alguien que actúa sobre la base de los mejores pronósticos, ya sea en alguien que invierte en el mercado de valores ó alguien que está considerando la compra de un coche nuevo, y cuando la gente tiene que pronosticar un precio determinado tienden a ajustar sus normas de previsión para eliminar los errores evitables. Por lo tanto, no hay retroalimentación continua de los resultados últimos de las expectativas actuales.

Lucas plantea que los agentes hacen uso eficiente de la información disponible y que no cometen errores sistemáticos, la crítica de Lucas trae como consecuencia el desuso de la econometría tradicional y sugiere extremar la coherencia en los modelos. A pesar de las criticas que recibió el enfoque de las expectativas racionales se convirtió en el estándar para modelar las expectativas en los modelos.

El uso de las expectativas racionales tuvo repercusión en la forma de hacer políticas, así Sargent plantea que los agentes se adaptan a las políticas, es decir que los coeficientes de las ecuaciones dinámicas no dependen sólo de parámetros estructurales (gustos, tecnología, etc.) sino también de reglas de políticas seguidas por el gobierno, por lo que, si se cambian las reglas de política cambia la conducta de los agentes.

Los economistas que creen en las expectativas racionales, basan su creencia en el supuesto económico en que las personas se comportan de manera que maximizan su utilidad (su disfrute de vida). Los economistas han utilizado el concepto de expectativas racionales para comprender una variedad de situaciones en las que la especulación sobre el futuro es un factor crucial en la determinación de la acción actual. La teoría de expectativas racionales representa una base fundamental en la construcción del "camino aleatorio" ó de los "mercados eficientes", de la teoría de los precios de valores, la teoría de la dinámica de la hiperinflación, el "ingreso permanente", "el ciclo de vida de las teorías de consumo", y el diseño de los derechos económicos de las políticas de estabilización.

4.2. Modelo e hipótesis de las expectativas racionales

Como ya se mencionó las expectativas racionales fueron planteadas por Muth y posteriormente desarrolladas por Lucas, Sargent y otros. En los 60's e incluso en los 70's los modelos neokeynesianos eran los más utilizados y los parámetros de los macromodelos eran calculados por los métodos estadísticos econométricos. Sin embargo estos modelos que generalmente utilizaban expectativas adaptativas[1] para añadir dinámica a los modelos, fueron criticados cuando no pudieron explicar el fenómeno de la inflación que apareció en los 70's, por lo que fue necesario implementar una nueva expectativa, estas expectativas son las racionales.

Las expectativas que la gente desarrolla con la información pasada, se les define como idéntica a la mejor estimación del futuro (el pronóstico óptimo) que utiliza toda la información disponible. Por lo tanto, se supone que los resultados que se están pronósticando no difieren sistemáticamente del mercado de equilibrio, a está expectación se le conoce como expectativas racionales, las cuales no difieren de forma sistemática o previsible de los resultados de equilibrio,

[1] Ver siguiente sección

es decir, se supone que la gente no comete errores sistemáticos[2] al predecir el futuro y que las desviaciones de previsión son sólo al azar.

Por ejemplo, supongamos que P es el precio de equilibrio en un mercado simple al tiempo n, determinado por la oferta y la demanda. La teoría de expectativas racionales, dice que el precio real no se desviará de la expectativa si hay información, causado por información imprevisible en el tiempo en que las expectativas se formaron. En otras palabras a priori el precio real es igual a su expectativa racional:

$$P_n = P_n^e + \varepsilon \tag{4.1}$$

$$P_n^e = E[P_n/\mathcal{F}_{n-1}] \tag{4.2}$$

donde:

- P_n^e es la expectativa racional, la cual se define como el valor esperado del precio P_n dada la información hasta un tiempo menor n-1 (es decir dada la filtración $\mathcal{F}_{n-1}$),
- ε es el término de error aleatorio, que tiene un valor esperado cero, y es independiente de P_n^e.

El error aleatorio cometido en la expectativa va evolucionando con el tiempo, es decir en cada instante de tiempo n se tiene un error distinto.

La ecuación 4.1 es la forma matemática de definir a las expectativas racionales.

La hipótesis de las expectativas racionales sugieren el siguiente proceso:

- Las variables siguen cierto patrón de conducta.
- Los errores revelan discrepancia entre el patrón de conducta de la variable y el esperado por el agente.
- El agente revisa sus errores para no caer de nuevo en los mismos errores en el futuro.
- El agente no comete errores sistemáticos, por lo que busca información hasta que el beneficio marginal de la información es igual al costo marginal.

La teoría de expectativas racionales es la base de la hipótesis del Mercado Eficiente. Si el precio de un activo no refleja todos los detalles del mismo, entonces existen "sin explotar las

[2]Ver apéndice A

oportunidades de beneficios"de alguien que puede comprar ó vender con la seguridad de obtener una ganancia, lo que impulsa a los precios hacia el equilibrio. En las más fuertes versiones de esta teoría, donde todas las oportunidades de ganancias han sido explotadas, todos los precios en los mercados financieros son "correctas" y reflejan los fundamentos del mercado como futuros flujos de utilidades y dividendos.

En la siguiente sección se verá una aplicación de las diferentes expectativas, así como el tipo de error que se comete cuando se modelan.

4.3. El modelo de Muth y las diferentes expectativas

La teoría de expectativas racionales es muy extensa y se puede aplicar en muchos modelos económicos, sobre todo en modelos de oferta y demanda. Para fines de nuestro interés, en este trabajo veremos únicamente el modelo de Muth y la aplicación de las expectativas racionales a éste. Así mismo se verán los tipos de errores que causan las diferentes expectativas.

El modelo de Muth describe el comportamiento del precio en el mercado de bienes, el cual se muestra a continuación:

$$D_n = \mu - \beta P_n \qquad (Demanda),$$

$$O_n = \gamma P_n^e + k + u_n \qquad (Oferta),$$

donde:

- γ, k, μ y $\beta > 0$
- u_n son variables aleatorias gaussianas.

En éste modelo Muth supone que el agente conoce el valor teórico de las variables endógenas, además el agente revisa sus variables exógenas pasadas, presentes y futuras.

Se sabe que el equilibrio en el mercado de bienes se obtiene cuando la cantidad ofrecida es igual a la demandada $D_n = O_n$, entonces por esta igualdad se tiene que el comportamiento de los precios será:

$$P_n = \frac{\mu - k}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta}P_n^e - \frac{1}{\beta}u_n.$$

Las expectativas de los precios pueden ser modeladas de diferentes formas, por lo que a continuación se da una clasificación de estás:

1. Expectativas estadísticas: $P_n^e = P_{n-1}$.

   Usando estas expectativas, el precio tendrá el siguiente comportamiento:

   $$P_n = \frac{\mu - k}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta}P_{n-1} - \frac{1}{\beta}u_n.$$

   El error de predicción es:

   $$\varepsilon_n = P_n - P_n^e = \frac{\mu - k}{\beta} - (\frac{\gamma}{\beta} + 1)P_{n-1} - \frac{1}{\beta}u_n.$$

   En este caso el error de predicción tiene dos componentes, uno sistemático o predecible, el cual como es conocido es evitable por lo que no tiene sentido que los agentes cometan estos errores cuando pueden evitarlos, y otro aleatorio o impredecible.

2. Expectativas adaptativas: $P_n^e = (1 - \lambda)P_{n-1} + \lambda P_{n-1}^e$

   También pueden escribirse como:

   $$P_n^e = (1 - \lambda)\sum_{i=1}^{N-1} \lambda^i P_{n-i-1} + \lambda^T P_{n-N}^e,$$

   ó

   $$P_n^e = (1 - \lambda)\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i P_{n-i-1} \tag{4.3}$$

   Los precios, de acuerdo a estas expectativas tendrán el siguiente comportamiento:

   $$P_n = \frac{\mu - k}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta}P_n^e - \frac{1}{\beta}u_n.$$

   El error de predicción es:

   $$\varepsilon_n = P_n - P_n^e = \frac{\mu - k}{\beta} - (\frac{\gamma}{\beta} + 1)P_n^e - \frac{1}{\beta}u_n$$

   utilizando la ecuación 4.3, el error queda de la forma:

$$\varepsilon_n = P_n - P_n^e = \frac{\mu - k}{\beta} - (\frac{\gamma}{\beta} + 1)(1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i P_{n-i-1} - \frac{1}{\beta}u_n.$$

Donde existe un error sistemático en la formación de expectativas, y el error aleatorio es el mismo que en las expectativas estadísticas.

3. Expectativas racionales: $P_n^e = E[P_n/\mathcal{F}_{n-1}] = E_{n-1}P_n$.

   Donde $E[P_n/\mathcal{F}_{n-1}]$ indica el valor que se espera obtener del precio en el tiempo n, dado que se tiene toda la información hasta el tiempo n-1.

   Así

$$P_n = \frac{\mu - k}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta}E[P_n/\mathcal{F}_{n-1}] - \frac{1}{\beta}u_n,$$

   tomando expectativas en el periodo n-1:

$$E[P_n/\mathcal{F}_{n-1}] = \frac{\mu - k}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta}E[P_n/\mathcal{F}_{n-1}] - \frac{1}{\beta}E_{n-1}u_n,$$

   como $E[u_n/\mathcal{F}_{n-1}] = 0$ entonces

$$E[P_n/\mathcal{F}_{n-1}] = \frac{\mu - k}{\beta + \gamma}. \tag{4.4}$$

   El error de predicción es:

$$\varepsilon_n = P_n - P_n^e = \frac{\mu - k}{\beta} - (\frac{\gamma}{\beta} + 1)E[P_n/\mathcal{F}_{n-1}] - \frac{1}{\beta}u_n$$

   utilizando la ecuación 4.4, el error queda de la forma:

$$\varepsilon_n = P_n - P_n^e = -\frac{1}{\beta}u_n$$

   Donde no existe un error sistemático en la formación de expectativas, sólo uno aleatorio.

Es importante saber la forma del error que se comete cuando uno hace una predicción, ya que este error nos dice que tanto nos alejamos o nos acercamos del precio real. En esta tesis únicamente nos interesa la teoría de expectativas racionales.

Comentarios: Debido a que las teoría de expectativas racionales, es una teoría que facilita la predicción del precio de un bien en el mercado, pues es la mejor estimación del futuro que utiliza toda la información disponible haciendo que este precio diste en una minima cantidad del precio real en el siguiente tiempo, ya que no se cometen errores sistemáticos. Es por esto que se empleara esta teoría y se hará uso del modelo de Muth modificado por Sarget, ya que con esté se pretende obtener un modelo de dos factores que se ajuste mejor a los precios de futuros del petróleo.

Capítulo 5

Modelo estocástico para los precios de futuros del petróleo

El trabajo que se desarrollará en éste capítulo es un modelo estocástico para los precios de futuros del petróleo, el cual se basa en el modelo de Muth-Sargent, donde se describe el comportamiento del mercado de bienes y en el que se hace uso de la teoría de expectativas racionales.

5.1. Extensión del modelo de Muth-Sargent

El modelo discreto que describe el comportamiento del precio en el mercado de bienes según Muth-Sargent es:

$$D_n = -\beta P_n, \tag{5.1}$$

$$O_n = \gamma P_n^e + u_n, \tag{5.2}$$

$$I_n = \alpha[P_{n+1}^e - P_n], \tag{5.3}$$

$$O_n = D_n + [I_n - I_{n-1}], \tag{5.4}$$

$$P_n^e = E[P_n/\mathcal{F}_{n-1}] = P_n, \tag{5.5}$$

donde

- α, β y γ son constantes,
- D_n es la demanda,

- O_n es la oferta,
- I_n es el inventario,
- P_n es el precio,
- P_n^e es la expectativa racional del precio,
- u_n son variables aleatorias gaussianas.

El modelo continuo que se describe a continuación es una versión en tiempo continuo del modelo de Muth-Sargent, el cual esta basado en el espíritu de Muth, es decir en su teoría de las expectativas racionales pero no como filosofía sino como técnica tal como dijo Sargent. En ese sentido lo planteó Juan Manuel Pérez Porrúa en Banxico (Esteban Martina[1]. El modelo continuo se expresa de la siguiente forma:

$$D_t = -\beta P_t, \tag{5.6}$$

$$O_t = \gamma P_t + u_t, \tag{5.7}$$

$$I_t = \alpha \dot{P}_t + v_t, \tag{5.8}$$

$$O_t = D_t + \dot{I}_t, \tag{5.9}$$

donde:

- α, β y γ son constantes,
- D_t es la demanda,
- O_t es la oferta,
- I_t es el inventario,
- P_t es el precio,
- u_t y v_t son variables aleatorias gaussianas.

Aunque el trabajo en está tesis esta inspirado en el de Schwartz-Cortazar (modelo de Schwartz-Gibson), además de que el precio sea un factor para determinar los precios de futuros del petróleo, se tendrá como segundo factor al inventario en lugar del rendimiento de conveniencia ó de oportunidad (convinience yield). Si los usuarios del commodity tienen grandes inventarios, hay poca posibilidad de escasez en el futuro cercano y el rendimiento de conveniencia

[1]Comunicación privada entre ellos

tiende a ser bajo, pero si existe escasez y se tienen grandes inventarios, entonces el rendimiento de conveniencia será alto.

Ahora de la ecuación 5.8 se obtiene que

$$\dot{P}_t = \frac{I_t}{\alpha} + v_t, \tag{5.10}$$

y de la ecuación 5.9, se tiene que

$$\dot{I}_t = (\beta + \gamma)P_t + u_t. \tag{5.11}$$

Las ecuaciones 5.10 y 5.11 son nuestro modelo continuo para determinar los precios de futuros del petróleo.

5.2. El modelo estocástico para los precios de futuros del petróleo

Modelo I

Las ecuaciones 5.10 y 5.11 se pueden reescribir como ecuaciones diferenciales estocásticas dadas por:

$$dP_t = \frac{I_t}{\alpha}dt + \sigma_Z dZ_t \tag{5.12}$$

$$dI_t = (\beta + \gamma)P_t dt + \sigma_X dX_t. \tag{5.13}$$

donde:

- α, γ y α son constantes,
- σ_X y σ_Z son las volatilidades de cada proceso respectivamente, las cuales son contantes (*Supuesto 1*),

- Z_t y X_t son movimientos Brownianos estándar definidos sobre un espacio fijo de probabilidad filtrado $(\Omega, P, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ (*Supuesto 2*),
- ρ es la correlación asociada a estos movimientos, tal que $d[Z, X]_t = \rho dt$ (*Supuesto 3*).

Este modelo es muy sencillo, ya que son dos ecuaciones diferenciales estocásticas en las cuales se observa una interacción entre el precio y el inventario, es decir en la EDE del precio existe una dependencia del valor del inventario, así mismo se observa que en el inventario existe la dependencia del valor del precio al tiempo t, por lo tanto tenemos ecuaciones acopladas.

Las ecuaciones 5.12 y 5.13 describen un modelo lineal, por lo que al igual que en el trabajo de Schwartz, la estimación estadística del modelo sólo puede hacerse desde observaciones, en consecuencia, ya no se puede hacer directamente de las especificaciones del trabajo hecho en esta sección. Por lo tanto se podrían estimar todos los parámetros empíricamente utilizando el método estándar de filtro de Kalman [21], lo cual no se hará aquí.

5.3. La ecuación diferencial parcial estocástica

A continuación se da la ecuación diferencial parcial estocástica para el futuro, para después obtener el valor de los precios de futuros del petróleo.

Denotemos a $F(P_t, I_t, t)$ como el valor del futuro (ó función del futuro), la cual depende de los valores del precio, el inventario y el tiempo, entonces aplicando la formula de Itô-Doeblin a F obtenemos:

$$F(P_t, I_t, t) = \int_0^t [\frac{\partial F}{\partial p}\frac{I}{\alpha} + \frac{\partial F}{\partial i}(C_1 P) + \frac{\partial F}{\partial t}]ds + \int_0^t \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\sigma_Z^2 +$$

$$2\frac{\partial F}{\partial p \partial i}\sigma_Z \sigma_X \rho + \frac{\partial^2 F}{\partial i^2}\sigma_X^2]ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial p}\sigma_Z dZ_s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial i}\sigma_X dX_s,$$

que en su forma diferencial es:

$$dF(P_t, I_t, t) = [\frac{\partial F}{\partial p}\frac{I}{\alpha} + \frac{\partial F}{\partial i}(C_1 P) + \frac{\partial F}{\partial t}]dt + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\sigma_Z^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p \partial i}\sigma_Z \sigma_X \rho +$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial i^2}\sigma_X^2]dt + \frac{\partial F}{\partial p}\sigma_Z dZ_t + \frac{\partial F}{\partial i}\sigma_X dX_t,$$

donde $C_1 = (\beta + \gamma)$.

El valor esperado de $F(P_t, I_t, t_t)$ es:

$$E(F(P_t, I_t, t)) = E(\int_0^t [\frac{\partial F}{\partial p}\frac{I}{\alpha} + \frac{\partial F}{\partial i}(C_1 P) + \frac{\partial F}{\partial t}]ds) + \frac{1}{2}E(\int_0^t [\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\sigma_Z^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p \partial i}\sigma_Z\sigma_X\rho + \frac{\partial^2 F}{\partial i^2}\sigma_X^2]ds).$$

ya que $E(\int_0^t \frac{\partial F}{\partial p}\sigma_Z dZ_s) = 0$ y $E(\int_0^t \frac{\partial F}{\partial i}\sigma_X dX_s) = 0$, pues son martingalas.

Aplicando la condición de no arbitraje, es decir $E(F(P_t, I_t, t)) = 0 \ \forall t \in [0, T]$, y como $\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial T}$, entonces se tiene que la ecuación diferencial parcial estocástica de $F(P_t, I_t, t)$ es:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{I}{\alpha} + \frac{\partial F}{\partial i}(C_1 P) + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\sigma_Z^2 + 2\alpha\frac{\partial F}{\partial p \partial i}\sigma_Z\sigma_X\rho + \frac{\partial^2 F}{\partial i^2}\alpha^2\sigma_X^2] - \frac{\partial F}{\partial T} = 0 \quad (5.14)$$

donde $C_1 = (\beta + \gamma)$.

Con condición $F(P_t, I_t, T = 0) = P$.

La ecuación 5.14 y la condición inicial constituye la ecuación diferencial parcial estocástica para los precios de futuros.

5.3.1. Solución de la ecuación diferencial parcial

Para encontrar la solución a la ecuación 5.14, y debido a que la solución debe de ser semejante a la obtenida en el modelo de Schwartz, se propone lo siguiente:

Sea

$F(P_T, I_T, T) = \exp(A_0(T) + A_1(T)P + A_2(T)I)$,

con $A_0(0) = A_2(0) = 0$ y $A_1(0) = \frac{\ln P}{P}$, solución al problema diferencial parcial con valores a la frontera (ecuación 5.14).

Ahora tomando las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función F con respecto a S,T,P, y sustituyendo en la ecuación 5.14 se obtiene

$[A_2(T)C_1 - \frac{\partial A_1(T)}{\partial T}]P + [\frac{A_1(T)}{\alpha} - \frac{\partial A_2(T)}{\partial T}]I + \rho\sigma_X\sigma_Z A_1(T)A_2(T) + \frac{1}{2}[\sigma_Z^2 A_1^2(T) + \sigma_X^2 A_2^2(T)] - \frac{\partial A_0(T)}{\partial T} = 0.$

Para que la ecuación anterior se satisfaga, se tiene que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A_2(T)C_1 = \frac{\partial A_1(T)}{\partial T}, \tag{5.15}$$

$$\frac{A_1(T)}{\alpha} = \frac{\partial A_2(T)}{\partial T}, \tag{5.16}$$

$$\sigma_x\sigma_z\rho A_1(T)A_2(T) + \frac{1}{2}[\sigma_z^2 A_1^2(T) + \sigma_x^2 A_2^2(T)] = \frac{\partial A_0(T)}{\partial T}. \tag{5.17}$$

El sistema anterior lo vamos a resolver en dos partes:

1.- Vamos a resolver el sistema dado por las ecuaciones 5.15 y 5.16

Solución:

El sistema a resolver es

$$\begin{pmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_1 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

por lo que $\det(B - \lambda\mathbf{1}) = \lambda^2 - \frac{C_1}{\alpha}$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}$

Los vectores propios de cada valor propio son:

- Para el valor propio $\lambda_1 = +\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}$ su vector propio es : $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}} \\ 1 \end{pmatrix}$
- Para el valor propio $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}$ su vector propio es : $v_2 = \begin{pmatrix} -\alpha\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}} \\ 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto la solución es:

$X(T) = C_3 \exp\{\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\} \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}} \\ 1 \end{pmatrix} C_4 \exp\{-\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\} \begin{pmatrix} -\alpha\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}} \\ 1 \end{pmatrix}$

Ahora como $X(0) = \begin{pmatrix} \frac{\ln P}{P} \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $C_3 = \frac{\ln P}{2P\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}}$, y $C_4 = -\frac{\ln P}{2P\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}}$

por lo que:

$A_1(T) = \frac{\ln P}{2P}[\exp\{\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\} + \exp\{-\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\}]$

$A_2(T) = \frac{\ln P}{2P\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}}[\exp\{\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\} + \exp\{-\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\}]$

2.- Ahora resolvamos la ecuación 5.17.

Solución:

$A_0(T) - A_0(0) = \int_0^T \frac{\partial A_0(s)}{\partial s} ds = \int_0^T [\sigma_x\sigma_z\rho A_1(s)A_2(s) + \frac{1}{2}[\sigma_z^2 A_1^2(s) + \sigma_x^2 A_2^2(s)]]ds$

como $A_0(0) = 0$, por lo tanto

$A_0(T) = (\frac{\ln P}{2P})^2[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}}[(\frac{\sigma_Z^2}{2}+\frac{\sigma_X^2}{2\alpha C_1})(\exp\{2\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\}-\exp\{-2\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\})+\sigma_x\sigma_z\rho(\exp\{\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}2T\}+$ $\exp\{-\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}2T\} - 2)] + (\sigma_z^2 + \sigma_x^2)T]$

Una vez obtenidos los valores de $A_0(T)$, $A_1(T)$, $A_2(T)$, entonces la solución a la EDPE con valores iniciales esta dada por:

$$F(P, I, T) = \exp\{(\frac{\ln P}{2P})^2[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}}[(\frac{\sigma_Z^2}{2} + \frac{\sigma_X^2}{2\alpha C_1})(\exp\{2\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\} - \exp\{-2\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\})+$$

$$\sigma_x\sigma_z\rho(\exp\{\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}2T\}+\exp\{-\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}2T\}-2)]+(\sigma_z^2+\sigma_x^2)T]+\frac{\ln P}{2}(\exp\{\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\}+\exp\{-\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\})+$$

$$\frac{\ln P}{2P}\sqrt{\frac{\alpha}{C_1}}(\exp\{\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\} - \exp\{-\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}T\})I\},$$

donde, $C_1 = (\beta + \gamma)$.

Comentarios: No fue posible llevar el modelo a un espacio libre de riesgo $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t>0}, P)$, ya que la teoría de expectativas nos lleva a ecuaciones estocásticas acopladas, por lo que, es necesario hacer modificaciones al modelo, para llevarlo a este espacio, es decir se necesita determinar ecuaciones estocástica que tengan un comportamiento semejante al movimiento browniano geométrico, en la siguiente sección se establece este modelo, el cual si es posible llevarlo a un espacio neutro al riesgo $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t>0}, \tilde{P})$. En general se logró obtener un modelo para los precios de futuros del petróleo, y aunque a veces no es posible determinar una ecuación analítica, en este trabajo sí se logro establecer una solución analítica para el modelo estocástico de los precios de futuros del petróleo.

A pesar de que el objetivo no es estimar los parámetros, estos son importantes para establecer si el modelo se ajusta a los precios de futuros del petróleo. Por lo que aun no se puede hacer una comparación entre este modelo y el de Schwartz-Cortazar, debido a que hace falta la estimación de parámetros.

5.4. Modelo II

Debido a que en el modelo I se obtuvieron ecuaciones diferenciales estocásticas acopladas, razón por la cual no se pudo llevar el modelo a un espacio libre de riesgo, en esta sección se da un nuevo modelo, el cual se espera que sea posible llevarlo a un espacio neutro al riesgo. Éste nuevo modelo trata de obtener la razón de cambio relativa y no la absoluta en el precio y el inventario, por lo que esta razón deseada nos la da el movimiento browniano geométrico, es decir cada factor se asemejará a un movimiento browniano geométrico, sin ser exactamente el mbg, es decir el modelo queda de la siguiente forma:

$$dP_t = \frac{I_t}{\alpha} P_t dt + \sigma_Z P_t dZ_t, \tag{5.18}$$

$$dI_t = (\beta + \gamma) I_t P_t dt + \sigma_X I_t dX_t. \tag{5.19}$$

Como cada factor se parece mucho a el mbg se espera que sea un mejor modelo, sin embargo, esto no se podrá determinar en este trabajo, debido a que no se hará la estimación de parámetros.

A continuación se hace el cambio de medida para obtener el modelo en un espacio libre de riesgo:

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t>0}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado y sea $B_t = (Z_t, X_t)$ un movimiento browniano en $\mathbb{R}^2$. Consideremos el siguiente proceso:

$$\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t)) = (\frac{r}{\sigma_Z}, \frac{\lambda}{\sigma_X}),$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo, y λ es la prima de riesgo[2] del rendimiento de conveniencia.

[2]Rendimiento adicional esperado en una inversión por aceptar el riesgo inherente a ella, en contraposición de otra inversión sin riesgo.

Tenemos que

(i) El procesos $\theta(t)$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$, pues cada uno de los procesos en cada entrada del vector son adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t>0}$, ya que son constantes.

(ii) $Z_t = \exp\{-\int_0^t \theta(s)\cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(u)\|^2 du\}$ es martingala,
$\therefore E(Z_T) = E(Z_0) = 1.$

Demostración de (ii):

Como se cumple la condición de Novikov $E[\exp\{\frac{1}{2}\int_0^t \|\theta(u)\|^2 du\}] < \infty$, ya que cada uno de los procesos en cada entrada del vector son constantes, entonces por definición de Z_t, se tiene que el proceso Z_t es martingala.

Ahora veamos que se cumple que $E(Z_T) = 1$.

Una demostración sencilla es usar el hecho de que Z_t es martingala, es decir, $E(Z_t) = E(Z_0) = 1$. $\diamond$

Sea $Z_T = Z$, definamos

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega),\ \forall A \in \mathcal{F},$$

y sea

$$\begin{aligned} B^*(t) &= (Z_t, X_t) + \int_0^t (\frac{r}{\sigma_Z}, \frac{\lambda}{\sigma_X}) du \\ &= (Z_t + \frac{r}{\sigma_Z}t, X_t + \frac{\lambda}{\sigma_X}t) \\ &= (Z_t^*, X_t^*), \end{aligned}$$

el cual del Teorema de Girsanov resulta ser un movimiento browniano bajo la nueva medida de probabilidad $\tilde{P}$, por lo tanto en su forma diferencial se tiene que

$$dZ_t = dZ_t^* - \frac{r}{\sigma_Z} dt,$$

y

$$dX_t = dX_t^* - \frac{\lambda}{\sigma_X} dt.$$

Sustituyendo a dZ_t y dX_t en las ecuaciones 5.18 y 5.19 se tiene que:

- Para los precios

$$dP_t = \frac{I_t}{\alpha}P_t dt + \sigma_Z P_t dZ_t =$$
$$\frac{I_t}{\alpha}P_t dt + \sigma_Z P_t (dZ_t^* - \frac{r}{\sigma_Z}dt) =$$
$$(\frac{I_t}{\alpha} - r)P_t dt + \sigma_Z P_t dZ_t^*.$$

- Para el inventario

$$dI_t = (\beta+\gamma)I_t P_t dt + \sigma_X dX_t =$$
$$(\beta+\gamma)P_t dt + \sigma_X I_t (dX_t^* - \frac{\lambda}{\sigma_X}dt) =$$
$$dI_t = ((\beta+\gamma)P_t - \lambda)I_t dt + \sigma_X I_t dX_t^*.$$

Así el modelo de dos factores bajo la medida de probabilidad neutra el riesgo $\tilde{P}$ es:

$$dP_t = (\frac{I_t}{\alpha} - r)P_t dt + \sigma_Z P_t dZ_t^*, \tag{5.20}$$
$$dI_t = ((\beta+\gamma)P_t - \lambda)I_t dt + \sigma_X I_t dX_t^*. \tag{5.21}$$

Ahora sea $F(P_t, I_t, t)$ la función del futuro, la cual depende de los valores del precio, el inventario y el tiempo. Aplicando la formula de Itô-Doeblin a F obtenemos:

$$F(P_t, I_t, t) = \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial p}dP_s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial i}dI_s + \int_0^t \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}d[P,P]_s + 2\frac{\partial F}{\partial p \partial i}d[P,I]_s + \frac{\partial^2 F}{\partial i^2}d[I,I]_s],$$

que es equivalente a:

$F(P_t, I_t, t) = \int_0^t [\frac{\partial F}{\partial p}(\frac{I}{\alpha} - r)P + \frac{\partial F}{\partial i}(C_1 P - \lambda)I + \frac{\partial F}{\partial t}]ds + \int_0^t \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\sigma_Z^2 P^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p \partial i}\sigma_Z \sigma_X P I \rho +$

$\frac{\partial^2 F}{\partial i^2} I^2 \sigma_X^2]ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial p}\sigma_Z P dZ_s^* + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial i}\sigma_X I dX_s^*,$

donde $C_1 = (\beta + \gamma)$.

El valor esperado de $F(P, I, t)$ es:

$E(F(P_t, I_t, t)) = E(\int_0^t [\frac{\partial F}{\partial p}(\frac{I}{\alpha} - r)P + \frac{\partial F}{\partial i}(C_1 P - \lambda)I + \frac{\partial F}{\partial t}]ds) + E(\int_0^t \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\sigma_Z^2 P^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p \partial i}\sigma_Z \sigma_X P I \rho + \frac{\partial^2 F}{\partial i^2}\sigma_X^2 I^2]ds)$.

Nuevamente por la condición de no arbitraje tenemos $E(F(P_t, I_t, t)) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial p}(\frac{I}{\alpha} - r)P + \frac{\partial F}{\partial i}(C_1 P - \lambda)I + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\sigma_z^2 P^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p \partial i}\sigma_z \sigma_x P \rho + \frac{\partial^2 F}{\partial i^2}\sigma_x^2 I^2] = 0.$$

Como $\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial T}$, por lo tanto

$$\frac{\partial F}{\partial p}(\frac{I}{\alpha} - r)P + \frac{\partial F}{\partial i}(C_1 P - \lambda)I - \frac{\partial F}{\partial T} + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\sigma_z^2 P^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p \partial i}\sigma_z \sigma_x P I \rho + \frac{\partial^2 F}{\partial i^2}\sigma_x^2 I^2] = 0 \quad (5.22)$$

con condición $F(P, I, T = 0) = P$.

La ecuación anterior y la condición de frontera constituyen el modelo para precios futuros. No sólo determina el valor del precio futuro, si no también la parte del inventario.

5.4.1. Solución de la ecuación diferencial parcial

Para encontrar la solución a la ecuación 5.22, y debido a que la solución debe de ser semejante a la obtenida en el modelo de Schwartz, se propone lo mismo que en el modelo I a saber:

Sea

$F(P, I, T) = \exp(A_0(T) + A_1(T)I + A_2(T)T)$

con las condiciones: $A_0(0) = A_2(0) = 0$ y $A_1(0) = \frac{\ln P}{P}$,

solución al problema diferencial parcial con valores a la frontera.

Ahora tomando las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función de futuros F, con respecto al precio P, al tiempo T y al inventario I, y sustituyendo en la ecuación 5.25 se obtiene:

$$[A_2(T)C_1I-\frac{\partial A_1(T)}{\partial T}]P+[\frac{P}{\alpha}A_1(T)-\frac{\partial A_2(T)}{\partial T}]I+\rho\sigma_X\sigma_Z PIA_1(T)A_2(T)+\frac{1}{2}[\sigma_X^2A_2^2(T)I^2+P^2\sigma_Z^2A_1^2(T)]-$$

$A_1(T)\lambda I - rA_1(T)P - \frac{\partial A_0(T)}{\partial T} = 0.$

Para que la ecuación anterior se satisfaga, se tiene que satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A_2(T)C_1I = \frac{\partial A_1(T)}{\partial T}, \tag{5.23}$$

$$\frac{A_1(T)P}{\alpha} = \frac{\partial A_2(T)}{\partial T}, \tag{5.24}$$

$$\frac{1}{2}[I^2\sigma_X^2A_2^2(T)+P^2\sigma_Z^2A_1^2(T)] - A_2(T)\lambda I + [I\rho\sigma_X\sigma_ZA_1(T)A_2(T) - rA_1(T)]P = \frac{\partial A_0(T)}{\partial T} \tag{5.25}$$

1. Aquí nuevamente se resolverá el sistema dado por las ecuaciones 5.23 y 5.24

   Solución:

   Haciendo el mismo procedimiento que en el modelo anterior, se tiene que

   $A_1(T) = \frac{\ln P}{2P}[\exp\{\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\} + \exp\{-\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}]$

   $A_2(T) = \frac{\ln P}{2\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{C_1PI}}[\exp\{\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\} + \exp\{-\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}]$

2. Se resuelve la ecuación 5.25.

   Solución:

   $A_0(T)-A_0(0) = \int_0^T \frac{\partial A_0(s)}{\partial s}ds = \int_0^T[\frac{1}{2}[I^2\sigma_X^2A_2^2(T)+P^2\sigma_Z^2A_1^2(T)]-A_2(T)I\lambda+[I\rho\sigma_X\sigma_ZA_1(T)A_2(T)-rA_1(T)]P]ds$

   como $A_0(0) = 0$, por lo tanto

   $A_0(T) = (\frac{\ln P}{2P})^2[(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{C_1PI}})(\exp\{2\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}-\exp\{-2\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\})+2T)(\frac{\sigma_Z^2P^2}{2})+\sigma_X\sigma_Z\rho PI(\frac{P}{\alpha})(\frac{\alpha}{C_1PI})$ $((\sqrt{\frac{\alpha}{C_1PI}})(\exp\{\sqrt{\frac{C_1I}{\alpha}}2T\} + \exp\{-\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}2T\}) - 2) + \frac{\alpha}{C_1PI}(\frac{P}{\alpha})^2(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{C_1PI}})(\exp\{2\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}+$ $\exp\{-2\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}) - 2T)(\frac{\sigma_X^2I^2}{2})] + (\frac{r\ln P}{2})(\sqrt{\frac{\alpha}{C_1PI}})(\exp\{\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\} - \exp\{-\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}) -$ $\lambda I\frac{\ln P}{2PIC_1}(\exp\{\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\} + \exp\{-\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\} - 2).$

Una vez obtenidos los valores de $A_0(T)$, $A_1(T)$, $A_2(T)$, entonces la solución a la EDPE con valores iniciales es:

$F(P,I,T) \; = \; \exp\{(\frac{\ln P}{2P})^2[(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{C_1PI}})(\exp\{2\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\} - \exp\{-2\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}) + 2T)(\frac{\sigma_Z^2P^2}{2}) + \sigma_X\sigma_Z\rho PI(\frac{P}{\alpha})(\frac{\alpha}{C_1PI})$

$((\sqrt{\frac{\alpha}{C_1PI}})(\exp\{\sqrt{\frac{C_1I}{\alpha}}2T\} + \exp\{-\sqrt{\frac{C_1}{\alpha}}2T\}) - 2) + \frac{\alpha}{C_1PI}(\frac{P}{\alpha})^2(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{C_1PI}})(\exp\{2\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\} + \exp\{-2\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\})$

$-2T)(\frac{\sigma_X^2I^2}{2})]+(\frac{r\ln P}{2})(\sqrt{\frac{\alpha}{C_1PI}})(\exp\{\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}-\exp\{-\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\})-(\lambda I\frac{\ln P}{2PIC_1})(\exp\{\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}+$

$\exp\{-\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}-2)+\frac{\ln P}{2}[\exp\{\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}+\exp\{-\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}]+\frac{\ln P}{2\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{C_1PI}}[\exp\{\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}+ \exp\{-\sqrt{\frac{C_1PI}{\alpha}}T\}]\}$

donde, $C_1 = (\beta + \gamma)$.

Comentarios: Este modelo fué posible llevarlo a un espacio neutro al riesgo $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t>0}, \tilde{P})$, ya que no existe ningún problema al hacer uso del Teorema de Girsanov, pues se satisfacen todas las condiciones necesarias para lograr esto. Por la importancia en el uso de la neutralidad al riesgo en las finanzas, podemos decir que este modelo es relativamente bueno.

Conclusiones

Se logró el objetivo de esta tesis, el cual era proponer un modelo estocástico para los precios de futuros del petróleo. Sin embargo como en finanzas es muy importante la neutralidad al riesgo y como en el modelo propuesto se obtuvieron ecuaciones acopladas, por lo que no fue posible obtener esta neutralidad al riesgo. Por lo tanto se tuvo que modificar el modelo para obtener un modelo en el espacio neutro al riesgo $(\omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_(t > 0), \tilde{P})$.

Se propuso una solución analítica para los distintos modelos de los precios de futuros del petróleo Modelo I, Modelo II). Se espera que estas soluciones satisfagan respectivamente cada una de las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas 5.14 y 5.22.

Una parte fundamental para obtener el precio del futuro del petróleo en este trabajo, es la estimación de parámetros, ya que una vez obtenidos estos será posible determinar cuál de los dos modelos es mejor, es decir cuál de ellos se ajusta a los precios de futuros del petróleo. Sin embargo esta estimación es un trabajo para futuro, pues con esto se complementa esta tesis.

Apéndice A

Algunos conceptos de economía

Prima: La cantidad pagada por el contrato inicial.

Expectativas: En caso de incertidumbre, una expectativa es lo que se considera lo más probable que suceda. Una expectativa es una suposición centrada en el futuro, puede o no ser realista.[1]

Error sistemático: En estadística, un error sistemático es aquel que se produce de igual modo en todas las mediciones que se realizan de una magnitud. Puede estar originado en un defecto del instrumento, en una particularidad del operador o del proceso de medición, etc. Se contrapone al concepto de error aleatorio.[2]

Subyacentes (activos): Es el activo financiero sobre el cual se hace una opción, el cual puede ser materias primas, divisas o indices.

Strike (precio) o precio de ejercicio: Es el importe por el que el subyacente se puede comprar (call) ó vender (put) en la fecha de ejercicio. Esto se denota por K. Esta definición sólo se aplica realmente a los calls y puts.

Vencimiento (fecha): Fecha en la que puede ejercerse la opción o la fecha en que la opción deja de existir o dar a su titular derechos. Esto se denota por T.

Valor temporal de una opción: Diferencia entre la prima de una opción y su valor intrínseco. Sumado a su valor intrínseco da el valor de mercado de una opción. Representa el

[1] http://es.wikipedia.org/wiki/Expectativa
[2] http://es.wikipedia.org/wiki/Errorsistematico

valor que tiene para el poseedor de una opción en el que durante el tiempo de su validez, el movimiento del precio del activo subyacente sea favorable. Será mayor cuanto más lejos se halle de la fecha de ejercicio y cuanto mayor sea la volatilidad del precio del activo subyacente.

Valor tiempo del dinero: Es un concepto basado en la premisa de que un inversionista prefiere recibir un pago de una suma fija de dinero hoy, en lugar de recibir el mismo monto en una fecha futura. En particular, si se recibe hoy una suma de dinero, se puede obtener interés sobre ese dinero. Adicionalmente, debido al efecto de inflación (si esta es positiva), en el futuro esa misma suma de dinero perderá poder de compra.

Posición larga: (Irse en Largo) Situación que se produce cuando un corredor posee mayores cantidades de un título o moneda (compra), de las que debe entregar (venta). Esto se hace, cuando se piensa que el mercado va hacia la alza. En otras palabras es la posición que implica la compra de un activo.

Posición Corta: (Irse en Corto) Situación que se produce cuando un corredor debe entregar mayores cantidades de un título o moneda (venta), de las que posee o recibe (compra). Esto se hace, cuando se piensa que el mercado va hacia la baja. En las operaciones de opciones y futuros, cuando la persona que en el futuro tiene que entregar determinado activo (materias primas, divisas, títulos, etc.) a un precio establecido, no lo posee de momento, ya que confía en que en un futuro su precio baje y pueda así comprarlo a un precio menor antes de la fecha de entrega. En otras palabras es la posición que implica la venta de un activo.

Posición al Descubierto: Posición compradora o vendedora al contado no cubierta con posiciones a futuro o con opción compensatorias o posiciones a futuro o con opción no compensadas con compras o ventas de contratos opuestos.

Venta en corto: Se dice que vendemos en corto si tenemos una posición corta es decir α_i del portafolio son negativas, entonces decimos que estamos en corto en el activo.

Transitividad: Generalmente, si un consumidor prefiere la cesta A a la cesta B, y la cesta B a la C, también debería preferir la cesta A a la C.

Precio spot: Precio para entrega inmediata.

Apéndice B

Transformaciones canonicas de las ecuaciones diferenciales parciales

Definición 29. *Una ecuación en derivadas parciales es aquella que contiene una incognita que depende de dos ó más variables independientes y en donde tambien aparecen sus derivadas parciales, entonces (x,t) se les llama variables independientes y $u(x,t)$ la variable dependientes. Un ejemplo de una ecuación diferencial parcial (EDP), es:*

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{B.1}$$

Una ecuación de segundo orden lineal en dos variables tiene la forma:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + FU = G(x,y) \tag{B.2}$$

donde: A,B,C,D,E,F y G pueden ser constantes reales ó funciones de x,y. Cuando $G(x,y) = 0$, se dice que la ecuación 1.11 es homogénea; de lo contrario, es no homogénea.

La EDP de segundo orden homogénea con coeficientes reales, se dirá que es:

- hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$
- parabólica si $B^2 - 4AC = 0$
- elíptica si $B^2 - 4AC < 0$

Cada ecuación diferencial parcial de segundo orden con coeficientes reales, se puede llevar a su forma canónica simplemente aplicando algunas transformaciones. Bajo las transformaciones adecuadas para cada una de las EDP´s se tienen las siguientes formas canónicas:

- Si es hiperbólica entonces su forma canónica es: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ecuación de onda.
- Si es parabólica entonces su forma canónica es: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ecuación de calor.
- Si es elíptica entonces su forma canónica es: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, ecuación de Laplace bidimensional.

Los conceptos anteriores son importantes, ya que en muchos de los modelos financieros se obtienen ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, estas ecuaciones se pueden resolver fácilmente haciendo transformaciones, las cuales nos ayudan a obtener una EDP de segundo orden en su forma canónica, y una vez obtenida esta forma, las tecnicas para resolver la EDP pueden variar de acuerdo a el tipo de EDP. Las transformaciones y las técnicas para resolver EDP se describen en muchos libros de ecuaciones diferenciales parciales con valores a la frontera[1]. En conclusión siempre es conveniente llevar la EDP a su forma canónica, ya que esta forma es más sencilla de resolver.

[1] Ver [9] pags. 465-557

Apéndice C

Demostración de que A^* es el adjunto del generador A

A^* es el adjunto del generador A

Demostración

Por demostrar que $\langle A\phi, \psi\rangle = \langle \phi, A^*\psi\rangle$, para $\phi, \psi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interior en L^2.

Sean $\phi, \psi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, entonces

$\langle \phi(x), A^*\psi(x)\rangle =$

$\langle \phi(x), -\sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(x)\rangle =$

$(1)\langle \phi(x), \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\rangle + \langle \phi(x), \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(x)\rangle =$

$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \int_{\mathbb{R}_+} \phi(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij} \int_{\mathbb{R}_+} \phi(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(x)dx =$

$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\psi(x)dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x)\psi(x)dx =$

$\langle \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x), \psi(x)\rangle + \langle \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x), \psi(x)\rangle =$

$\langle \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x), \psi(x) \rangle =$

$\langle A\phi(x), \psi(x) \rangle$

Por lo tanto A^* es el adjunto del generador A. $\diamond$

Bibliografía

[1] Gonzalo Cortázar, Eduardo S. Schwartz/ Implementing a Stochastic Model for Oil Futures Prices/ June 2002/ p. 4-10.

[2] http://www.imp.mx/petroleo/ página revisada el 31/agosto/2010 a las 12:34 pm.

[3] http://es.wikipedia.org/wiki/Petroleo página revisada el 31/agosto/2010 12:34 pm.

[4] John Hull/ Introducción a los mercados de Futuros y Opciones/ 6a. Edition / México D.F., Pearson aducación 2009/ Cap. I-XIV.

[5] Eduardo S. Schwartz/ The stochastic behaivor of commodity price: implications for valuation and hedging/ The jornal of finance, vol. 5, July 1997, p. 923-973.

[6] Tomas Bjork/ Arbitrage Theory in continuous time/ New York, Oxford 1998/ Cap. I-VII.

[7] René Carmona and Michael Ludkovski/ Spot Convenience Yield Models for the Energy Markets/ 1991, p. 1-16.

[8] Dennis Zill/ Ecuaciones Diferenciales con problema de valores a la frontera/ 8a. Edición/México D.F, CENGAGE Learning 2006/ Cap. XI-XV.

[9] Francisco Venegas Martínez/ Riesgos financieros y económicos/ 2a. edición/ México D.F., CENGAGE Learning 2008/ Cap. I-IV.

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Convenience-yield página revisada el 25/marzo/2011 11:30 am.

[11] Bernt Oksendal/ Stochastic Differential Equations (An Introduction with applications)/ Sixth edition/ Berlin; New York, Springer 2005/ 365 p..

[12] E. Shreve Steven/ Stochastic Calculus for Finance II Continuos-Time models/ New York, Springer 2004-2005/Cap. I-VI.

[13] Julio César García Corte y Juan Ruiz de Chávez Somoza/ Tiempos locales y excursiones del movimiento browniano/ 1era. edición/ México D.F., UAMI 2002/ Cap. I.

[14] Juan Ruiz de Chávez Somoza/ Integral de Itô para semimartingalas continuas/ 1era. edición/ México D.F., UAMI 1995/ 128 p..

[15] Daniel Lamberton and Bernard Lapeyre/ Introduction au calcul stochastique appliqué á la finance / 2a. edición/ Universidad de Michigan, Ellipses 1997/ 174 p..

[16] E.B. Dynkin/ Markov processes/ New York, Academic Press 1965/ 365 p..

[17] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve/ Brownian Motion and Stochastic Calculus/ New York, Springer-Verlag 1998/ 470 p..

[18] http://en.wikipedia.org/wiki/Rational_expectations página revisada el 01/febrero/2011 2:47 pm.

[19] Justo Sotelo Navalportro, Julian de Unamuno, Juan Caceres Ruiz y Ma. Teresa freire/ Teorías y modelos macroeconomicos/ España, Madrid, ESIC 2003/ Cap. VII.

[20] Araceli Bernabé, Carlos Ibarra Valdez, Francisco Villareal, Esteban Martina/Opciones Reales para Proyectos de Inversión en Recursos Naturales. Dos Aplicaciones en la Industria Petrolera Mexicana/ Mayo 2010 / p. 11-19.

[21] Greg Welch and Gary Bishop/An Introduction to the Kalman Filter/TR 95-041 Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill Chapel Hill, NC 27599-3175/July 2006/ p. 1-16.

[22] Jóse Ulises Márquez Urbina/ Tesis: Modelos de cálculo estoástico para el movimiento browniano relativista / CIMAT / 2010 / p. 1-45.

[23] Jamshidian F. and M. Fein/ Closed-form solutions for oil futures and europan options in the Gibson-Schwartz model: a note working paper/ Merril Lynch Capital Markets/ 1990.

[24] http://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_las_expectativas_racionales página revisada el 01/febrero/2011 2:47 pm.

Índice alfabético