Universidad Autónoma
Metropolitana

UNIDAD IZTAPALAPA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

RELACIONES ENTRE LA TEORÍA DE OPERADORES, EL CÁLCULO ESTOCÁSTICO CUÁNTICO Y ALGUNAS APLICACIONES

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

LIC. HÉCTOR MANUEL GARDUÑO CASTAÑEDA

DIRECTORES DE TESIS:
DR. JULIO CÉSAR GARCÍA CORTE
DR. SLAVIŠA DJORDJEVIĆ

Cd. de México — Fecha final, 2014

Stat Animus pristina nomine,
nomina nuda tenemus.

Y del Alma nos queda únicamente el nombre.
Te amo Alma Rocío, mi mejor conjetura.

Resumen

En este trabajo de tesis hemos intentado exponer una introducción al Cálculo Estocástico Cuántico. Presentaremos la construcción de la Integral Estocástica Cuántica, que es el análogo a la Integral Estocástica Clásica que se estudia en el Cálculo Estocástico usual. Mostraremos detalladamente las esgtrategias de estudio más útiles para su desarrollo, y los problemas técnicos a los que se enfrenta considerar sumas de tipo Riemann-Stieljes cuando se trabaja con los operadores no acotados de Aniquilación y Creación. Se formularán los Estimados Fundamentales que nos permitan obtener esta integral en todo un espacio que resulte suficiente para estudiar los procesos evolutivos de los sistemas de Bosones y Fermiones.

Finalmente haremos algunas comparaciones entre los Cálculos Estocásticos. En particular, obtendremos la Fórmula y la Isometría de Ito a través de argumentos cuánticos.

Introducción

En 1900, durante el 1er. Congreso Internacional de Matemáticas, David Hilbert plantea una lista de 23 problemas que, en su opinión, serán las principales líneas de investigación matemática durante el siglo XX. El sexto de ellos, aún abierto, consiste en encontrar una base axiomática que permita deducir todas las teorías físicas que expliquen los fenómenos aleatorios. Entre las mentes que se dedicaron a resolver dicho problema destacan A.N.Kolmogorov y J.von Neumann.

El enfoque de Kolmogorov, conocido como Modelo o Teoría de la Probabilidad Clásica, propone una terna $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, llamada *Espacio Clásico de Probabilidad*, donde Ω es un conjunto no vacío, $\mathfrak{F}$ es una σ-álgebra de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabiliad en $\mathfrak{F}$. Este modelo ha sido sumamente exitoso en el estudio de la Física Estadística, modelos biológicos y, recientemente, en Matemática Financiera.

Así mismo, el llamado Cálculo Estocástico Clásico suele citarse como el desarrollo más refinado de la Teoría de la Probabilidad Clásica y su resultado fundamental, la Fórmula de Ito, es considerado uno de los resultados más profundos de la matemática contemporánea.

Por otra parte von Neumann, en su interés por encontrar una teoría matemática que diera cuenta de los fenómenos aleatorios que aparecen en la Mecánica Cuántica, se percata de que el modelo de Kolmogorov no era suficiente para explicarlos. Así, se da a la tarea de construir una teoría más amplia que contuviera a la Probabilidad Clásica y a su vez explicara los hechos de la Física Cuántica. Su punto de partida es una pareja (A, ρ) llamada *Espacio de Probabilidad Cuántico*, donde A es un álgebra de von Neumann y $\rho : A \to \mathbb{C}$ es un estado o funcional lineal actuando en A que asocia números no negativos a elementos no negativos tal que $\rho(e) = 1$, donde e es el elemento identidad en el sentido de la Teoría de Algebras.

Un espacio clásico de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ puede verse como un espacio cuántico de probabilidad considerando $A = L^{\infty}(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, el álgebra de von

Neumann de las variables aleatorias esencialmente acotadas, y $\rho : A \to \mathbb{C}$ definido como

$$\rho(f) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Debido al Teorema de GNS, toda álgebra de von Neumann tiene una representación en el álgebra de operadores acotados de algún espacio de Hilbert. Por tanto, las variables aleatorias cuánticas y los procesos estocásticos cuánticos, al ser elementos del álgebra de von Neumann, pueden ser considerados como operadores acotados. Así, el estudio del Cálculo Estocástico Cuántico está íntimamente relacionado con la Teoría de Operadores.

Para 1984, en [6], trabajo seminal del Cálculo Estocástico Cuántico, R.L.Hudson y K.R.Parthasarathy dieron impulso al estudio de los procesos de Markov cuánticos y encuentran una generalización de la Fórmula de Ito, conocida como Fórmula de Ito Cuántica, que encontró enormes aplicaciones en Física y, especialmente, en Óptica Cuántica.

Notación

Adoptaremos la siguiente notación:

Conjuntos y Mapeos

- Si A es un conjunto, denotaremos con 1_A a su función indicadora.

Espacios Normados y Topología

- Dados los espacios normados X e Y, denotaremos por $\mathbb{B}(X, Y)$ al espacio de operadores acotados de X en Y. Si $X = Y$, simplemente escribiremos $\mathbb{B}(X)$. En particular, al operador nulo se le denotará como Θ.

- Si H es un espacio con producto interno, digamos $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tendremos la convención de que tal producto interno es antilineal en la primera variable y lineal en la segunda: $\langle af + g, h \rangle = \overline{a}\langle f, g \rangle + \langle g, h \rangle$ y $\langle f, ag + h \rangle = a\langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$.

- Si H es un espacio de Hilbert, denotamos por $\mathcal{P}(H)$, $\mathcal{O}(H)$, $\mathcal{PO}(H)$, $\mathcal{U}(H)$ a los conjuntos de operadores proyecciones, autoadjuntos, positivos y unitarios respectivamente.

Índice general

RELACIONES ENTRE TEORÍA DE OPERADORES, CON EL CÁLCULO ESTOCÁSTICO CUÁNTICO Y ALGUNAS APLICACIONES

Lic. Héctor Manuel Garduño Castañeda

Capítulo 1

Preliminares

El estudio de la física de cuerpos macroscópicos ha sido desarrollado desde sus inicios con las herramientas clásicas del Cálculo Diferencial, dando origen a la Mecánica Clásica y, particularmente, a la Mecánica Celeste. Sin embargo, debido a las dificultades técnicas y económicas para la comprobación de sus leyes, ha sido necesario un desarrollo teórico posterior que pudiera involucrar al azar como factor importante en los fenómenos macroscópicos y el cual ha sido pulido hasta llegar a niveles de la Teoría Clásica de las Probabilidades y, recientemente, el Cálculo Estocástico.

Éste último encuentra pronto aplicaciones industriales y financieras, sin olvidarse de las físicas y biológicas. No obstante, tal y como pasó con la Mecánica Clásica con la llegada de las teorías físicas relativistas y cuánticas, la Probabilidad Clásica encuentra inconvenientes para el estudio de sistemas de cuerpos de nivel atómico.

Ante la imposibilidad de tener certezas deterministas en los estudios de partículas subatómicas debido al Principio de Incertidumbre de Heisenberg, ha tomado importancia para los físicos el tener que conformarse con teorías matemáticas que incorporen el azar a los estudios cuánticos como un factor de gran peso, dando con esto origen a la Probabilidad Cuántica y, posteriormente, al Cálculo Estocástico Cuántico.

En este capítulo haremos un análisis de los principales conceptos de Teoría de Operadores involucrados en el desarrollo de la Tesis. Por tratarse de un Capítulo introductorio, se omiten la mayoría de las demostraciones, dejando únicamente las propias de los autores. Esto debido a que algunas de las proposiciones son enunciadas en lenguaje puramente algebraico o analítico, no obstante las fuentes dan demostraciones con probabilidad avanzada.

En la Sección 1.1 se exhiben resultados sobre operadores no acotados que serán utilizados posteriormente. Las Secciones 1.2, 1.3 y 1.4 tratan sobre productos tensoriales. Finalmente, en la Sección 1.5 se define el espacio de Fock Simétrico, el cual es el universo donde nos concentraremos a lo largo de toda la investigación.

1.1. Nociones Básicas de Operadores no Acotados

Sea H un espacio de Hilbert. Un *operador* T en H es una pareja $(T, D(T))$ donde $D(T)$ es un subespacio vectorial de H, llamado *dominio* de T, y $T : D(T) \to H$ es una transformación lineal. Se dice que T es *densamente definido* si $D(T)$ es denso en H. La *gráfica* del operador $(T, D(T))$ es el conjunto $G(T) = \{(u, Tu) : u \in D(T)\}$. Es claro que $G(T)$ es un subespacio vectorial de $H \bigoplus H$.

T es *cerrado* si su gráfica es cerrada. T se dice *cerrable* si existe un operador $(\overline{T}, D(\overline{T}))$ en H tal que $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. Este operador es único y es llamado *operador cerradura* de T.

Si $(T_1, D(T_1))$ y $(T_2, D(T_2))$ son dos operadores en H, se define su *suma* como $D(T_1 + T_2) = D(T_1) \cap D(T_2)$ y $(T_1 + T_2)\phi = T_1\phi + T_2\phi$ para todo $\phi \in D(T_1 + T_2)$. Si $D(T_1) \subseteq D(T_2)$ y $T_1\phi = T_2\phi$ para todo $\phi \in D(T_1)$, se dice que $(T_2, D(T_2))$ es una *extensión* de $(T_1, D(T_1))$ o que $(T_1, D(T_1))$ es una restricción de $(T_2, D(T_2))$. Esta relación se denota por $T_1 \subseteq T_2$. $T_1 \subseteq T_2$ si y solo si $G(T_1) \subseteq G(T_2)$, de donde es claro que, si T es cerrable, entonces $T \subseteq \overline{T}$.

Si $(T, D(T))$ es densamente definido, definimos el conjunto $D(T^*)$ como

$$D(T^*) = \{v \in H : \sup_{u \in D(T), \|u\|=1} |\langle v, Tu \rangle| < \infty\}.$$

En otras palabras, $v \in D(T^*)$ si y solo si el mapeo $u \mapsto \langle v, Tu \rangle$ con dominio $D(T)$ es continuo en 0. Como $D(T)$ es denso, una aplicación del Teorema de Riesz muestra que existe un único $v^* \in H$ tal que $\langle v, Tu \rangle = \langle v^*, u \rangle$ para todo $u \in D(T)$. Denotemos por T^*v a v^*. Entonces $D(T^*)$ es un espacio vectorial y $T^* : D(T^*) \to H$ es lineal. Se define el *operador adjunto* de $(T, D(T))$ como $(T^*, D(T^*))$.

En adelante, haremos un abuso de lenguaje y nos referiremos al operador $(T, D(T))$ simplemente como T, enfatizando su dominio únicamente cuando sea necesario. Los resultados más importantes que usaremos a lo largo del documento referentes a operadores son los siguientes:

Proposición 1.1. *T es cerrable si y solo si siempre que la pareja $(0, v) \in H \bigoplus H$ esté en $\overline{G(T)}$, se tiene $v = 0$.*

Lema 1.2. *Sea T densamente definido. Entonces T^* existe, pudiendo ser $D(T^*) = \{0\}$, y es cerrado.*

Teorema 1.3. *Sea T densamente definido. Entonces T es cerrable si y solo si T^* es densamente definido. En este caso, $(T^*)^*$ es el operador tal que $G((T^*)^*) = \overline{G(T)}$, o en otras palabras, $\overline{T} = (T^*)^*$.*

Teorema 1.4. *Sean T y S densamente definidos en H.*

a) $S \subseteq T \Longrightarrow T^* \subseteq S^*$

b) $S \subseteq T \Longrightarrow \overline{T} \subseteq S$ *si S es cerrado.*

Para terminar esta Sección, presentamos un resultado sobre operadores unitarios. Este resultado escapa en naturaleza de los previos, ya que corresponde a operadores acotados.

Teorema 1.5. *Sean S_1 y S_2 conjuntos totales en los espacios de Hilbert H_1 y H_2 respectivamente. Supongamos que $U_0 : S_1 \to S_2$ es un mapeo que conserva el producto interno. Es decir, $\langle U_0 u, U_0 v \rangle = \langle u, v \rangle$ para cualesquiera $u, v \in H_1$. Entonces existe una única isometría lineal $U : H_1 \to H_2$ que extiende a U_0.*

Si además U_0 es sobreyectiva, entonces U es un isomorfismo unitario de H_1 sobre H_2.

Demostración. Sean $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ y $u_i, v_j \in S_1$, con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Entonces

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U_0 u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j U_0 v_j \right\rangle = \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \beta_j \langle U_0 u_j, U_0 v_j \rangle \tag{1.1}$$

$$= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \beta_j \langle u_j, v_j \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle. \tag{1.2}$$

En particular, $\left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U_0 u_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \right\|^2$. Definamos $U_1 \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U_0 u_i$. La igualdad entre estas normas implica que U_1 está bien definido en el espacio M_1 generado por S_1. Por (1.2), U_1 es una isometría lineal en M_1 y, por tanto, es acotada. Por continuidad, podemos extender a U_1 a una única isometría lineal U en la cerradura de M_1, que es H_1. Si V es otra extensión, entonces $U - V$ es un operador acotado que se anula en S_1 y, por tanto, $U = V$.

Como el rango de la isometría U es un subespacio cerrado que contiene a la imagen de S_1, si U_0 es sobre, entonces este rango es H_2 y por tanto U es unitario.

□

1.2. Productos Tensoriales y Espacios de Fock

Dada una partícula en un sistema, si suponemos que los eventos concernientes a su dinámica son descritos por los elementos de $\mathcal{P}(H)$, donde H es un espacio de Hilbert separable, aparece de forma natural la cuestión de cómo podemos construir *el* espacio de Hilbert para un número indefinido de tales partículas en un sistema, donde esta indefinición es debida al hecho de que los "nacimientos" y "muertes" de partículas pueden obedecer una cierta ley.

Sea $\mathcal{H}$ un conjunto diferente del vacío. Un mapeo $K : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j K(x_i, x_j) \geq 0$$

para cualesquiera $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $x_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, \cdots$, es llamado *kernel positivo definido en* $\mathcal{H}$, o simplemente *kernel* en $\mathcal{H}$. Tomemos $\mathcal{H} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Un kernel en $\mathcal{H}$ es una matriz definida positiva, la cual viene dada por $((K(x_i, x_j)))$. Por lo tanto, si $\mathcal{H}$ es infinito, entonces K es un kernel en $\mathcal{H}$ si y solo si para cualquier conjunto finito $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq \mathcal{H}$, la matriz $((a_{i,j}))$, donde $a_{i,j} = K(x_i, x_j)$, es semidefinida positiva. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces $K : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dado por $K(x, y) = \langle x, y \rangle$ es un kernel en $\mathcal{H}$.

Dadas $A = ((a_{i,j}))$ y $B = ((b_{i,j}))$ matrices (que pueden ser complejas) del mismo tamaño, se define su producto de Hadamard como la matriz $A \bullet B$ tal que $(((A \bullet B)_{i,j})) = ((a_{i,j}b_{i,j}))$. Es decir, el producto puntual de A y B.

Si $x \in \mathbb{C}^n$, denotamos por D_x a la matriz diagonal $n \times n$ cuya entrada (i, i)-ésima es igual a la i-ésima coordenada de x.

Lema 1.6. *Sean $A = ((a_{i,j}))$ y $B = ((b_{i,j}))$ dos matrices cuadradas complejas del mismo tamaño; digamos n. Si $x, y \in \mathbb{C}^n$, entonces $\langle x, (A \bullet B)y \rangle = tr(D_x^* A^T D_y B)$.*

La demostración puede ser consultada en [7], pág. 100.

Lema 1.7 (de Schur sobre el Producto de Hadamard)**.** *Sean $A = ((a_{i,j}))$, $B = ((b_{i,j}))$, $1 \leq i, j \leq n$, dos matrices semidefinidas positivas. Entonces su producto de Hadamard es semidefinido positivo.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle x, (A \bullet B)x \rangle &= tr(D_x^* A^T D_x B) \\
&= tr(D_x^* A^T D_x B^{1/2} B^{1/2}) \\
&= tr(B^{1/2} D_x^* A^T D_x B^{1/2}) \\
&= tr((D_x B^{1/2})^* A^T (D_x B^{1/2}))
\end{aligned}$$

$$\geq \ 0.$$

□

Corolario 1.8. *El conjunto de todos los kernel en $\mathcal{H}$ es cerrado con el producto de Hadamard.. Es decir, si A y B son kernels en $\mathcal{H}$, entonces $A \bullet B$ también lo es.*

Corolario 1.9. *Sean $\mathcal{H}_i$, $1 \leq i \leq n$, conjuntos no vacíos y K_i un kernel para cada i. Definamos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$ y $K : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$K(\underline{x}, \underline{y}) = \prod_{i=1}^{n} K_i(x_i, y_i),$$

donde $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ y $\underline{y} = (y_1, \cdots, y_n)$. Entonces K es un kernel en $\mathcal{H}$.

Proposición 1.10 (Existencia de Parejas de Gelfand)**.** *Sea $\mathcal{H}$ cualquier conjunto no vacío y K un kernel en $\mathcal{H}$. Entonces existen un espacio de Hilbert H, no necesariamente separable, y un mapeo $\lambda : \mathcal{H} \to H$ tales que*

(i) *El conjunto $\{\lambda(x) : x \in \mathcal{H}\}$ es total en H y*

(ii) *$K(x, y) = \langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.*

Si H' es otro espacio de Hilbert y $\lambda' : \mathcal{H} \to H'$ es otro mapeo y satisfacen (i) y (ii), entonces existe un isomorfismo unitario $U : H \to H'$ tal que $U\lambda(x) = \lambda'(x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Demostración. Sean $V = \{f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}\}$ el conjunto de funciones $\mathbb{C}$-evaluadas de $\mathcal{H}$ y $W = \text{span}\{1_{\{u\}} : u \in \mathcal{H}\}$. Para evitar cargar con notación, denotemos a los elementos $1_{\{u\}}$ de W simplemente por 1_u. Definamos $\widetilde{\lambda} : \mathcal{H} \to W$ como $\widetilde{\lambda}(u) = 1_u$. Tomemos $F : \widetilde{\lambda}(\mathcal{H}) \times \widetilde{\lambda}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ dada por $F(1_u, 1_v) = K(u, v)$.

Como $\{1_u : u \in \mathcal{H}\}$ es base de W, entonces F puede extenderse sesquilinealmente a W. Sin peligro de confusión, sea $F : W \times W \to \mathbb{C}$ dicha extensión.

De este modo, si $f \in W$, con $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{u_i}$ para algunos α_i escalares y $u_i \in \mathcal{H}$, tendremos

$$\begin{aligned} F(f,f) &= F\left(\sum \alpha_i 1_{u_i}, \sum \alpha_i 1_{u_i}\right) \\ &= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j F(1_{u_i}, 1_{u_j}) \\ &= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j K(u_i, u_j). \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Sea $Z = \{f \in W : F(f,f) = 0\}$. Si $\Pi : W \to W/Z$ es el mapeo cociente y $\langle \cdot, \cdot \rangle : W/Z \times W/Z \to \mathbb{C}$ viene dado por $\langle \Pi(f), \Pi(g) \rangle = F(f,g)$, entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en W/Z. Llamemos H a la completación de W/Z. H es un espacio de Hilbert. Definamos $\lambda : \mathcal{H} \to H$ como $\lambda = \Pi \circ \widetilde{\lambda}$.

Veamos que $\lambda(\mathcal{H})$ es total en H. Sea $h \in \lambda(\mathcal{H})^{\perp} \subset H$. Como H es la completación de W/Z, entonces W/Z es denso en H. Así, existe una sucesión $\{w_n\} \subset W/Z$ tal que $w_n \to h$ en H. Pero $W/Z = \Pi(W)$, de modo que existe una sucesión $\{v_n\} \subset W$ tal que $\Pi(v_n) = w_n$. Además $v_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{i,n} 1_{u_{i,n}}$ para cada n y algunos escalares $\alpha_{i,n}$ y $u_{i,n} \in \mathcal{H}$, de donde $w_n = \Pi(v_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{i,n} \Pi(1_{u_{i,n}})$. Por lo tanto $\langle w_n, h \rangle = 0 = \langle h, w_n \rangle$, ya que $\langle \Pi(1_{u_{i,n}}), h \rangle = \langle \Pi(\widetilde{\lambda}(u_{i,n})), h \rangle = \langle \lambda(u_{i,n}), h \rangle$ y $h \in \lambda(\mathcal{H})^{\perp}$. Es decir, w_n y h son ortogonales para toda $n \in \mathbb{N}$.

De esta forma, por el Teorema de Pitágoras, $\|w_n - h\|^2 = \|w_n\|^2 + \|h\|^2 \geq \|h\|^2$. Pero $\|w_n - h\|^2 \to 0$ ya que $w_n \to h$. Entonces $h = 0$, lo cual significa que $\lambda(\mathcal{H})$ es total en H.

Veamos la conservación de los productos: si $u, v \in \mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \lambda(u), \lambda(v) \rangle &= \langle \Pi(\widetilde{\lambda}(u)), \Pi(\widetilde{\lambda}(v)) \rangle \\ &= F(1_u, 1_v) \\ &= K(u,v). \end{aligned}$$

Esto prueba (i) y (ii). Para la existencia del isomorfismo U basta con aplicar el Teorema 1.5.

$\square$

La pareja (H, λ) determinada únicamente, salvo isomorfismo unitario, por el kernel K en $\mathcal{H}$ es llamada *pareja de Gelfand* asociada a K y $\mathcal{H}$.

Sean H_i, $i = 1, \cdots, n$, espacios de Hilbert y $\mathcal{H} = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$. Entonces $K_i(u, v) = \langle u, v\rangle_{H_i}$ es un kernel en H_i para cada i. Por el Corolario 1.9, la función

$$K(\underline{u}, \underline{v}) = \prod_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle_{H_i}, \ \underline{u} = (u_1, \cdots, u_n), \ \underline{v} = (v_1, \cdots, v_n),$$

donde $u_i, v_i \in H_i$, es un kernel en $\mathcal{H}$. Consideremos cualquier pareja de Gelfand (H, λ) asociada a K. Entonces H es llamado *producto tensorial* de los H_i. Escribimos

$$H = H_1 \bigotimes H_2 \bigotimes \cdots \bigotimes H_n = \bigotimes_{i=1}^{n} H_i, \tag{1.3}$$

$$\lambda(\underline{u}) = u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n = \otimes_{i=1}^{n} u_i \tag{1.4}$$

y llamamos a $\lambda(\underline{u})$ el *producto tensorial* de los vectores u_i. Si $H_i = \mathfrak{H}$ para toda i, entonces H se llama la *n-ésima potencia de $\mathfrak{H}$* y se denota por $\mathfrak{H}^{\otimes^n}$. Si además $u_i = u$ para toda i, entonces $\lambda(\underline{u})$ se denota por $u^{\otimes^n}$ y se llama *n-ésima potencia de u*.

En estos términos es clara la siguiente afirmación:

Proposición 1.11. *El mapeo* $(u_1, u_2, \cdots, u_n) \mapsto u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n$ *de* $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ *a* $H_1 \bigotimes H_2 \bigotimes \cdots \bigotimes H_n$ *definido por* (1.3) *y* (1.4) *es multilineal. Esto es, para cualesquiera escalares* α, β

$$u_1 \otimes \cdots u_{i-1} \otimes (\alpha u_i + \beta v_i) \otimes u_{i+1} \otimes \cdots \otimes u_n \tag{1.5}$$

$$= \alpha u_1 \otimes \cdots \otimes u_n + \beta u_1 \otimes \cdots \otimes u_{i-1} \otimes v_i \otimes u_{i+1} \otimes \cdots \otimes u_n. \tag{1.6}$$

Más aún:

$$\langle \otimes_{i=1}^{n} u_i, \otimes_{i=1}^{n} v_i\rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i\rangle. \tag{1.7}$$

El conjunto $\{\otimes_{i=1}^n u_i | u_i \in H_i, i = 1, \cdots, n\}$ *es total en* $\bigotimes_{i=1}^{n} H_i$.

Una demostración completa de este hecho puede ser consultada en [13], págs. 93-94.

Algunas de las propiedades que cumplen los productos tensoriales entre espacios de Hilbert son:

Teorema 1.12. *Si* H_i*, con* $1 \leq i \leq n$*, es espacio de Hilbert y* $S_i \subseteq H_i$ *es total para cada* i*, entonces el conjunto* $\{\otimes_{i=1}^n u_i : u_i \in S_i\}$ *es total en* $\bigotimes_{i=1}^n H_i$.

Demostración. Únicamente probaremos el caso en que $n = 2$. El caso general se sigue por inducción.

Sea $u \in H_1 \bigotimes H_2$ tal que $\langle u, u_1 \otimes u_2 \rangle = 0$ para cualesquiera $u_i \in S_i$. Recordemos que el conjunto $V = \{v_1 \otimes v_2 : v_i \in H_i\}$ es total en $H_1 \bigotimes H_2$. Sea $v_1 \otimes v_2 \in V$. Como S_i es total en H_i, dado $\epsilon > 0$, existen dos combinaciones lineales finitas $\sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j}$ y $\sum_{k=1}^{m_2} \tilde{\eta}_k u_{2,k}$, con $u_{1,j} \in S_1$ y $u_{2,j} \in S_2$, tales que $\|v_1 - \sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j}\| < \epsilon$ y $\|v_2 - \sum_{k=1}^{m_2} \tilde{\eta}_k u_{2,k}\| < \epsilon$. Entonces

$$
\begin{aligned}
& |\langle u, v_1 \otimes v_2 \rangle| \\
= & \left| \left\langle u, \left(v_1 - \sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j} + \sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j} \right) \otimes v_2 \right\rangle \right| \\
= & \left| \left\langle u, \left(v_1 - \sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j} \right) \otimes v_2 \right\rangle + \left\langle u, \left(\sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j} \right) \otimes v_2 \right\rangle \right| \\
\leq & \left| \left\langle u, \left(v_1 - \sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j} \right) \otimes v_2 \right\rangle \right| + \left| \left\langle u, \left(\sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j} \right) \otimes v_2 \right\rangle \right| \\
\leq & \|u\| \left\| \left(v_1 - \sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j} \right) \otimes v_2 \right\| + \left| \left\langle u, \left(\sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j} \right) \otimes v_2 \right\rangle \right| \\
= & \|u\| \left\| v_1 - \sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j} \right\| \|v_2\| + \left| \left\langle u, \left(\sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j} \right) \otimes v_2 \right\rangle \right|
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&< \epsilon\|u\|\|v_2\| + \left|\left\langle u, \left(\sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j}\right) \otimes v_2 \right\rangle\right| \\
&= \epsilon\|u\|\|v_2\| + \left|\left\langle u, \left(\sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j}\right) \otimes \left(v_2 - \sum_{k=1}^{m_2} \tilde{\eta}_k u_{2,k} + \sum_{k=1}^{m_2} \tilde{\eta}_k u_{2,k}\right) \right\rangle\right| \\
&< \epsilon\|u\|\|v_2\| + \epsilon\|u\| + \left|\left\langle u, \left(\sum_{j=1}^{m_1} \eta_j u_{1,j}\right) \otimes \left(\sum_{k=1}^{m_2} \tilde{\eta}_k u_{2,k}\right) \right\rangle\right| \\
&= \epsilon\|u\|\|v_2\| + \epsilon\|u\| + \left|\sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} \eta_j \tilde{\eta}_k \langle u, u_{1,j} \otimes u_{2,k}\rangle\right| \\
&= \epsilon\|u\|\|v_2\| + \epsilon\|u\|,
\end{aligned}$$

donde en la penúltima línea hemos usado la multilinealidad del producto tensorial y en la última el hecho de ser $\langle u, u_1 \otimes u_2\rangle = 0$ para cualesquiera $u_i \in S_i$. Concluimos que $0 = \langle u, v_1 \otimes v_2\rangle$ para cualesquiera $v_i \in H_i$. Como V es total en $H_1 \otimes H_2$, entonces $u = 0$, que es lo que se quería probar.

$\square$

Una demostración del siguiente resultado puede encontrarse en [13], pág. 95.

Teorema 1.13. *Sean* $\{e_{i,j} | j = 1, 2, \dots\}$ *bases ortonormales de* H_i*,* $i = 1, \cdots, n$*. Entonces el conjunto*

$$\{e_{1,j_1} \otimes e_{2,j_2} \otimes \cdots \otimes e_{n,j_n} | j_1 = 1, 2, \cdots ;\ j_2 = 1, 2, \cdots ; \cdots ;\ j_n = 1, 2, \cdots\}$$

es una base ortonormal para $\bigotimes_{i=1}^n H_i$*. En particular*

$$\otimes_{i=1}^n u_i = \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n} \{\Pi_{i=1}^n \langle e_{i,j_i}, u_i\rangle\} \otimes_{i=1}^n e_{i,j_i},$$

donde el lado derecho es una suma fuertemente convergente en $\bigotimes_{i=1}^n H_i$*. Si* $\dim H_i = m_i < \infty$ *para toda* i*, entonces*

$$\dim \bigotimes_{i=1}^n H_i = m_1 m_2 \cdots m_n.$$

En particular $\mathbb{C}^{\otimes n}$ es isomorfo a $\mathbb{C}$.

1.3. Productos Tensoriales entre Operadores

Definiremos ahora el producto tensorial entre operadores. Supongamos que H_i es un espacio de Hilbert de dimensión $m_i < \infty$, $i = 1, \cdots, n$, y $H = \bigotimes_{i=1}^n H_i$. Tomemos T_i como un operador autoadjunto en H_i con eigenvalores $\{\lambda_{i,j}, 1 \leq j \leq m_i\}$ y su correspondiente conjunto ortonormal de eigenvectores $\{e_{i,j}, 1 \leq j \leq m_i\}$, de tal manera que $T_i e_{i,j} = \lambda_{i,j} e_{i,j}$, $1 \leq j \leq m_i$, $i = 1, \cdots, n$. Utilizando el Teorema 1.13 podemos definir un operador autoadjunto T en H escribiendo $T \otimes_{i=1}^n e_{i,j_i} = \prod_{i=1}^n \lambda_{i,j_i} \otimes_{i=1}^n e_{i,j_i}$, $1 \leq j_i \leq m_i$, y extenderlo linealmente a todo H. El operador T tiene eigenvalores $\prod_{i=1}^n \lambda_{i,j_i}$ y satisface $T \otimes_{i=1}^n u_i = \otimes_{i=1}^n T_i u_i$ para todo $u_i \in H_i$, $1 \leq i \leq n$.

Más aún,

$$
\begin{aligned}
\|T\| &= \max \left\{ \left| \prod_{i=1}^n \lambda_{i,j_i} \right|, 1 \leq j_i \leq m_i \right\} \\
&= \prod_{i=1}^n \max\{|\lambda_{i,j}|, 1 \leq j \leq m_i\} \\
&= \prod_{i=1}^n \|T_i\|.
\end{aligned}
$$

La siguiente proposición extiende esta noción elemental a todos los operadores acotados en espacios de Hilbert no necesariamente de dimensión finita.

Proposición 1.14. *Sean H_i espacios de Hilbert y $T_i \in \mathbb{B}(H_i)$, $1 \leq i \leq n$. Entonces existe un único $T \in \mathbb{B}\left(\bigotimes_{i=1}^n H_i\right)$ que satisface $T \otimes_{i=1}^n u_i = \otimes_{i=1}^n T_i u_i$ para todos los $u_i \in H_i$, $1 \leq i \leq n$. Más aún, $\|T\| = \prod_{i=1}^n \|T_i\|$.*

El operador T determinado por la Proposición anterior es llamado *producto tensorial* de los operadores T_i. Escribimos $T = \bigotimes_{i=1}^n T_i = T_1 \bigotimes \cdots \bigotimes T_n$. Si $H_i = \mathfrak{H}$ y $T_i = S$ para toda $i = 1, 2, \cdots, n$, escribiremos $T = S^{\otimes^n}$. A este operador se le conoce como *n-ésima potencia tensorial* de S.

Algunas propiedades del producto tensorial de operadores se resumen en la siguiente

Proposición 1.15. *Sean H_i espacios de Hilbert y $S_i, T_i \in \mathbb{B}(H_i)$, $1 \leq i \leq n$. Tomemos $S = \bigotimes_{i=1}^n S_i$ y $T = \bigotimes_{i=1}^n T_i$. Entonces:*

(i) *El mapeo $(T_1, T_2, \cdots, T_n) \mapsto T$ es multilineal.*

(ii) $ST = \bigotimes_{i=1}^n S_i T_i$ *y* $T^* = \bigotimes_{i=1}^n T_i^*$.

(iii) *Si cada T_i tiene inversa acotada, entonces T tiene inversa acotada dada por $T^{-1} = \bigotimes_{i=1}^n T_i^{-1}$.*

(iv) *T es autoadjunto, unitario, normal, proyección o positivo de acuerdo a si cada T_i es autoadjunto, unitario, normal, proyección o positivo.*

Las demostraciones de los dos resultados anteriores pueden consultarse en [13], págs. 98-99.

Supongamos ahora que los eventos del i-ésimo experimento son descritos por los elementos de $\mathcal{P}(H_i)$ para un cierto H_i de Hilbert, con $i = 1, \cdots, n$. Sea $H = \bigotimes_{i=1}^n H_i$. Si $P_i \in \mathcal{P}(H_i)$, entonces veremos al evento P_i como el elemento $\widehat{P_i} = I \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes P_i \otimes I \otimes \cdots \otimes I$. De esta forma, $\widehat{P_i} \in \mathcal{P}(H)$ e interpretamos a $P = \bigotimes_{i=1}^n P_i = \prod_{i=1}^n \widehat{P_i}$ como el evento en que ocurren simultáneamente los P_i en el i-ésimo experimento. Estos son los equivalentes en Probabilidad Cuántica a los rectángulos medibles en productos de espacios muestrales.

1.4. Productos Tensoriales Simétrico y Antisimétrico

Supongamos que un sistema físico consiste en n partículas idénticas que son indistinguibles una de otra. Una transición puede ocurrir en el sistema como resultado de un intercambio de características físicas de algunas partículas (por ejemplo, si intercambian posiciones), y puede no ser posible detectar dicho cambio mediante observaciones. Supongamos que las cuestiones estadísticas de la dinámica de cada partícula individualmente son descritas por estados en algún espacio de Hilbert H. De acuerdo con los procedimientos realizados en las Secciones 1.2 y 1.3, los eventos de las n partículas están descritos por los elementos de $\mathcal{P}(H^{\otimes^n})$. Si $P_i \in \mathcal{P}(H)$, $1 \leq i \leq n$, entonces $\bigotimes_{i=1}^n P_i$ significa el evento de que ocurran simultáneamente los eventos P_i. Si las partículas i, j, con $i < j$, son intercambiadas y el cambio no puede ser detectado, entonces no debemos poder distinguir entre los eventos $P_1 \bigotimes \cdots \bigotimes P_n$ y $P_1 \bigotimes \cdots \bigotimes P_{i-1} \bigotimes P_j \bigotimes P_{i+1} \bigotimes \cdots \bigotimes P_{j-1} \bigotimes P_i \bigotimes P_{j+1} \bigotimes \cdots \bigotimes P_n$, donde en el segundo producto las posiciones de P_i y P_j se han intercambiado, pero es claro que podemos hacer esta distinción. Esto sugiere que el espacio $H^{\otimes^n}$ es demasiado grande y, por lo tanto, admite muchas proyecciones, por lo que no es apto para describir eventos de n partículas idénticas. Debemos restringinos a un espacio menor que sea "invariante bajo permutaciones".

Sea S_n el grupo de permutaciones de $\{1, 2, \cdots, n\}$. Para cada $\sigma \in S_n$, tomemos U_σ definido en los productos tensoriales de vectores de $H^{\otimes^n}$ como $U_\sigma u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma^{-1}(n)}$. Es claro que U_σ preserva el producto interno entre los productos tensoriales de vectores. Luego, por el Teorema 1.5, U_σ se extiende de manera única a un operador unitario en $H^{\otimes^n}$, que seguiremos denotando como U_σ.

Sean

$$
\begin{aligned}
H^{\textcircled{s}^n} &= \{u \in H^{\otimes^n} | U_\sigma(u) = u \text{ para toda } \sigma \in S_n\} && (1.8)\\
H^{\textcircled{a}^n} &= \{u \in H^{\otimes^n} | U_\sigma(u) = \epsilon(\sigma) u \text{ para toda } \sigma \in S_n\}, && (1.9)
\end{aligned}
$$

donde $\epsilon(\sigma) = \pm 1$, dependiendo de si la permutación es par o impar. Estos espacios son llamados respectivamente las *n-ésima variedades simétrica y antisimétrica del producto tensorial de H*. Es claro que son invariantes bajo U_σ para cada $\sigma \in S_n$. Si las características estadísticas de la dinámica de una única partícula son descritas por los elementos de $\mathcal{P}(H)$ y la dinámica de n de tales partículas indistinguibles es descrita por los estados de $\mathcal{P}(H^{\textcircled{s}^n})$ para $n = 2, 3, \cdots$, entonces dichas partículas se conocen como *bosones*. Si esta dinámica conjunta se describe mediante los estados de $\mathcal{P}(H^{\textcircled{a}^n})$ para $n = 2, 3, \cdots$, entonces las partículas son llamadas *fermiones*.

Ahora, necesitamos una forma de enviar los elementos de $H^{\otimes^n}$ a los subespacios anteriores:

Proposición 1.16. *Sean E y F operadores en $H^{\otimes^n}$ dados por*

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} U_\sigma && (1.10)\\ F &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)U_\sigma. && (1.11)\end{aligned}$$

Entonces E y F son las proyecciones sobre los subespacios $H^{ⓢ^n}$ y $H^{ⓐ^n}$ respectivamente. Más aún:

$$\begin{aligned} \langle E(u_1\otimes\cdots\otimes u_n), E(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\rangle &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\Pi_{i=1}^n\langle u_i, v_{\sigma(i)}\rangle\\ \langle F(u_1\otimes\cdots\otimes u_n), F(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\rangle &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\Pi_{i=1}^n\langle u_i, v_{\sigma(i)}\rangle\\ &= \frac{1}{n!}\det((\langle u_i, v_j\rangle))\end{aligned}$$

La demostración de este resultado puede consultarse en [13], pág. 107.

1.5. El Espacio de Fock Simétrico

En esta Sección usaremos los productos tensoriales para construir un espacio producto de probabilidad cuántica en el que describiremos la dinámica del sistema de partículas.

Sea $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. El mapeo $K: H\times H\to\mathbb{C}$ dado por $K(f,g)=e^{\langle f,g\rangle}$ es un kernel. Al espacio de Hilbert determinado por K en H y al mapeo λ asociado según la Proposición 1.10 se les denota por $\mathcal{F}_s(H)$ y e respectivamente y, si $f\in H$, se dirá que $e(f)$ es el *vector exponencial*[1] *asociado a f*, o bien, que es el vector exponencial de f. Al mapeo e se le llama *mapeo exponencial*. Al conjunto $\mathcal{E}(H) =< \{e(f): f\in H\} >=< e(H) >$ se le conoce como *dominio exponencial*, y también es denotado por $\mathcal{E}$. Por la misma Proposición 1.10, $e(H)$ es total en $\mathcal{F}_s(H)$. De esta forma, el ente

[1]O también llamado *vector coherente*

$(H, e, \mathcal{E}(H), \mathcal{F}_s(H))$ es llamado *Espacio de Fock Simétrico*. Para brevedad, en este trabajo el conjunto $\mathcal{F}_s(H)$ será denotado por $\mathcal{F}(H)$, y al espacio de Fock simétrico lo nombraremos simplemente *Espacio de Fock*.

Notemos además que si $f, g \in H$ entonces, por definición de vectores exponenciales, $\langle e(f), e(g)\rangle = e^{\langle f,g\rangle}$. A continuación mostraremos una propiedad fundamental del espacio de Fock, pero antes, un par de resultados previos. Recordemos primero el siguiente

Teorema 1.17. *[Teorema de Categoría de Baire] Si (E, d) es un espacio métrico completo y $E = \cup_{i=1}^{\infty} A_n$, con A_n cerrado, entonces $\mathring{A}_j \neq \emptyset$ para algún j.*

En particular, lo anterior es cierto si la unión es finita.

Lema 1.18. *Sea H un espacio de Hilbert, y $f_1, f_2, \cdots, f_n \in H$ vectores distintos. Entonces el conjunto*

$$U = \{u \in H : \textit{ Para todos } i, j \in \{1, 2, \cdots, n\},\ i \neq j,\ \textit{ se tiene } \langle u, f_i\rangle = \langle u, f_j\rangle\}$$

es no vacío.

Demostración. Para cada $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, con $i < j$, sea $F_{i,j} : H \to \mathbb{C}$ dada por $F_{i,j}(u) = \langle u, f_i - f_j\rangle$. De esta forma, notemos que

$$\begin{aligned} U^c &= \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^{n} \{u \in H : \langle u, f_i\rangle = \langle u, f_j\rangle\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i+1}^{n} F_{i,j}^{-1}[\{0\}]. \end{aligned}$$

Observemos que cada $F_{i,j}$ es continua y, por lo tanto, $F_{i,j}^{-1}[\{0\}]$ es cerrado para cualquier par de índices. Así, U^c es cerrado por ser unión finita de cerrados. Si $U^c = H$, entonces H es una unión finita de cerrados. Por el Teorema de Categoría de Baire (Teorema 1.17), tendremos que algún $F_{i0,j0}^{-1}[\{0\}]$ tiene interior no vacio.

Por otra parte, es fácil verificar que $F_{i,j}^{-1}[\{0\}]$ es un subespacio vectorial de H. Pero el único subespacio vectorial de H con interior no vacío es el mismo H, así que $F_{i0,j0}^{-1}[\{0\}] = H$. Esto signica que para cualquier $u \in H$, se tiene $\langle u, f_{i0} - f_{j0}\rangle = 0$. Por lo tanto $f_{i0} = f_{j0}$, lo cual es una contradicción.

Entonces $U^c \neq H$, y así $U \neq \emptyset$, que es lo que se quería probar.

$\square$

Nótese que este resultado sigue siendo cierto para cualquier colección $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Mostremos ahora el importante

Teorema 1.19. *Sea $(H, e, \mathcal{E}(H), \mathcal{F}(H))$ un espacio de Fock. Entonces los elementos de $e(H)$ son linealmente independientes.*

Demostración. Sean $e(f_1), e(f_2), \cdots, e(f_n)$ algunos vectores exponenciales y $z_1, z_2, \cdots, z_n$ complejos tales que $\sum_{i=1}^n z_i e(f_i) = 0$. Tomemos $z \in \mathbb{C}$ fijo pero arbitrario. Sea $U = \{u \in H : \langle u, f_i\rangle \neq \langle u, f_j\rangle$ para todo $i, j,$ con $i \neq j\}$. Por el Lema anterior (Lema 1.18), sabemos que $U \neq \emptyset$. Elijamos un $u_0 \in U$ y hagamos $\theta_i = \langle f_i, u_0\rangle$, con $i = 1, 2, \cdots, n$. Por definición, las θ_i's son todas distintas.

Por una parte

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{i=1}^n z_i e(f_i), e(zu_0) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{z_i} \langle e(f_i), e(zu_0)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{z_i} e^{\langle f_i, zu_0\rangle} \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{z_i} e^{z\theta_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{z_i} g_i(z), \end{aligned}$$

donde cada $g_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ viene dada por $g_i(z) = e^{z\theta_i}$. Como z fue arbritaria, hemos probado que $0 = \sum_{i=1}^n \overline{z_i} g_i$ (igualdad de funciones). Pero cada θ_i es distinta, de modo que las g_i son linealmente independientes. Por lo tanto $z_i = 0$ para cualquier $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, y eso significa que los $e(f_i)$'s son linealmente independientes, que es lo que se quería demostrar.

$\square$

Otro resultado fundamental a lo largo de todo el estudio es el siguiente:

Teorema 1.20. *Sea $(H, e, \mathcal{E}(H), \mathcal{F}(H))$ un espacio de Fock. Si H_1 y H_2 son subespacios de H tales que $H = H_1 \bigoplus H_2$, entonces $\mathcal{F}(H)$ y $\mathcal{F}(H_1) \bigotimes \mathcal{F}(H_2)$ son unitariamente isomorfos y, si $(h_1, h_2) \in H = H_1 \bigoplus H_2$, podemos escoger el isomorfismo de tal manera que al vector $e(h_1, h_2)$ lo transforme en $e(h_1) \otimes e(h_2)$. Por lo tanto, bajo este isomorfismo, $\mathcal{E}(H)$ y $\mathcal{E}(H_1) \bigotimes \mathcal{E}(H_2)$ son equivalentes.*

Demostración. Sabemos que los conjuntos $e(H)$, $e(H_1)$ y $e(H_2)$ son totales en $\mathcal{F}(H)$, $\mathcal{F}(H_1)$ y $\mathcal{F}(H_2)$, respectivamente. También, por el Teorema 1.12, el conjunto $\{e(f) \otimes e(g) : f \in H_1, g \in H_2\}$ es total en $\mathcal{F}(H_1) \bigotimes \mathcal{F}(H_2)$. Luego, para (f_1, f_2) y (g_1, g_2) en $H_1 \bigoplus H_2$ se tiene

$$\begin{aligned}
\langle e(f_1, f_2), e(g_1, g_2)\rangle &= e^{\langle (f_1,f_2),(g_1,g_2)\rangle} \\
&= e^{\langle f_1,g_1\rangle + \langle f_2,g_2\rangle} \\
&= e^{\langle f_1,g_1\rangle} e^{\langle f_2,g_2\rangle} \\
&= \langle e(f_1), e(g_1)\rangle \langle e(f_2), e(g_2)\rangle \\
&= \langle e(f_1) \otimes e(f_2), e(g_1) \otimes e(g_2)\rangle.
\end{aligned}$$

De esta forma, sea $U_0 : e(H) \to \{e(f) \otimes e(g) : f \in H_1, g \in H_2\}$ dada por $U_0 e(f, g) = e(f) \otimes e(g)$. Entonces U_0 es una función con dominio total en $\mathcal{F}(H)$ sobre un conjunto total en $\mathcal{F}(H_1) \bigotimes \mathcal{F}(H_2)$ que preserva productos internos y, usando el Teorema 1.5, se concluye que $\mathcal{F}(H)$ y $\mathcal{F}(H_1) \bigotimes \mathcal{F}(H_2)$ son unitariamente isomorfos.

$\square$

El resultado anterior es conocido como *propiedad exponencial de los espacios de Fock*. Haciendo abuso de notación, esta propiedad nos permite escibir $\mathcal{F}(H) = \mathcal{F}(H_1) \bigotimes \mathcal{F}(H_2)$, $e(h_1, h_2) = e(h_1) \otimes e(h_2)$ y $\mathcal{E}(H) = \mathcal{E}(H_1) \bigotimes \mathcal{E}(H_2)$, o en términos de sumas, si $h_1, h_2 \in H$ y $\langle h_1, h_2\rangle = 0$, entonces $e(h_1 + h_2) =$

$e(h_1) \otimes e(h_2)$.

Por otra parte, en [13], Parthasarathy desarrolla el estudio del espacio de Fock simétrico a través de los llamados *espacios de vectores con un número finito de partículas* $H^{\otimes n}$. En este sentido, para cada $f \in H$ considera el mapeo $\tilde{e}$ dado por

$$\tilde{e}(f) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{f^{\otimes n}}{\sqrt{n!}},$$

y el Espacio de Fock (simétrico) puede ser definido como la cerradura del espacio vectorial generado por $\{\tilde{e}(f) : f \in H\}$. Es importante señalar que ambos enfoques de tal espacio son equivalentes. De esta forma, dada $f \in H$, tenemos *tres* maneras de entender al vector exponencial asociado a f:

- Como la imagen de f en el sentido de las parejas de Gelfand

- Como $e(f) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{f^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}$ y

- En forma de coordenadas $e(f) = \left(1, f, \frac{f^{\otimes 2}}{\sqrt{2!}}, \cdots, \frac{f^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}, \cdots\right)$.

Nótese que así es fácil reconocer si, en el espacio de Fock simétrico, un vector es exponencial o no, ya que su primer coordenada siempre es el escalar 1. Además,

$$e(0) = (1, 0, 0, \cdots). \tag{1.12}$$

Este es conocido como *vector vacío*.

En particular, si $H = \mathbb{C}$, es fácil ver que $\mathcal{F}(\mathbb{C}) = \ell^2(\mathbb{C})$ con $e(z) = \left(1, z, \frac{z^2}{\sqrt{2!}}, \cdots\right)$.

Sin embargo, como uno de nuestros objetivos es estudiar el Cálculo Estocástico Cuántico por la manera presentada en [5], nos limitaremos a usar la mayor parte de la investigación la primera descripción de los vectores exponenciales, dejando las otras dos para cuestiones más operativas que cobrarán importancia hacia la última parte del documento.

Teorema 1.21. *El mapeo exponencial* $e : H \to \mathcal{F}(H)$ *es continuo.*

Demostración. Al ser $\langle e(f), e(g)\rangle = e^{\langle f,g\rangle}$, tomando $f = g$ se sigue que $\|e(f)\| = e^{\frac{\|f\|^2}{2}}$, de donde es sencillo conluir.

$\square$

De la prueba anterior se deduce que el vector vacío tiene norma 1, y que es el vector exponencial con menor norma.

Comentarios

Las construcciones más generales de productos tensoriales corresponden a la Teoría del Álgebra Multlineal, como puede verse en [10]. Como únicamente nos interesamos en productos de espacios de Hilbert, hemos presentado una construcción de productos tensoriales más acorde al tema. En particular, una demostración de la Proposición 1.10 puede revisarse en [13], donde se hace uso de variables aleatorias normales complejas. La demostración que aquí presentamos ha sido propuesta por el Dr. García Corte para este trabajo.

Los Espacios de Fock por sí mismos merecen un estudio propio. Para conocer más sobre ellos, puede consultarse [16], en donde la teoría se desarrolla a través de métodos de Variable Compleja.

Capítulo 2

El Cálculo Estocástico Cuántico

En este capítulo desarrollamos detalladamente el Artículo [5]. Básicamente se trata de un análisis exhaustivo del Cálculo Estocástico Cuántico como inicialmente fue trabajado por Hudson y Parthasarathy a mediados de los 80 del siglo pasado. En la Sección 2.1 definimos los operadores de Creación, Aniquilación y Segunda Cuantización Diferencial. En la Sección 2.2 se describen los procesos estocásticos fundamentales del Cálculo Estocástico Cuántico. En las secciones 2.3 y 2.4 se construye la Integral Estocástica Cuántica para una familia particular de procesos y se presentan las fórmulas fundamentales de la teoría. En la Sección 2.5 se construye el llamado Estimado Fundamental, el cual es un análogo a la Isometría de Ito. Finalmente, en las secciones 2.6 y 2.7 se extiende la integral obtenida a una gama más amplia de procesos cuánticos.

2.1. Algunos Operadores en el Dominio Exponencial

Sea $(H, e, \mathcal{E}(H), \mathcal{F}(H))$ un espacio de Fock fijo. En adelante nos referiremos a él únicamente como $\mathcal{F}(H)$. Dado que los elementos de $e(H)$ son linealmente independientes y $\mathcal{E}(H) =< e(H) >$, podemos definir operadores en $e(H)$ y extenderlos linealmente a todo $\mathcal{E}(H)$ para obtener operadores densamente definidos. De esta forma, sean $u \in H$ y $S \in \mathbb{B}(H)$. Definamos los mapeos $e^{a(u)}$, $e^{a^\dagger(u)}$ y $\Gamma(S)$ como

$$e^{a(u)}e(f) = \exp \langle u, f\rangle e(f),\ \ e^{a^\dagger(u)}e(f) = e(f+u),\ \ \Gamma(S)e(f) = e(Sf).$$

Extendamos de manera lineal estas transformaciones a $\mathcal{E}(H)$. Con abuso de notación, escribamos de la misma forma a los operadores obtenidos.

Proposición 2.1. *Sean $u \in H$ y $S \in \mathbb{B}(H)$.*

a) *Los operadores $e^{a(u)}$ y $e^{a^\dagger(u)}$ son acotados si y solo si $u = 0$.*

b) *$\Gamma(S)$ es acotado si y solo si $\|S\| \leq 1$.*

Demostración. Es claro que si $u = 0$ entonces $e^{a(0)} = I = e^{a^\dagger(0)} = I$ y, por tanto, hay acotamiento.

a) Afirmamos que $e^{a(u)}$ no es acotado para $u \neq 0$. En efecto, supongamos lo contrario. Entonces $e^{a(u)}$ se puede extender de manera única y continua a todo el espacio de Fock $\mathcal{F}(H)$. Denotemos de la misma forma la extensión. Obsérvese que todo vector exponencial $e(f)$ es eigenvector de $e^{a(u)}$ con eigenvalor asociado $e^{\langle u,f\rangle}$. Luego, si $f = \lambda u$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, tendremos eigenvalores tan grandes como queramos.

Como $e^{a(u)}$ es acotado, su espectro es compacto y, por tanto, acotado. En particular, su conjunto de eigenvalores lo es. Pero hemos mostrado que podemos tener eigenvalores tan grandes como queramos. Esto muestra que dicho operador no es acotado.

Veamos que $e^{a^\dagger(u)}$ es acotado para $u \neq 0$. Supongamos lo contrario. Entonces existe un $M > 0$ tal que para todo $f \in H$ se tiene $\|e^{a^\dagger(u)}e(f)\| \leq M\|e(f)\| = e^k e^{\frac{1}{2}\|f\|^2}$, donde $M = e^k$ (k existe por ser $M > 0$).

Por otra parte,

$$\|e^{a^\dagger(u)}e(f)\| = \|e(f+u)\| = e^{\frac{1}{2}\|f+u\|^2} = e^{\frac{1}{2}\|f\|^2+\frac{1}{2}\|u\|^2-Re\langle u,f\rangle}.$$

De todo lo anterior se desprende que existe k tal que, para toda $f \in H$, $e^{\frac{1}{2}\|f\|^2+\frac{1}{2}\|u\|^2-Re\langle u,f\rangle} \leq e^{k+\frac{1}{2}\|f\|^2}$. Es decir, existe k tal que para toda $f \in H$ se tiene $\frac{1}{2}\|u\|^2 - Re\langle u, f\rangle \leq k$.

Sean $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{k+1}{\|u\|^2}$ y $f = \lambda u$. Entonces

$$k \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - Re\langle u, f\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - Re\langle u, \lambda u\rangle \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\|u\|^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\|u\|^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{k+1}{\|u\|^2}\right)\|u\|^2 \\
&= k+1.
\end{aligned}$$

Esta contradicción muestra que $e^{a^\dagger(u)}$ no es acotado para $u \neq 0$.

b) Demostremos que $\Gamma(S)$ es acotado si $\|S\| \leq 1$. Supongamos que $\|S\| \leq 1$. Sea $f \in H$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\Gamma(S)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e(f_i)\right)\right\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i e(Sf_i)\right\|^2 \\
&= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j \langle e(Sf_i), e(Sf_j)\rangle \\
&= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j e^{\langle Sf_i, Sf_j\rangle} \\
&= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle Sf_i, Sf_j\rangle^k}{k!} \\
&= \sum_{i,j} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\alpha_i}\alpha_j \frac{\langle Sf_i, Sf_j\rangle^k}{k!} \\
&= \sum_{i,j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{\alpha_i}\alpha_j}{k!} \langle S^{\otimes k} f_i^{\otimes k}, S^{\otimes k} f_j^{\otimes k}\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j \langle S^{\otimes k} f_i^{\otimes k}, S^{\otimes k} f_j^{\otimes k}\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i S^{\otimes k} f_i^{\otimes k}\right\|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\|S^{\otimes k}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i^{\otimes k}\right)\right\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i^{\otimes k} \right\|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle f_i^{\otimes k}, f_j^{\otimes k} \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle f_i, f_j \rangle^k \\
&= \sum_{i,j} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\alpha_i} \alpha_j \frac{\langle f_i, f_j \rangle^k}{k!} \\
&= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \alpha_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f_i, f_j \rangle^k}{k!} \\
&= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \alpha_j e^{\langle f_i, f_j \rangle} \\
&= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle e(f_i), e(f_j) \rangle \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e(f_i) \right\|^2 .
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que $\Gamma(S)$ es acotado si $\|S\| \leq 1$ y, por lo tanto, tiene una extensión lineal continua. Supongamos ahora que $\Gamma(S)$ es acotado cuando $\|S\| > 1$ para llegar a una contradicción. Bajo estas condiciones, existe $k > 0$ tal que $\|\Gamma(S)e(f)\| \leq e^{\frac{k}{2}} \|e(f)\|$. Luego:

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{k}{2}} \|e(f)\| &= e^{\frac{k}{2}} e^{\frac{\|f\|^2}{2}} \\
&\geq \|\Gamma(S)e(f)\| \\
&= \|e(Sf)\| \\
&= e^{\frac{\|Sf\|^2}{2}},
\end{aligned}
$$

de donde $k + \|f\|^2 \geq \|Sf\|^2$. Pero al ser $\|S\| = \sup\{\|Sf\| : \|f\| = 1\}$, existe entonces una sucesión de vectores unitarios $\{f_n\} \subseteq H$ tales que $\|Sf_n\| \to \|S\| > 1$. Por lo tanto $k + \|nf_n\|^2 \geq \|S(nf_n)\|^2$ o, equivalentemente, $n^2 + k \geq n^2 \|Sf_n\|^2$, de donde $\frac{k}{n^2} + 1 \geq \|Sf_n\|^2$. Haciendo

$n \to \infty$, nos resulta $1 \geq \|S\|^2 > 1$. Esta contradicción completa la prueba.

De esta forma, hemos probado que $\Gamma(S)$ es acotado si y solo si $\|S\| \leq 1$.

□

Para $u \in H$, definamos de la misma forma que antes un operador $a(u)$ en un dominio $\mathcal{D}$ que contenga a los vectores exponenciales y tal que $a(u)e(f) = \langle u, f\rangle e(f)$. Este operador es llamado *operador de aniquilación* con vector de prueba u. Notemos que $a(u)$ y $e^{a(u)}$ comparten los mismos eigenvectores y los eigenvalores del primero son las exponenciales de los eigenvalores del segundo. De ahí la notación.

Ejemplo 2.2. *Sabemos que* $\mathcal{F}(\mathbb{C}) = \ell^2(\mathbb{C})$ *y* $e(z) = \left(1, z, \frac{z^2}{\sqrt{2!}}, \frac{z^3}{\sqrt{3!}}, \cdots\right)$. *Entonces*

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{h}(e(z+h) - e(z)) \\
= & \tfrac{1}{h}\left(\left(1, z+h, \frac{(z+h)^2}{\sqrt{2!}}, \frac{(z+h)^3}{\sqrt{3!}}, \cdots\right) - \left(1, z, \frac{z^2}{\sqrt{2!}}, \frac{z^3}{\sqrt{3!}}, \cdots\right)\right) \\
= & \tfrac{1}{h}\left(0, h, \frac{(z+h)^2 - z^2}{\sqrt{2!}}, \frac{(z+h)^3 - z^3}{\sqrt{3!}}, \cdots\right) \\
= & \left(0, 1, \frac{(z+h)^2 - z^2}{h}\frac{1}{\sqrt{2!}}, \frac{(z+h)^3 - z^3}{h}\frac{1}{\sqrt{3!}}, \cdots\right).
\end{aligned}$$

Como la convergencia débil en $\ell^2(\mathbb{N})$ *es la convergencia entrada a entrada, haciendo* $h \to 0$, *tenemos*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(e(z+h) - e(z)) = \left(0, 1, \frac{2z}{\sqrt{2!}}, \frac{3z^2}{\sqrt{3!}}, \cdots\right).$$

Es decir, cuando $h \to 0$, *la red* $\left\{\frac{1}{h}(e(z+h) - e(z))\right\}_h$ *converge débilmente a*

$$\left(0, 1, \frac{2z}{\sqrt{2!}}, \frac{3z^2}{\sqrt{3!}}, \cdots\right).$$

Un cálculo análogo muestra que

$$\left\|\frac{1}{h}(e(z+h) - e(z))\right\| \to \left\|\left(0, 1, \frac{2z}{\sqrt{2!}}, \frac{3z^2}{\sqrt{3!}}, \cdots\right)\right\|$$

cuando h tiende a 0. Por tanto, $\frac{1}{h}(e(z+h)-e(z))$ *converge fuertemente a* $\left(0,1,\frac{2z}{\sqrt{2!}},\frac{3z^2}{\sqrt{3!}},\cdots\right)$. *Lo anterior se denota como*

$$\frac{d}{dz}e(z)=\left(0,1,\frac{2z}{\sqrt{2!}},\frac{3z^2}{\sqrt{3!}},\cdots\right).$$

Podemos generalizar el Ejemplo anterior para cualquier espacio de Fock:

Teorema 2.3. *Sean* $u,f\in H$ *y* $S\in\mathbb{B}(H)$ *una proyección ortogonal. Entonces*

$$\lim_{z\to 0}\frac{e(f+zu)-e(f)}{z}\quad y\quad \lim_{z\to 0}\frac{e(\exp(zS)f)-e(f)}{z}\ (z\in\mathbb{C})$$

existen como límites del espacio de Hilbert $\mathcal{F}(H)$.

Demostración. Sea $f\in H=<u>^{\perp}\bigoplus<u>$, con $f=f_1\oplus tu=(f_1,tu)$, de donde $f+zu=(f_1,(t+z)u)$, y así, por la propiedad exponencial, $e(f)=e(f_1)\otimes e(tu)$ y $e(f+zu)=e(f_1)\otimes e((t+z)u)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{e(f+zu)-e(f)}{z} &= \frac{e(f_1)\otimes e\left((t+z)u\right)-e(f_1)\otimes e\left(tu\right)}{z}\\ &= \frac{e(f_1)\otimes\left(e\left((t+z)u\right)-e\left(tu\right)\right)}{z}\\ &= e(f_1)\otimes\frac{e((t+z)u)-e(tu)}{z}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}&\lim_{z\to 0}\frac{e(f+zu)-e(f)}{z}\\ &= \left(\lim_{z\to 0}e(f_1)\right)\otimes\left(\lim_{z\to 0}\frac{e((t+z)u)-e(tu)}{z}\right) &(2.1)\\ &= e(f_1)\otimes\lim_{z\to 0}\frac{e((t+z)u)-e(tu)}{z} &(2.2)\end{aligned}$$

Pero, en el segundo factor, $(t+z)u$ y tu pueden verse como los complejos $(t+z)|u|$ y $t|u|$ vía el isomorfismo isométrico $T:<u>\to\mathbb{C}$ dado por $T\lambda u=$

$\lambda|u|$. Luego, $\mathcal{F}(< u >) \cong \mathcal{F}(\mathbb{C}) = \ell^2(\mathbb{N})$, de modo que con todo derecho podemos escribir las igualdades

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\frac{e((t+z)u)-e(tu)}{z} &= \lim_{z\to 0}\frac{e((t+z)|u|)-e(t|u|)}{z} \\
&= \lim_{z\to 0}|u|\frac{e((t+z)|u|)-e(t|u|)}{z|u|} \\
&= |u|\lim_{h\to 0}\frac{e(t|u|+h)-e(t|u|)}{h} \\
&= |u|\frac{d}{dt|u|}e(t|u|) \\
&= |u|\left(0, 1, \frac{2t|u|}{\sqrt{2!}}, \frac{3(t|u|)^2}{\sqrt{3!}}, \cdots\right) \\
&= \left(0, |u|, \frac{2t|u|^2}{\sqrt{2!}}, \frac{3t^2|u|^3}{\sqrt{3!}}, \cdots\right).
\end{aligned}$$

Así, sustiyendo en la ecuación (2.2), tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\frac{e(f+zu)-e(f)}{z} &= e(f_1)\otimes|u|\frac{d}{dt|u|}e(t|u|) \\
&= e(f_1)\otimes\left(0, |u|, \frac{2t|u|^2}{\sqrt{2!}}, \frac{3t^2|u|^3}{\sqrt{3!}}, \cdots\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto este límite existe. Analicemos ahora el otro límite. Obsérvese que

$$\begin{aligned}
e(\exp(zS)f) &= e\left(f + zSf + \frac{z^2}{2!}S^2f + \frac{z^3}{3!}S^3f + \cdots\right) \\
&= e\left(f + zSf + \frac{z^2}{2!}Sf + \frac{z^3}{3!}Sf + \cdots\right) \\
&= e\left(f + (e^z-1)Sf\right) \\
&= e\left(e^zSf + (f-Sf)\right) \\
&= e(e^zSf)\otimes e(f-Sf).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{e(\exp(zS)f)-e(f)}{z} = \frac{1}{z}(e(e^zSf)\otimes e(f-Sf) - e(Sf)\otimes e(f-Sf))$$

$$= \quad \frac{e(e^z Sf) - e(Sf)}{z} \otimes e(f - Sf),$$

de donde es sencillo concluir.

□

Denotemos por $\left.\frac{d}{dz}e(f+zu)\right|_{z=0}$ y $\left.\frac{d}{dz}e(\exp(Sf)f)\right|_{z=0}$ a los límites anteriores, respectivamente. Para cada $u \in H$ y cada proyección ortogonal $S \in \mathbb{B}(H)$, definamos los operadores $a^\dagger(u)$ y $\lambda(S)$ en un dominio $\mathcal{D}$ que contenga a los vectores exponenciales cumpliendo

$$a^\dagger(u)e(f) = \left.\frac{d}{dz}e(f+zu)\right|_{z=0} \text{ y } \lambda(S)e(f) = \left.\frac{d}{dz}e(\exp(zS)f)\right|_{z=0}.$$

Estos operadores son llamados *creación* con vector de prueba u y *segunda cuantización diferencial* correspondiente a S, respectivamente. Notemos que no envían al dominio exponencial en sí mismo.

Proposición 2.4. *Los mapeos $H \ni u \mapsto a^\dagger(u)$ y $H \ni u \mapsto a(u)$ son lineal y antilineal, respectivamente.*

Demostración. La aditividad de cada mapeo es fácil de probar, de modo que únicamente probaremos lo referente al producto con escalares. Sea $w \in \mathbb{C}$.

El resultado es claro con $w = 0$, así que supongamos $w \neq 0$. Para creación, basta con notar la igualdad $\frac{e(f+zwu) - e(f)}{z} = w\frac{e(f+zwu) - e(f)}{wz}$ y tomar límite $z \to 0$. Para aniquilación,

$$a(wu)e(f) = \langle wu, f\rangle e(f) = \overline{w}\langle u, f\rangle e(f) = [\overline{w}a(u)]e(f)$$

para cualquier vector exponencial $e(f)$. En ambos casos, los resultados propuestos se siguen por extensión lineal.

□

En particular, $a^\dagger(iu) = ia^\dagger(u)$ y $a(iu) = -ia(u)$.

Teorema 2.5. *Para cualesquiera $u, f, g \in H$ y cualquier proyección ortogonal $S \in \mathbb{B}(H)$ se cumple:*

$$\langle e(f), a(u)e(g)\rangle = \langle u, g\rangle\langle e(f), e(g)\rangle$$
$$\langle e(f), a^\dagger(u)e(g)\rangle = \langle f, u\rangle\langle e(f), e(g)\rangle$$
$$\langle e(f), \lambda(S)e(g)\rangle = \langle f, Sg\rangle\langle e(f), e(g)\rangle.$$

Demostración. La primera relación es clara, ya que $a(u)e(g) = \langle u, g\rangle e(g)$. Para la segunda, sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\left\langle e(f), \frac{e(g+zu)-e(g)}{z}\right\rangle &= \frac{1}{z}\langle e(f), e(g+zu)-e(g)\rangle \\
&= \frac{1}{z}(\langle e(f), e(g+zu)\rangle - \langle e(f), e(g)\rangle) \\
&= \frac{1}{z}(e^{\langle f, g+zu\rangle} - e^{\langle f,g\rangle}) \\
&= \frac{1}{z}e^{\langle f,g\rangle}(e^{z\langle f,u\rangle} - 1) \\
&= e^{\langle f,g\rangle}\frac{e^{z\langle f,u\rangle}-1}{z}.
\end{aligned}$$

Es decir, $\left\langle e(f), \frac{e(g+zu)-e(g)}{z}\right\rangle = e^{\langle f,g\rangle}\frac{e^{z\langle f,u\rangle}-1}{z}$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Al ser el producto interno y e funciones continuas, y notando que en el lado derecho de la igualdad anterior tenemos la exponencial compleja, tomamos $z \to 0$ para obtener $\langle e(f), a^\dagger(u)e(g)\rangle = e^{\langle f,g\rangle}\langle f, u\rangle$. Como $e^{\langle f,g\rangle} = \langle e(f), e(g)\rangle$, se concluye la segunda igualdad pedida.

La tercera igualdad se obtiene con un proceso totalmente análogo al anterior.

□

Proposición 2.6. *$a^\dagger(u)$ y $a(u)$ son cerrables. Por lo tanto existen $\overline{a^\dagger(u)}$ y $\overline{a(u)}$.*

Demostración. Se sigue de los Teoremas 2.5 y 1.3.

□

Nótese que el Teorema 2.5 y la Proposición anterior implican que $(a^\dagger(u))^* \supset \overline{a(u)}$ y $(a(u))^* \supset \overline{a^\dagger(u)}$. Como $a(u) \subseteq \overline{a(u)}$ y $a^\dagger(u) \subseteq \overline{a^\dagger(u)}$, concluimos $(a^\dagger(u))^* e(f) = a(u)e(f)$ y $(a(u))^* e(f) = a^\dagger(u)e(f)$ para cualquier $e(f) \in \mathcal{E}$.

Corolario 2.7. *Para cualesquiera $u, v, f, g \in H$ y cualquier proyección ortogonal $S \in \mathbb{B}(H)$ se tiene:*

$$\begin{aligned}
\langle a(u)e(f), a(v)e(g)\rangle &= \overline{\langle u, f\rangle}\langle v, g\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
\langle a(u)e(f), a^\dagger(v)e(g)\rangle &= \overline{\langle u, f\rangle}\langle f, v\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
\langle a(u)e(f), \lambda(S)e(g)\rangle &= \overline{\langle u, f\rangle}\langle f, Sg\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
\langle a^\dagger(u)e(f), a(v)e(g)\rangle &= \langle v, g\rangle\langle u, g\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
\langle a^\dagger(u)e(f), a^\dagger(v)e(g)\rangle &= \{\langle u, g\rangle\langle f, v\rangle + \langle u, v\rangle\}\langle e(f), e(g)\rangle \\
\langle a^\dagger(u)e(f), \lambda(S)e(g)\rangle &= \{\langle u, g\rangle\langle f, Sg\rangle + \langle u, Sg\rangle\}\langle e(f), e(g)\rangle \\
\langle \lambda(S^*)e(f), a(v)e(g)\rangle &= \langle v, g\rangle\langle f, Sg\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
\langle \lambda(S^*)e(f), a^\dagger(v)e(g)\rangle &= \{\langle f, Sg\rangle\langle f, v\rangle - \langle f, Sv\rangle\}\langle e(f), e(g)\rangle \\
\langle \lambda(S^*)e(f), \lambda(S)e(g)\rangle &= \{\langle Sf, g\rangle\langle f, Sg\rangle + \langle Sf, Sg\rangle\}\langle e(f), e(g)\rangle,
\end{aligned}$$

y por lo tanto se cumplen las relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned}
\langle a^\dagger(f)\phi_1, a(g)\phi_2\rangle - \langle a^\dagger(g)\phi_1, a(f)\phi_2\rangle &= 0 \\
\langle a(f)\phi_1, a^\dagger(g)\phi_2\rangle - \langle a(g)\phi_1, a^\dagger(f)\phi_2\rangle &= 0 \\
\langle a^\dagger(f)\phi_1, a^\dagger(g)\phi_2\rangle - \langle a(g)\phi_1, a(f)\phi_2\rangle &= \langle f, g\rangle\langle \phi_1, \phi_2\rangle
\end{aligned}$$

para cualesquiera $\phi_i \in \mathcal{E}(H)$.

Un ejercicio bastante sencillo es demostrar que el conjunto $\mathbb{C}^* \times H \times GL(H) \times H$ (donde $\mathbb{C}^*$ y $GL(H)$ son los grupos de complejos sin el cero y los operadores acotados invertibles en H, respectivamente) es un grupo con la multiplicación

$$(z, f, S, u)(w, g, T, v) = (zw \exp\langle u, g\rangle, f + Sg, ST, T^*u + v). \tag{2.3}$$

Llamemos $\mathbb{A}$ a este grupo. Para cada cuarteta $(z, u, S, v) \in \mathbb{C}^* \times H \times GL(H) \times H$, definamos la función Φ dada por $\Phi(z, u, S, v) = ze^{a^\dagger(u)}\Gamma(S)e^{a(u)}$. Se verifica rápidamente que $\Phi(z, u, S, v) \in GL(\mathcal{E}(H))$. Más aún, Φ es una representación del grupo $\mathbb{A}$. Es decir, Φ es un homomorfismo de $\mathbb{A}$ al grupo de operadores invertibles en el dominio exponencial.

Lema 2.8. *$\Phi(z,u,S,v)$ es una isometría en el dominio exponencial cuando S es unitario, $|z|^2 = e^{-\|u\|^2}$ y $u + Sv = 0$. Es decir, si $f, g \in H$, entonces $\langle \Phi(z,u,S,v)e(f), \Phi(z,u,S,v)e(g)\rangle = \langle e(f), e(g)\rangle$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
& \langle \Phi(z,u,S,v)e(f), \Phi(z,u,S,v)e(g)\rangle \\
= \; & \langle ze^{a^\dagger(u)}\Gamma(S)e^{a(v)}e(f), ze^{a^\dagger(u)}\Gamma(S)e^{a(v)}e(g)\rangle \\
= \; & |z|^2\langle e^{a^\dagger(u)}\Gamma(S)e^{\langle v,f\rangle}e(f), e^{a^\dagger(u)}\Gamma(S)e^{\langle v,g\rangle}e(g)\rangle \\
= \; & |z|^2 e^{\overline{\langle v,f\rangle}+\langle v,g\rangle}\langle e^{a^\dagger(u)}\Gamma(S)e(f), e^{a^\dagger(u)}\Gamma(S)e(g)\rangle \\
= \; & |z|^2 e^{\langle f,v\rangle+\langle v,g\rangle}\langle e^{a^\dagger(u)}e(Sf), e^{a^\dagger(u)}e(Sg)\rangle \\
= \; & |z|^2 e^{\langle f,v\rangle+\langle v,g\rangle}\langle e(Sf+u), e(Sg+u)\rangle \\
= \; & |z|^2 e^{\langle f,v\rangle+\langle v,g\rangle}e^{\langle Sf+u,Sg+u\rangle} \\
= \; & |z|^2 e^{\langle f,v\rangle+\langle v,g\rangle+\langle Sf+u,Sg+u\rangle} \\
= \; & |z|^2 e^{\langle f,v\rangle+\langle v,g\rangle+\langle Sf,Sg\rangle+\langle Sf,u\rangle+\langle u,Sg\rangle+\|u\|^2}.
\end{aligned}$$

Pero $\langle Sf, Sg\rangle = \langle f, g\rangle$, $\langle f, v\rangle = \langle f, -S^*u\rangle = -\langle Sf, u\rangle$ y, análogamente, $\langle v, g\rangle = -\langle u, Sg\rangle$, de donde

$$\langle \Phi(z,u,S,v)e(f), \Phi(z,u,S,v)e(g)\rangle = |z|^2 e^{\langle f,g\rangle+\|u\|^2},$$

y al ser $|z|^2 = e^{-\|u\|^2}$, se tiene lo pedido.

□

En particular, lo anterior es cierto para las cuartetas $(e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2}, tu, I, -tu)$ y $(1, 0, U, 0)$, para cualesquiera $t \in \mathbb{R}$ y $u \in H$, por lo que, si tomamos a t como parámetro, obtenemos

Teorema 2.9. *Sean $u \in H$ fijo y $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$ un grupo unitario de un solo parámetro*[1]*. Entonces cada una de las siguientes familias define un grupo unitario de un solo parámetro:*

$$\begin{array}{rcll}
W_t(u) & = & \Phi(e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2}, tu, I, -tu), & \textit{con} \quad t \in \mathbb{R} \\
\Gamma(U_t) & = & \Phi(1, 0, U_t, 0), & \\
 & W_1(u)\Gamma(U_t)W_{-1}(u), & & \textit{con} \quad t \in \mathbb{R}
\end{array}$$

[1]Un *grupo unitario de un solo parámetro* es un homomorfismo de la recta real al grupo de operadores unitarios de un espacio de Hilbert. Abusando de lenguaje, nosotros nos referimos por grupo unitario de un solo parámetro a la imagen de este homomorfismo

Demostración. Llamemos $\mathscr{W}(u)$, $\mathscr{G}$ y $\mathscr{W}\mathscr{G}(u)$ a las familias $\{W_t(u) : t \in \mathbb{R}\}$, $\{\Gamma(U_t) : t \in \mathbb{R}\}$ y $\{W_1(u)\Gamma(U_t)W_{-1}(u) : t \in \mathbb{R}\}$, respectivamente. Sean $s, t \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
W_t(u)W_s(u) &= \Phi(e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2}, tu, I, -tu)\Phi(e^{-\frac{1}{2}\|su\|^2}, su, I, -su) \\
&= \Phi[(e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2}, tu, I, -tu)(e^{-\frac{1}{2}\|su\|^2}, su, I, -su)] \\
&= \Phi(e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2}e^{-\frac{1}{2}\|su\|^2}e^{\langle -tu, su\rangle}, tu + Isu, II, I^*(-tu) - su) \\
&= \Phi(e^{-\frac{1}{2}t^2\|u\|^2 - \frac{1}{2}s^2\|u\|^2 - ts\|u\|^2}, (t+s)u, I, -(t+s)u) \\
&= \Phi(e^{-\frac{(t+s)^2}{2}\|u\|^2}, (t+s)u, I, -(t+s)u) \\
&= \Phi(e^{-\frac{1}{2}\|(t+s)u\|^2}, (t+s)u, I, -(t+s)u) \\
&= W_{t+s}(u).
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathscr{W}(u)$ es cerrado bajo multiplicación y $W_t(u)W_s(u) = W_{t+s}(u)$, por lo que el producto es conmutativo. Si tomamos $s = 0$, entonces vemos que hay neutro, dado por $W_0(u) = \Phi(1, 0, I, 0) = I$ y, si hacemos $s = -t$, deducimos que hay inversos multiplicativos dados por $W_t(u)^{-1} = W_{-t}(u) = \Phi(e^{-\frac{1}{2}\|-tu\|^2}, -tu, I, tu)$. Esto prueba que $\mathscr{W}(u)$ es un grupo abeliano.

Sean $\Gamma(U_s)$ y $\Gamma(U_t)$ elementos de $\mathscr{G}$. Entonces U_s y U_t pertenecen al grupo unitario uniparamétrico $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$ y, así, U_sU_t también. Luego,

$$\begin{aligned}
\Gamma(U_s)\Gamma(U_t) &= \Phi(1, 0, U_s, 0)\Phi(1, 0, U_t, 0) \\
&= \Phi[(1, 0, U_s, 0)(1, 0, U_t, 0)] \\
&= \Phi(1 \cdot 1e^{\langle 0,0\rangle}, 0 + U_s0, U_sU_t, U_t^*0 + 0) \\
&= \Phi(1, 0, U_sU_t, 0) \\
&= \Gamma(U_sU_t).
\end{aligned}$$

Por tanto $\mathscr{G}$ es cerrado bajo multiplicación y $\Gamma(U_s)\Gamma(U_t) = \Gamma(U_sU_t)$. El neutro del grupo $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$ es I. Se sigue de la igualdad anterior que $\Gamma(I) = \Phi(1, 0, I, 0) = I$ es el neutro de $\mathscr{G}$ y, además, los inversos vienen dados como

$$\Gamma(U_t)^{-1} = \Gamma(U_t^{-1}),$$

que están bien definidos, ya que $U_t^{-1} \in \{U_t : t \in \mathbb{R}\}$. Por tanto $\mathscr{G}$ también es un grupo. Más aún, como $\{U_t\}$ es un grupo unitario de un solo parámetro, entonces $U_sU_t = U_{s+t} = U_tU_s$, de modo que el grupo $\mathscr{G}$ es abeliano.

Finalmente, sean $W_1(u)\Gamma(U_s)W_{-1}(u)$ y $W_1(u)\Gamma(U_t)W_{-1}(u)$ elementos de $\mathscr{W}\mathscr{G}(u)$. Entonces

$$\begin{aligned}
& [W_1(u)\Gamma(U_s)W_{-1}(u)][W_1(u)\Gamma(U_t)W_{-1}(u)] \\
= \; & [W_1(u)\Gamma(U_s)][W_{-1}(u)W_1(u)][\Gamma(U_t)W_{-1}(u)] \\
= \; & [W_1(u)\Gamma(U_s)]I[\Gamma(U_t)W_{-1}(u)] \\
= \; & [W_1(u)\Gamma(U_s)][\Gamma(U_t)W_{-1}(u)] \\
= \; & W_1(u)[\Gamma(U_s)\Gamma(U_t)]W_{-1}(u) \\
= \; & W_1(u)\Gamma(U_sU_t)W_{-1}(u).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathscr{W}\mathscr{G}(u)$ es cerrado bajo multiplicación y

$$[W_1(u)\Gamma(U_s)W_{-1}(u)][W_1(u)\Gamma(U_t)W_{-1}(u)] = W_1(u)\Gamma(U_sU_t)W_{-1}(u).$$

Por todo lo anterior, es claro que $W_1(u)\Gamma(I)W_{-1}(u) = I$ es el neutro multiplicativo y los inversos vienen dados como

$$[W_1(u)\Gamma(U_s)W_{-1}(u)]^{-1} = W_1(u)\Gamma(U_s^{-1})W_{-1}(u).$$

Luego, $\mathscr{W}\mathscr{G}(u)$ es un grupo y, nuevamente, por ser $U_sU_t = U_{s+t} = U_tU_s$, el grupo $\mathscr{W}\mathscr{G}(u)$ es abeliano.

□

Proposición 2.10. *$W_t(u)$ mapea a los vectores exponenciales en $\mathcal{E}$, y por tanto, $\mathcal{E}$ es invariante para este operador.*

Demostración. Es inmediata de la definición de $W_t(u)$.

□

Teorema 2.11. *Sean $\phi \in \mathcal{E}(h)$, $u \in H$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\lim_{t\to 0} \frac{W_t(u) - I}{t}\phi = (a^\dagger(u) - a(u))\phi.$$

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, y supongamos que ϕ es el vector exponencial $\phi = e(f)$. Es suficiente con probar el enunciado para este caso particular de ϕ, pues los vectores exponenciales generan a $\mathcal{E}$.

$$\frac{W_t(u) - I}{t}e(f)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{t}[W_t(u)e(f) - e(f)] \\
&= \frac{1}{t}[\Phi(e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2}, tu, I, -tu)e(f) - e(f)] \\
&= \frac{1}{t}[e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2} e^{a^\dagger(tu)}\Gamma(I)e^{a(-tu)}e(f) - e(f)] \\
&= \frac{1}{t}[e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2} e^{a^\dagger(tu)}\Gamma(I)e^{\langle -tu,f\rangle}e(f) - e(f)] \\
&= \frac{1}{t}[e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2} e^{\langle -tu,f\rangle} e^{a^\dagger(tu)}e(f) - e(f)] \\
&= \frac{1}{t}[e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2 - \langle tu,f\rangle} e^{a^\dagger(tu)}e(f) - e(f)] \\
&= \frac{1}{t}[e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2 - \langle tu,f\rangle} e(f+tu) - e(f)] \\
&= \frac{1}{t}[e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2 - \langle tu,f\rangle} e(f+tu) - e(f)] \\
&= \frac{1}{t}[e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2 - \langle tu,f\rangle} [e(f+tu) - e(f) + e(f)] - e(f)] \\
&= \frac{1}{t}[e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2 - \langle tu,f\rangle} [e(f+tu) - e(f)] + (e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2 - \langle tu,f\rangle} - 1)e(f)] \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2 - \langle tu,f\rangle} \frac{e(f+tu) - e(f)}{t} + \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2\|u\|^2 - t\langle u,f\rangle} - 1}{t} e(f) \\
&\to e^0 a^\dagger(u)e(f) + [e^{-\frac{1}{2}t^2\|u\|^2 - t\langle u,f\rangle}(-t\|u\| - \langle u,f\rangle)]|_{t=0} e(f) \\
&= a^\dagger(u)e(f) - \langle u,f\rangle e(f) \\
&= a^\dagger(u)e(f) - a(u)e(f) \\
&= [a^\dagger(u) - a(u)]e(f).
\end{aligned}
$$

$\square$

Análogamente se demuestra el siguiente

Teorema 2.12. *Sean $\phi \in \mathcal{E}(h)$, $S \in \mathbb{B}(H)$, $u \in H$ y $t \in \mathbb{R}$.*

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{\Gamma[\exp(itS)] - I}{t}\phi = \lambda(iS)\phi, \\
&\lim_{t\to 0} \frac{W_{-1}(u)\Gamma(\exp(itS))W_1(u) - I}{t}\phi = (a^\dagger(u) + \lambda(iS) - a(u))\phi.
\end{aligned}
$$

Teorema 2.13.

$\langle e(0), W_t(u)e(0)\rangle = e^{-\frac{t^2}{2}\|u\|^2}$ y $\langle e(0), W_{-1}(u)\Gamma(e^{itS})W_1(u)e(0)\rangle = e^{\langle u,(e^{itS}-I)u\rangle}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\langle e(0), W_t(u)e(0)\rangle &= \langle e(0), \Phi(e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2}, tu, I, -tu)e(0)\rangle \\
&= \langle e(0), e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2} e^{a^\dagger(tu)} e^{a(-tu)} e(0)\rangle \\
&= \langle e(0), e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2} e^{a^\dagger(tu)} e(0)\rangle \\
&= \langle e(0), e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2} e(tu)\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2}\langle e(0), e(tu)\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2} e^{\langle 0,tu\rangle} \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}\|u\|^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle e(0), W_{-1}(u)\Gamma(e^{itS})W_1(u)e(0)\rangle &= e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2}\langle e(0), W_{-1}(u)\Gamma(e^{itS})e(u)\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2}\langle e(0), W_{-1}(u)e(e^{itS}u)\rangle \\
&= e^{-\|u\|^2} e^{\langle u,e^{itS}u\rangle}\langle e(0), e(e^{itS}u-u)\rangle \\
&= e^{-\langle u,u\rangle+\langle u,e^{itS}u\rangle} \\
&= e^{\langle u,(e^{itS}-I)u\rangle}.
\end{aligned}$$

□

Una familia uniparamétrica $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores unitarios en un espacio de Hilbert H se dice *fuertemente continua* si, para todos $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\phi \in H$, se tiene

$$\lim_{t\to t_0} U_t\phi = U_{t_0}\phi,$$

y además, $U_tU_s = U_{s+t}$ para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$. Es de notar que, por la última condición, $U_0 = U_0^2$, y como U_t es unitario, entonces $U_0 = I$. Enunciamos un resultado clásico de la Teoría de Operadores, cuya demostración puede verse en [13], págs. 73-74, y el cual será utilizado en la siguiente Sección.

Teorema 2.14. *[Versión diferencial de los generadores de Stone] Sea* $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *una familia uniparamétrica fuertemente continua de operadores unitarios en un espacio de Hilbert. Entonces existe un operador autoadjunto* S *no necesariamente acotado con dominio en* H *tal que* $U_t = e^{itS}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Recíprocamente, sea S *autoadjunto no necesariamente acotado con dominio* $D \subseteq H$. *Entonces la familia* $U_t = e^{itS}$ *es una familia uniparamétrica fuertemente continua de operadores unitarios.*

En estas condiciones, se cumple que $S\phi = -i\frac{d}{dt}U_t|_{t=0}\phi$ *para todo* $\phi \in D$. *Es decir,*

$$S\phi = -i \lim_{t\to 0} \frac{U_t - I}{t}\phi.$$

Informalmente, el Teorema anterior nos dice que existe una correspondencia biyectiva entre los grupos uniparamétricos fuertemente continuos de operadores unitarios $\{U_t\}$ y los operadores autoadjuntos S dada por $S = -i\frac{d}{dt}U_t|_{t=0}$, donde $U_t = e^{itS}$, y $t \in \mathbb{R}$.

2.2. Procesos adaptados y las tres Martingalas Fundamentales

Sea $H = L^2(\mathbb{R}_+)$. Consideremos el espacio de Fock $\mathcal{F}(H)$, que denotaremos como $\mathfrak{H}$. Es claro que $L^2(\mathbb{R}_+) = L^2[0,t] \bigoplus L^2(t,\infty)$ para todo $t \geq 0$. Escribamos H_t y H^t para referirnos a estos subespacios, llamados *espacios pasado y futuro de* t, respectivamente. Por la propiedad exponencial,

$$\mathfrak{H} = \mathcal{F}(L^2[0,t]) \bigotimes \mathcal{F}(L^2(t,\infty)) = \mathfrak{H}_t \otimes \mathfrak{H}^t,$$

donde $\mathfrak{H}_t = \mathcal{F}(H_t)$ y $\mathfrak{H}^t = \mathcal{F}(H^t)$. Abreviamos $\mathcal{E}(H)$ simplemente como $\mathcal{E}$.

Si $f \in H = H_t \bigoplus H^t$, con $f = f_t \oplus f^t$, entonces $e(f) = e(f_t) \otimes e(f^t)$. La descomposición anterior de f en suma directa y en producto tensorial es llamada *partición de* f *en* t.

Sea $\mathrm{Loc} = \{f \in H : f$ es acotada en cada intervalo finito de $\mathbb{R}_+\}$, y llamemos $\mathcal{E}_*$ al subespacio de $\mathcal{E}$ generado por los vectores exponenciales asociados a todo Loc: $\mathcal{E}_* =< e(\mathrm{Loc}) >$. Notemos que si $f \in \mathrm{Loc}$, entonces, para cada $t \geq 0$, f_t y f^t también pertenecen a Loc. Se sigue que $\mathrm{Loc} = \mathrm{Loc}_t \bigoplus \mathrm{Loc}^t$ y, por la propiedad exponencial, $\mathcal{E}_*(H) = \mathcal{E}_{*t} \bigotimes \mathcal{E}_*^t$, donde cada uno de los conjuntos Loc_t, Loc^t, $\mathcal{E}_{*t}$ y $\mathcal{E}_*^t$ tiene un significado preciso. El espacio $\mathcal{E}_*$ es llamado *dominio exponencial restringido*.

Lema 2.15. *El conjunto* Loc *es denso en* $H = L^2(\mathbb{R}_+)$.

Demostración. Es claro que toda función simple medible es localmente acotada. Es decir, si denotamos como $\mathcal{S}$ al conjunto de funciones simples medibles en $\mathbb{R}_+$, entonces $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Loc}$. Por lo tanto $\overline{\mathcal{S}} \subseteq \overline{\mathrm{Loc}}$. Pero $\overline{\mathcal{S}} = L^2(\mathbb{R}_+)$, de donde se sigue lo pedido.

□

Teorema 2.16. *El dominio exponencial restringido es denso en* $\mathcal{F}(H)$.

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{F}(H)$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe un elemento $g = z_1 e(f_1) + \cdots + z_n e(f_n)$ en $< e(H) >$ tal que $g \in B(\phi; \epsilon/2)$, con $z_i \neq 0$ para cualquier $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Como el mapeo e es continuo (Proposición 1.21), y Loc es denso en H (Lema anterior), para cada f_i existe $h_i \in \mathrm{Loc}$ tal que $\|e(f_i) - e(h_i)\| < \frac{\epsilon}{2n|z_i|}$.

Así,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^n z_i e(h_i) - \phi\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^n z_i[e(h_i) - e(f_i) + e(f_i)] - \phi\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^n z_i[e(h_i) - e(f_i)] + \sum_{i=1}^n z_i e(f_i) - \phi\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^n z_i[e(h_i) - e(f_i)]\right\| + \left\|\sum_{i=1}^n z_i e(f_i) - \phi\right\| \\
&< \sum_{i=1}^n |z_i| \|e(h_i) - e(f_i)\| + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \sum_{i=1}^n |z_i| \frac{\epsilon}{2n|z_i|} + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

$$= \quad \epsilon.$$

Como $\sum_{i=1}^{n} z_i e(h_i) \in \mathcal{E}_*$, este conjunto es denso en $\mathcal{F}(H)$.

□

Teorema 2.17. *El conjunto* $\{e(f) : f \in \mathrm{Loc}\}$ *es total en* $\mathcal{F}(H)$.

Demostración. Basta con usar la densidad de $\mathcal{E}_*$ y el hecho de que $\{e(f) : f \in H\}$ es total en $\mathcal{F}(H)$.

□

En adelante, todos los operadores en el espacio de Fock serán definidos en un dominio que contiene a $\mathcal{E}_*$, y tendrán la propiedad de que los dominios de sus adjuntos contienen a $\mathcal{E}_*$. Los operadores con esta propiedad son llamados *operadores admisibles*. Es decir, S es admisible si $\mathcal{E}_* \subseteq D(S) \cap D(S^*)$. Si S es admisible, denotamos con $S^\dagger$ a la restricción de su adjunto al dominio exponencial restringido: $S^\dagger = S^*|_{\mathcal{E}_*}$.

Lema 2.18. *Si* S *es admisible, entonces* $S^\dagger$ *también.*

Demostración. Sea S admisible. Queremos verificar que $\mathcal{E}_* \subseteq D(S^\dagger) \cap D((S^\dagger)^*)$.

Como $S^\dagger = S^*|_{\mathcal{E}_*}$, entonces $D(S^\dagger) = \mathcal{E}_*$. Por tanto basta con ver que $\mathcal{E}_* \subseteq D((S^\dagger)^*)$. Sea $f \in \mathrm{Loc}$. Por definición, $e(f)$ estará en $D((S^\dagger)^*)$ si y solo si el mapeo $u \mapsto \langle e(f), S^\dagger u\rangle$, de $D(S^\dagger)$ a $\mathbb{C}$, es continuo en $0 \in D(S^\dagger)$.

Sea $\{u_n\} \subseteq D(S^\dagger) = \mathcal{E}_*$ tal que $u_n \to 0$. Como S es admisible, entonces $\mathcal{E}_* \subseteq D(S^*)$, por lo que $\{u_n\} \subseteq D(S^*)$. Es decir, que para todo $v \in D(S)$, se cumple que $\langle u_n, Sv\rangle = \langle S^* u_n, v\rangle$. En particular, usando nuevamente que S es admisible, y por tanto $\mathcal{E}_* \subseteq D(S)$, se tiene que $e(f) \in D(S)$, y así, $\langle u_n, Se(f)\rangle = \langle S^* u_n, e(f)\rangle$ para todo n.

Luego,

$$\begin{aligned} \langle S^\dagger u_n, e(f)\rangle &= \langle S^*|_{\mathcal{E}_*} u_n, e(f)\rangle \\ &= \langle S^* u_n, e(f)\rangle \\ &= \langle u_n, Se(f)\rangle \\ &\to \langle 0, Se(f)\rangle \end{aligned}$$

$$= \quad 0.$$

Esto implica que el mapeo $u \mapsto \langle e(f), S^\dagger u\rangle$, de $D(S^\dagger)$ a $\mathbb{C}$, es continuo en $0 \in D(S^\dagger)$, y por lo tanto $e(f) \in D((S^\dagger)^*)$, lo cual concluye la prueba.

□

Notemos que las restricciones de creación, aniquilación y segunda cuantización diferencial son admisibles. En efecto, veamos que $a(u)|_{\mathcal{E}_*}$ es admisible. Como su dominio es, por definición de restricción, $\mathcal{E}_*$, entonces basta con ver que $\mathcal{E}_* \subseteq D([a(u)|_{\mathcal{E}_*}]^*)$. Pero al ser $a(u)|_{\mathcal{E}_*} \subseteq a(u)$ entonces, por el Teorema 1.4, $[a(u)]^* \subseteq [a(u)|_{\mathcal{E}_*}]^*$, y por tanto $D([a(u)]^*) \subseteq D([a(u)|_{\mathcal{E}_*}]^*)$. Pero $\mathcal{E}_* \subseteq \mathcal{E} \subseteq D([a(u)]^*)$, de donde se sigue la contención buscada. La situación con los otros operadores es análoga.

Usaremos la misma notación para estas restricciones. Esto no causa conflicto, ya que, por ejemplo, $(a(u))^\dagger := (a(u))^*|_{\mathcal{E}_*} = a^\dagger(u)|_{\mathcal{E}_*}$.

Pensemos al parámetro $t \in \mathbb{R}_+$ como el tiempo, y definamos un *proceso estocástico cuántico* como una familia indexada $E = \{E(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ de operadores admisibles. En adelante nos referiremos a ellos simplemente como procesos. El *adjunto de un proceso* E, denotado por $E^\dagger$, se define como la colección indexada $\{E(t)^\dagger : t \in \mathbb{R}_+\}$. Un proceso E se dice *adaptado* si, para cada tiempo t, el operador $E(t)$ admite una representación de la forma $E(t) = E_t \bigotimes I$, donde E_t actúa en el espacio de Fock $\mathfrak{H}_t$ mediante el dominio $\mathcal{E}_{*t}$.

Teorema 2.19. *El adjunto de un proceso E sigue siendo un proceso. Además, si E es adaptado, entonces $E^\dagger$ también lo es.*

Demostración. Si E es un proceso y $E(t) \in E$, entonces $E(t)$ es admisible y, por el Lema 2.18, $E(t)^\dagger$ también lo es. Por tanto $E^\dagger$ es un proceso.

Ahora veremos que $E^\dagger$ es adaptado cuando E lo es. Sea $t \in \mathbb{R}_+$, y $E(t) \in E$. Por definición de proceso adaptado, $E(t)$ se puede escribir como $E(t) = E_t \bigotimes I$. Tomemos $f \in \mathrm{Loc}$, con $f = f_t \oplus f^t$. Entonces

$$\begin{aligned} E(t)^\dagger e(f) &= E(t)^* e(f) \\ &= (E_t \bigotimes I)^*(e(f_t) \otimes e(f^t)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(E_t^* \bigotimes I\right)(e(f_t) \otimes e(f^t)) \\
&= E_t^* e(f_t) \otimes I e(f^t) \\
&= E_t^*|_{\mathcal{E}_{*t}} e(f_t) \otimes I e(f^t) \\
&= \left(E_t^\dagger \bigotimes I\right)(e(f_t) \otimes e(f^t)).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $E(t)^\dagger = E_t^\dagger \bigotimes I$, donde $E_t^\dagger$ actúa en $\mathcal{E}_{*t}$. Esto muestra que $E^\dagger$ es un proceso adaptado.

$\square$

Un proceso adaptado E se dice *martingala cuántica* si tiene la propiedad de que para cualesquiera tiempos $s \leq t$ y $f, h \in H_*$, donde estas funciones se anulan en (s, ∞), se cumple $\langle e(f), E(t)e(g)\rangle = \langle e(f), E(s)e(g)\rangle$.

Sea $f \in H = L^2(\mathbb{R}_+)$. Denotemos con $m(f)$ al operador en H dado por la multiplicación por f: $m(f)g = fg$. Para cada $t \in \mathbb{R}_+$, definamos $A(t)$, $A^\dagger(t)$ y $\Lambda(t)$ como

$$A(t) = a(1_{[0,t]})$$

$$A^\dagger(t) = a^\dagger(1_{[0,t]})$$

$$\Lambda(t) = \lambda(m(1_{[0,t]})).$$

Dado que los anteriores son casos particulares de aniquilación, creación y segunda cuantización diferencial, entonces son admisibles y, además, $A(t)^\dagger = A(t)^*|_{\mathcal{E}_*} = [a(1_{[0,t]})]^*|_{\mathcal{E}_*} = a^\dagger(1_{[0,t]}) = A^\dagger(t)$. Luego, tiene sentido hablar de los procesos A, $A^\dagger$ y Λ. De hecho:

Teorema 2.20. *Los procesos A, $A^\dagger$ y Λ son martingalas cuánticas.*

Demostración. Verifiquemos primero que los tres procesos son adaptados. Sea $t \in \mathbb{R}_+$ fija. Tomemos $f \in \mathrm{Loc}$, con partición $f = f_t \oplus f^t$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
A(t)e(f) &= a(1_{[0,t]})e(f) \\
&= \langle 1_{[0,t]}, f\rangle e(f) \\
&= \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\,[e(f_t) \otimes e(f^t)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x \cdot e(f_t)\right] \otimes e(f^t) \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}_+} f_t(x)\,\mathrm{d}x \cdot e(f_t)\right] \otimes e(f^t).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $A(t) = A_t \bigotimes I$, donde A_t es la extensión lineal a todo $\mathcal{E}_t$ del mapeo $e(f_t) \mapsto \int f_t\,\mathrm{d}x \cdot e(f_t)$, y así, A es adaptado.

Por otra parte, como $A^\dagger(t) \subseteq A(t)^*$, entonces $A^\dagger$ es también adaptado (Teorema 2.19). Veamos ahora que Λ es adaptado. Sea $z \in \mathbb{C}$. Nótese que

$$
\begin{aligned}
& e(\exp(zm(1_{[0,t]}))f) - e(f) \\
= \;& e\left(f + z1_{[0,t]}f + \frac{z^2}{2!}1_{[0,t]}f + \cdots\right) - e(f) \\
= \;& e\left(f + zf_t + \frac{z^2}{2!}f_t + \cdots\right) - e(f) \\
= \;& e\left(f_t \oplus f^t + z(f_t \oplus 0) + \frac{z^2}{2!}(f_t \oplus 0)\right) - e(f_t \oplus f^t) \\
= \;& e\left(f_t + zf_t + \frac{z^2}{2!}f_t + \cdots, f^t + 0 + 0 + \cdots\right) - e(f_t, f^t) \\
= \;& e(\exp(zI)f_t, f^t) - e(f_t, f^t) \\
= \;& e(\exp(zI)f_t) \otimes e(f^t) - e(f_t) \otimes e(f^t) \\
= \;& [e(\exp(zI)f_t) - e(f_t)] \otimes e(f^t).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\dfrac{e(\exp(zm(1_{[0,t]}))f) - e(f)}{z} = \dfrac{e(\exp(zI)f_t) - e(f_t)}{z} \otimes e(f^t)$. Haciendo $z \to 0$ se tiene la forma buscada.

Ahora veamos que los procesos anteriores son martingalas cuánticas. Para ello, usaremos el Teorema 2.5. Sean $s, t \in \mathbb{R}_+$, con $s \leq t$, y $f, g \in H_*$, tales que ambas funciones se anulan en (s, ∞). Entonces

$$
\begin{aligned}
\langle e(f), A(t)e(g)\rangle &= \big\langle e(f), a(1_{[0,t]})e(g)\big\rangle \\
&= \langle 1_{[0,t]}, g\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x\ \langle e(f), e(g)\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^s g(x)\,\mathrm{d}x\ \langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \langle 1_{[0,s]}, g\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \big\langle e(f), a(1_{[0,s]})e(g)\big\rangle \\
&= \langle e(f), A(s)e(g)\rangle.
\end{aligned}
$$

Así, A es martingala cuántica. Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
\langle e(f), A^{\dagger}(t)e(g)\rangle &= \big\langle e(f), a^{\dagger}(1_{[0,t]})e(g)\big\rangle \\
&= \langle f, 1_{[0,t]}\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \int_0^t \overline{f(x)}\,\mathrm{d}x\ \langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \int_0^s \overline{f(x)}\,\mathrm{d}x\ \langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \langle f, 1_{[0,s]}\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \big\langle e(f), a^{\dagger}(1_{[0,s]})e(g)\big\rangle \\
&= \langle e(f), A^{\dagger}(s)e(g)\rangle.
\end{aligned}
$$

Esto prueba que $A^{\dagger}$ es martingala cuántica. Finalmente:

$$
\begin{aligned}
\langle e(f), \Lambda(t)e(g)\rangle &= \big\langle e(f), \lambda(m(1_{[0,t]}))e(g)\big\rangle \\
&= \langle f, m(1_{[0,t]})g\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \langle f, 1_{[0,t]}g\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \int_0^t \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x\ \langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \int_0^s \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x\ \langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \langle f, 1_{[0,s]}g\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \langle f, m(1_{[0,s]}), g\rangle\langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \big\langle e(f), \lambda(m(1_{[0,s]}))e(g)\big\rangle \\
&= \langle e(f), \Lambda(s)e(g)\rangle.
\end{aligned}
$$

Esto concluye la prueba.

$\square$

Los procesos anteriores son llamados *procesos de aniquilación, creación y conservación*, respectivamente, y son conocidos como *martingalas fundamentales*. Estos procesos están fuertemente relacionados con los clásicos procesos brownianos y de Poisson. Tal relación será explorada en el Capítulo de Aplicaciones.

2.3. Integración Estocástica Cuántica de Procesos Simples

Construiremos ahora la Integral Estocástica Cuántica de forma análoga a la Integral Estocástica Clásica. Es decir, definiéndola para procesos simples y, posteriormente, para procesos más generales. A lo largo de toda la Sección llamaremos K a cualquiera de las martingalas fundamentales.

Teorema 2.21. *Para los tiempos $s \leq t$, la diferencia $K(t) - K(s)$ es de la forma $I \bigotimes K^s(t)$ relativa a la partición al tiempo s, donde $K^s(t)$ es un operador admisible en el espacio futuro $\mathfrak{H}^s$.*

Demostración. Supongamos primero que $K = A$ y $f = f_t \oplus f^t$, con $f \in \mathrm{Loc}$. Los otros casos son similares. Entonces:

$$\begin{aligned}
(K(t) - K(s))e(f) &= (A(t) - A(s))e(f) \\
&= (a(1_{[0,t]}) - a(1_{[0,s]}))e(f) \\
&= \langle 1_{[0,t]} - 1_{[0,s]}, f\rangle [e(f_t) \otimes e(f^t)] \\
&= \langle 1_{(s,t]}, f\rangle [e(f_t) \otimes e(f^t)] \\
&= \int_s^t f(x)\,\mathrm{d}x\ [e(f_t) \otimes e(f^t)] \\
&= e(f_t) \otimes \left[\int_s^t f(x)\,\mathrm{d}x\ e(f^t)\right].
\end{aligned}$$

Sea $A^s(t)e(f^t) = \int_s^t f\,\mathrm{d}x \cdot e(f^t)$. Extendamos linealmente a todo $\mathcal{E}_*^t$, y denotemos de la misma forma a esta extensión. La admisibilidad de $A^s(t)$ es fácil de probar.

□

Para definir la Integral Estocástica Cuántica al estilo de sumas de Riemann, debemos encontrar una manera de operar con productos de la forma $E(s)(K(t) - K(s))$, donde E es un proceso adaptado, por lo que $E(s)$

está definido en el dominio exponencial restringido. Pero $K(s)$ no necesariamente mapea este dominio en sí mismo (por ejemplo si $K(s) = A^\dagger(s)$). Por tanto, el producto anterior no está bien definido en $\mathcal{E}_*$ como producto de operadores. Interviene en este momento la adaptabilidad de E. Recordemos que esto significa que $E(t) = E_t \bigotimes I$ para cualquier tiempo t. *Definimos* entonces el producto anterior como

$$E(s)(K(t) - K(s)) = E_s \bigotimes K^s(t) : \mathcal{E}_{*s} \bigotimes \mathcal{E}_*^s = \mathcal{E}_* \longrightarrow \mathfrak{H}.$$

Siempre que hablemos de productos de operadores *no acotados*, lo haremos en este sentido.

Un proceso adapatado se dice *elemental* si existen tiempos $t_1 < t_2$ tales que, para cualquier tiempo t, se tiene

$$E(t) = \begin{cases} \Theta & \text{si} \quad 0 \leq t < t_1 \\ E(t_1) & \text{si} \quad t_1 \leq t < t_2 \\ \Theta & \text{si} \quad t_2 \leq t. \end{cases}$$

El proceso elemental E puede ser escrito de forma compacta como $E = 1_{[t_1,t_2)}E(t_1)$. Luego, un proceso E es elemental si y solo si existen tiempos $t_1 < t_2$ tales que $E = 1_{[t_1,t_2)}E(t_1)$. En estos términos, para cada $t \geq 0$ se cumple $E(t) = 1_{[t_1,t_2)}(t)E(t_1)$.

Lema 2.22. *Sea $E = 1_{[t_1,t_2)}E(t_1)$ un proceso elemental. Entonces es adaptado si y solo si $E(t_1) = E_{t_1} \bigotimes I$, teniendo $D(E_{t_1}) = \mathcal{E}_{*t_1}$.*

Demostración. Supongamos que E es adaptado. Para cada tiempo t se da la igualdad $E(t) = E_t \bigotimes I$. En particular, $E(t_1) = E_{t_1} \bigotimes I$.

Supongamos ahora que $E(t_1) = E_{t_1} \bigotimes I$. Sea $t \geq 0$. Si $t \notin [t_1, t_2)$, entonces $E(t) = \Theta = \Theta \bigotimes I$. En caso contrario, $E(t) = E(t_1) = E_{t_1} \bigotimes I$, que es lo que se quería probar.

□

Con lo anterior, cuando E es un proceso elemental adaptado, existen tiempos $t_1 < t_2$ y tales que $E = 1_{[t_1,t_2)}(E_{t_1} \bigotimes I)$.

Si $E = 1_{[t_1,t_2)}E(t_1)$ es elemental y adaptado, definimos su *integral estocástica cuántica en el intervalo* $[0,t]$ como

$$M(t) = \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s) = \begin{cases} \Theta & \text{si} \quad 0 \le t < t_1 \\ E(t_1)(K(t) - K(t_1)) & \text{si} \quad t_1 \le t < t_2 \\ E(t_1)(K(t_2) - K(t_1)) & \text{si} \quad t_2 \le t. \end{cases}$$

Definimos su *integral estocástica cuántica en el intervalo* $[a,b]$, con $0 \le a \le b$, como

$$\int_a^b E(s)\,\mathrm{d}K(s) = \int_0^a E(s)\,\mathrm{d}K(s) - \int_0^b E(s)\,\mathrm{d}K(s).$$

En este punto se nos presenta una cuestión técnica. Es posible definir la integral de un proceso elemental y adaptado respecto de una martingala fundamental como

$$\int_{\mathbb{R}_+} E(s)\,\mathrm{d}K(s) = E(t_1)(K(t_2) - K(t_1)),$$

donde este producto es el mismo que ya hemos definido. Nótese que en esta situación, la integral no depende del tiempo.

Luego, siguiendo la construcción de la integral de Lebesgue, se podría definir integración en un cierto subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}_+$ como

$$\int_A E(s)\,\mathrm{d}K(s) = \int_{\mathbb{R}_+} 1_A(s)E(s)\,\mathrm{d}K(s),$$

con lo que en particular podríamos definir de esa manera la integración sobre $[a,b]$, la cual coincide con la definición dada. Sin embargo, pronto nos enfrentamos con el problema de definir convenientemente una $\sigma-$álgebra que contenga a los intervalos y lo suficientemente grande para tener una basta colección de conjuntos en los cuales integrar, en cuyo caso lo más sensato es tomar la σ-álgebra de Borel. Pero ahora tendremos que definir una *medida en operadores no acotados* cuyo dominio sea nuestra σ-álgebra e imagen sea cierta familia de operadores.

Como puede observarse, esto presenta serias dificultades técnicas (aún en el estudio de la Integral Esctocástica Clásica, esta construcción tipo Lebesgue es complicada. Ver [1] y[14]), y el autor de este trabajo considera que tal idea quedaría fuera del propósito de la investigación, tomando en cuenta que nos interesa analizar procesos que dependen del tiempo, y por tanto podremos conformarnos con integrar únicamente en intervalos.

Dicho lo anterior, tomemos t un tiempo arbitrario. Por el Teorema 2.5, $\langle e(f), K(t)e(g)\rangle = \alpha_{K(t)}(f,g)\langle e(f), e(g)\rangle$, donde

$$\begin{aligned}
\alpha_{K(t)}(f,g) &= \begin{cases} \langle 1_{[0,t]}, g\rangle & \text{si} \quad K = A \\ \langle f, 1_{[0,t]}\rangle & \text{si} \quad K = A^\dagger \\ \langle f, m(1_{[0,t]})g\rangle & \text{si} \quad K = \Lambda \end{cases} \\
&= \begin{cases} \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s & \text{si} \quad K = A \\ \int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s & \text{si} \quad K = A^\dagger \\ \int_0^t \overline{f(s)}g(s)\,\mathrm{d}s & \text{si} \quad K = \Lambda. \end{cases}
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $x < y$ son tiempos, entonces

$$\begin{aligned}
&\langle e(f), [K(y) - K(x)]e(g)\rangle \\
= \; &\langle e(f), K(y)e(g)\rangle - \langle e(f), K(x)e(g)\rangle \\
= \; &\alpha_{K(y)}(f,g)\langle e(f), e(g)\rangle - \alpha_{K(x)}(f,g)\langle e(f), e(g)\rangle \\
= \; &[\alpha_{K(y)}(f,g) - \alpha_{K(x)}(f,g)]\langle e(f), e(g)\rangle.
\end{aligned}$$

Por todo lo anterior, concluimos que

$$\begin{aligned}
&\langle e(f), [K(y) - K(x)]e(g)\rangle \\
= \; &\begin{cases} \int_x^y g(s)\,\mathrm{d}s \; \langle e(f), e(g)\rangle & \text{si} \quad K = A \\ \int_x^y \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s \; \langle e(f), e(g)\rangle & \text{si} \quad K = A^\dagger \\ \int_x^y \overline{f(s)}g(s)\,\mathrm{d}s \; \langle e(f), e(g)\rangle & \text{si} \quad K = \Lambda \end{cases} \qquad (2.4) \\
= \; &\int_x^y [\beta_K(f,g)](s)\,\mathrm{d}s \; \langle e(f), e(g)\rangle. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Enunciamos este resultado en el siguiente

Lema 2.23 (Primera Diferencia de Martingalas)**.** *Sean $f, g \in$ Loc y K cualquier martingala fundamental. Si $x < y$ son tiempos, entonces*

$$\langle e(f), [K(y) - K(x)]e(g)\rangle = \int_x^y [\beta_K(f,g)](s)\,\mathrm{d}s \; \langle e(f), e(g)\rangle,$$

donde

$$\beta_K(f,g) = \begin{cases} g & si \quad K = A \\ \overline{f} & si \quad K = A^\dagger \\ \overline{f}g & si \quad K = \Lambda. \end{cases} \tag{2.6}$$

Lema 2.24 (De descomposición)**.** *Sean* $E = 1_{[a,b)}E(a)$ *un proceso adaptado elemental,* $F = F_a \bigotimes I$*, donde* F_a *actúa en* $\mathfrak{H}_{*a}$*, y* K *una martingala fundamental. Entonces, para toda* $t \in [a,\infty)$ *se tiene*

$$\begin{aligned}\left\langle \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(f), Fe(g)\right\rangle \\ = \langle E(a)e(f), Fe(g)\rangle \langle (K(t\wedge b) - K(a))e(f), e(g)\rangle \langle e(f), e(g)\rangle^{-1} \\ = \int_a^{t\wedge b} [\beta_{K^\dagger}(f,g)](s)\,\mathrm{d}s\ \langle E(a)e(f), Fe(g)\rangle\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left\langle Fe(f), \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g)\right\rangle \\ = \langle Fe(f), E(a)e(g)\rangle \langle e(f), (K(t\wedge b) - K(a))e(g)\rangle \langle e(f), e(g)\rangle^{-1} \\ = \int_a^{t\wedge b} [\beta_{K}(f,g)](s)\,\mathrm{d}s\ \langle Fe(f), E(a)e(g)\rangle.\end{aligned}$$

Demostración. Sea $t \geq a$. Por la densidad de $\mathcal{E}_{*a}$, podemos aproximar a $F_a e(g_a)$ por la sucesión de combinaciones lineales finitas $\sum \eta_j e(\tilde{g}_j)$, donde $\tilde{g}_j \in H_{*a}$. Extendamos a las $\tilde{g}_j$ a elementos de H_* haciendo $g_j = \tilde{g}_j + 1_{(a,\infty)}g$. Notemos que, por la continuidad y multilinealidad del producto tensorial:

$$\begin{array}{rccc} & \sum \eta_j e(\tilde{g}_j) & \longrightarrow & F_a e(g_a) \\ \Rightarrow & (\sum \eta_j e(\tilde{g}_j)) \otimes e(g^a) & \longrightarrow & F_a e(g_a) \otimes e(g^a) \\ \Rightarrow & \sum \eta_j (e(\tilde{g}_j) \otimes e(g^a)) & \longrightarrow & Fe(g) \\ \Rightarrow & \sum \eta_j e(\tilde{g}_j + g^a) & \longrightarrow & Fe(g) \\ \Rightarrow & \sum \eta_j e(g_j) & \longrightarrow & Fe(g). \end{array}$$

Así, por la definición del producto $E(a)(K(t\wedge b) - K(a))$,

$$\left\langle \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(f), Fe(g)\right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle E(a)(K(t\wedge b)-K(a))e(f), Fe(g)\rangle \\
&= \langle [E_a \otimes K^a(t\wedge b)][e(f_a)\otimes e(f^a), [F_a\otimes I][e(g_a)\otimes e(g^a)]\rangle \\
&= \langle E_a e(f_a), F_a e(g_a)\rangle \langle K^a(t\wedge b)e(f^a), e(g^a)\rangle \\
&= \lim \sum \eta_j \langle E_a e(f_a), e(\tilde{g}_j)\rangle \langle K^a(t\wedge b)e(f^a), e(g^a)\rangle \\
&= \lim \sum \eta_j \langle E_a e(f_a), e(\tilde{g}_j)\rangle \langle e(f^a), e(g^a)\rangle \\
&\quad \times \langle e(f^a), e(g^a)\rangle^{-1} \langle K^a(t\wedge b)e(f^a), e(g^a)\rangle \\
&= \lim \sum \eta_j \langle E_a e(f_a)\otimes e(f^a), e(\tilde{g}_j)\otimes e(g^a)\rangle \\
&\quad \times \langle e(f^a), e(g^a)\rangle^{-1} \langle e(f_a), e(g_a)\rangle^{-1} \\
&\quad \times \langle e(f_a), e(g_a)\rangle \langle K^a(t\wedge b)e(f^a), e(g^a)\rangle \\
&= \lim \sum \eta_j \langle E(a)e(f), e(\tilde{g}_j + g^a)\rangle \\
&\quad \times \langle e(f), e(g)\rangle^{-1} \\
&\quad \times \langle (K(t\wedge b)-K(a))e(f), e(g)\rangle \\
&= \left\langle E(a)e(f), \lim \sum \eta_j e(g_j)\right\rangle \langle e(f), e(g)\rangle^{-1} \\
&\quad \times \langle (K(t\wedge b)-K(a))e(f), e(g)\rangle \\
&= \langle E(a)e(f), Fe(g)\rangle \langle e(f), e(g)\rangle^{-1} \langle (K(t\wedge b)-K(a))e(f), e(g)\rangle.
\end{aligned}
$$

Usando ahora la definición de β_K, dada por (2.6), se tiene lo deseado.

□

Teorema 2.25 (Primera Forma Fundamental para Procesos Elementales)**.** *Sea E un proceso elemental. Entonces, para f y g cualesquiera en H_* y $t > 0$ se tiene*

a) $\displaystyle \left\langle e(f), \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}A(s)\ e(g)\right\rangle = \int_0^t \langle e(f), g(s)E(s)e(g)\rangle\ \mathrm{d}s.$

b) $\displaystyle \left\langle e(f), \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s)\ e(g)\right\rangle = \int_0^t \left\langle e(f), \overline{f(s)}E(s)e(g)\right\rangle\ \mathrm{d}s.$

c) $\displaystyle \left\langle e(f), \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}\Lambda(s)\ e(g)\right\rangle = \int_0^t \left\langle e(f), \overline{f(s)}g(s)E(s)e(g)\right\rangle\ \mathrm{d}s.$

O brevemente,

$$\langle e(f), M(t)e(g)\rangle = \int_0^t \langle e(f), [\beta_K(f,g)](s)E(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s, \tag{2.7}$$

donde $M(t) = \displaystyle\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)$*, siendo* K *cualquier martingala fundamental.*

Demostración. Tomemos $E = 1_{[t_1,t_2)}E(t_1)$. Si $t < t_1$, entonces $E(t) = \Theta$ y, por definición de integral estocástica de un proceso elemental, ambos lados de la ecuación (2.7) se anulan y por tanto se tiene la igualdad. Supongamos $t \geq t_1$. Por el Lema de Descomposición (Lema 2.24), tomando $F = I$, tendremos

$$\begin{aligned}
\left\langle e(f), \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g) \right\rangle &= \int_{t_1}^{t\wedge t_2} \beta_K(f,g)(s)\,\mathrm{d}s\ \langle e(f), E(t_1)e(g)\rangle \\
&= \int_{t_1}^{t\wedge t_2} \beta_K(f,g)(s)\langle e(f), E(t_1)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \beta_K(f,g)(s)\langle e(f), E(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

En conclusión:

$$\left\langle e(f), \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g) \right\rangle = \int_0^t \langle e(f), \beta_K(f,g)E(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s.$$

De lo anterior y (2.6) se sigue lo pedido.

□

Corolario 2.26. *Sea* $E = 1_{t_1,t_2}E(t_1)$ *un proceso elemental adaptado. Si* $M(t) = \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)$*, entonces* M *es un proceso adaptado y*

$$M^\dagger(t) = \int_0^t E^\dagger(s)\,\mathrm{d}K^\dagger(s).$$

Extendamos el concepto de integral estocástica cuántica a procesos simples de manera natural, definiendo la integral de una suma finita de procesos elementales como la suma de las integrales de los sumandos. Es claro que un proceso simple puede tener dos representaciones distintas como suma de procesos elementales, de tal modo que se nos presenta el inconveniente de verificar que esta definición de integración no depende de la representación.

Teorema 2.27. *La integral estocástica cuántica de procesos simples está bien definida.*

Demostración. Sean $\sum_{i=1}^{n} E_i$ y $\sum_{j=1}^{m} F_j$ dos representaciones distintas del proceso simple simple E como suma de los procesos elementales E_i y F_j, respectivamente. Luego, para cada E_i y F_j existen intervalos $(a_i, b_i]$ y $(c_j, d_j]$ tales que $E_i = 1_{(a_i,b_i]}E_i(a_i)$ y $F_j = 1_{(c_j,d_j]}F_j(c_j)$.

Sea $t > 0$ un tiempo, y denotemos por $M(t)$ y $N(t)$ a los procesos

$$M(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t E_i(s)\,\mathrm{d}K(s) \text{ y } N(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t F_j(s)\,\mathrm{d}K(s).$$

Queremos probar que $M(t) = N(t)$. Sean $f, g \in H$. Dada la totalidad del conjunto de vectores exponenciales en $\mathcal{F}(H)$, si se cumple $\langle e(f), M(t)e(g)\rangle = \langle e(f), N(t)e(g)\rangle$, habremos terminado:

$$\begin{aligned}
\langle e(f), M(t)e(g)\rangle &= \left\langle e(f), \sum_{i=1}^{n} \int_0^t E_i(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle e(f), \int_0^t E_i(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \langle e(f), [\beta_K(f,g)](s) E_i(s) e(g)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t [\beta_K(f,g)](s) \sum_{i=1}^{n} \langle e(f), E_i(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t [\beta_K(f,g)](s) \sum_{j=1}^{m} \langle e(f), F_j(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= \left\langle e(f), \sum_{j=1}^{m} \int_0^t F_j(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g) \right\rangle \\
&= \langle e(f), N(t)e(g)\rangle.
\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. Nótese el uso de la Primera Forma Fundamental en las tercera y penúltima líneas.

□

Obsérvese que lo dicho en el Corolario 2.26 sigue siendo válido para procesos simples. De la definición de integral de procesos simples podemos ver que ciertas propiedades deseables de la integral se cumplen.

Proposición 2.28. *Sean E y F dos procesos simples y K una martingala fundamental. Entonces*

$$\int_0^t E(s) + F(s)\,\mathrm{d}K(s) = \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s) + \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}K(s)$$

y

$$\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}(A^\dagger(s) + A(s)) = \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s) + \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}A(s).$$

Más aún, si $z \in \mathbb{C}$ es independiente del tiempo, entonces

- $\int_0^t zE(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s) = z\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s)$.

- $\int_0^t zE(s)\,\mathrm{d}A(s) = \overline{z}\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}A(s)$.

Si E, F y G son procesos simples, escribimos

$$\int_0^t [E(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s) + E(s)\,\mathrm{d}\Lambda(s) + E(s)\,\mathrm{d}A(s)]$$

para referirnos a la suma de operadores

$$\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s) + \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}\Lambda(s) + \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}A(s).$$

Bajo esta notación, el Teorema 2.25 se reescribe como

Teorema 2.29 (Primera Forma Fundamental para Procesos Simples)**.** *Si E, F y G son procesos simples entonces, para f y g cualesquiera en H_* y $t > 0$, se tiene*

$$\begin{aligned}&\left\langle e(f), \int_0^t [E(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s) + F(s)\,\mathrm{d}\Lambda(s) + G(s)\,\mathrm{d}A(s)]\ e(g)\right\rangle \\ &\qquad = \int_0^t \left\langle e(f), \left[\overline{f(s)}E(s) + \overline{f(s)}g(s)F(s) + g(s)G(s)\right] e(g)\right\rangle \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Lema 2.30 (Segunda Diferencia de Martingalas)**.** *Sean* $t, c \geq 0$ *y* $f, g \in \mathrm{Loc}$. *Entonces*

$$\begin{aligned}
&\langle e(f), e(g)\rangle^{-1}\langle [K_1(t) - K_1(c)]\, e(f), [K_2(t) - K_2(c)]\, e(g)\rangle \\
&\qquad = 2\int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \\
&\qquad\qquad + \int_c^t \delta_{K_1,K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

donde

$$\delta_{K_1,K_2}(f,g)(s) = \begin{cases} 0 & si \quad K_1 = A \text{ ó } K_2 = A \\ 1 & si \quad K_1 = A^\dagger \text{ y } K_2 = A^\dagger \\ g(s) & si \quad K_1 = A^\dagger \text{ y } K_2 = \Lambda \\ \overline{f(s)} & si \quad K_1 = \Lambda \text{ y } K_2 = A^\dagger \\ \overline{f(s)}g(s) & si \quad K_1 = \Lambda \text{ y } K_2 = \Lambda. \end{cases} \tag{2.8}$$

Demostración. Es aplicación del Corolario 2.7.

□

La versión de la fórmula de integración por partes, al menos para integrandos simples, viene dada en el siguiente resultado. La demostración es bastante técnica y larga, pero la extensión de esta fórmula a integrandos no necesariamente simples es el resultado fundamental del Cálculo Estocástico Cuántico.

Teorema 2.31 (Segunda Forma Fundamental para Procesos Simples)**.** *Sean* E, F *dos procesos simples y* K_1, K_2 *dos martingalas fundamentales (pudiendo ser* $K_1 = K_2$*). Sean*

$$M_1(t) = \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K_1(s) \tag{2.9}$$

$$M_2(t) = \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}K_2(s). \tag{2.10}$$

Entonces para cualesquiera $f, g \in H_*$ *y* $t \in \mathbb{R}_+$ *se tiene*

$$\langle M_1(t)e(f), M_2(t)e(g)\rangle$$

$$
\begin{aligned}
= & \int_0^t \{\langle M_1(s)e(f), \beta_{K_2}(f,g)F(s)e(g)\rangle \\
& + \langle \beta_{K_1}(g,f)E(s)e(f), M_2(s)e(g)\rangle \\
& + \langle [\gamma_{K_1}(f)](s)E(s)e(f), [\gamma_{K_2}(g)](s)F(s)e(g)\rangle\} \,\mathrm{d}s, \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

donde

$$
[\gamma_K(h)](s) = \begin{cases} 1 & si \quad K = A^\dagger \\ h(s) & si \quad K = \Lambda \\ 0 & si \quad K = A. \end{cases} \qquad (2.12)
$$

Demostración. Supongamos que E y F son elementales. Si las fórmulas son ciertas en este caso, lo serán, por aditividad, para los casos de procesos simples. Así, sean $E = 1_{[a,b)}E(a)$ y $F = 1_{[c,d)}F(c)$. Más aún, podemos suponer, sin perder generalidad, que los intervalos $[a,b)$ y $[c,d)$ son disjuntos o coincidentes dada la aditividad de la integral.

Notemos que bajo estas condiciones, la fórmula debe ser demostrada para 18 casos (9 casos cuando $[a,b)$ y $[c,d)$ son disjuntos, y otros nueve cuando son coincidentes):

K_1	A	A	A	$A^\dagger$	$A^\dagger$	$A^\dagger$	Λ	Λ	Λ
K_2	A	$A^\dagger$	Λ	A	$A^\dagger$	Λ	A	$A^\dagger$	Λ

Veamos el caso en que los intervalos $[a,b)$ y $[c,d)$ son disjuntos. Supongamos que $b \le c$. El caso $d \le a$ es análogo. Tomemos un tiempo $t < c$. Entonces $M_2(t) = \Theta$ y el lado izquierdo de (2.11) se anula. Pero si $s \le t < c$, entonces $F(s) = \Theta = M_2(s)$, por lo cual cada sumando del lado derecho se anula y se tiene la igualdad.

Supongamos entonces $t \ge c$. Primero notemos que, por el Corolario 2.26, el proceso M_1 es adaptado. Esto significa

$$
M_1(x) = \left[\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K_1(s)\right]_x \bigotimes I
$$

para cada tiempo x. Luego, tendremos $M_1(t) = \left[\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K_1(s)\right]_c \bigotimes I$ para $t \ge c$. Bajo estas condiciones:

$$
\langle M_1(t)e(f), M_2(t)e(g)\rangle
$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K_1(s)\; e(f), F(c)(K_2(t\wedge d) - K_2(c))e(g)\right\rangle \\
&= \left\langle \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K_1(s)\; e(f), F_c \bigotimes K_2^c(t\wedge d)\; e(g)\right\rangle \\
&= \left\langle \left[\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K_1(s)\right]_c \bigotimes I\; e(f), F_c \bigotimes K_2^c(t\wedge d)\; e(g)\right\rangle \\
&= \left\langle \left[\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K_1(s)\right]_c e(f_c), F_c e(g_c)\right\rangle \langle e(f^c), K_2^c(t\wedge d)e(g^c)\rangle \\
&= \left\langle \left[\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K_1(s)\right]_c e(f_c), F_c e(g_c)\right\rangle \langle e(f^c), e(g^c)\rangle\langle e(f^c), e(g^c)\rangle^{-1} \\
&\quad \times\langle e(f_c), e(g_c)\rangle^{-1}\langle e(f_c), e(g_c)\rangle\; \langle e(f^c), K_2^c(t\wedge d)e(g^c)\rangle \\
&= \left\langle \left[\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K_1(s)\right]_c e(f_c)\otimes Ie(f^c), F_c e(g_c)\otimes Ie(g^c)\right\rangle \\
&\quad \times\langle e(f^c), e(g^c)\rangle^{-1} \\
&\quad \times\langle e(f_c), e(g_c)\rangle^{-1}\langle e(f_c)\otimes e(f^c), Ie(g_c)\otimes K_2^c(t\wedge d)e(g^c)\rangle \\
&= \langle M_1(c)e(f), F(c)e(g)\rangle\; \langle e(f), e(g)\rangle^{-1} \\
&\quad \times\langle e(f), (K_2(t\wedge d) - K_2(c))e(g)\rangle \\
&= \langle M_1(c)e(f), F(c)e(g)\rangle\; \langle e(f), e(g)\rangle^{-1} \int_c^{t\wedge d} [\beta_{K_2}(f,g)](s)\,\mathrm{d}s\; \langle e(f), e(g)\rangle \\
&= \int_c^{t\wedge d} [\beta_{K_2}(f,g)](s)\,\mathrm{d}s\; \langle M_1(c)e(f), F(c)e(g)\rangle \\
&= \int_0^t \langle M_1(s)e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s)F(s)e(g)\rangle\; \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Esto muestra los primeros 9 casos. Vayamos sobre los siguientes 9. Es decir, cuando los intervalos son coincidentes a, digamos, $[c,d)$. Consideremos $E = I_{[c,d)}E(c)$ y $F = I_{[c,d)}F(c)$. Si $t < c$, entonces, análogo al caso anterior, ambos lados de la ecuación (2.11) se anulan. Supongamos $d \geq t \geq c$. El caso $t > d$ es análogo. Así,

$$\begin{aligned}
&\langle M_1(t)e(f), M_2(t)e(g)\rangle \\
&= \langle [E_c \bigotimes K_1^c(t)]e(f), [F_c \bigotimes K_2^c(t)]e(g)\rangle \\
&= \langle E_c e(f_c), F_c e(g_c)\rangle\langle K_1^c(t)e(f^c), K_2^c(t)e(g^c)\rangle \\
&= \langle E(c)e(f), F(c)e(g)\rangle\langle e(f), e(g)\rangle^{-1}
\end{aligned}$$

$$\times\langle [K_1(t)-K_1(c)]e(f),[K_2(t)-K_2(c)]e(g)\rangle. \tag{2.13}$$

La última línea de la ecuación (2.13) junto con el Lema 2.30 nos dice que

$$\begin{aligned} &\langle M_1(t)e(f),M_2(t)e(g)\rangle \\ = \;& \langle E(c)e(f),F(c)e(g)\rangle \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \\ &+\langle E(c)e(f),F(c)e(g)\rangle \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \\ &+\langle E(c)e(f),F(c)e(g)\rangle \int_c^t \delta_{K_1,K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Nótese que el lado derecho de la primera línea y la segunda son iguales. Recordemos que $\mathcal{E}_*$ es el dominio exponencial restringido del espacio de Fock, y se descompone, en particular, como $\mathcal{E}_{*c}\bigotimes\mathcal{E}_*^c$, donde $\mathcal{E}_{*c}$ es denso en el espacio pasado $\mathfrak{H}_{*c}$. Luego, podemos aproximar a $E_ce(f_c)$ y a $F_ce(g_c)$ mediante las sucesiones de combinaciones lineales finitas$\sum\xi_je(\tilde{f}_j)$ y $\sum\eta_je(\tilde{g}_j)$, respectivamente, donde $\tilde{f}_j$ y $\tilde{g}_j$ son elementos de H_{*c}.

Extendamos a $\tilde{f}_j$ y $\tilde{g}_j$ a elementos de Loc haciendo $f_j=1_{[0,c]}\tilde{f}_j+1_{(c,\infty]}f$ y $g_j=1_{[0,c]}\tilde{g}_j+1_{(c,\infty)}g$, de tal manera que $f_j=f$ y $g_j=g$ en (c,∞). De esta forma,

$$\begin{aligned} \langle E(c)e(f),F(c)e(g)\rangle &= \langle E_ce(f_c),F_ce(g_c)\rangle\langle e(f^c),e(g^c)\rangle \\ &= \text{lím}\sum\overline{\xi_j}\langle e(\tilde{f}_j),F_ce(g_c)\rangle\langle e(f^c),e(g^c)\rangle \\ &= \text{lím}\sum\overline{\xi_j}\langle e(\tilde{f}_j)\otimes e(f^c),F_ce(g_c)\otimes e(g^c)\rangle \\ &= \text{lím}\sum\overline{\xi_j}\langle e(f_j),F(c)e(g)\rangle. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Análogamente,

$$\langle E(c)e(f),F(c)e(g)\rangle = \text{lím}\sum\eta_j\langle E(c)e(f),e(g_j)\rangle. \tag{2.16}$$

Usando (2.15) en el primer sumando del lado derecho de la ecuación (2.14), tenemos:

$$\langle E(c)e(f),F(c)e(g)\rangle \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim \sum \overline{\xi_j} \langle e(f_j), F(c)e(g)\rangle \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2)\,\mathrm{d}s_2 \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1)\,\mathrm{d}s_1 \\
&= \lim \sum \overline{\xi_j} \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1) \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2)\langle e(f_j), F(c)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s_2\ \mathrm{d}s_1 \\
&= \lim \sum \overline{\xi_j} \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1) \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2)\langle e(f_j), F(s_2)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s_2\ \mathrm{d}s_1 \\
&= \lim \sum \overline{\xi_j} \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1) \int_c^t \beta_{K_2}(f_j,g)(s_2)\langle e(f_j), F(s_2)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s_2\ \mathrm{d}s_1 \\
&= \lim \sum \overline{\xi_j} \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1) \int_0^t \beta_{K_2}(f_j,g)(s_2)\langle e(f_j), F(s_2)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s_2\ \mathrm{d}s_1 \\
&= \lim \sum \overline{\xi_j} \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1) \left\langle e(f_j), \int_0^t F(s_2)\,\mathrm{d}K_2(s_2)\ e(g)\right\rangle \mathrm{d}s_1 \\
&= \lim \sum \overline{\xi_j} \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1)\, \langle e(f_j), M_2(t)e(g)\rangle\ \mathrm{d}s_1 \\
&= \lim \sum \overline{\xi_j} \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1)\, \langle e(f_j), M_2(s_1)e(g)\rangle\ \mathrm{d}s_1 \\
&= \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1)\langle E(c)e(f), M_2(s_1)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s_1 \\
&= \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1)\langle E(s_1)e(f), M_2(s_1)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s_1 \\
&= \int_0^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s)\langle E(s)e(f), M_2(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \langle \overline{\beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s)} E(s)e(f), M_2(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \langle \beta_{K_1}(g,f)(s) E(s)e(f), M_2(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

En conclusión,

$$
\begin{aligned}
\langle E(c)e(f), F(c)e(g)\rangle \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s& \\
= \int_0^t \langle \beta_{K_1}(g,f)(s) E(s)e(f), M_2(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s.& \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Por otra parte, usando la igualdad (2.16) en el segundo sumando del lado derecho de la ecuación (2.14), tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\langle E(c)e(f), F(c)e(g)\rangle \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \\
= \;& \text{lím} \sum \eta_j \langle E(c)e(f), e(g_j)\rangle \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2)\,\mathrm{d}s_2 \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1)\,\mathrm{d}s_1 \\
= \;& \text{lím} \sum \eta_j \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2) \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1)\langle E(c)e(f), e(g_j)\rangle\,\mathrm{d}s_1\;\mathrm{d}s_2 \\
= \;& \text{lím} \sum \eta_j \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2) \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s_1)\langle E(s_1)e(f), e(g_j)\rangle\,\mathrm{d}s_1\;\mathrm{d}s_2 \\
= \;& \text{lím} \sum \eta_j \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2) \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g_j)(s_1)\langle E(s_1)e(f), e(g_j)\rangle\,\mathrm{d}s_1\;\mathrm{d}s_2 \\
= \;& \text{lím} \sum \eta_j \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2) \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g_j)(s_1)\langle E(s_1)e(f), e(g_j)\rangle\,\mathrm{d}s_1\;\mathrm{d}s_2 \\
= \;& \text{lím} \sum \eta_j \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2) \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g_j)(s_1)\langle e(f), E^\dagger e(g_j)\rangle\,\mathrm{d}s_1\;\mathrm{d}s_2 \\
= \;& \text{lím} \sum \eta_j \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2) \left\langle e(f), \int_c^t E^\dagger(s_1)\,\mathrm{d}K_1^\dagger(s_1)\; e(g_j)\right\rangle \mathrm{d}s_2 \\
= \;& \text{lím} \sum \eta_j \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2) \left\langle e(f), M_1^\dagger(t)e(g_j)\right\rangle \mathrm{d}s_2 \\
= \;& \text{lím} \sum \eta_j \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2) \langle M_1(t)e(f), e(g_j)\rangle\;\mathrm{d}s_2 \\
= \;& \text{lím} \sum \eta_j \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2) \langle M_1(s_2)e(f), e(g_j)\rangle\;\mathrm{d}s_2 \\
= \;& \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2) \langle M_1(s_2)e(f), F(c)e(g)\rangle\;\mathrm{d}s_2 \\
= \;& \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s_2) \langle M_1(s_2)e(f), F(s_2)e(g)\rangle\;\mathrm{d}s_2 \\
= \;& \int_0^t \beta_{K_2}(f,g)(s) \langle M_1(s)e(f), F(s)e(g)\rangle\;\mathrm{d}s \\
= \;& \int_0^t \langle M_1(s)e(f), \beta_{K_2}(f,g)(s)F(s)e(g)\rangle\;\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

En conclusión:

$$\langle E(c)e(f), F(c)e(g)\rangle \int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^t \langle M_1(s)e(f), \beta_{K_2}(f,g)(s)F(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s. \tag{2.18}$$

Ahora, del tercer sumando del lado derecho de la ecuación (2.14) y de la definición de $\delta_{K_1,K_2}(f,g)(s)$ dada por el Lema 2.30, tenemos:

$$\begin{aligned}&\langle E(c)e(f), F(c)e(g)\rangle \int_c^t \delta_{K_1,K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s\\ &= \int_c^t \delta_{K_1,K_2}(f,g)(s)\langle E(c)e(f), F(c)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^t \delta_{K_1,K_2}(f,g)(s)\langle E(s)e(f), F(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

De esta última, se desprende que

$$\langle E(c)e(f), F(c)e(g)\rangle \int_c^t \delta_{K_1,K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s$$
$$= \langle [\gamma_{K_1}(f)]\,(s)e(f), [\gamma_{K_2}(g)]\,(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s, \tag{2.19}$$

donde γ_{K_i} es como en (2.12). Así, sustituyendo las ecuaciones (2.17), (2.18) y (2.19) en los sumandos de la igualdad (2.14), se tiene lo pedido.

□

Una manera equivalente de enunciar el resultado anterior es:

Teorema 2.32. *Sean E_1, F_1, G_1, E_2, F_2 y G_2 procesos simples y denotemos por M_1 y M_2 a los procesos*

$$M_j(t) = \int_0^t [E_j(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s) + F_j(s)\,\mathrm{d}\Lambda(s) + G_j(s)\,\mathrm{d}A(s)].$$

Entonces, para cualesquiera $f, g \in H_*$ y $t \geq 0$ se tiene

$$\langle M_1(t)e(f), M_2(t)e(g)\rangle$$

$$= \int_0^t \Big\{ \Big\langle M_1(s)e(f), \Big[\overline{f(s)}E_2(s) + \overline{f(s)}g(s)F_2(s) + g(s)G_2(s)\Big]\, e(g) \Big\rangle$$
$$+ \Big\langle \Big[\overline{g(s)}E_1(s) + \overline{g(s)}f(s)F_1(s) + f(s)G_1(s)\Big]\, e(f), M_2(s)e(g) \Big\rangle$$
$$+ \langle [E_1(s) + f(s)F_1(s)]\, e(f), [E_2(s) + g(s)F_2(s)]\, e(g)\rangle \Big\} \text{ ds}.$$

2.4. El Proceso de Tiempo

Sea $\phi \in H$ de variación acotada. Introduzcamos el proceso T_ϕ dado por $T_\phi(t) = \phi(t)I$. Es decir, $T_\phi(t)e(f) = \phi(t)e(f)$. Cuando ϕ es la identidad, este proceso es llamado *Proceso de Tiempo*, y se denota por T. Si pensamos por un momento al proceso T_ϕ como un *proceso escalar* y $E = 1_{[t_1,t_2)}E(t_1)$ es un proceso elemental, entonces nos gustaría, al menos formalmente, que

$$\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}T_\phi(s) = \begin{cases} \Theta & \text{si} \quad 0 < t < t_1 \\ (\phi(t) - \phi(t_1))E(t_1) & \text{si} \quad t_1 \le t < t_2 \\ (\phi(t_2) - \phi(t_1))E(t_1) & \text{si} \quad t_2 \le t. \end{cases}$$

De esta forma, definimos la *integral de un proceso elemental respecto al proceso* T_ϕ de la manera anterior, y como se hizo en la Sección pasada, la integral de un proceso simple respecto a este proceso será la suma de las integrales de sus sumandos, lo cual está bien definido.

Luego, es sencillo probar que

$$\left\langle e(f), \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}T_\phi(s)\ e(g) \right\rangle = \int_0^t \langle e(f), E(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}\phi(s). \tag{2.20}$$

La introducción de estos procesos como integradores sirve para tener una noción de integración respecto a una variable determinista, y no respecto a una variable estocástica, justo como sucede con la Integral Estocástica Clásica.

En adelante, por simplicidad en los argumentos, enunciaremos y demostraremos resultados únicamente para el proceso de Tiempo, no obstante todos son generalizables para cualquier proceso T_ϕ.

Proposición 2.33. *Sean E y F dos procesos simples y $f, g \in H_*$. Tomemos los procesos $J_1(t) = \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}T(s)$ y $J_2(t) = \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}T(s)$. Entonces*

$$\begin{aligned} \langle J_1(t)e(f), J_2(t)e(g)\rangle &= \int_0^t \langle J_1(s)e(f), F(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t \langle E(s)e(f), J_2(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Demostración. Por la aditividad de la integral y del producto interno, bastará con demostrar lo pedido en el caso en que E y F son elementales. Sean $E = 1_{[a,b)}E(a)$ y $F = 1_{[c,d)}F(c)$. Nuevamente, como ya se hizo antes, será suficiente con demostrar lo pedido en los casos en que $[a, b)$ y $[c, d)$ son disjuntos o coincidentes. Supongamos que son disjuntos. Más aún, podemos suponer $b \leq c$.

Sea $t < c$. Entonces $J_2(t) = \Theta$, y por tanto el lado izquierdo de la igualdad pedida es 0, así como los sumandos del lado derecho. Luego, se tiene la igualdad deseada. Si $c \leq t < d$, entonces

$$\begin{aligned} \langle J_1(t)e(f), J_2(t)e(g)\rangle &= (b-a)(t-c)\langle E(a)e(f), F(c)e(d)\rangle \\ &= \int_c^t (b-a)\langle E(a)e(f), F(c)e(d)\rangle\,\mathrm{d}s \\ &= \int_c^t \langle J_1(s)e(f), F(c)e(d)\rangle\,\mathrm{d}s \\ &= \int_c^t \langle J_1(s)e(f), F(s)e(d)\rangle\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Pero el segundo sumando de la igualdad pedida es 0 dado que $E(s) = \Theta$ para $s > b$. Así, nuevamente se tiene la igualdad deseada. El caso en que $t \geq b$ es totalmente análogo. Supongamos ahora que los intervalos son coincidentes: $a = c$ y $b = d$. Sea t un tiempo. Si $t < a$, ya terminamos. Si $t \in [a, b)$, entonces:

$$\begin{aligned} \langle J_1(t)e(f), J_2(t)e(g)\rangle &= (t-a)^2\langle E(a)e(f), F(a)e(g)\rangle \\ &= \int_a^t 2(s-a)\langle E(a)e(f), F(a)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s \\ &= \int_a^t (s-a)\langle E(a)e(f), F(a)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_a^t (s-a)\langle E(a)e(f), F(a)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\
=&\int_a^t \langle (s-a)E(s)e(f), F(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\
&+\int_a^t \langle E(s)e(f), (s-a)F(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\
=&\int_a^t \langle J_1(s)e(f), F(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\
&+\int_a^t \langle E(s)e(f), J_2(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

que es la igualdad buscada. El caso $t \geq b$ es análogo. Esto concluye la prueba. □

Proposición 2.34. *Sean J y M los procesos dados por $J(t) = \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}T(s)$ y $M(t) = \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)$, donde E y F son procesos simples. Entonces:*

$$
\begin{aligned}
&\langle M(t)e(f), J(t)e(g)\rangle\\
=&\int_0^t \langle M(s)e(f), F(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t \langle [\beta_K(g,f)](s)E(s)e(f), J(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&\langle J^\dagger(t)e(f), M(t)e(g)\rangle\\
=&\int_0^t \langle F^\dagger(s)e(f), M(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t \langle F^\dagger(s)e(f), [\beta_K(f,g)](s)E(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Demostración. Nuevamente, por la adivitivad del producto interno y la integral, si mostramos lo pedido en el caso en que E y F son elementales, tendremos la prueba para procesos simples. De esta manera, sean $E = 1_{[a,b)}E(a)$ y $F = 1_{[c,d)}F(c)$. Más aún, como se hizo anteriormente, podemos suponer que los intervalos $[a,b)$ y $[c,d)$ son disjuntos o coincidentes. Únicamente mostraremos el caso en que son coincidentes: $a=c$ y $b=d$.

Sea $t\geq 0$. Si $t<a$, ambas igualdades son claras. Supongamos $a\leq t<b$. Por el Lema de Descomposición (Lema 2.24),

$$\begin{aligned}\langle M(t)e(f),J(t)e(g)\rangle &= (t-a)\langle M(t)e(f),F(a)e(g)\rangle \\ &= (t-a)\,\langle E(a)e(f),F(a)e(g)\rangle\int_a^t \beta_{K^\dagger}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Esto muestra que la función $t\mapsto\langle M(t)e(f),J(t)e(g)\rangle$ es absolutamente continua y derivable, con derivada

$$\begin{aligned}&(t-a)\langle E(a)e(f),F(a)e(g)\rangle\beta_{K^\dagger}(f,g)(t)\\ &\qquad\qquad+\langle E(a)e(f),F(a)e(g)\rangle\int_a^t\beta_{K^\dagger}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}&\int_0^t\langle M(s)e(f),F(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\int_0^t\langle[\beta_K(g,f)](s)E(s)e(f),J(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\ =&\int_a^t\langle M(s)e(f),F(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\int_a^t\langle[\beta_K(g,f)](s)E(s)e(f),J(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\ =&\int_a^t\langle M(s)e(f),F(a)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\int_a^t(s-a)\overline{[\beta_K(g,f)](s)}\langle E(a)e(f),F(a)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\ =&\int_a^t\langle M(s)e(f),F(a)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\\ &\quad+\int_a^t(s-a)[\beta_{K^\dagger}(f,g)](s)\langle E(a)e(f),F(a)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

lo cual demuestra que la función $t \mapsto \int_0^t \langle M(s)e(f), F(s)e(g)\rangle\, \mathrm{d}s$ es absolutamente continua y derivable, con derivada

$$\langle M(t)e(f), F(a)e(g)\rangle + (t-a)[\beta_{K^\dagger}(f,g)](t)\langle E(a)e(f), F(a)e(g)\rangle.$$

Pero $\langle M(t)e(f), F(a)e(g)\rangle = \langle E(a)e(f), F(a)e(g)\rangle \int_a^t \beta_{K^\dagger}(f,g)(s)\, \mathrm{d}s$, de donde la derivada anterior es igual a

$$\begin{aligned}\langle E(a)e(f), F(a)e(g)\rangle \int_a^t \beta_{K^\dagger}(f,g)(s)\, \mathrm{d}s \\ + (t-a)[\beta_{K^\dagger}(f,g)](t)\langle E(a)e(f), F(a)e(g)\rangle. \quad (2.24)\end{aligned}$$

Como las expresiones (2.23) y (2.24) son iguales, $\langle M(t)e(f), J(t)e(g)\rangle$ y $\int_0^t \langle M(s)e(f), F(s)e(g)\rangle\, \mathrm{d}s$ difieren por una constante, la cual se verifica fácilmente que es cero, obteniendo la ecuación deseada.

□

Teorema 2.35. *Sean E_1, H_1 y E_2, H_2 dos procesos simples, y K_1, K_2 dos martingalas fundamentales. Si $M_1(t) = \int_0^t \{E_1(s)\, \mathrm{d}K_1(s) + H_1(s)\, \mathrm{d}T(s)\}$ y $M_2(t) = \int_0^t \{E_2(s)\, \mathrm{d}K_2(s) + H_2(s)\, \mathrm{d}T(s)\}$, entonces*

$$\begin{aligned}&\langle M_1(t)e(f), M_2(t)e(g)\rangle \\ &\quad = \int_0^t \langle M_1(s)e(f), [\beta_{K_2}(f,g)E_2(s) + H_2(s)]e(g)\rangle\, \mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t \langle [\beta_{K_1}(g,f)E_1(s) + H_1(s)]e(f), M_2(s)e(g)\rangle\, \mathrm{d}s \\ &\qquad + \int_0^t \langle [\gamma_{K_1}(f)](s)e(f), [\gamma_{K_2}(g)](s)e(g)\rangle\, \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Demostración. Sean $\tilde{M}_i$ y J_i, con $i \in \{1,2\}$, los procesos dados por $\tilde{M}_i(t) = \int_0^t E_i(s)\, \mathrm{d}K_i(s)$ y $J_i(t) = \int_0^t H_i(s)\, \mathrm{d}T(s)$. Entonces $M_i = \tilde{M}_i + J_i$. Luego, por la Proposición 2.34:

$$\begin{aligned}&\langle M_1(t)e(f), M_2(t)e(g)\rangle \\ =\ &\langle [\tilde{M}_1(t) + J_1(t)]e(f), [\tilde{M}_2(t) + J_2(t)]e(g)\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \tilde{M}_1(t)e(f), \tilde{M}_2(t)e(g)\rangle + \langle \tilde{M}_1(t)e(f), J_2(t)e(g)\rangle \\
&\quad + \langle J_1(t)e(f), \tilde{M}_2(t)e(g)\rangle + \langle J_1(t)e(f), J_2(t)e(g)\rangle \\
&= \int_0^t \Big\{ \langle \tilde{M}_1(s)e(f), \beta_{K_2}(f,g)E_2(s)e(g)\rangle \\
&\quad + \Big\langle \beta_{K_1}(g,f)E_1(s)e(f), \tilde{M}_2(s)e(g)\Big\rangle \\
&\quad + \langle [\gamma_{K_1}(f)]\,(s)e(f), [\gamma_{K_2}(g)]\,(s)e(g)\rangle \} \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \langle \tilde{M}_1(s)e(f), H_2(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \langle \beta_{K_1}(g,f)E_1(s)e(f), J_2(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \langle H_1(s)e(f), \tilde{M}_2(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \langle J_1(s)e(f), \beta_{K_2}(f,g)E_2(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \langle J_1(s)e(f), H_2(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \langle H_1(s)e(f), J_2(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \langle [\tilde{M}_1(s) + J_1(s)]e(f), \beta_{K_2}(f,g)E_2(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \langle \beta_{K_1}(g,f)E_1(s)e(f), [\tilde{M}_2(s) + J_2(s)]e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \langle [\tilde{M}_1(s) + J_1(s)]e(f), H_2(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \langle H_1(s)e(f), [\tilde{M}_2(s) + J_2(s)]e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \langle [\gamma_{K_1}(f)]\,(s)e(f), [\gamma_{K_2}(g)]\,(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \langle [\tilde{M}_1(s) + J_1(s)]e(f), [\beta_{K_2}(f,g)E_2(s) + H_2(s)]e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \langle [\beta_{K_1}(g,f)E_1(s) + H_1(s)]e(f), [\tilde{M}_2(s) + J_2(s)]e(g)\rangle \,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t \langle [\gamma_{K_1}(f)]\,(s)e(f), [\gamma_{K_2}(g)]\,(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
= \;& \int_0^t \langle M_1(s)e(f), [\beta_{K_2}(f,g)E_2(s) + H_2(s)]e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&+\int_0^t \langle [\beta_{K_1}(g,f)E_1(s) + H_1(s)]e(f), M_2(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&+\int_0^t \langle [\gamma_{K_1}(f)]\,(s)e(f), [\gamma_{K_2}(g)]\,(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

que es lo que se quería demostrar.

□

Teorema 2.36 (Versión Completa de la Segunda Forma Fundamental)**.** *Si*

$$M_1(t) = \int_0^t \big(E_1(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s) + F_1(s)\,\mathrm{d}\Lambda(s) + G_1(s)\,\mathrm{d}A(s) + H_1(s)\,\mathrm{d}T(s)\big) \;\; y$$

$$M_2(t) = \int_0^t \big(E_2(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s) + F_2(s)\,\mathrm{d}\Lambda(s) + G_2(s)\,\mathrm{d}A(s) + H_2(s)\,\mathrm{d}T(s)\big)\,,$$

entonces, para cualesquiera $f, g \in H_*$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
&\langle M_1(t)e(f), M_2(t)e(g)\rangle \\
= \;& \int_0^t \Big\{\Big\langle M_1(s)e(f), \Big(\overline{f(s)}E_2(s) + \overline{f(s)}g(s)F_2(s) + g(s)G_2(s) + H_2(s)\Big)\,e(g)\Big\rangle \\
&+\Big\langle \Big(\overline{g(s)}E_1(s) + f(s)\overline{g(s)}F_1(s) + f(s)G_1(s) + H_1(s)\Big)\,e(f), M_2(s)e(g)\Big\rangle \\
&+\langle (E_1(s) + f(s)F_1(s))\,e(f), (E_2(s) + g(s)F_2(s))\,e(g)\rangle\Big\}\;\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Una vez que tenemos nuestra Segunda Forma Fundamental con el proceso de tiempo incluido, presentamos el análogo para la Primera Forma Fundamental:

Teorema 2.37 (Versión Completa de la Primera Forma Fundamental)**.** *Si E, F, G y L son procesos simples, y $f, g \in H_*$, entonces*

$$\left\langle e(f), \int_0^t \big(E(s)\,\mathrm{d}A(s) + F(s)\,\mathrm{d}\Lambda(s) + G(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s) + L(s)\,\mathrm{d}T(s)\big)\,e(g)\right\rangle$$

$$= \int_0^t \left\langle e(f), (1, \overline{f(s)}) \begin{pmatrix} L(s) & G(s) \\ E(s) & F(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ g(s) \end{pmatrix} e(g) \right\rangle \mathrm{d}s.$$

Demostración. Notemos que el producto interno del lado derecho de la igualdad pedida se desarrolla como

$$\begin{aligned} & \left\langle e(f), (1, \overline{f(s)}) \begin{pmatrix} L(s) & G(s) \\ E(s) & F(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ g(s) \end{pmatrix} e(g) \right\rangle \\ = & \left\langle e(f), (1, \overline{f(s)}) \begin{pmatrix} L(s) + g(s)G(s) \\ E(s) + g(s)F(s) \end{pmatrix} e(g) \right\rangle \\ = & \left\langle e(f), (L(s) + g(s)G(s) + \overline{f(s)}E(s) + \overline{f(s)}g(s)F(s))e(g) \right\rangle. \end{aligned}$$

Basta ahora con aplicar la Primera Forma Fundamental que ya conocemos y el hecho de ser $\left\langle e(f), \int_0^t L(s)\,\mathrm{d}T(s)\; e(g) \right\rangle = \int_0^t \langle e(f), L(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s$ para concluir.

□

2.5. El Estimado Fundamental

Teorema 2.38. *Sea E un proceso simple. Entonces, para $f \in \mathrm{Loc}$ y $t \geq 0$, se tiene*

$$\left\| \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s)\; e(f) \right\|^2 \leq 2\exp\left(\int_0^t |f(s)|^2\,\mathrm{d}s \right) \int_0^t \|E(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s \tag{2.25}$$

$$\left\| \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}A(s)\; e(f) \right\|^2 \leq \exp\left(\int_0^t |f(s)|^2\,\mathrm{d}s \right) \int_0^t \|E(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s. \tag{2.26}$$

Demostración. Haciendo $M_1 = M_2 = M = \int E(s)\,\mathrm{d}K(s)$ y $g = f$ en la Segunda Forma Fundamental:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)\; e(f) \right\|^2 = & \int_0^t \{ \langle M(s)e(f), \beta_K(f,f)(s)E(s)e(f) \rangle \\ & + \langle \beta_K(f,f)(s)E(s)e(f), M(s)e(f) \rangle \\ & + \langle [\gamma_K(f)](s)e(f), [\gamma_K(f)](s)e(f) \rangle \}\,\mathrm{d}s \\ = & \int_0^t 2\mathrm{Re}\langle M(s)e(f), \beta_K(f,f)(s)E(s)e(f) \rangle \\ & + \| [\gamma_K(f)](s)e(f) \|^2\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Se sigue del Teorema Fundamental del Cálculo que la función

$$s \mapsto \|M(s)e(f)\|^2$$

es absolutamente continua y que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\|M(s)e(f)\|^2 \\
&\qquad = 2\mathrm{Re}\langle M(s)e(f), \beta_K(f,f)(s)E(s)e(f)\rangle + \|\left[\gamma_K(f)\right](s)e(f)\|^2 \\
&\qquad\quad = 2\mathrm{Re}\langle \overline{\beta_K(f,f)(s)}M(s)e(f), E(s)e(f)\rangle + \|\left[\gamma_K(f)\right](s)e(f)\|^2
\end{aligned}$$

para casi toda $s \in [0,t]$. Usando la desigualdad $2\mathrm{Re}\langle\psi_1,\psi_2\rangle \leq \|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2$, válida en cualquier espacio de Hilbert, con $\psi_1 = \overline{\beta_K(f,f)(s)}M(s)e(f)$ y $\psi_2 = E(s)e(f)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\|M(s)e(f)\|^2 \\
&\quad \leq |\beta_K(f,f)(s)|^2\|M(s)e(f)\|^2 + \|E(s)e(f)\|^2 + \|\left[\gamma_K(f)\right](s)e(f)\|^2 \\
&\quad = |f(s)|^2\|M(s)e(f)\|^2 + \|E(s)e(f)\|^2 + \|\left[\gamma_K(f)\right](s)e(f)\|^2 \\
&\quad = |f(s)|^2\|M(s)e(f)\|^2 + c\|E(s)e(f)\|^2
\end{aligned}$$

donde, por definición de $\gamma_K(f)(s)$, $c = 1$ si $K = A$, o $c = 2$ si $K = A^\dagger$, y hemos usado el hecho de tener $K = A$ o $K = A^\dagger$, lo cual implica $|\beta_K(f,f)(s)| = |f(s)|$. Multiplicando la desigualdad anterior por

$$\exp\left(-\int_0^s |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right),$$

y tomando en cuenta que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left\{\exp\left(-\int_0^s |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\cdot\|M(s)e(f)\|^2\right\} \\
&\qquad = \exp\left(-\int_0^s |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\frac{d}{ds}\|M(s)e(f)\|^2 \\
&\qquad\quad - \exp\left(-\int_0^s |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)|f(s)|^2\|M(s)e(f)\|^2,
\end{aligned}$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
& \exp\left(-\int_0^s |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\frac{d}{ds}\|M(s)e(f)\|^2 \\
\leq\ & \exp\left(-\int_0^s |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)|f(s)|^2\|M(s)e(f)\|^2 \\
& +c\exp\left(-\int_0^s |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\|E(s)e(f)\|^2,
\end{aligned}
$$

por lo cual

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{ds}\left\{\exp\left(-\int_0^s |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\cdot\|M(s)e(f)\|^2\right\} \\
\leq\ & c\exp\left(-\int_0^s |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\|E(s)e(f)\|^2.
\end{aligned}
$$

Integrando esta desigualdad de 0 a t, y tomando en cuenta que $M(0)e(f) = 0$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
& \exp\left(-\int_0^t |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\cdot\|M(t)e(f)\|^2 \\
& \qquad \leq c\int_0^t \exp\left(-\int_0^s |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\|E(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

o equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
& \|M(t)e(f)\|^2 \\
\leq\ & c\int_0^t \exp\left(\int_0^t |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\cdot\exp\left(-\int_0^s |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\|E(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s \\
=\ & c\int_0^t \exp\left(\int_s^t |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\|E(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Pero en esta última expresión se tiene $\int_s^t |f(r)|^2\,\mathrm{d}r \leq \int_0^t |f(r)|^2\,\mathrm{d}r$, de modo que

$$
\begin{aligned}
\|M(t)e(f)\|^2 &\leq c\int_0^t \exp\left(\int_0^t |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\|E(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s \\
&= c\exp\left(\int_0^t |f(r)|^2\,\mathrm{d}r\right)\int_0^t \|E(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

y de ahí, recordando la definición de c, se sigue el resultado.

$\square$

Las desigualdades anteriores son válidas aún si definiéramos la integral estocástica siendo f cualquier función con cuadrado integrable. De hecho, si únicamente estamos interesados en usar los operadores de creación y aniquilación como integradores, la teoría sería básicamente la misma que hemos trabajado hasta ahora. En contraste, el siguiente estimado, donde se usa el integrador conservación, revela por qué es necesario trabajar con funciones localmente acotadas.

Teorema 2.39. *Sean $f \in \mathrm{Loc}$ y $t \geq 0$. Entonces existe un número $\kappa(f,t)$ no negativo tal que $\kappa(f,s) \leq \kappa(f,t)$ siempre que $s \leq t$ y, para cualquier proceso F simple, se tiene*

$$\left\| \int_0^t F(s)\, \mathrm{d}\Lambda(s)\ e(f) \right\|^2 \leq \kappa(f,t) \int_0^t \|F(s)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}s.$$

Demostración. En la Segunda Forma Fundamental, sean $g = f$ y $M_1 = M_2 = \int F d\Lambda$. Análogamente al proceso para demostrar los estimados anteriores, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\|M(s)e(f)\|^2 &= 2\mathrm{Re}\langle M(s)e(f), |f(s)|^2 F(s)e(f)\rangle + |f(s)|^2\|F(s)e(f)\|^2 \\ &\leq \|M(s)e(f)\|^2 + (|f(s)|^2 + |f(s)|^4)\|F(s)e(f)\|^2.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por e^{-s}:

$$\frac{d}{ds}(e^{-s}\|M(s)e(f)\|^2) \leq e^{-s}(|f(s)|^2 + |f(s)|^4)\|F(s)e(f)\|^2,$$

de donde, integrando de 0 a t y tomando en cuenta que $M(0)e(f) = 0$,

$$\begin{aligned}e^{-t}\|M(t)e(f)\|^2 &\leq \int_0^t e^{-s}(|f(s)|^2 + |f(s)|^4)\|F(s)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^t \sup_{0\leq s\leq t}\{|f(s)|^2 + |f(s)|^4\}\|F(s)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

lo cual implica

$$\|M(t)e(f)\|^2 \leq e^t \sup_{0\leq s\leq t}\{|f(s)|^2 + |f(s)|^4\} \int_0^t \|F(s)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}s$$

$$= \quad \kappa(f,t)\int_0^t \|F(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s,$$

donde $\kappa(f,t)$ es finito, dado que f es localmente acotada, y claramente es no decreciente como función de t. Esto concluye la prueba.

$\square$

Proposición 2.40. *Sean $f \in \mathrm{Loc}$, $t \geq 0$ y E un proceso simple. Entonces*

$$\left\|\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}T(s)\right\|^2 \leq e^t \int_0^t \|E(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s.$$

Demostración. Sea $M(t) = \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}T(s)$. Por la Proposición 2.33:

$$\begin{aligned}
\|M(t)e(f)\|^2 &= \left\|\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}T(s)\ e(f)\right\|^2 \\
&= \int_0^t \langle M(s)e(f), E(s)e(f)\rangle + \langle E(s)e(f), M(s)e(f)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t 2\mathrm{Re}\langle M(s)e(f), E(s)e(f)\rangle\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Esto muestra que la función $s \mapsto \|M(s)e(f)\|^2$ es absolutamente continua y que

$$\frac{d}{ds}\|M(s)e(f)\|^2 = 2\mathrm{Re}\langle M(s)e(f), E(s)e(f)\rangle.$$

Luego, $\frac{d}{ds}\|M(s)e(f)\|^2 \leq \|M(s)e(f)\|^2 + \|E(s)e(f)\|^2$. Así, derivando la expresión $e^{-s}\|M(s)e(f)\|^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(e^{-s}\|M(s)e(f)\|^2\right) \\
&= e^{-s}\frac{d}{ds}\|M(s)e(f)\|^2 - e^{-s}\|M(s)e(f)\|^2 \\
&\leq e^{-s}\left(\|M(s)e(f)\|^2 + \|E(s)e(f)\|^2\right) - e^{-s}\|M(s)e(f)\|^2 \\
&= e^{-s}\|E(s)e(f)\|^2.
\end{aligned}$$

Integrando, y tomando en cuenta que $M(0)e(f) = 0$, concluimos que $e^{-t}\|M(t)e(f)\|^2 \leq \int_0^t e^{-s}\|E(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s$, o equivalentemente,

$$\|M(t)e(f)\|^2 \quad \leq \quad \int_0^t e^{t-s}\|E(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t e^t \|E(s)e(f)\|^2 \, \mathrm{d}s \\
&= e^t \int_0^t \|E(s)e(f)\|^2 \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba.

□

Podemos formular ahora el *Estimado Fundamental* para integrales estocásticas cuánticas de procesos simples, que es la base para extender la integral estocástica.

Teorema 2.41. *Sea $f \in \mathrm{Loc}$ y $t \geq 0$. Entonces existe un número no negativo $\Psi(f,t)$ con la propiedad de que, para cualquier proceso adaptado simple E, y cualquier integrador estocástico $K \in \{A^\dagger, \Lambda, A, T\}$ y $s \in [0,t]$ se cumple*

$$\left\| \int_0^s E(u) \, \mathrm{d}K(u) \; e(f) \right\|^2 \leq \Psi(f,t) \int_0^s \|E(u)e(f)\|^2 \, \mathrm{d}u.$$

Demostración. Observemos que el Teorema 2.38 nos dice que, para $K = A$ ó $K = A^\dagger$,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^s E(r) \, \mathrm{d}K(r) \; e(f) \right\|^2 &\leq 2 \exp\left(\int_0^s |f(r)|^2 \, \mathrm{d}r \right) \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2 \, \mathrm{d}r \\
&\leq 2 \exp\left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(r)|^2 \, \mathrm{d}r \right) \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2 \, \mathrm{d}r \\
&= 2 \exp\left(\|f\|^2 \right) \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2 \, \mathrm{d}r
\end{aligned}$$

para cada $s \leq t$. Por otra parte, por el Teorema 2.39, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^s E(r) \, \mathrm{d}\Lambda(r) \; e(f) \right\|^2 &\leq \kappa(f,s) \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2 \, \mathrm{d}r \\
&\leq \kappa(f,t) \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2 \, \mathrm{d}r
\end{aligned}$$

en $s \leq t$, donde hemos usado el hecho de ser $\kappa(f,\cdot)$ no decreciente. Finalmente, por la Proposición 2.40:

$$\left\| \int_0^s E(r) \, \mathrm{d}T(r) \; e(f) \right\|^2 \leq e^s \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2 \, \mathrm{d}r$$

$$\leq \quad e^t \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}r.$$

En resumen:

$$\left\| \int_0^s E(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f) \right\|^2 \leq \begin{cases} 2e^{\|f\|^2} \displaystyle\int_0^s \|E(r)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}r & \text{si} \quad K = A \text{ ó } K = A^\dagger \\ \kappa(f,t) \displaystyle\int_0^s \|E(r)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}r & \text{si} \quad K = \Lambda \\ e^t \displaystyle\int_0^s \|E(r)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}r & \text{si} \quad K = T. \end{cases}$$

En conclusión, si tomamos $\Psi(f,t) = \text{máx}\left\{2e^{\|f\|^2}, \kappa(f,t), e^t\right\}$, se tiene lo pedido.

$\square$

Notemos que $\Psi(f,t)$ del Teorema anterior no depende del integrando ni del integrador.

2.6. La Integral Extendida

2.6.1. Construcción de la Integral

Recordemos que la Integral Estocástica Clásica respecto al Movimiento Browniano se construye definiéndola sobre procesos clásicos simples como integrandos y, usando la Isometría de Ito, se extiende a una integral de procesos más complejos. En nuestro caso no contamos con dicha isometría, pero el Estimado Fundamental nos da un sustituto capaz de extender nuestra integral cuántica a una mayor clase de procesos.

Definición 2.42. *Decimos que un proceso adaptado E es integrable si, para cualesquiera $f, g \in \mathrm{Loc}$, la función con valores complejos*

$$\mathbb{R}_+ \ni r \mapsto \langle e(g), E(r)e(f)\rangle$$

es Lebesgue medible y existe una sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de procesos adaptados simples con la propiedad de que, para toda $f \in \mathrm{Loc}$ y $t \geq 0$, los límites

$\lim \|E_n - E\|_{f,t}$ *y* $\lim \|E_n^\dagger - E^\dagger\|_{f,t}$ *existen y son cero, donde*

$$\|F\|_{f,t} := \sqrt{\int_0^t \|F(s)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}s}.$$

En tal caso, decimos que la sucesión $\{E_n\}$ aproxima *al proceso integrable* E.

La anterior es la definición más importante de todo este trabajo. Nótese que en ella no se indica si el proceso es integrable respecto de algún proceso integrador particular, así como tampoco el valor de su integral.

Teorema 2.43. *Si E es un proceso adaptado integrable aproximable por $\{E_n\}$, y K es un integrador básico, entonces para cualquier $f \in \mathrm{Loc}$ y $s \geq 0$, la sucesión*

$$\left\{\int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

converge en $\mathcal{F}(H)$.

Demostración. Veamos que la sucesión es de Cauchy. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Para cada pareja de estas y $r \geq 0$ fija, escribamos $F_{n,m}(r) = E_n(r) - E_m(r)$. Es claro que $F_{n,m}$ es *un* proceso adaptado y simple. De esta forma, usando el Teorema 2.41 y la Desigualdad de Schwartz:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty} \left\|\int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f) - \int_0^s E_m(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f)\right\|^2 \\
= &\lim_{n,m\to\infty} \left\|\int_0^s E_n(r) - E_m(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f)\right\|^2 \\
= &\lim_{n,m\to\infty} \left\|\int_0^s F_{n,m}(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f)\right\|^2 \\
\leq &\lim_{n,m\to\infty} \Psi(f,s)\int_0^s \|F_{n,m}(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\
= &\lim_{n,m\to\infty} \Psi(f,s)\int_0^s \|[E_n(r) - E_m(r)]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\
= &\lim_{n,m\to\infty} \Psi(f,s)\int_0^s \|[E_n(r) - E(r) + (E(r) - E_m(r))]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Psi(f,s)\lim_{n\to\infty}\int_0^s \|[E_n(r)-E(r)]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\
&\quad +\Psi(f,s)\lim_{m\to\infty}\int_0^s \|[E_m(r)-E(r)]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\
&\quad +\Psi(f,s)\lim_{n,m\to\infty} 2\int_0^s \mathrm{Re}\langle [E_n(r)-E(r)]e(f),[E(r)-E_m(r)]e(f)\rangle\,\mathrm{d}r \\
&= 2\Psi(f,s)\lim_{n,m\to\infty}\int_0^s \mathrm{Re}\langle [E_n(r)-E(r)]e(f),[E(r)-E_m(r)]e(f)\rangle\,\mathrm{d}r \\
&\leq 2\Psi(f,s)\lim_{n,m\to\infty}\int_0^s \|[E_n(r)-E(r)]e(f)\|\|[E_m(r)-E(r)]e(f)\|\,\mathrm{d}r \\
&\leq 2\psi(f,s)\lim_{n,m\to\infty}\|E_n-E\|_{f,s}\|E_m-E\|_{f,s} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la sucesión es de Cauchy, y como $\mathcal{F}(H)$ es completo, entonces es convergente.

□

Teorema 2.44. *Sea E un proceso adaptado integrable aproximable por $\{E_n\}$ y por $\{F_n\}$, y K un integrador básico. Entonces, para cualquier $f\in\mathrm{Loc}$, las sucesiones $\left\{\int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left\{\int_0^s F_n(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo límite.*

Demostración. Sean A y B dichos límites. Entonces:

$$
\begin{aligned}
&\|A-B\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\|\int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f)-\int_0^s F_n(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f)\right\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\|\int_0^s E_n(r)-F_n(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f)\right\|^2 \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\Psi(f,s)\int_0^s \|[E_n(r)-F_n(r)]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\
&= \Psi(f,s)\lim_{n\to\infty}\int_0^s \|[(E_n(r)-E(r))+(E(r)-F_n(r))]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\
&= \Psi(f,s)\lim_{n\to\infty}\int_0^s \|[E_n(r)-E(r)]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\
&\quad +\Psi(f,s)\lim_{n\to\infty}\int_0^s \|[F_n(r)-E(r)]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +2\Psi(f,s)\lim_{n\to\infty}\int_0^s \mathrm{Re}\langle [E_n(r)-E(r)]e(f), [E(r)-F_n(r)]e(f)\rangle\,\mathrm{d}r \\
\leq\; & 2\Psi(f,s)\lim_{n\to\infty}\int_0^s \|[E_n(r)-E(r)]e(f)\|\|[F_n(r)-E(r)]e(f)\|\,\mathrm{d}r \\
\leq\; & 2\psi(f,s)\lim_{n\to\infty}\|E_n-E\|_{f,s}\|F_n-E\|_{f,s} \\
=\; & 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $A = B$.

□

Teorema 2.45. *Sean E un proceso adaptado integrable aproximable por $\{E_n\}$ y K un integrador básico. Entonces, para cualquier $f \in \mathrm{Loc}$, la convergencia de la sucesión $\left\{\int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniforme en $s \in [0,t]$.*

Demostración. Sea g_n el mapeo $g_n(s) = \int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K(r)\ e(f)$. Por los dos resultados previos, $\{g_n(s)\}$ es de Cauchy en $\mathfrak{H}$ y así existe $g : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{H}$ tal que $g_n \to g$ puntualmente en $\mathfrak{H}$. Queremos ver que dicha convergencia es uniforme en $[0,t]$.

Pero

$$
\begin{aligned}
\|g_n(s)-g_m(s)\|_{\mathfrak{H}}^2 &= \left\|\int_0^s (E_n(r)-E_m(r))\,\mathrm{d}K(r)\ e(f)\right\|^2 \\
&\leq \psi(f,t)\int_0^s \|[E_n(r)-E_m(r)]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\
&\leq \psi(f,t)\int_0^t \|[E_n(r)-E_m(r)]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r,
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
\sup_{s\in[0,t]}\|g_n(s)-g_m(s)\|_{\mathfrak{H}} \leq \sqrt{\Psi(f,t)}\left(\int_0^t \|[E_n(r)-E_m(r)]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r\right)^{1/2}.
$$

Nótese que el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0. Por tanto, $\|g_n - g_m\|_\infty \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, y esto muestra que $\{g_n\}$ es de Cauchy en el espacio $C([0,t], \mathcal{F}(H))$. Como este espacio es completo, entonces g_n converge uniformemente a g. Esto concluye la prueba.

□

Proposición 2.46. *Sea E un proceso adaptado integrable aproximable por $\{E_n\}$. Entonces $\{E_n^\dagger\}_{n\in\mathbb{N}}$ aproxima a $E^\dagger$. En particular, $E^\dagger$ es integrable.*

Demostración. Es claro que, dada la simetría en la definición de aproximable, $\{E_n^\dagger\}_{n\in\mathbb{N}}$ aproxima a $E^\dagger$. Para ver que $E^\dagger$ es integrable, sean $g, h \in \mathrm{Loc}$, y tomemos $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\eta(r) = \langle e(g), E^\dagger(r)e(h)\rangle$. Entonces $\overline{\eta(r)} = \overline{\langle e(h), E(r)e(g)\rangle}$. Como E es integrable, se sigue que $\overline{\eta}$ es Lebesgue medible y, por tanto, η lo es. Esto concluye la prueba.

□

Con los resultados anteriores, si E es un proceso integrable, podemos definir su proceso integral con respecto de $K \in \{A^\dagger, \Lambda, A, T\}$ por la acción en el dominio exponencial restringido como

$$\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(f) = \lim \int_0^t E_n(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(f), \tag{2.27}$$

donde $\{E_n\}$ es cualquier sucesión que aproxime a E, $f \in \mathrm{Loc}$ y t es un tiempo arbitrario. Bajo estas condiciones:

Teorema 2.47. *Si E es integrable, entonces $(\int E\,\mathrm{d}K)^\dagger = \int E^\dagger\,\mathrm{d}K^\dagger$.*

Demostración. Supongamos que $\{E_n\}$ aproxima a E. Por la Proposicion 2.46, $\{E_n^\dagger\}$ aproxima a $E^\dagger$. Sea $g \in \mathrm{Loc}$.

$$\begin{aligned}
\left\langle e(g), \int_0^t E^\dagger(s)\,\mathrm{d}K^\dagger(s)\ e(f)\right\rangle &= \left\langle e(g), \lim \int_0^t E_n^\dagger(s)\,\mathrm{d}K^\dagger(s)\ e(f)\right\rangle \\
&= \lim \left\langle e(g), \left(\int_0^t E_n(s)\,\mathrm{d}K(s)\right)^\dagger e(f)\right\rangle \\
&= \lim \left\langle \int_0^t E_n(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g), e(f)\right\rangle \\
&= \lim \overline{\left\langle e(f), \int_0^t E_n(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g)\right\rangle} \\
&= \overline{\lim \left\langle e(f), \int_0^t E_n(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g)\right\rangle} \\
&= \overline{\left\langle e(f), \lim \int_0^t E_n(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g)\right\rangle}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{\left\langle e(f), \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)\; e(g) \right\rangle} \\
&= \overline{\left\langle \left(\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s) \right)^{\dagger} e(f), e(g) \right\rangle} \\
&= \left\langle e(g), \left(\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s) \right)^{\dagger} e(f) \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Como el conjunto $\mathcal{E}_*$ es denso en el espacio de Fock y g fue arbitrario, entonces $(\int E\,\mathrm{d}K)^{\dagger} = \int E^{\dagger}\,\mathrm{d}K^{\dagger}$, que es lo que se quería demostrar. $\square$

2.6.2. Formas y Estimado Fundamentales

Veamos que las Formas Fundamentales, así como el Estimado Fundamental, siguen siendo válidas para los procesos integrables. Comencemos con el Estimado Fundamental. Sea E un proceso adaptado e integrable, aproximado por la sucesión de procesos simples $\{E_n\}$, y K cualquiera de los integradores básicos. Tomemos $f \in \mathrm{Loc}$ y $t \geq 0$ arbitrarios.

Por definición de integral estocástica cuántica y la continuidad de las normas, para cualquier $s \in [0, t]$:

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_0^s E(r)\,\mathrm{d}K(r)\; e(f) \right\|^2 &= \text{lím} \left\| \int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K(s)\; e(f) \right\|^2 \\
&\leq \Psi(f,t)\,\text{lím} \int_0^s \|E_n(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
& \int_0^s \|E_n(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\
= & \int_0^s \|E_n(r)e(f) - E(r)e(f) + E(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\
= & \int_0^s \|[E_n(r) - E(r)]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\
& + \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\
& + 2\mathrm{Re} \int_0^s \langle [E_n(r) - E(r)]e(f), E(r)e(f) \rangle\,\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^s \|E_n(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \;\; \leq & \;\; \int_0^s \|[E_n(r)-E(r)]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\ & +\int_0^s \|E(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\ & +\left|2\mathrm{Re}\int_0^s \langle [E_n(r)-E(r)]e(f), E(r)e(f)\rangle\,\mathrm{d}r\right|.\end{aligned}$$

Así, como E_n aproxima a E, entonces el primer sumando del lado derecho de la desigualdad anterior tiende a 0 y, por tanto:

$$\begin{aligned} & \lim \int_0^s \|E_n(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\ \leq & \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r + \lim\left|2\mathrm{Re}\int_0^s \langle [E_n(r)-E(r)]e(f), E(r)e(f)\rangle\,\mathrm{d}r\right| \\ \leq & \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r + 2\lim\int_0^s \|[E_n(r)-E(r)]e(f)\|\|E(r)e(f)\|\,\mathrm{d}r \\ \leq & \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \\ & +2\lim\left(\int_0^s \|[E_n(r)-E(r)]e(f)\|^2\,\mathrm{d}r\right)^{1/2}\left(\int_0^s \|E(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r\right)^{1/2} \\ = & \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $\Psi(f,t)$ es no negativa y sustituyendo esta desigualdad en (2.28), se tiene que

$$\left\|\int_0^s E(r)\,\mathrm{d}K(r)\;e(f)\right\|^2 \leq \Psi(f,t)\int_0^s \|E(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r,$$

lo cual muestra que el Estimado Fundamental es verdadero para procesos integrales.

Teorema 2.48. *La Primera Forma Fundamental es verdadera para procesos integrables.*

Demostración. Sean E un proceso integrable aproximable por la sucesión de procesos simples $\{E_n\}$ y $f, g \in \text{Loc}$. Tomemos $t \geq 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
& \left|\left\langle e(f), \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g)\right\rangle - \int_0^t \beta_K(f,g)\langle e(f), E(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\right| \\
= & \left|\left\langle e(f), \lim \int_0^t E_n(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g)\right\rangle - \int_0^t \beta_K(f,g)\langle e(f), E(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\right| \\
= & \lim\left|\left\langle e(f), \int_0^t E_n(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g)\right\rangle - \int_0^t \beta_K(f,g)\langle e(f), E(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\right| \\
= & \lim\left|\int_0^t \beta_K(f,g)\langle e(f), [E_n(s) - E(s)]e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\right|.
\end{aligned}
$$

En conclusión,

$$
\begin{aligned}
& \left|\left\langle e(f), \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(g)\right\rangle - \int_0^t \beta_K(f,g)\langle e(f), E(s)e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\right| \\
= & \lim\left|\int_0^t \beta_K(f,g)\langle e(f), [E_n(s) - E(s)]e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\right|.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Por otra parte, sea $C = \sup_{s\in[0,t]}\{|[\beta_K(f,g)](s)|\}$, que es finito dado que $f, g \in \text{Loc}$. Así:

$$
\begin{aligned}
& \lim\left|\int_0^t \beta_K(f,g)\langle e(f), [E_n(s) - E(s)]e(g)\rangle\,\mathrm{d}s\right| \\
\leq & \lim C \int_0^t |\langle e(f), [E_n(s) - E(s)]e(g)\rangle|\,\mathrm{d}s \\
\leq & C \lim \int_0^t \|e(f)\|\|[E_n(s) - E(s)]e(g)\|\,\mathrm{d}s \\
\leq & C t^{1/2}\|e(f)\| \lim\left(\int_0^t \|[E_n(s) - E(s)]e(g)\|^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \\
= & 0.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo lo anterior en la igualdad (2.29), se tiene lo pedido.

□

Concluyamos esta Sección mostrando que también la Segunda Forma Fundamental es válida para procesos integrables.

Teorema 2.49. *Sean E y F dos procesos integrables y K_1, K_2 dos integradores básicos. Entonces la Segunda Forma Fundamental es verdadera.*

Demostración. Sean $\{E_n\}$ y $\{F_n\}$ dos sucesiones de procesos simples que aproximan a E y a F, respectivamente. Por la continuidad del producto interno y la Segunda Forma Fundamental para procesos simples:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K_1(s)\ e(f), \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}K_2(s)\ e(g) \right\rangle \\
= \ & \lim \left\langle \int_0^t E_n(s)\,\mathrm{d}K_1(s)\ e(f), \int_0^t F_n(s)\,\mathrm{d}K_2(s)\ e(g) \right\rangle \\
= \ & \lim \int_0^t \left\langle \int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s) F_n(s) e(g) \right\rangle \\
& + \lim \int_0^t \left\langle [\beta_{K_1}(g,f)](s) E_n(s) e(f), \int_0^s F_n(r)\,\mathrm{d}K_2(r)\ e(g) \right\rangle \\
& + \lim \int_0^t \langle [\gamma_{K_1}(f)]\,(s) E_n(s) e(f), [\gamma_{K_2}(g)]\,(s) F_n(s) e(g) \rangle \,\mathrm{d}(s), \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

siempre que estos límites existan. Lo que haremos será probar que, efectivamente, tales límites existen. Como f y g son localmente acotadas, existen C_1, C_2, C_3 y C_4 que cumplen

$$\begin{array}{rcl}
|[\beta_{K_1}(g,f)](s)| & \leq & C_1 \\
|[\beta_{K_2}(f,g)](s)| & \leq & C_2 \\
|[\gamma_{K_1}(f)](s)| & \leq & C_3 \\
|[\gamma_{K_2}(g)](s)| & \leq & C_4
\end{array}$$

para toda $s \in [0,t]$. Sea $C = \max\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$.

Tenemos:

$$\begin{aligned}
& \Bigg| \int_0^t \Bigg\{ \left\langle \int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s) F_n(s) e(g) \right\rangle \\
& - \left\langle \int_0^s E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s) F(r) e(g) \right\rangle \Bigg\} \,\mathrm{d}s \Bigg| \\
\leq \ & \int_0^t \Bigg| \left\langle \int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s) F_n(s) e(g) \right\rangle \\
& - \left\langle \int_0^s E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s) F(s) e(g) \right\rangle \Bigg| \,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_0^t \left|\left\langle \int_0^s E_n(r) - E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s)F_n(s)e(g)\right\rangle\right| \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \left|\left\langle \int_0^s E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s)(F(s)-F_n(s))e(g)\right\rangle\right| \mathrm{d}s \\
&\le \int_0^t \left\| \int_0^s E_n(r) - E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f)\right\| \|[\beta_{K_2}(f,g)](s)F_n(s)e(g)\|\ \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \left\| \int_0^s E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f)\right\| \|[\beta_{K_2}(f,g)](s)(F(s)-F_n(s))e(g)\|\ \mathrm{d}s \\
&\le C\int_0^t \left\| \int_0^s E_n(r) - E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f)\right\| \|F_n(s)e(g)\|\ \mathrm{d}s \\
&\quad + C\int_0^t \left\| \int_0^s E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f)\right\| \|(F(s)-F_n(s))e(g)\|\ \mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

donde hemos usado nuevamente la Desigualdad de Schwartz. En resumen,

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \left\{ \left\langle \int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s)F_n(s)e(g)\right\rangle \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \left\langle \int_0^s E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s)F(r)e(g)\right\rangle \right\} \mathrm{d}s \right| \\
&\le C\int_0^t \left\| \int_0^s E_n(r) - E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f)\right\| \|F_n(s)e(g)\|\ \mathrm{d}s \\
&\quad + C\int_0^t \left\| \int_0^s E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f)\right\| \|(F(s)-F_n(s))e(g)\|\ \mathrm{d}s. \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

Usando primero la Desigualdad de Schwarz en $L^2[0,t]$ y luego el Estimado Fundamental en el primer sumando del lado derecho de la desigualdad anterior tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \left\| \int_0^s E_n(r) - E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f)\right\| \|F_n(s)e(g)\|\ \mathrm{d}s \\
&\le \left(\int_0^t \left\| \int_0^s E_n(r) - E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f)\right\|^2 \mathrm{d}s \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|F_n(s)e(g)\|\ \mathrm{d}s \right)^{1/2} \\
&\le \left(\Psi(f,t) \int_0^t \int_0^s \|(E_n(r)-E(r))e(f)\|^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$\times \left(\int_0^t \|F_n(s)e(g)\| \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \tag{2.32}$$

Por el argumento con que se concluyó la prueba del Estimado Fundamental, se tiene que $\int_0^t \|F_n(s)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}s$ converge a $\int_0^t \|F(s)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}s$; en particular, esta sucesión es acotada, digamos por q. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^s \|(E_n(r) - E(r))e(f)\|^2 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}s \\
\leq \; & \int_0^t \int_0^t \|(E_n(r) - E(r))e(f)\|^2 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}s \\
= \; & t \int_0^t \|(E_n(r) - E(r))e(f)\|^2 \,\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en el lado izquierdo de la desigualdad (2.32), se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left\| \int_0^s E_n(r) - E(r) \,\mathrm{d}K_1(r) \; e(f) \right\| \|F_n(s)e(g)\| \,\mathrm{d}s \\
\leq \; & \sqrt{q\Psi(f,t)} \left(t \int_0^t \|(E_n(r) - E(r))e(f)\|^2 \,\mathrm{d}r \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Usando de nuevo la Desigualdad de Schwarz en $L^2[0,t]$ y luego el Estimado Fundamental en el segundo sumando del lado derecho de la desigualdad (2.31), tenemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left\| \int_0^s E(r) \,\mathrm{d}K_1(r) \; e(f) \right\| \|(F(s) - F_n(s))e(g)\| \,\mathrm{d}s \\
\leq \; & \left(\int_0^t \left\| \int_0^s E(r) \,\mathrm{d}K_1(r) \; e(f) \right\|^2 \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|(F(s) - F_n(s))e(g)\|^2 \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \\
\leq \; & \left(\Psi(f,t) \int_0^t \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|(F(s) - F_n(s))e(g)\|^2 \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \\
\leq \; & \left(\Psi(f,t) \int_0^t \int_0^t \|E(r)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|(F(s) - F_n(s))e(g)\|^2 \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \\
= \; & \left(\Psi(f,t) t \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}r \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|(F(s) - F_n(s))e(g)\|^2 \,\mathrm{d}s \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo la desigualdad anterior y (2.33) en (2.31):

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \left\{ \left\langle \int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s)F_n(s)e(g) \right\rangle \right.\right. \\
& \left.\left. - \left\langle \int_0^s E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s)F(r)e(g) \right\rangle \right\} \mathrm{d}s \right| \\
\leq\ & C\sqrt{q\Psi(f,t)} \left(t \int_0^t \|(E_n(r) - E(r))e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \right)^{1/2} \\
& + C \left(\Psi(f,t) t \int_0^s \|E(r)e(f)\|^2\,\mathrm{d}r \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|(F(s) - F_n(s))e(g)\|^2\,\mathrm{d}s \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Como $\{E_n\}$ aproxima a E y $\{F_n\}$ a F, al tomar límites en la desigualdad anterior, concluimos que

$$
\begin{aligned}
\text{lím} & \int_0^t \left\langle \int_0^s E_n(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s)F_n(s)e(g) \right\rangle \mathrm{d}s \\
& = \int_0^t \left\langle \int_0^s E(r)\,\mathrm{d}K_1(r)\ e(f), [\beta_{K_2}(f,g)](s)F(s)e(g) \right\rangle \mathrm{d}s. \quad (2.34)
\end{aligned}
$$

Análogamente se demuestra que

$$
\begin{aligned}
\text{lím} & \int_0^t \left\langle [\beta_{K_1}(g,f)](s)E_n(s)e(f), \int_0^s F_n(r)\,\mathrm{d}K_2(r)\ e(g) \right\rangle \mathrm{d}s \\
& = \int_0^t \left\langle [\beta_{K_1}(g,f)](s)E(s)e(f), \int_0^s F(r)\,\mathrm{d}K_2(r)\ e(g) \right\rangle \mathrm{d}s. \quad (2.35)
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \langle [\gamma_{K_1}(f)]\,(s)E_n(s)e(f), [\gamma_{K_2}(g)]\,(s)F_n(s)e(g) \rangle\,\mathrm{d}s \right. \\
& \left. - \int_0^t \langle [\gamma_{K_1}(f)]\,(s)E(s)e(f), [\gamma_{K_2}(g)]\,(s)F(s)e(g) \rangle\,\mathrm{d}s \right| \\
=\ & \left| \int_0^t [\gamma_{K_1}(f)](s)[\gamma_{K_2}(g)](s)\langle E_n(s)e(f), F_n(s)e(g) \rangle\,\mathrm{d}s \right. \\
& \left. - \int_0^t [\gamma_{K_1}(f)](s)[\gamma_{K_2}(g)](s)\langle E(s)e(f), F(s)e(g) \rangle\,\mathrm{d}s \right| \\
\leq\ & \int_0^t |[\gamma_{K_1}(f)](s)[\gamma_{K_2}(g)](s)||\langle E_n(s)e(f), F_n(s)e(g) \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\langle E(s)e(f), F(s)e(g)\rangle| \,\mathrm{d}s \\
\leq\ & C^2 \int_0^t |\langle E_n(s)e(f), F_n(s)e(g)\rangle - \langle E(s)e(f), F(s)e(g)\rangle| \,\mathrm{d}s \\
=\ & C^2 \int_0^t |\langle [E_n(s) - E(s)]e(f), F_n(s)e(g)\rangle - \langle E(s)e(f), [F(s) - F_n(s)]e(g)\rangle| \,\mathrm{d}s \\
\leq\ & C^2 \left\{ \int_0^t |\langle [E_n(s) - E(s)]e(f), F_n(s)e(g)\rangle| \,\mathrm{d}s \right. \\
& \left. + \int_0^t |\langle E(s)e(f), [F(s) - F_n(s)]e(g)\rangle| \,\mathrm{d}s \right\} \\
\leq\ & C^2 \int_0^t \|[E_n(s) - E(s)]e(f)\| \|F_n(s)e(g)\| \,\mathrm{d}s \\
& + C^2 \int_0^t \|E(s)e(f)\| \|[F(s) - F_n(s)]e(g)\| \,\mathrm{d}s \\
\leq\ & C^2 \left(\int_0^t \|[E_n(s) - E(s)]e(f)\|^2 \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|F_n(s)e(g)\|^2 \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \\
& + C^2 \left(\int_0^t \|E(s)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|[F_n(s) - F(s)]e(g)\|^2 \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \\
\leq\ & C^2 \sqrt{q} \left(\int_0^t \|[E_n(s) - E(s)]e(f)\|^2 \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \\
& + C^2 \left(\int_0^t \|E(s)e(f)\|^2 \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|[F_n(s) - F(s)]e(g)\|^2 \,\mathrm{d}s \right)^{1/2} .
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
& \text{lím} \int_0^t \langle [\gamma_{K_1}(f)]\,(s) E_n(s)e(f), [\gamma_{K_2}(g)]\,(s) F_n(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s \\
& \qquad = \int_0^t \langle [\gamma_{K_1}(f)]\,(s) E(s)e(f), [\gamma_{K_2}(g)]\,(s) F(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s. \quad (2.36)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo los límites (2.34), (2.35) y (2.36) en la igualdad (2.30) se tiene lo pedido.

□

2.7. Procesos Continuos y Algunas Ecuaciones Diferenciales Estocásticas Cuánticas

En esta Sección definiremos un concepto de continuidad que nos permitirá tener una gran glase de procesos integrables, además de que introduciremos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales cuánticas.

Un proceso adaptado E es *continuo* si, para cada $f \in \mathrm{Loc}$, las funciones con valores vectoriales $t \mapsto E(t)e(f)$ y $t \mapsto E^{\dagger}e(f)$ son continuas en $\mathbb{R}_+$.

Proposición 2.50. *Los procesos $A^{\dagger}$, Λ, A y T son continuos.*

Demostración. Sea K cualquiera de estos procesos. Tomemos $t \in \mathbb{R}_+$ fija. Entonces, para $s \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\|K(t)e(f) - K(s)e(f)\|^2 &= \|[K(t) - K(s)]e(f)\|^2 \\ &= \langle [K(t) - K(s)]e(f), [K(t) - K(s)]e(f)\rangle.\end{aligned}$$

Basta ahora con aplicar el Lema 2.30 y utilizar el hecho de tener que si K es un integrador básico, entonces $K^{\dagger}$ también lo es.

□

Como sucede con las funciones de tipo integral en el cálculo usual, también nos resulta que las integrales de procesos integrables son continuas. Más precisamente:

Teorema 2.51. *Sean E un proceso integrable y K algún integrador básico. Entonces el proceso $M(t) = \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)$ es continuo.*

Demostración. Como $E^{\dagger}$ es integrable y $M^{\dagger}$ viene dado por

$$M^{\dagger}(t) = \int_0^t E^{\dagger}(s)\,\mathrm{d}K^{\dagger}(s),$$

es suficiente con probar que la función $t \mapsto M(t)e(f)$ es continua para cada $f \in \mathrm{Loc}$. Dados $s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+$, con $s_1 \leq s_2$, definamos el proceso $\tilde{E} =$

$1_{[s_1,s_2]}E$. Entonces $\tilde{E}$ es integrable y, para $t \geq s_2$, tendremos $\int_0^t \tilde{E}(s)\,\mathrm{d}K(s) = \int_0^{s_2} \tilde{E}(s)\,\mathrm{d}K(s) - \int_0^{s_1} \tilde{E}(s)\,\mathrm{d}K(s) = M(s_2) - M(s_1)$. Luego, por el Estimado Fundamental:

$$\begin{aligned} \|M(s_2)e(f) - M(s_1)e(f)\|^2 &= \left\| \int_0^t \tilde{E}(s)\,\mathrm{d}K(s)\ e(f) \right\|^2 \\ &\leq \Psi(f,t) \int_0^t \|\tilde{E}(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s \\ &= \Psi(f,t) \int_{s_1}^{s_2} \|E(s)e(f)\|^2\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Basta ahora hacer $|s_1 - s_2| \to 0$.

□

Mostremos ahora que los procesos continuos son integrables.

Teorema 2.52. *Si E es un proceso adaptado continuo, entonces es integrable.*

Demostración. La continuidad de la función $t \mapsto E(t)e(g)$ garantiza la continuidad, y por tanto medibilidad, de la función $t \mapsto \langle e(f), E(t)e(g)\rangle$ para cualesquiera $f, g \in H_*$. Tomemos la sucesión de procesos simples $\{E_n\}$ dados por

$$E_n(t) = \sum_{j=1}^{n^2} 1_{\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]}(t) E\left(\frac{j-1}{n}\right).$$

Si $f \in \mathrm{Loc}$ y $t \geq 0$ es fijo, afirmamos que $\{E_n(s)e(f)\}$ converge uniformemente a $E(s)e(f)$ en $[0,t]$. En efecto, sea $\epsilon > 0$. Como $s \mapsto E(s)e(g)$ es continua en $[0,t]$, se sigue que este mapeo es uniformemente continuo en $[0,t]$. Así, existe $\delta > 0$ tal que si $s_1, s_2 \in [0,t]$ y $|s_1 - s_2| < \delta$, entonces $\|E(s_1)e(f) - E(s_2)e(f)\| < \epsilon$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ cumpliendo $n > t$ y $n > \frac{2}{\delta}$. Nótese que la colección $\{\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] : j = 1, \cdots, n^2\}$ es una partición de $[0,n]$ y $[0,t] \subseteq [0,n]$, pues $t < n$. Para cada $s \in [0,t]$ existe un único $j(s) \in \{1, \cdots, n^2\}$ tal que

$$s \in \left[\frac{j(s)-1}{n}, \frac{j(s)}{n}\right].$$

Entonces $\left|\frac{j(s)-1}{n} - s\right| \leq \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \delta$. Por lo tanto

$$\left\|E\left(\frac{j(s)-1}{n}\right)e(f) - E(s)e(f)\right\| < \epsilon.$$

Pero

$$\begin{aligned} E\left(\frac{j(s)-1}{n}\right)e(f) - E(s)e(f) &= \sum_{k=1}^{n^2} 1_{[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]}(s)E\left(\frac{j-1}{n}\right)e(f) - E(s)e(f) \\ &= E_n(s)e(f) - E(s)e(f). \end{aligned}$$

Esto muestra la convergencia uniforme. Basta ahora con integrar para obtener lo deseado.

$\square$

Los dos resultados previos nos permiten garantizar la existencia de integrales iteradas de la forma

$$\int_{0<s_1<s_2<\cdots<s_n<t} \mathrm{d}K_1(s_1)\ \mathrm{d}K_2(s_2)\cdots \mathrm{d}K_n(s_n)$$

.

Lema 2.53. *Sea $t \geq 0$ y $f, g \in H$. Entonces*

$$e^{\int_0^t \overline{g(s)}f(s)\,\mathrm{d}s} - 1 = \int_0^t \overline{g(s)}f(s)e^{\int_0^s \overline{g(r)}f(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s.$$

Demostración. Basta con derivar las funciones

$$t \mapsto e^{\int_0^t \overline{g(s)}f(s)\,\mathrm{d}s} \text{ y } t \mapsto \int_0^t \overline{g(s)}f(s)e^{\int_0^s \overline{g(r)}f(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s.$$

$\square$

Ejemplo 2.54 (Algunas Ecuaciones Diferenciales Estocásticas Cuánticas I)**.** *Para cada $f \in H_*$, recordemos el proceso T_f dado por $T_f(t) = f(t)I$. Este proceso es integrable, y además*

$$a^\dagger(f_t) = \int_0^t T_f(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s) \text{ y } a(f_t) = \int_0^t T_{\overline{f}}(s)\,\mathrm{d}A(s).$$

En efecto. Por un lado,

$$\begin{aligned} \langle e(g), a^\dagger(f_t)e(h)\rangle &= \langle g, f_t\rangle\langle e(g), e(h)\rangle \\ &= \int_0^t \overline{g(s)}f(s)\,\mathrm{d}s\,\langle e(g), e(h)\rangle. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Por otro lado, por la Primera Forma Fundamental,

$$\begin{aligned} \left\langle e(g), \int_0^t T_f(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s)\ e(h)\right\rangle &= \int_0^t \langle e(g), [\beta_{A^\dagger}(g,h)](s)T_f(s)\ e(h)\rangle\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \overline{g(s)}\langle e(g), T_f(s)\ e(h)\rangle\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \overline{g(s)}f(s)\langle e(g), e(h)\rangle\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Comparando (2.37) *y* (2.38) *se tiene una de las igualdades deseadas. La otra se muestra de forma análoga. Definamos ahora los procesos*

$$U_f(t) = e^{a^\dagger(f_t)} \text{ y } V_f(t) = e^{a(f_t)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle e(g), [U_f(t) - U_f(0)]e(h)\rangle &= \langle e(g), [U_f(t) - I]e(h)\rangle \\ &= \langle e(g), U_f(t)e(h)\rangle - \langle e(g), e(h)\rangle \\ &= \langle e(g), e^{a^\dagger(f_t)}e(h)\rangle - \langle e(g), e(h)\rangle \\ &= \langle e(g), e(f_t + h)\rangle - \langle e(g), e(h)\rangle \\ &= e^{\langle g, h+f_t\rangle} - \langle e(g), e(h)\rangle \\ &= \langle e(g), e(h)\rangle e^{\langle g, f_t\rangle} - \langle e(g), e(h)\rangle \\ &= \left(e^{\int_0^t \overline{g(s)}f(s)\,\mathrm{d}s} - 1\right)\langle e(g), e(h)\rangle, \end{aligned} \tag{2.39}$$

y, nuevamente por la Primera Forma Fundamental,

$$\left\langle e(g), \int_0^t f(s)U_f(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s)\ e(h)\right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \langle e(g), \beta_{A^\dagger}(g,h) f(s) U_f(s) e(h)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \overline{g(s)} f(s) \langle e(g), U_f(s) e(h)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \overline{g(s)} f(s) e^{\int_0^t \overline{g(r)} f(r)\,\mathrm{d}r} \langle e(g), e(h)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \overline{g(s)} f(s) e^{\int_0^t \overline{g(r)} f(r)\,\mathrm{d}r} \,\mathrm{d}s \;\langle e(g), e(h)\rangle.
\end{aligned}$$

Comparando lo anterior con la igualdad (2.39), *y aplicando el Lema previo, se sigue que*

$$\langle e(g), [U_f(t) - U_f(0)] e(h)\rangle = \left\langle e(g), \int_0^t f(s) U_f(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s)\; e(h)\right\rangle.$$

Por tanto,

$$U_f(t) - U_f(0) = \int_0^t f(s) U_f(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s), \tag{2.40}$$

o reescribiendo en términos de una ecuación diferencial estocástica, hemos probado que U_f satisface la ecuación $dU_f = fU_f dA^\dagger$ con condición inicial $U_f(0) = I$. Más aún, de la misma forma se prueba que V_f satisface $dV_f = \overline{f} V_f dA$ con condición inicial $V_f(0) = I$.

Luego, suponiendo que estas ecuaciones diferenciales admiten una solución única, tendremos:

$$\begin{aligned}
(U_g(t))^\dagger &= \left(\int_0^t g(s) U_g(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s) + I\right)^\dagger \\
&= \int_0^t \overline{g(s)} U_g^\dagger(s)\,\mathrm{d}A(s) + I.
\end{aligned}$$

Así, $U_g^\dagger$ satisface $dU_g^\dagger = \overline{g} U_g^\dagger dA$ con condición inicial $U_g^\dagger(0) = I$, de lo cual concluimos que $U_g^\dagger = V_g$. Análogamente, $V_f^\dagger = U_f$.

Sea $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ dada por $L(t) = \langle e(u), V_f(t) U_g(t) e(v)\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}
L(t) &= \langle e(u), V_f(t) U_g(t) e(v)\rangle \\
&= \langle V_f^\dagger(t) e(u), U_g(t) e(v)\rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle U_f(t)e(u), U_g(t)e(v)\rangle.$$

Por tanto, por la ecuación 2.40,

$$\begin{aligned}
& L(t) \\
= \; & \left\langle \int_0^t fU_f \,\mathrm{d}A^\dagger \; e(u), \int_0^t gU_g \,\mathrm{d}A^\dagger \; e(v) \right\rangle + \langle e(u), e(v)\rangle \\
& + \left\langle \int_0^t fU_f \,\mathrm{d}A^\dagger \; e(u), e(v) \right\rangle \\
& + \left\langle e(u), \int_0^t gU_g \,\mathrm{d}A^\dagger \; e(v) \right\rangle \\
= \; & \int_0^t \left\langle \int_0^s fU_f \,\mathrm{d}A^\dagger \; e(u), \overline{u}gU_g e(v) \right\rangle \mathrm{d}s \\
& + \int_0^t \left\langle \overline{v}fU_f e(u), \int_0^s gU_g \,\mathrm{d}A^\dagger \; e(v) \right\rangle \mathrm{d}s \\
& + \int_0^t \langle fU_f e(u), gU_g e(v)\rangle \,\mathrm{d}s + \langle e(u), e(v)\rangle \\
& + \int_0^t \langle e(u), v\overline{f}V_f e(v)\rangle \,\mathrm{d}s + \int_0^t \langle e(u), \overline{u}gU_g e(v)\rangle \,\mathrm{d}s \\
= \; & \int_0^t \overline{u}g \left\langle \int_0^t fU_f \,\mathrm{d}A^\dagger \; e(u) + e(u), U_g e(v) \right\rangle \mathrm{d}s \\
& + \int_0^t v\overline{f} \left\langle U_f e(u), \int_0^t gU_g \,\mathrm{d}A^\dagger \; e(v) + e(v) \right\rangle \mathrm{d}s \\
& + \int_0^t \overline{f}g \langle U_f e(u), U_g e(v)\rangle \,\mathrm{d}s + \langle e(u), e(v)\rangle \\
= \; & \int_0^t \overline{u}g \langle U_f e(u), U_g e(v)\rangle \,\mathrm{d}s + \int_0^t v\overline{f} \langle U_f e(u), U_g e(v)\rangle \,\mathrm{d}s \\
& + \int_0^t \overline{f}g \langle U_f e(u), U_g e(v)\rangle \,\mathrm{d}s + \langle e(u), e(v)\rangle \\
= \; & \int_0^t (\overline{u}g + v\overline{f} + \overline{f}g) \langle U_f e(u), U_g e(v)\rangle \,\mathrm{d}s + \langle e(u), e(v)\rangle.
\end{aligned}$$

Nótese que para la tercera igualdad se ha usado la Segunda Forma Fundamental. Hemos probado así que L es absolutamente continua y derivable, *y además satisface* $L'(t) = (\overline{u(t)}g(t) + v(t)\overline{f(t)} + \overline{f(t)}g(t))L(t)$ *con condición inicial* $L(0) = \langle e(u), e(v)\rangle$.

Por otra parte, sea $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$G(t) = e^{\langle f_t, g_t\rangle}\langle e(u), U_g(t)V_f(t)e(v)\rangle.$$

Entonces

$$\begin{aligned} G(t) &= e^{\langle f_t, g_t\rangle}\langle e(u), U_g(t)V_f(t)e(v)\rangle \\ &= e^{\langle f_t, g_t\rangle}\langle V_g(t)e(u), V_f(t)e(v)\rangle. \end{aligned}$$

Llamemos $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *a la función dada por* $\langle V_g(t)e(u), V_f(t)e(v)\rangle$, *de modo que* $G(t) = e^{\langle f_t, g_t\rangle}F(t)$. *Análogo al proceso anterior, se demuestra que*

$$\begin{aligned} G(t) &= e^{\langle f_t, g_t\rangle}\left\{\int_0^t (v\overline{f} + \overline{u}g)\langle V_g(s)e(u), V_f(s)e(v)\rangle \,\mathrm{d}s + \langle e(u), e(v)\rangle\right\} \\ &= e^{\langle f_t, g_t\rangle}\left\{\int_0^t (v\overline{f} + \overline{u}g)F(s)\,\mathrm{d}s + \langle e(u), e(v)\rangle\right\}. \end{aligned}$$

Luego, G *es absolutamente continua y derivable, cumpliendo* $G'(t) = e^{\langle f_t, g_t\rangle}[v(t)\overline{f(t)} + \overline{u(t)}g(t)]F(t) + \overline{f(t)}g(t)G(t)$ *con condición inicial* $G(0) = \langle e(u), e(v)\rangle$. *Usando el hecho de ser* $F(t) = e^{-\langle f_t, g_t\rangle}G(t)$, *y que* $\langle e(u), e(v)\rangle$ *nunca se anula, concluimos que* $G'(t) = (v(t)\overline{f(t)} + \overline{u(t)}g(t) + \overline{f(t)}g(t))G(t)$ *con condición inicial* $G(0) = \langle e(u), e(v)\rangle$.

Pero la ecuación diferencial anterior es la misma que satisface L. Así, es sencillo deducir que $L(t) = G(t)$ *para toda* $t \geq 0$, *con lo cual hemos probado la relación de conmutación* $V_f(t)U_g(t) = e^{\langle f_t, g_t\rangle}U_g(t)V_f(t)$ *mediante las Formas Fundamentales.*

Ejemplo 2.55 (Algunas Ecuaciones Diferenciales Estocásticas II). *Para cada* $f \in H$, *sea* W_f *el proceso dado por* $W_f(t) = W_1(f_t)$, *donde, para* $s \in \mathbb{R}$ *y* $u \in H$, *se define* $W_s(u)$ *como en el Teorema 2.9. Entonces*

$$\begin{aligned} &\langle e(u), (W_f(t) - W_f(0))\, e(v)\rangle \\ &= \langle e(u), W_f(t)e(v)\rangle - \langle e(u), W_f(0)e(v)\rangle \\ &= \langle e(u), W_1(f_t)e(v)\rangle - \langle e(u), e(v)\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\|f_t\|^2/2} e^{-\langle f_t, v\rangle} \langle e(u), e^{a^\dagger(f_t)} e(v)\rangle - e^{\langle u,v\rangle} \\
&= e^{-\|f_t\|^2/2 - \langle f_t, v\rangle + \langle u, f_t\rangle + \langle u,v\rangle} - e^{\langle u,v\rangle} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t |f|^2 \,\mathrm{d}s - \int_0^t \overline{f} v \,\mathrm{d}s + \int_0^t \overline{u} f \,\mathrm{d}s + \int_{\mathbb{R}_+} \overline{u} v \,\mathrm{d}s\right) \\
&\quad - \exp\left(\int_{\mathbb{R}_+} \overline{u} v \,\mathrm{d}s\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\langle e(u), W_f(t) e(v)\rangle \\
&\qquad = \left(-\frac{1}{2}|f(t)|^2 - \overline{f(t)} v(t) + \overline{u(t)} f(t)\right) \langle e(u), W_f(t) e(v)\rangle . \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

Por otra parte, por la Primera Forma Fundamental,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle e(u), \int_0^t f(s) W_f(s) \,\mathrm{d}A^\dagger(s)\ e(v)\right\rangle \\
&= \int_0^t \langle e(u), \overline{u(s)} f(s) W_f(s) e(v)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \overline{u(s)} f(s) \langle e(u), W_f(s) e(v)\rangle \,\mathrm{d}s. \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle e(u), \int_0^t \overline{f(s)} W_f(s) \,\mathrm{d}A(s)\ e(v)\right\rangle \\
&= \int_0^t v(s) \overline{f(s)} \langle e(u), W_f(s) e(v)\rangle \,\mathrm{d}s, \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle e(u), \int_0^t |f(s)|^2 W_f(s) \,\mathrm{d}T(s)\ e(v)\right\rangle \\
&= \int_0^t |f(s)|^2 \langle e(u), W_f(s) e(v)\rangle \,\mathrm{d}s. \qquad (2.44)
\end{aligned}
$$

De las igualdades (2.42), (2.43) *y* (2.44) *se sigue que*

$$
\frac{d}{dt}\left(\left\langle e(u), \int_0^t f(s) W_f(s) \,\mathrm{d}A^\dagger(s)\ e(v)\right\rangle\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left\langle e(u), \int_0^t \overline{f(s)} W_f(s)\,\mathrm{d}A(s)\ e(v)\right\rangle \\
&-\frac{1}{2}\left\langle e(u), \int_0^t |f(s)|^2 W_f(s)\,\mathrm{d}T(s)\ e(v)\right\rangle\Bigg) \\
= \quad &\left\{\overline{u(t)} f(t) - v(t)\overline{f(t)} - \frac{1}{2}|f(t)|^2\right\} \times \langle e(u), W_f(t) e(v)\rangle. \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

Comparando la ecuación anterior con (2.41), *concluimos que, para toda* $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
&\langle e(u), W_f(t) e(v)\rangle + C \\
&= \left\langle e(u), \int_0^t (f(s) W_f(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s) - \overline{f}(s) W_f(s)\,\mathrm{d}A(s) - \frac{1}{2}|f(s)|^2 W_f(s)\,\mathrm{d}T(s))\ e(v)\right\rangle,
\end{aligned}
$$

para alguna constante C*. Tomando* $t = 0$*, obtenemos* $C = \langle e(u), W_f(0) e(v)\rangle$*, y de esta manera hemos demostrado que* W_f *satisface la ecuación diferencial*

$$
dW_f = W_f\left[f dA^\dagger - \overline{f}\,\mathrm{d}A - \frac{1}{2}|f|^2\,\mathrm{d}T\right]
$$

con condición inicial $W_f(0) = I$*.*

Comentarios

Como ya se ha comentado, los desarrollos de la teoría dados por Hudson en [5] y Parthasarathy en [13] son distintos, pero equivalentes. En particular, Parthasarathy define los operadores de creación, aniquilación y segunda cuantización diferencial a través de los grupos $\mathscr{W}(u)$, $\mathscr{G}$ y $\mathscr{W}\mathscr{G}(u)$ mediante ciertas relaciones llamadas Relaciones Canónicas de Conmutación, las cuales serán presentadas en el siguiente capítulo.

Es importante hacer notar que todas las demostraciones de este Capítulo son nuestras. Las contribuciones en este sentido han sido la definición de los coeficientes β_k (ver (2.6)), el Lema de Descomposición (Lema 2.24) y las Diferencias de Martingalas (Lemas 2.23 y 2.30).

Originalmente, en [5] se presenta al Estimado Fundamental como el máximo entre $2e^{\|f\|^2}$, $e^t \sup\{|f(s)|^2 + |f(s)|^4 : 0 \leq s \leq t\}$ y t^2. Nosotros hemos obtenido otro Estimado Fundamental.

Capítulo 3

Aplicaciones

En este Capítulo veremos algunas aplicaciones de la teoría desarrollada en los Capítulos previos. En la sección 3.1 comparamos los Cálculos Estocásticos Clásico y Cuántico, mientras que en la 3.2 trabajamos las Relaciones Canónicas de Conmutación y los espacios de Bosones y Fermiones.

Para lo referente a la Integral Estocástica Clásica y al Movimiento Browniano que necesitamos, puede consultarse el Apéndice B.

3.1. Relación entre los Cálculos Estocásticos Clásico y Cuántico

En esta Sección mostraremos cómo el Cálculo Estocástico Clásico es, desde cierto punto de vista, un caso particular del Cuántico. Sea $u : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ localmente integrable tal que $u(t) \in \mathbb{R}$ para todo $t \geq 0$. Para cada tiempo t, denotemos por u_t a la función $1_{[0,t]}u \in H$. Sea E el proceso dado por $E(t) = a^\dagger(u_t) + a(u_t)$. Tomemos como dominio de $E(t)$ a $\mathcal{E}_*$. Lo anterior es posible, ya que $\mathcal{E}_* \subseteq D(a^\dagger(u_t)) \cap D(a(u_t)) = D(a^\dagger(u_t) + a(u_t))$. Si hacemos $v_t = iu_t$ entonces, por las propiedades de linealidad y antilinealidad de creación y aniquilación en sus vectores de prueba (Proposición 2.4):

$$\begin{aligned} iE(t) &= ia^\dagger(u_t) + ia(u_t) \\ &= a^\dagger(iu_t) - a(iu_t) \\ &= a^\dagger(v_t) - a(v_t), \end{aligned}$$

donde seguimos tomando como dominio a $\mathcal{E}_*$.

Lema 3.1. *Para cada $t \geq 0$, el operador $E(t)$ es esencialmente autoadjunto.*

La demostración de este resultado escapa del tema central de la investigación. Una prueba puede consultarse en [3].

Sea $\overline{E(t)}$ la extensión autoadjunta de $E(t)$. Entonces $U_s = e^{is\overline{E(t)}}$ está perfectamente definido y, por el Teorema 2.14, es unitario en $\mathcal{F}(H)$ y además $\overline{E(t)}\phi = -i\frac{d}{ds}U_s|_{s=0}\phi$ para cualquier $\phi \in D(\overline{E(t)})$. En particular, para $\phi \in \mathcal{E}_*$, tendremos $E(t)\phi = -i\frac{d}{ds}U_s|_{s=0}\phi$.

Por otra parte, si $\phi \in \mathcal{E}_*$ entonces, por el Teorema 2.11, $-i\frac{d}{ds}W_s(v_t)|_{s=0}\phi = E(t)\phi$. Por lo tanto $W_s(v_t)\phi = e^{is\overline{E(t)}}\phi$ para cualesquiera $s \in \mathbb{R}$ y $\phi \in \mathcal{E}_*$. En particular para $e(0)$, usando el Teorema 2.13, tendremos $\langle e(0), e^{is\overline{E(t)}}e(0)\rangle = \langle e(0), W_s(v_t)e(0)\rangle = e^{-\frac{s^2}{2}\|v_t\|^2} = e^{-\frac{s^2}{2}\|u_t\|^2} = e^{-\frac{s^2}{2}\int_0^t u^2(x)\,\mathrm{d}x}$.

Veamos ahora que los elementos de la familia $\{E(t)\}_{t\geq 0}$ conmutan dos a dos en el sentido de que los grupos unitarios que generan, conmuntan. Para ello, notemos que la Proposición 2.10 sigue siendo válida para $W_s(v_t)$, en el pues si $e(f)$ es un vector exponencial restringido entonces, por definición de $W_s(v_t)$, $W_s(v_t)e(f) = e^{-\frac{\|sv_t\|^2}{2} - s\langle v_t, f\rangle}e(f + sv_t)$ y, como $f + sv_t \in \mathrm{Loc}$, se sigue que $e^{-\frac{\|sv_t\|^2}{2} - s\langle v_t, f\rangle}e(f + sv_t) \in \mathcal{E}_*$. Por tanto $W_s(v_t)$ mapea al dominio exponencial restringido en sí mismo.

Proposición 3.2. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $s, t > 0$. Entonces*

$$e^{ix\overline{E(s)}}e^{iy\overline{E(t)}} = e^{iy\overline{E(t)}}e^{ix\overline{E(s)}}.$$

En particular, para $t = s$ se cumple $e^{ix\overline{E(s)}}e^{iy\overline{E(t)}} = e^{i(x+y)\overline{E(s)}}$.

Demostración. Sea $e(f) \in \mathcal{E}_*$. Como $W_y(v_t)e(f)$ pertence al dominio exponencial restringido, entonces $e^{ix\overline{E(s)}}e^{iy\overline{E(t)}}e(f) = W_x(v_s)W_y(v_t)e(f)$ y, por la misma razón, $e^{iy\overline{E(t)}}e^{ix\overline{E(s)}}e(f) = W_y(v_t)W_x(v_s)e(f)$. Luego:

$$e^{ix\overline{E(s)}}e^{iy\overline{E(t)}}e(f)$$

$$\begin{aligned}
&= W_x(v_s)W_y(v_t)e(f) \\
&= e^{-\frac{y^2\|v_t\|^2}{2}-y\langle v_t,f\rangle}W_x(v_s)e(f+yv_t) \\
&= e^{-\frac{y^2\|v_t\|^2}{2}-y\langle v_t,f\rangle}e^{-\frac{x^2\|v_s\|^2}{2}-x\langle v_s,f+yv_t\rangle}e(f+yv_t+xv_s) \\
&= e^{-\frac{y^2\|v_t\|^2}{2}-y\langle v_t,f\rangle-\frac{x^2\|v_s\|^2}{2}-x\langle v_s,f+yv_t\rangle}e(f+yv_t+xv_s) \\
&= e^{-\frac{y^2\|v_t\|^2}{2}-y\langle v_t,f\rangle-\frac{x^2\|v_s\|^2}{2}-x\langle v_s,f\rangle-xy\langle v_s,v_t\rangle}e(f+yv_t+xv_s). \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Como $\langle v_s,v_t\rangle = \langle u_s,u_t\rangle = \int_0^{s\wedge t} u^2(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, donde $s\wedge t = \text{mín}\{s,t\}$, entonces $xy\langle v_s,v_t\rangle = xy\langle v_t,v_s\rangle$, y por tanto, por la simetría en la ecuación (3.1), se tiene

$$W_x(v_s)W_y(v_t)e(f) = W_y(v_t)W_x(v_s)e(f),$$

O en otros términos, $e^{ix\overline{E(s)}}e^{iy\overline{E(t)}}e(f) = e^{iy\overline{E(t)}}e^{ix\overline{E(s)}}e(f)$.

De esta forma, se cumple lo pedido en todo $\mathcal{E}_*$, y como $e^{ix\overline{E(s)}}e^{iy\overline{E(t)}}$ y $e^{iy\overline{E(t)}}e^{ix\overline{E(s)}}$ son acotados e iguales en todo un conjunto denso de $\mathcal{F}(H)$, se concluye la igualdad en todo el espacio de Fock, que es lo que se quería probar.

□

Una de las implicaciones de esta conmutación es la existencia, para cualesquiera tiempos $t_1, t_2, \cdots, t_k$, de una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^k$, digamos $P_{t_1,\cdots,t_k}$, tal que

$$\langle e(0), e^{i\sum_{j=1}^k x_k E(t_k)}e(0)\rangle = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}P_{t_1,\cdots,t_k}(y),$$

donde $x = (x_1,\cdots,x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Además, nuevamente, como esta familia de operadores unitarios conmuta, entonces la familia de medidas de probabilidad $\{P_{t_1,\cdots,t_k} : k \in \mathbb{N}, t_j \geq 0\}$ cumple la condición (B.1) del Teorema de Extensión de Kolmogorov (Teorema B.1). Más aún, por tratarse de medidas espectrales asociadas al vector vacío de la familia conmutativa de operadores $\{\sum_{k=1}^n x_k E(t_k) : x_k \in \mathbb{R}, t_k \geq 0, k \geq 0\}$, es claro que se satisface la condición (B.2) del mismo Teorema. Por lo tanto, existen un espacio de probabilidad (clásica) $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ y un proceso estocástico (clásico) $\mathbb{X}^E = \{X_t^E\}_{t\geq 0}$ en Ω_1 tales que las distribuciones finitodimensionales de $\mathbb{X}^E$ son precisamente las medidas $P_{t_1,\cdots,t_k}$.

Por otra parte, para cualesquiera $x_1, x_2, \cdots, x_n, t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$, con los t_j positivos, se cumple la igualdad

$$e^{i\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{E(t_j)}} = \prod_{j=1}^{n} e^{ix_j \overline{E(t_j)}} \tag{3.2}$$

en todo el espacio de Fock $\mathcal{F}(H)$.

Teorema 3.3. *Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n, t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$, donde las t_j son positivas. Entonces*

$$\prod_{j=1}^{n} e^{ix_j \overline{E(t_j)}} = W_1\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_{t_j}\right)$$

en el dominio exponencial restringido.

Demostración. Nótese que en general $W_x(u) = W_1(xu)$. Usando esta identidad mostraremos primero el resultado para $j = 2$. Sea $e(f) \in \mathcal{E}_*$. Hagamos el cambio de notación $x_1 = x$, $x_2 = y$, $t_1 = s$ y $t_2 = t$. De la ecuación (3.1), tenemos:

$$\begin{aligned}
e^{ix\overline{E(s)}}e^{iy\overline{E(t)}}e(f) &= e^{-\frac{y^2\|v_t\|^2}{2} - y\langle v_t, f\rangle - \frac{x^2\|v_s\|^2}{2} - x\langle v_s, f\rangle - xy\langle v_s, v_t\rangle} e(f + yv_t + xv_s) \\
&= e^{-\frac{1}{2}(\langle xv_s, xv_s\rangle + 2\langle xv_s, yv_t\rangle + \langle yv_t, yv_t\rangle)} e^{\langle -(yv_t + xv_s), f\rangle} e(f + yv_t + xv_s) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|xv_s + yv_t\|^2} e^{\langle -(xv_s + yv_t), f\rangle} e(f + xv_s + yv_t) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|xv_s + yv_t\|^2} e^{\langle -(xv_s + yv_t), f\rangle} e^{a^\dagger(xv_s + yv_t)} e(f) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|xv_s + yv_t\|^2} e^{a^\dagger(xv_s + yv_t)} e^{\langle -(xv_s + yv_t), f\rangle} e(f) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\|xv_s + yv_t\|^2} e^{a^\dagger(xv_s + yv_t)} e^{a(-(xv_s + yv_t))} e(f) \\
&= \left[\Phi\left(e^{-\frac{1}{2}\|xv_s + yv_t\|^2}, xv_s + yv_t, I, -(xv_s + yv_t)\right)\right] e(f) \\
&= W_1(xv_s + yv_t)e(f). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Hemos probado la afirmación para $j = 2$ en los vectores exponenciales restringidos, y por tanto, en todo $\mathcal{E}_*$. Más aún,

$$e^{ix\overline{E(s)}}e^{iy\overline{E(t)}}e(f) = W_x(v_s)W_y(v_t)e(f) = W_1(xv_s)W_1(yv_t)e(f)$$

para cualquier vector exponencial restringido. Luego, por la ecuación (3.3), deducimos que

$$W_1(xv_s)W_1(yv_t) = W_1(xv_s + yv_t) \tag{3.4}$$

en todo $\mathcal{E}_*$

Para $j \geq 2$, observemos que, de la ecuación (3.4), nos resulta

$$\prod_{j=1}^{n} W_1(x_j v_{t_j}) = W_1\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_{t_j}\right).$$

Pero el lado izquierdo de esta igualdad es precisamente $\prod_{j=1}^{n} e^{ix_j\overline{E(t_j)}}$, de donde se tiene lo pedido.

$\square$

Del resultado anterior y la ecuación (3.2) se sigue

$$\begin{aligned}
&\left\langle e(0), e^{i\sum_{j=1}^{n} x_j\overline{E(t_j)}}e(0)\right\rangle \\
= &\left\langle e(0), \prod_{j=1}^{n} e^{ix_j\overline{E(t_j)}}e(0)\right\rangle \\
= &\left\langle e(0), W_1\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_{t_j}\right)e(0)\right\rangle \\
= &\exp\left[-\frac{1}{2}\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j v_{t_j}\right\|^2\right] \\
= &\exp\left[-\frac{1}{2}\left\|-i\sum_{j=1}^{n} x_j v_{t_j}\right\|^2\right] \\
= &\exp\left[-\frac{1}{2}\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j u_{t_j}\right\|^2\right] \\
= &\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j u_{t_j}\|^2 + \sum_{k\neq j}^{n} x_j x_k\langle u_{t_j}, u_{t_k}\rangle\right)\right]. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Pero notemos que, para cualesquiera $s, t > 0$, se tiene

$$\langle u_s, u_t\rangle = \int_0^{s\wedge t} u^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Por tanto, en (3.5):

$$
\begin{aligned}
&\left\langle e(0), e^{i\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{E(t_j)}} e(0) \right\rangle \\
= \;& \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j u_{t_j}\|^2 + \sum_{k\neq j}^{n} x_j x_k \langle u_{t_j}, u_{t_k} \rangle \right) \right] \\
= \;& \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \int_0^{t_j} u^2(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k\neq j}^{n} x_j x_k \int_0^{t_j\wedge t_k} u^2(x)\,\mathrm{d}x \right) \right] \\
= \;& \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k \int_0^{t_j\wedge t_k} u^2(x)\,\mathrm{d}x \right].
\end{aligned}
$$

Hemos mostrado que las transformadas de Fourier de las distribuciones finitodimensionales del proceso $\mathbb{X}^E$ vienen dadas por

$$
\begin{aligned}
\widehat{E}_{t_1,\cdots,t_k}(x_1,\cdots,x_k) &= \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}P_{t_1,\cdots,t_k}(y) \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k \int_0^{t_j\wedge t_k} u^2(x)\,\mathrm{d}x \right].
\end{aligned}
$$

En particular, si $u = 1$, entonces $E(t) = a^\dagger(1_{[0,t]}) + a(1_{[0,t]}) = A^\dagger(t) + A(t)$. Denotemos por Q a este proceso, llamado *proceso de posición*. Luego, las transformadas de Fourier de las distribuciones finitodimensionales del proceso clásico $\mathbb{X}^Q$ vienen dadas por

$$
\widehat{Q}_{t_1,\cdots,t_k}(x_1,\cdots,x_k) = \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k (t_j \wedge t_k) \right]. \tag{3.6}
$$

Sea $\mathbb{W} = \{W_t\}_{t\geq 0}$ el Movimiento Browniano estándar descrito por la medida de Wiener P en el espacio de funciones continuas de $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{C}$, denotado por $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. Escribamos $L^2(P)$ para referirnos al espacio $L^2(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}), \mathcal{F}, P)$, donde $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra generada por el proceso browniano. A partir de aquí y hasta el final de esta Sección, usaremos la letra W únicamente para refererirnos al browniano.

Así, el proceso $\mathbb{X}^Q$ es equivalente, en sentido distribucional, al Movimiento Browniano. Luego, el Movimento Browniano estándar es equivalente distribucionalmente a un proceso estocástico clásico inducido por el proceso de posición. Pero podemos decir más.

Recordemos que dada $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, tal que $f(x) \in \mathbb{R}$ para toda x, el proceso estocástico $\left\{\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s\right\}_{t\geq 0}$ tiene distribuciones finitodimensionales

$$\left(\int_0^{t_1} f(s)\,\mathrm{d}W_s, \int_0^{t_2} f(s)\,\mathrm{d}W_s, \cdots, \int_0^{t_k} f(s)\,\mathrm{d}W_s\right) \sim \mathcal{N}(0, C),$$

donde la matriz de covarianzas C viene dada por $C_{i,j} = \int_0^{t_i \wedge t_j} f^2(s)\,\mathrm{d}s$. En particular, esto es cierto si $f \in H_*$ es real-valuada.

Por lo tanto, las distribuciones finitodimensionales asociadas al proceso anterior son precisamente las distribuciones finitodimensionales del proceso $\mathbb{X}^E$ para $E(t) = a^\dagger(f_t) + a(f_t)$ que, del Ejemplo 2.54 y haciendo uso de que $f(x) \in \mathbb{R}$, es precisamente el proceso cuántico

$$\left\{\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}(A^\dagger(s) + A(s))\right\}_{t\geq 0}.$$

Es decir, los procesos $\left\{\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}(A^\dagger(s) + A(s))\right\}_{t\geq 0}$ y $\left\{\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s\right\}_{t\geq 0}$ son distribucionalmente equivalentes.

Otra manera de pensar el browniano como un proceso cuántico es identificar, vía isomorfismos, ciertos espacios de Hilbert. Para ello usaremos el siguiente lema, que es consecuencia de las propiedades básicas de la Transformada de Fourier.

Lema 3.4. *Para cada $z \in \mathbb{C}$, sea $g_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $g_z(x) = e^{zx}$. Entonces el conjunto $\{g_z : z \in \mathbb{C}\}$ es total en el espacio $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, donde μ es la distribución normal estándar.*

Así, sean μ la distribución normal estándar en la recta real y

$$L^2(\mu) = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu).$$

Consideremos el espacio de Fock $\mathcal{F}(\mathbb{C}) = \ell^2(\mathbb{N})$. En la Sección 1.4 probamos que, para cada $z \in \mathbb{C}$, el vector exponencial asociado a z viene dado por

$$e(z) = (1, z, (2!)^{-1/2} z^2, (3!)^{-1/2} z^3, \cdots).$$

En $L^2(\mu)$, consideremos la función generadora de los polinomios de Hermite $e^{zx - \frac{1}{2}z^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(x)$, siendo $H_n(x)$ el polinomio de Hermite de grado n. Sea $U_0 : e(\mathbb{C}) \to L^2(\mu)$ dado por $[U_0 e(z)](x) = e^{zx - \frac{1}{2}z^2}$. Recordemos que $e(\mathbb{C}) = \{e(z) : z \in \mathbb{C}\}$ es total en $\mathcal{F}(\mathbb{C})$. Extenderemos U_0 a todo un isomorfismo unitario de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ a $L^2(\mu)$ usando el Teorema 1.5.

Para ello, notemos que

$$\begin{aligned}
\langle U_0 e(z), U_0 e(w) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} e^{\overline{z}x - \frac{1}{2}\overline{z}^2} e^{wx - \frac{1}{2}w^2} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}x \\
&= e^{-1/2(\overline{z}^2 + w^2)} \int_{\mathbb{R}} e^{(\overline{z}+w)x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}x \\
&= e^{-1/2(\overline{z}^2 + w^2)} e^{(\overline{z}+w)^2/2} \\
&= e^{\overline{z}w} \\
&= \langle e(z), e(w) \rangle.
\end{aligned}$$

Por otra parte, por el Lema anterior, si para cada $z \in \mathbb{C}$ definimos $h_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por $h_z(x) = e^{zx - \frac{1}{2}z^2}$, entonces el conjunto $\{h_z : z \in \mathbb{C}\}$ es total en $L^2(\mu)$. En efecto, si $\phi \in L^2(\mu)$ es tal que $\langle \phi, h_z \rangle = 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$, se sigue

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \phi, h_z \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)} e^{zx - \frac{1}{2}z^2} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}x \\
&= e^{-\frac{1}{2}z^2} \langle \phi, g_z \rangle, \quad \forall z \in \mathbb{C},
\end{aligned}$$

de donde $\langle \phi, g_z \rangle = 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$, y por tanto ϕ es la función nula. De esta manera, aplicando el Teorema 1.5, tendremos un isomorfismo unitario $U : \mathcal{F}(\mathbb{C}) \to L^2(\mu)$ tal que $[Ue(z)](x) = e^{zx - \frac{1}{2}z^2}$ para toda $z \in \mathbb{C}$. En particular, $Ue(0) = 1$, la función constante igual a 1. Más aún, inductivamente se prueba que $U(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k},1,0,0,\cdots) = (k!)^{-1/2}H_k(x)$ para toda $k \geq 0$.

Hagamos un procedimiento análogo al anterior pero tomando $H = L^2(\mathbb{R}_+)$.

Uno de los objetivos principales de este trabajo es mostrar cómo la Fórmula de Ito clásica puede ser deducida a partir de las Formas Fundamentales. Por esta razón, hemos incluido la demostración de los siguientes resultados, los cuales en la gran mayoría de los textos se desprenden a partir de la Fórmula de Ito, misma que no hemos deducido hasta este punto y, por lo tanto, las demostraciones propuestas no harán uso de esta fórmula.

Lema 3.5. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$, y $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es una variable aleatoria con distribución $N(0, \sigma^2)$, entonces $\int_\Omega e^{\lambda X}\,\mathrm{d}P$ existe y es igual a $e^{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}$.*

Lema 3.6. *Sean $F, F_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ y $G, G_n : \Omega \to \mathbb{C}$ integrables en un cierto espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Supongamos que*

- *$F_n \to F$ puntualmente y $\int F_n\,\mathrm{d}\mu \to \int F\,\mathrm{d}\mu$ y*
- *$|G_n| \leq M$ y $G_n \to G$ puntualmente.*

Entonces $\int G_n F_n\,\mathrm{d}\mu \to \int GF\,\mathrm{d}\mu$.

Teorema 3.7. *Para $h \in H$ se tiene:*

a) *Si h es real valuada, entonces $\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s \in L^2(P)$ y tiene una distribución $N(0, \|h\|_2^2)$.*

b) *$e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s} \in L^2(P)$ y tiene media 1.*

Demostración. Usaremos el hecho de si $\{X_k\}$ es una sucesión $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$ de variables aleatorias normales para cada k y $X_k \to X$ en $L^2(\Omega)$, entonces X es normal, el cual puede consultarse en [12], pág. 307.

a) Tomemos $\{h_k\}$ una sucesión de funciones escalonadas en H tales que $h_k \to h$ en H y $h_k(x) \in \mathbb{R}$ para cada k y cada $x \geq 0$. Por la Isometría de Ito, $\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s \in L^2(P)$.

Si $h_k = \sum_{j=1}^m c_j 1_{[a_j,b_j]}$ con los $[a_j, b_j]$ disjuntos, entonces $\int_0^\infty h_k(s)\,\mathrm{d}W_s = \sum_{j=1}^m c_j(W_{b_j} - W_{a_j})$. Como las $W_{b_j} - W_{a_j}$ son variables aleatorias independientes con distribución normal $N(0, b_j - a_j)$, se sigue que $\int_0^\infty h_k(s)\,\mathrm{d}W_s$ tiene una distribución normal con media 0 y varianza $\sum_{j=1}^m c_j^2(b_j - a_j) = \int_0^\infty h_k^2(s)\,\mathrm{d}s = \|h_k\|_2^2$. Se concluye que $\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s$ tiene distribución normal con media 0 y varianza $\|h\|_2^2$.

b) Sea $h = \sum_{j=1}^n c_j 1_{[a_j,b_j]} \in H$ con los $[a_j, b_j]$ disjuntos. Entonces las variables aleatorias $W_{b_j} - W_{a_j}$ tienen distribución $N(0, b_j - a_j)$ y son independientes, de modo que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P &= \int_\Omega e^{\sum_{j=1}^m c_j(W_{b_j} - W_{a_j})}\,\mathrm{d}P \\
&= \prod_{j=1}^m \int_\Omega e^{c_j(W_{b_j} - W_{a_j})}\,\mathrm{d}P \\
&= \prod_{j=1}^m e^{\frac{1}{2}c_j^2(b_j - a_j)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m c_j^2(b_j - a_j)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s},
\end{aligned}$$

donde la segunda línea se obtiene de la primera por la independencia de las $W_{b_j} - W_{a_j}$, y la tercera por el Lema 3.5. Por lo tanto $e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s}$ está en $L^1(P)$ y su media es $e^{\frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s}$. Así, si h es escalonada, entonces la media de $e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s}$ es 1, y un argumento similar prueba que $e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s}$ está en $L^2(P)$.

Para el caso general, sea $h = a + ib$, con $a, b : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrables. Tomemos una sucesión de funciones escalonadas $\{h_n = a_n + ib_n\}$ tales que $h_n \to h$ puntualmente y en H, y además $\int_0^\infty a_n(s)\,\mathrm{d}W_s$ y $\int_0^\infty b_n(s)\,\mathrm{d}W_s$ convergen en $L^2(\Omega)$ y puntualmente a $\int_0^\infty a(s)\,\mathrm{d}W_s$ y $\int_0^\infty b(s)\,\mathrm{d}W_s$. Obsérvese que

$$\int_\Omega e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P = \int_\Omega e^{\int_0^\infty a(s)\,\mathrm{d}W_s} e^{i\int_0^\infty b(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P.$$

Por (a), las variables aleatorias $\int_0^\infty a_n(s)\,\mathrm{d}W_s$, $\int_0^\infty a(s)\,\mathrm{d}W_s$, $\int_0^\infty b_n(s)\,\mathrm{d}W_s$ y $\int_0^\infty b(s)\,\mathrm{d}W_s$ tienen distribución normal con media 0 y varianzas $\|a_n\|_2^2$ $\|a\|_2^2$ $\|b_n\|_2^2$ y $\|b\|_2^2$, respectivamente. Así, por el Lema 3.5,

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{\int_0^\infty a_n(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P &= e^{\frac{1}{2}\int_0^\infty a_n^2(s)\,\mathrm{d}s}\\ \int_\Omega e^{\int_0^\infty a(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P &= e^{\frac{1}{2}\int_0^\infty a^2(s)\,\mathrm{d}s}.\end{aligned}$$

Verifiquemos las hipótesis del Lema 3.6. Sean $F_n = e^{\int_0^\infty a_n(s)\,\mathrm{d}W_s}$, $F = e^{\int_0^\infty a(s)\,\mathrm{d}W_s}$, $G_n = e^{i\int_0^\infty b_n(s)\,\mathrm{d}W_s}$ y $G = e^{i\int_0^\infty b(s)\,\mathrm{d}W_s}$.

Como $a_n \to a$ en H, entonces $\|a_n\|_2^2 \to \|a\|_2^2$. Es decir, $\int_0^\infty a_n^2(s)\,\mathrm{d}s \to \int_0^\infty a^2(s)\,\mathrm{d}s$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{\int_0^\infty a_n(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P &= e^{\frac{1}{2}\int_0^\infty a_n^2(s)\,\mathrm{d}s}\\ &\to e^{\frac{1}{2}\int_0^\infty a^2(s)\,\mathrm{d}s}\\ &= \int_\Omega e^{\int_0^\infty a(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P.\end{aligned}$$

Luego, F_n converge a F puntualmente, y sus integrales también. Por otra parte, es claro que $\{G_n\}$ es una sucesión acotada, que de hecho toma valores complejos de módulo 1. Como $G_n \to G$ puntualmente, estamos en las condiciones del Lema 3.6 y por tanto

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{\int_0^\infty a_n(s)\,\mathrm{d}W_s + i\int_0^\infty b_n(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P &= \int_\Omega F_n G_n\,\mathrm{d}P\\ &\to \int FG\,\mathrm{d}P\\ &= \int_\Omega e^{\int_0^\infty a(s)\,\mathrm{d}W_s + i\int_0^\infty b(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P.\end{aligned}$$

Pero $\int_\Omega e^{\int_0^\infty a_n(s)\,\mathrm{d}W_s + i\int_0^\infty b_n(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P = \int_\Omega e^{\int_0^\infty h_n(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P$, y las h_n son escalonadas, así que esta familia de integrales es constante e igual a 1. Así,

$$\int_\Omega e^{\int_0^\infty a(s)\,\mathrm{d}W_s + i\int_0^\infty b(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P = 1,$$

lo cual concluye la prueba.

□

Teorema 3.8. *La familia*

$$\left\{ e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s} :\ h \in H \right\}$$

es total en $L^2(P)$.

Demostración. Para demostrar lo anterior, dividiremos la prueba en varios pasos. Recordemos que $L^2(P)$ denota al espacio $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Paso 1 Notemos que $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra generada por la familia

$$\{W_t :\ t \in \mathbb{Q}_+\}.$$

En efecto: Sea $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_+} = \sigma(\{W_t :\ t \in \mathbb{Q}_+\})$. Al ser $\mathcal{F} = \sigma(\{W_t :\ t \in \mathbb{R}_+\})$, es claro que $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_+} \subseteq \mathcal{F}$. Por la definición de $\mathcal{F}$, bastará con ver que W_t es $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_+}$-medible para cada $t \geq 0$. Así, sea $t \geq 0$. Entonces existe una sucesión de racionales no negativos $\{q_n\}$ tales que $q_n \to t$.

Como las trayectorias del browniano son continuas, se sigue que $W_{q_n}(w) \to W_t(w)$ para cada $w \in \Omega$ fija. Es decir, $\{W_{q_n}(w)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $W_t(w)$, y por tanto W_t es $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_+}$-medible, lo cual muestra la afirmación.

Paso 2 Escribamos a los racionales no negativos como una sucesión $\mathbb{Q}_+ = \{r_1, r_2, \cdots\}$. Denotemos por $\mathcal{F}_n$ a la σ-álgebra $\sigma(\{W_{r_1}, W_{r_2}, \cdots, W_{r_n}\})$. Es claro que $\sigma(\cup\mathcal{F}_n) \subseteq \mathcal{F}$. Pero por el paso 1, $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\cup\mathcal{F}_n)$. Se concluye la igualdad $\sigma(\cup\mathcal{F}_n) = \mathcal{F}$.

Paso 3 Notemos que el proceso $\{E[f|\mathcal{F}_n]\}_{n=0}^\infty$ es una martingala clásica acotada en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y, por tanto, es convergente en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

En efecto. Por la propiedad proyectiva de la esperanza condicional, se tiene que es martingala clásica. Además, como la esperanza condicional en $L^2(P)$ es una proyección, entonces es una contracción en ese espacio:

$\sup_n \|E[f|\mathcal{F}_n]\|_2 \leq \|f\|_2 < \infty$. Para cada $n \geq 0$, llamemos X_n a la variable aleatoria $E[f|\mathcal{F}_n]$. Como $\{X_n\}$ es martingala clásica, entonces sus incremententos son ortogonales. Luego:

$$\begin{aligned} 2\|f\|_2^2 &\geq \|X_{n+1} - X_0\|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \|X_{j+1} - X_j\|_2^2, \end{aligned}$$

de modo que la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \|X_{j+1} - X_j\|_2^2$ es convergente. Así, si $n > m$, entonces

$$\|X_n - X_m\|_2^2 = \sum_{j=m}^{n-1} \|X_{j+1} - X_j\|_2^2 \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Por lo tanto $\{X_n\}$ es de Cauchy en $L^2(P)$. Concluimos la existencia de un $Y \in L^2(P)$ tal que $X_n \overset{L^2}{\to} Y$.

Veamos ahora que $f = Y$.

Sea $A \in \mathcal{F}_n$, con A y n fijos. Por definición de esperanza condicional,

$$\int_A f \,\mathrm{d}P = \int_A E[f|\mathcal{F}_n] \,\mathrm{d}P = \int_A X_n \,\mathrm{d}P = \int_\Omega 1_A X_n \,\mathrm{d}P.$$

Por otra parte, como $X_l \overset{L^2}{\to} Y$, entonces $1_A X_l \overset{L^2}{\to} 1_A Y$, de donde $1_A X_l \overset{L^1}{\to} 1_A Y$ y, así,

$$\int_A X_l \,\mathrm{d}P \to \int_A Y \,\mathrm{d}P. \tag{3.7}$$

Para l grande, como n es fija y $\{E[f|\mathcal{F}_n]\}$ es martingala clásica, se tiene

$$\begin{aligned} \int_A E[X_l|\mathcal{F}_n] \,\mathrm{d}P &= \int_A X_n \,\mathrm{d}P \\ &= \int_A f \,\mathrm{d}P. \end{aligned}$$

Usando esto y, nuevamente, la definición de esperanza condicional,

$$\int_A X_l \, \mathrm{d}P = \int_A E[X_l|F_n] \, \mathrm{d}P = \int_A f \, \mathrm{d}P$$

para $l > n$. Se sigue de la convergencia en (3.7) que

$$\int_A f \, \mathrm{d}P = \int_A Y \, \mathrm{d}P \quad \forall n \geq 0 \text{ y } \forall A \in \mathcal{F}_n.$$

Para ver que $f = Y$, basta con demostrar que $\int_A f \, \mathrm{d}P = \int_A Y \, \mathrm{d}P$ para cualquier $A \in \mathcal{F}$, así que mostremos esta última igualdad. Sea $\mathcal{L}$ la colección

$$\mathcal{L} = \left\{ A \in \mathcal{F} : \int_A f \, \mathrm{d}P = \int_A Y \, \mathrm{d}P \right\}.$$

Demostraremos que $\sigma(\mathcal{L}) = \mathcal{F}$. Como $\int_A f \, \mathrm{d}P = \int_A Y \, \mathrm{d}P$ para cualquier n y cualquier $A \in \mathcal{F}_n$, entonces $\int_A f \, \mathrm{d}P = \int_A Y \, \mathrm{d}P$ para cualquier $A \in \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$. Es fácil ver que esta unión es un Π-sistema.

Notemos que $\mathcal{L}$ es un Λ-sistema:

- $\Omega \in \mathcal{L}$, ya que $\Omega \in \mathcal{F}_n$ para cada n.

- Si $A, B \in \mathcal{L}$ con $A \subseteq B$, entonces

  $$\int_{B-A} f \, \mathrm{d}P = \int_B f \, \mathrm{d}P - \int_A f \, \mathrm{d}P = \int_B Y \, \mathrm{d}P - \int_A Y \, \mathrm{d}P = \int_{B-A} Y \, \mathrm{d}P,$$

  y así, $B - A \in \mathcal{L}$.

- Si $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{L}$, con $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, entonces $|1_{A_i} f| \leq |f| \in L^1(P)$, de donde

  $$\begin{aligned}
  \int_{\cup A_i} f \, \mathrm{d}P &= \int_\Omega f 1_{\cup A_1} \, \mathrm{d}P \\
  &= \lim_{i\to\infty} \int_{A_i} f \, \mathrm{d}P \text{ (por el Teorema de la Convergencia Dominada)} \\
  &= \lim_{i\to\infty} \int_{A_i} Y \, \mathrm{d}P
  \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} Y 1_{\cup A_i}\, \mathrm{d}P \\
&= \int_{\cup A_i} Y\, \mathrm{d}P,
\end{aligned}
$$

y por tanto $\cup A_i \in \mathcal{L}$.

Así, $\mathcal{L}$ es un Λ-sistema que cumple $\cup \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$. Luego, por el Lema de Dynkin y el paso 2,

$$\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup \mathcal{F}_n\right) \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F},$$

de modo que $\mathcal{L} = \mathcal{F}$. Es decir, $\int_A f\, \mathrm{d}P = \int_A Y\, \mathrm{d}P$ para todo $A \in \mathcal{L}$, y por lo tanto $f = Y$.

Paso 4 Sea $f \in L^2(P)$ tal que $\left\langle f, e^{\int_0^\infty h(s)\, \mathrm{d}W_s} \right\rangle = 0$ para toda $h \in H$.

Nótese que cada conjunto $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ no necesariamente cumple con $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$. Sean pues $t_1, t_2, \cdots, t_n$ tales que

$$\{r_1, r_2, \cdots, r_n\} = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$$

y $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Como $E[f|\mathcal{F}_n]$ es $\mathcal{F}_n$-medible, entonces $E[f|\mathcal{F}_n] = G(W_{t_1}, \cdots, W_{t_n})$ para alguna $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Borel medible. Sea $h = i \sum_{j=1}^{n-1} c_j 1_{[t_j, t_{j+1}]}$, con $c_j \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Entonces

$$e^{\int_0^\infty h(s)\, \mathrm{d}W_s} = e^{i \sum_{j=1}^{n-1} c_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})}$$

es $\mathcal{F}_n$-medible. Luego

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\langle f, e^{\int_0^\infty h(s)\, \mathrm{d}W_s} \right\rangle \\
&= \left\langle E[f|\mathcal{F}_n], e^{\int_0^\infty h(s)\, \mathrm{d}W_s} \right\rangle \\
&= \left\langle G(W_{t_1}, \cdots, W_{t_n}), e^{i \sum_{j=1}^{n-1} c_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})} \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{G(x_1, \cdots, x_n)} e^{i \sum_{j=1}^{n-1} c_j (x_{j+1} - x_j)}\, \mathrm{d}P_{W_{t_1}, \cdots, W_{t_n}}
\end{aligned}
$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{G(x_1, \cdots, x_n)} D(x_1, \cdots, x_n) e^{i\sum_{j=1}^{n-1} c_j(x_{j+1}-x_j)} \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

donde $D(x_1, \cdots, x_n)$ es la densidad del vector aleatorio gaussiano

$$(W(t_1), \cdots, W(t_n)).$$

Así, usando transformaciones lineales, concluimos que la Transformada de Fourier de la función $G(x_1, \cdots, x_n)D(x_1, \cdots, x_n)$ es 0, y como $D(x_1, \cdots, x_n)$ nunca se anula, entonces $G(x_1, \cdots, x_n)$ es la función nula. Es decir, $E[f|\mathcal{F}_n] = 0$ para toda n.

Pero $\{E[f|\mathcal{F}_n]\}$ es una martingala clásica acotada cuadrado integrable tal que $E[f|\mathcal{F}_n] \to E[f|\sigma(\cup\mathcal{F}_n)] = E[f|\mathcal{F}] = f$. Así, f es el elemento nulo de $L^2(P)$.

$\square$

De esta manera, sea $U_0 : \mathcal{E} \to L^2(P)$ dada por

$$U_0 e(f) = \exp\left(\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)^2\,\mathrm{d}s\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
& \langle U_0 e(f), U_0 e(g)\rangle \\
= & \left\langle e^{\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)^2\,\mathrm{d}s}, e^{\int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)^2\,\mathrm{d}s}\right\rangle \\
= & \int_\Omega e^{\int_0^\infty \overline{f(s)}\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty \overline{f(s)}^2\,\mathrm{d}s} e^{\int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)^2\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}P \\
= & \int_\Omega e^{\int_0^\infty \overline{f(s)}\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty \overline{f(s)}^2\,\mathrm{d}s + \int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)^2\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}P \\
= & \int_\Omega e^{\int_0^\infty \overline{f(s)}+g(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty (\overline{f(s)}+g(s))^2\,\mathrm{d}s + \int_0^\infty \overline{f(s)}g(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}P \\
= & e^{\int_0^\infty \overline{f(s)}g(s)\,\mathrm{d}s} \int_\Omega e^{\int_0^\infty \overline{f(s)}+g(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty (\overline{f(s)}+g(s))^2\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}P.
\end{aligned}$$

Pero por el Teorema 3.7, $\int_\Omega e^{\int_0^\infty \overline{f(s)}+g(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty (\overline{f(s)}+g(s))^2\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}P = 1$, y así, $\langle U_0 e(f), U_0 e(g)\rangle = e^{\int_0^\infty \overline{f}g\,\mathrm{d}s} = \langle e(f), e(g)\rangle$.

Corolario 3.9. *Sean $f, h \in H$. Entonces*

$$\int_\Omega \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s\; e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s}\;\mathrm{d}P = \int_0^t \overline{f(s)} h(s)\,\mathrm{d}s.$$

En particular, $\int_\Omega W_t\, e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}P = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s.$

Demostración. Primero, observemos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s\; e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s}\;\mathrm{d}P \\
&\qquad\qquad = \left\langle \int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}W_s, e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Sea $t \geq 0$ fijo y $\lambda \in \mathbb{R}$. Nótese que

$$\begin{aligned}
& \left\langle e^{i\lambda \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t f^2(s)\,\mathrm{d}s}, e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s} \right\rangle \\
= & \left\langle e^{\int_0^\infty i\lambda 1_{[0,t]} f(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty (i\lambda 1_{[0,t]} f(s))^2\,\mathrm{d}s}, e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s} \right\rangle \\
= & \langle U_0 e(i\lambda 1_{[0,t]} f), U_0 e(h)\rangle \\
= & \langle e(i\lambda 1_{[0,t]} f), e(h)\rangle \\
= & e^{\int_0^\infty (-i\lambda) 1_{[0,t]} \overline{f(s)} h(s)\,\mathrm{d}s} \\
= & e^{-i\lambda \int_0^t \overline{f(s)} h(s)\,\mathrm{d}s}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\langle e^{i\lambda \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s}, e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s} \right\rangle = e^{-i\lambda \int_0^t \overline{f(s)} h(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t \overline{f(s)}^2\,\mathrm{d}s}. \tag{3.8}$$

Por otra parte

$$\frac{e^{i\lambda \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s} - 1}{\lambda} - i\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s \;\xrightarrow{\lambda\to 0}\; 0 \text{ en } L^2(P). \tag{3.9}$$

En efecto. Sea $F_t = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s$.

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{e^{i\lambda F_t} - 1}{\lambda} - iF_t \right\|_2^2 \\
= & \frac{1}{\lambda^2}\| \cos\lambda F_t + i \operatorname{sen}\lambda F_t - 1 - i\lambda F_t\|_2^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda^2}\|(\cos\lambda F_t - 1) + i(\sin\lambda F_t - \lambda F_t)\|_2^2 \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\int_\Omega (\cos\lambda F_t - 1)^2 + (\sin\lambda F_t - \lambda F_t)^2 \,\mathrm{d}P \\
&= \int_\Omega \left(\frac{\cos\lambda F_t - 1}{\lambda}\right)^2 \mathrm{d}P + \int_\Omega \left(\frac{\sin\lambda F_t - \lambda F_t}{\lambda}\right)^2 \mathrm{d}P \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Pero $\left(\frac{\cos\lambda F_t - 1}{\lambda F_t}\right)^2 \leq 1$ y $\int_\Omega \left(\frac{\cos\lambda F_t - 1}{\lambda}\right)^2 \mathrm{d}P = \int_\Omega F_t^2 \left(\frac{\cos\lambda F_t - 1}{\lambda F_t}\right)^2 \mathrm{d}P$. Así, por el Teorema de la Convergencia Dominda

$$
\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\int_\Omega \left(\frac{\cos\lambda F_t - 1}{\lambda}\right)^2 \mathrm{d}P = \lim_{\lambda\to 0}\int_\Omega F_t^2 \left(\frac{\cos\lambda F_t - 1}{\lambda F_t}\right)^2 \mathrm{d}P \\
= \int_\Omega F_t \lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{\cos\lambda F_t - 1}{\lambda F_t}\right)^2 \mathrm{d}P = 0,
\end{aligned}
$$

y análogamente,

$$
\lim_{\lambda\to 0}\int_\Omega \left(\frac{\sin\lambda F_t - \lambda F_t}{\lambda}\right)^2 \mathrm{d}P = 0.
$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (3.10), se concluye el límite (3.9). Así, usando la igualdad (3.8), tendremos, por una parte,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \frac{e^{i\lambda F_t} - 1}{\lambda}, e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\left\langle e^{i\lambda F_t}, e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s}\right\rangle - \left\langle 1, e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s}\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(e^{-i\lambda\int_0^t \overline{f(s)}h(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\lambda^2\int_0^t \overline{f(s)}^2\,\mathrm{d}s} - 1\right).
\end{aligned}
$$

Haciendo $\lambda \to 0$, por (3.9), el lado izquierdo de la igualdad anterior tiende a $\langle i\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s, e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s}\rangle$, mientras que el lado derecho a $-i\int_0^t \overline{f(s)}h(s)\,\mathrm{d}s$ (basta con derivar respecto a λ y evaluar esta derivada en $\lambda = 0$).

En conclusión: $-i\langle\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s, e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s}\rangle = -i\int_0^t \overline{f(s)}h(s)\,\mathrm{d}s$, o equivalentemente,

$$
\left\langle \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s, e^{\int_0^\infty h(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty h^2(s)\,\mathrm{d}s} \right\rangle = \int_0^t \overline{f(s)}h(s)\,\mathrm{d}s.
$$

□

Por el Teorema 1.5, podemos extender U_0 a todo un isomorfismo unitario $U : \mathcal{F}(H) \to L^2(P)$. Notemos que $Ue(0)$ es la variable aleatoria idénticamente 1. Tomemos $t \in \mathbb{R}_+$ fijo. Sean $e(f)$ y $e(g)$ dos vectores exponenciales arbitrarios. Entonces, por una parte:

$$\begin{aligned}
\langle Ue(g), UQ(t)e(f)\rangle &= \langle e(g), Q(t)e(f)\rangle \\
&= \langle e(g), a(1_{[0,t]})e(f)\rangle + \langle e(g), a^\dagger(1_{[0,t]})e(f)\rangle \\
&= (\langle 1_{[0,t]}, f\rangle + \langle g, 1_{[0,t]}\rangle)\langle e(g), e(f)\rangle \\
&= e^{\langle g,f\rangle}\int_0^t f(s) + \overline{g(s)}\,\mathrm{d}s. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\langle Ue(g), W_tUe(f)\rangle &= \int_\Omega W_t e^{\int_0^\infty \overline{g(s)}+f(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty \overline{g(s)}^2 + f(s)^2\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}P \\
&= e^{\int_0^\infty \overline{g(s)}f(s)\,\mathrm{d}s}\int_\Omega W_t e^{\int_0^\infty \overline{g(s)}+f(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty (\overline{g(s)}+f(s))^2\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}P \\
&= e^{\langle g,f\rangle}e^{-\frac{1}{2}\int_0^\infty (\overline{g(s)}+f(s))^2\,\mathrm{d}s}\int_\Omega W_t e^{\int_0^\infty \overline{g(s)}+f(s)\,\mathrm{d}W_s}\,\mathrm{d}P \\
&= e^{\langle g,f\rangle}\int_0^t f(s) + \overline{g(s)}\,\mathrm{d}s, \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

donde la cuarta línea se obtiene de la tercera aplicando el Corolario 3.9. Como los conjuntos $\{e(f)\}$ y $\{Ue(f)\}$ son totales en sus respectivos espacios, se concluye que el isomorfismo unitario U transforma al operador $\overline{Q(t)}$ (la extensión autoadjunta de $Q(t)$), que actúa en un dominio dentro de $\mathcal{F}(H)$, en el operador de multiplicación por la variable aleatoria W_t, el cual actúa en $L^2(P)$. Es decir, $U\overline{Q(t)}\phi = W_tU\phi$ para todo $\phi \in D(\overline{Q(t)})$. En particular $UQ(t)\phi = W_tU\phi$ para todo $\phi \in \mathcal{E}$.

Más aún, si $f \in \mathrm{Loc}$, recordando que T_f es el proceso dado por $T_f(t)e(u) = f(t)e(u)$ y aplicando la Primera Fórmula Fundamental con Q como integrado, se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\langle U\int_0^t T_f(s)\,\mathrm{d}Q(s)\ e(0), Ue(g)\right\rangle &= \left\langle \int_0^t T_f(s)\,\mathrm{d}Q(s)\ e(0), e(g)\right\rangle \\
&= \int_0^t g(s)\langle f(s)e(0), e(g)\rangle\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$= \int_0^t \overline{f(s)} g(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.13}$$

Luego, por el Corolario 3.9,

$$U \int_0^t T_f(s)\,\mathrm{d}Q(s)\ e(0) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s. \tag{3.14}$$

Si además pedimos que f sea variación acotada, análogamente se demuestra que

$$U \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}T_f(s)\ e(0) = \int_0^t W_s\,\mathrm{d}f(s). \tag{3.15}$$

En la Sección siguiente, usando ciertas propiedades de $a^\dagger(f)$ y $a(f)$ se mostrará que el vector vacío $e(0)$ pertenece al dominio de $(a^\dagger(f)+a(f))^n$. En particular, tiene sentido la expresión $Q(t)^n e(0)$. Más aún, como consecuencia directa del Corolario 3.19, que se demostrará también en tal Sección, se tiene

$$\begin{aligned}
& Q(t)^n e(0) \\
= \ & \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} t^{\frac{0}{2}} A^{\dagger n} e(0) + t^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} A^{\dagger n-1} e(0) + t^{\frac{2}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} A^{\dagger n-2} e(0) + \cdots \\
& + t^{\frac{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^{\dagger k} e(0) + \cdots \\
& + t^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} A^{\dagger 1} e(0) + t^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} e(0)
\end{aligned}$$

para ciertos reales $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ tales que $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = 0$, $\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ y

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} = (r+1) \begin{bmatrix} n \\ r+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix},$$

donde $A^{\dagger k} = A^\dagger(t)^k$. Llamemos *$A$-coeficientes* a los reales $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. En el Apéndice C damos un breve tratamiento de ellos.

Así, tentados a hacer algunos cálculos, tenemos:

$$Q(t)e(0) \ = \ A^\dagger(t)e(0)$$

$$
\begin{aligned}
Q(t)^2e(0) &= A^\dagger(t)^2e(0) + te(0) \\
Q(t)^3e(0) &= A^\dagger(t)^3e(0) + 3tA^\dagger(t)e(0) \\
Q(t)^4e(0) &= A^\dagger(t)^4e(0) + 6tA^\dagger(t)^2e(0) + 3t^2e(0) \\
Q(t)^5e(0) &= A^\dagger(t)^5e(0) + 10tA^\dagger(t)^3e(0) + 15t^2A^\dagger(t)e(0) \\
Q(t)^6e(0) &= A^\dagger(t)^6e(0) + 15tA^\dagger(t)^4e(0) + 45t^2A^\dagger(t)^2e(0) + 15t^3e(0) \\
Q(t)^7e(0) &= A^\dagger(t)^7e(0) + 21tA^\dagger(t)^5e(0) + 105t^2A^\dagger(t)^3e(0) + 105t^3A^\dagger(t)e(0) \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots
\end{aligned}
$$

Lo anterior puede ser resumido en el siguiente diagrama:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
n=1: & & & & & & & 1 & & 0 & & & & & & \\
n=2: & & & & & & 1 & & 0 & & 1 & & & & & \\
n=3: & & & & & 1 & & 0 & & 3 & & 0 & & & & \\
n=4: & & & & 1 & & 0 & & 6 & & 0 & & 3 & & & \\
n=5: & & & 1 & & 0 & & 10 & & 0 & & 15 & & 0 & & \\
n=6: & & 1 & & 0 & & 15 & & 0 & & 45 & & 0 & & 15 & \\
n=7: & 1 & & 0 & & 21 & & 0 & & 105 & & 0 & & 105 & & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Para los siguientes ejemplos usaremos algunas propiedades de los A-coeficientes, las cuales pueden consultarse en el Apéndice respectivo.

Ejemplo 3.10. *Un argumento inductivo muestra que* $UQ^n(t)e(0) = W_t^n$. *Luego:*

$$
\begin{aligned}
E[W^n(t)] &= \int_\Omega W^n(t)\,\mathrm{d}P \\
&= \int_\Omega W^n(t)\cdot \mathbf{1}\,\mathrm{d}P \\
&= \langle W^n(t), Ue(0)\rangle \\
&= \langle UQ^n(t)e(0), Ue(0)\rangle \\
&= \langle Q^n(t)e(0), e(0)\rangle \\
&= t^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, puesto que $W(t)$ tiene una distribución normal con media 0 y varianza t, haciendo uso del Corolario C.2, concluimos que

$$E[W(t)^n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n! t^{n/2}}{(n/2)! 2^{n/2}} & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

el cual es un resultado bien conocido de Probabilidad Clásica para variables aleatorias normales.

Ejemplo 3.11. *Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continua con variación acotada respecto a $s \in [0, t]$. Por una parte:*

$$\begin{aligned} \langle T_f(t)Q(t)e(0), e(g)\rangle &= f(t)\langle Q(t)e(0), e(g)\rangle \\ &= f(t) \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}T_f(s)\ e(0), e(g) \right\rangle &= \int_0^t \langle Q(s)e(0), e(g)\rangle\,\mathrm{d}f(s) \\ &= \int_0^t \int_0^s g(u)\,\mathrm{d}u\ \mathrm{d}f(s). \end{aligned}$$

Tomemos la siguiente versión de Fórmula de Integración por Partes de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_0^t f(s)g(s)\,\mathrm{d}s = f(t)\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \int_0^s g(u)\,\mathrm{d}u\ \mathrm{d}f(s).$$

Usando esta fórmula junto con los cálculos anteriores y la igualdad (3.13),

$$\begin{aligned} &\left\langle \int_0^t T_f(s)\,\mathrm{d}Q(s)\ e(0), e(g) \right\rangle \\ &\qquad = \langle T_f(t)Q(t)e(0), e(g)\rangle - \left\langle \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}T_f(s)\ e(0), e(g) \right\rangle, \end{aligned}$$

de donde

$$\int_0^t T_f(s)\,\mathrm{d}Q(s)\ e(0) = T_f(t)Q(t)e(0) - \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}T_f(s)\ e(0). \tag{3.16}$$

Notemos ahora que

$$UT_f(t)Q(t)e(0) = Uf(t)Q(t)e(0) = f(t)UQ(t)e(0) = f(t)W_t. \tag{3.17}$$

Aplicando U en ambos lados de (3.16)*, y tomando en cuenta* (3.14) *y* (3.15)*, tenemos la Fórmula de Ito de Integración por Partes:*

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}W_s = f(t)W_t - \int_0^t W_s\,\mathrm{d}f(s).$$

Ejemplo 3.12. *Sean $f, g \in H$. Por la Primera Forma Fundamental es fácil demostrar que*

$$\langle Q(t)e(g), Q(t)e(f)\rangle = 2\left\langle e(g), \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}Q(s)\ e(f)\right\rangle + t\langle e(g), e(f)\rangle.$$

En particular,

$$\langle Q(t)e(0), Q(t)e(f)\rangle = 2\left\langle e(0), \int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}Q(s)\ e(f)\right\rangle + t\langle e(0), e(f)\rangle,$$

de donde concluimos que $Q(t)^2e(0) = 2\int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}Q(s)\ e(0) + te(0)$. Luego, aplicando U en ambos lados, se obtiene

$$W_t^2 = 2U\left\{\int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}Q(s)\ e(0)\right\} + t.$$

Por lo tanto $U\left\{\int_0^t Q(s)\,\mathrm{d}Q(s)\ e(0)\right\} = \int_0^t W_s\,\mathrm{d}W_s$. Es importante notar aquí que hemos usado el hecho conocido de ser $\int_0^t W_s\,\mathrm{d}W_s = \frac{W_t^2 - t}{2}$, el cual puede ser demostrado sin usar la Fórmula de Ito Clásica.

Usando el ejemplo anterior, inducción y el Teorema Espectral, se puede demostrar que $U\left\{\int_0^t Q(s)^n \,\mathrm{d}Q(s)\ e(0)\right\} = \int_0^t W_s^n \,\mathrm{d}W_s$, de donde se obtiene el siguiente

Ejemplo 3.13. *Sea $G_m(t) = \langle e(f), Q_t^m e(0)\rangle$. Nótese que*

$$\begin{aligned} G_m(t) &= \langle e(f), Q_t^m e(0)\rangle \\ &= \langle e(f), \sum_{k=0}^{m} t^{\frac{m-k}{2}} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} A_t^{\dagger k} e(0)\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{m} t^{\frac{m-k}{2}} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} \langle A_t^k e(f), e(0)\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} t^{\frac{m-k}{2}} \left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^k . \end{aligned}$$

Luego, G_m es absolutamente continua y derivable, y su derivada vale:

$$G_m'(t) = \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} \left\{ \frac{m-k}{2} t^{\frac{m-k-2}{2}} \left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^k + k t^{\frac{m-k}{2}} \overline{f(t)} \left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{k-1} \right\}.$$

En particular

$$\begin{aligned} \frac{G_{n+2}'(t)}{n+2} = \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+2} \begin{bmatrix} n+2 \\ k \end{bmatrix} \frac{n+2-k}{2} t^{\frac{n-k}{2}} \left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^k \\ + \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+2} \begin{bmatrix} n+2 \\ k \end{bmatrix} k t^{\frac{n+2-k}{2}} \overline{f(t)} \left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{k-1} . \end{aligned}$$

Sean

$$\tilde{G}_1(t) = \sum_{k=0}^{n+2} \begin{bmatrix} n+2 \\ k \end{bmatrix} \frac{n+2-k}{2} t^{\frac{n-k}{2}} \left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^k \quad y$$

$$\tilde{G}_2(t) = \sum_{k=0}^{n+2} \begin{bmatrix} n+2 \\ k \end{bmatrix} k t^{\frac{n+2-k}{2}} \overline{f(t)} \left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{k-1} ,$$

de modo que $\frac{G'_{n+2}(t)}{n+2} = \frac{\tilde{G}_1(t)}{n+2} + \frac{\tilde{G}_2(t)}{n+2}$.

En el primer sumatorio de $G'_{n+2}(t)$*, usando (c) de la Proposición C.1:*

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{G}_1(t)}{n+2} &= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+2}\begin{bmatrix} n+2 \\ k \end{bmatrix}\frac{n+2-k}{2}t^{\frac{n-k}{2}}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^k \\
&= \frac{1}{n+2}\begin{bmatrix} n+2 \\ n+2 \end{bmatrix}\frac{n+2-(n+2)}{k}t^{\frac{n-(n+2)}{2}}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{n+2} \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\begin{bmatrix} n+2 \\ n+1 \end{bmatrix}\frac{n+2-(n+1)}{k}t^{\frac{n-(n+1)}{2}}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{n+1} \\
&\quad + \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n+2 \\ k \end{bmatrix}\frac{n+2-k}{2}t^{\frac{n-k}{2}}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^k \\
&= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n+2 \\ k \end{bmatrix}\frac{n+2-k}{2}t^{\frac{n-k}{2}}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^k \\
&= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)(n+2)}{n+2-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{n+2-k}{2}t^{\frac{n-k}{2}}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n+1}{2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}t^{\frac{n-k}{2}}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^k \\
&= \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}t^{\frac{n-k}{2}}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^k.
\end{aligned}$$

Mientras en el segundo sumatorio de $G'_{n+2}(t)$*, usando (a) de la misma Propisición C.1:*

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{G}_2(t)}{n+2} &= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+2}\begin{bmatrix} n+2 \\ k \end{bmatrix}kt^{\frac{n+2-k}{2}}\overline{f(t)}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+2}\begin{bmatrix} n+2 \\ k \end{bmatrix}kt^{\frac{n+2-k}{2}}\overline{f(t)}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1}\begin{bmatrix} n+2 \\ k+1 \end{bmatrix}(k+1)t^{\frac{n+1-k}{2}}\overline{f(t)}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{n+2}{k+1}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}(k+1)t^{\frac{n+1-k}{2}}\overline{f(t)}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} t^{\frac{n+1-k}{2}}\overline{f(t)}\left(\int_0^t \overline{f(s)}\,\mathrm{d}s\right)^k.
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\tilde{G}_1(s)}{n+2}\,\mathrm{d}s &= \int_0^t \frac{n+1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} s^{\frac{n-k}{2}}\left(\int_0^s \overline{f(u)}\,\mathrm{d}u\right)^k\right\}\mathrm{d}s \\
&= \frac{n+1}{2}\int_0^t \left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} s^{\frac{n-k}{2}}\langle A_s^k e(f), e(0)\rangle\right\}\mathrm{d}s \\
&= \frac{n+1}{2}\int_0^t \left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} s^{\frac{n-k}{2}}\langle e(f), A_s^{\dagger k} e(0)\rangle\right\}\mathrm{d}s \\
&= \frac{n+1}{2}\int_0^t \langle e(f), \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} s^{\frac{n-k}{2}} A_s^{\dagger k} e(0)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{n+1}{2}\int_0^t \langle e(f), Q_s^n e(0)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{n+1}{2}\langle e(f), \int_0^t Q_s^n\,\mathrm{d}T_s e(0)\rangle.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\int_0^t \frac{\tilde{G}_2(s)}{n+2}\,\mathrm{d}s = \langle e(f), \int_0^t Q_s^{n+1}\,\mathrm{d}Q_s e(0)\rangle.$$

En resumen, hemos probado que

$$\frac{1}{n+2}Q_t^{n+2}e(0) = \int_0^t Q_s^{n+1}\,\mathrm{d}Q_s e(0) + \frac{n+1}{2}\int_0^t Q_s^n\,\mathrm{d}T_s e(0).$$

Aplicando U en ambos lados de la igualdad anterior, se concluye la Fórmula de Ito Clásica para polinomios:

$$\frac{W_t^{n+2}}{n+2} = \int_0^t W_s^{n+1}\,\mathrm{d}W_s + \frac{n+1}{2}\int_0^t W_s^n\,\mathrm{d}s.$$

Usando un argumento de aproximación, se puede probar que al ser cierta esta fórmula para polinomios, entonces es cierto que, para cualquier función $f \in C^2(\mathbb{R})$ *con* $E[\int_0^t |f'(s)|^2 \,\mathrm{d}s] < \infty$*, se tiene*

$$f(W_t) - f(0) = \int_0^t f'(W_s)^2 \,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\,\mathrm{d}s,$$

que es una versión de la Fórmula de Ito. Haciendo un análisis del procedimiento empleado, observamos que esta Fórmula de Ito es consecuencia directa de la representación de $Q(t)^n e(0)$*, la cual, como ya se ha dicho, es una aplicación del Corolario 3.19, que a su vez se obtiene mediante las Relaciones Canónicas de Conmutación en forma Infinitesimal que se estudiarán en la próxima sección.*

3.2. Correspondencia entre Bosones y Fermiones

3.2.1. Unicidad de las Relaciones Canónicas de Conmutación

Recordemos que, si H es un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{F}(H)$ y $\mathfrak{H}$ representan el mismo espacio: el espacio de Fock asociado a H.

En general, dados dos espacios de Hilbert H y $\widetilde{\mathfrak{H}}$ con dos familias de operadores no acotados $\mathcal{A} = \{\mathfrak{a}(f) : f \in H\}$ y $\mathcal{A}^\dagger = \{\mathfrak{a}^\dagger(f) : f \in H\}$ densamente definidos con dominio común $\mathcal{D}$ en $\widetilde{\mathfrak{H}}$ que satisfacen

$$\langle \mathfrak{a}^\dagger(f)\phi_1, \mathfrak{a}^\dagger(g)\phi_2\rangle - \langle \mathfrak{a}(g)\phi_1, \mathfrak{a}(f)\phi_2\rangle = \langle f, g\rangle\langle \phi_1, \phi_2\rangle \tag{3.18}$$

para todos $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}$, cumpliendo además $\mathfrak{a}^\dagger(f) = \mathfrak{a}(f)^*|_{\mathcal{D}}$ y tales que el mapeo $f \mapsto \mathfrak{a}^\dagger(f)$ es lineal, diremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^\dagger$ son una *representación de la forma infinitesimal de las Relaciones Canónicas de Conmutación sobre* $(H, \widetilde{\mathfrak{H}})$, abreviado como RCC-I sobre $(H, \widetilde{\mathfrak{H}})$. En este sentido, por el Corolario 2.7, la familias de operadores de creación y aniquilación satisfacen las RCC-I en $(H, \mathcal{F}(H))$.

Explotemos algunas propiedades de las RCC-I en $(H, \mathcal{F}(H))$ tomando a las familias de creación y aniquilación.

Teorema 3.14. *Los dominios de los operadores $a(f)$, $a^\dagger(f)$, $f \in H$, contienen a todos los vectores de la forma $\{(0, \cdots, 0, v^{\otimes n}, 0, \cdots) : n \geq 0, v \in H\}$ (donde el producto tensorial se encuentra en la posición n), y, con abuso de notación:*

$$\begin{aligned} a(f)v^{\otimes n} &= \sqrt{n}\langle f, v\rangle v^{\otimes n-1} \text{ si } n \geq 1 & (3.19) \\ a^\dagger(f)v^{\otimes n} &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}(f \otimes v^{\otimes n} + v \otimes f \otimes v^{\otimes n-1} + v^{\otimes 2} \otimes f \otimes v^{\otimes n-2} + \cdots \\ &\quad + v^{\otimes n} \otimes f). & (3.20) \end{aligned}$$

Demostración. Ver [13], pág. 146.

□

Corolario 3.15. *El vector vacío $e(0)$ está en el dominio de*

$$a^\dagger(f_1)a^\dagger(f_2)\cdots a^\dagger(f_n)$$

para cualesquiera $f_i \in H$. Más aún, $a^\dagger(f)^n e(0) = \Big(0, 0, \cdots, 0, \sqrt{n!}f^{\otimes n}, 0, \cdots\Big)$.

Demostración. Es inmediato del Teorema anterior.

□

Corolario 3.16. *Sean $f, g \in H$. Entonces $a(f)a^\dagger(g)e(0) - a^\dagger(g)a(f)e(0) = \langle f, g\rangle e(0)$.*

Demostración. Es directo de la representación de las RCC-I en $(H, \mathcal{F}(H))$.

□

Este resultado, junto con los hechos de ser $e(0)$ unitario y $a(f)e(0) = 0$, para toda $f \in H$, nos permiten caracterizar nuevamente al Espacio de Fermiones:

Lema 3.17. *La familia $\{a^\dagger(f)^n e(0) : n \geq 0, f \in H\}$ es total en $\mathcal{F}(H)$.*

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{F}(H)$ tal que $\langle \phi, a^\dagger(f)^n e(0)\rangle = 0$ para todos $n \geq 0$ y $f \in H$. Sea $g \in H$. Entonces

$$\left\| e(g) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a^\dagger(g)^k e(0) \right\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \left(1, g, \frac{g^{\otimes 2}}{\sqrt{2!}}, \cdots, \frac{g^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}, \frac{g^{\otimes n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}, \cdots\right) \right. \\
&\qquad \left. - \left(1, g, \frac{g^{\otimes 2}}{\sqrt{2!}}, \cdots, \frac{g^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}, 0, 0, \cdots\right) \right\|^2 \\
&= \left\| \left(0, 0, \cdots, 0, \frac{g^{\otimes n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}, \frac{g^{\otimes n+2}}{\sqrt{(n+2)!}}, \cdots\right) \right\|^2 \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|g^{\otimes k}\|^2}{k!} \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|g\|^{2k}}{k!} \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

Luego, $\langle \phi, e(g) \rangle = \text{lím} \sum \frac{1}{k!} \langle \phi, a^{\dagger}(g)^k e(0) \rangle = 0$. Por tanto $\phi = 0$, que es lo que se quería probar.

□

Lema 3.18. *Sean $\tilde{\mathfrak{H}}$ y H espacios de Hilbert con las siguientes características:*

(1) *Existen dos familias de operadores $\mathcal{A} = \{\mathfrak{a}(f) : f \in H\}$ y $\mathcal{A}^{\dagger} = \{\mathfrak{a}^{\dagger}(f) : f \in H\}$ con un mismo dominio $\mathcal{D}$ en $\widetilde{\mathfrak{H}}$ que son una representación de las RCC-I en $(H, \widetilde{\mathfrak{H}})$.*

(2) *Existe un vector unitario w en $\mathcal{D}$ tal que $\mathfrak{a}^{\dagger}(f)^n w$ está bien definido para todos $f \in H$ y $n \geq 1$*

(3) *$\mathfrak{a}(g) w = 0$ para todo $g \in H$.*

Entonces para $m \geq 1$ y $\phi \in \mathcal{D}$ arbitrario:

(a) $\langle \mathfrak{a}^{\dagger}(g)\phi, \mathfrak{a}^{\dagger}(f)^m w \rangle = \langle \phi, \mathfrak{a}(g)\mathfrak{a}^{\dagger}(f)^m w \rangle$

(b) $\mathfrak{a}(g)\mathfrak{a}^{\dagger}(f)^m w = m\langle g, f \rangle \mathfrak{a}^{\dagger}(f)^{m-1} w$ *y*

(c) $\langle w, \mathfrak{a}^{\dagger}(f)^m w \rangle = 0.$

Demostración.

(a) Nótese que (2) equivale a que $\mathfrak{a}^\dagger(f)^m w \in \mathcal{D}$, de modo que el lado derecho de la expresión en (a) tiene sentido, y se concluye fácilmente la igualdad pedida.

(b) Por (a), en particular $\langle \mathfrak{a}^\dagger(g)\phi, \mathfrak{a}^\dagger(f)w\rangle = \langle \phi, \mathfrak{a}(g)\mathfrak{a}^\dagger(f)w\rangle$. Como $\mathfrak{a}(g)w = 0$, usando la ecuación de la RCC-I se tiene:

$$\begin{aligned}\langle g, f\rangle\langle \phi, w\rangle &= \langle \mathfrak{a}^\dagger(g)\phi, \mathfrak{a}^\dagger(f)w\rangle - \langle \mathfrak{a}(f)\phi, \mathfrak{a}(g)w\rangle \\ &= \langle \mathfrak{a}^\dagger(g)\phi, \mathfrak{a}^\dagger(f)w\rangle \\ &= \langle \phi, \mathfrak{a}(g)\mathfrak{a}^\dagger(f)w\rangle,\end{aligned}$$

de donde $\mathfrak{a}(g)\mathfrak{a}^\dagger(f)w = \langle g, f\rangle w$. Luego, lo que se pide es cierto para $m = 1$. Si (b) es cierto para alguna $m \geq 1$, entonces, como consecuencia de las RCC-I, para $m + 1$ y $\phi \in \mathcal{D}$, tenemos:

$$\begin{aligned}&\langle \phi, \mathfrak{a}(g)\mathfrak{a}^\dagger(f)^{m+1}w\rangle \\ =\ &\langle \mathfrak{a}^\dagger(g)\phi, \mathfrak{a}^\dagger(f)\mathfrak{a}^\dagger(f)^m w\rangle \\ =\ &\langle g, f\rangle\langle \phi, \mathfrak{a}^\dagger(f)^m w\rangle + \langle \mathfrak{a}(f)\phi, \mathfrak{a}(g)\mathfrak{a}^\dagger(f)^m w\rangle \\ =\ &\langle g, f\rangle\langle \phi, \mathfrak{a}^\dagger(f)^m w\rangle + \langle \mathfrak{a}(f)\phi, m\langle g, f\rangle \mathfrak{a}^\dagger(f)^{m-1} w\rangle \\ =\ &\langle \phi, \langle g, f\rangle \mathfrak{a}^\dagger(f)^m w\rangle + \langle \phi, m\langle g, f\rangle \mathfrak{a}^\dagger(f)^m w\rangle,\end{aligned}$$

de donde es fácil concluir.

(c) $\langle w, \mathfrak{a}^\dagger(f)^m w\rangle = \langle \mathfrak{a}(f)w, \mathfrak{a}^\dagger(f)^{m-1}w\rangle = 0$. Nótese que fue importante que $m \geq 1$.

□

Corolario 3.19. *Con las condiciones del Lema anterior, se tiene que* $(\mathfrak{a}^\dagger(f) + \mathfrak{a}(f))^n w$ *es de la forma*

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{a}^\dagger(f) + \mathfrak{a}(f))^n w \\ &= \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n} w + \alpha \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n-1} w + \alpha^2 \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n-2} w + \cdots + \alpha^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger k} w + \cdots \\ &\qquad + \alpha^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger 1} w + \alpha^n \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} w,\end{aligned}$$

donde la colección $\left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} : 0 \leq k \leq n \right\}$ *son los A-coeficientes,* $\alpha = \|f\|$ *y* $\mathfrak{a}^{\dagger k} = \mathfrak{a}^\dagger(f)^k$.

Demostración. Por inducción sobre n. Para $n=1$, se tiene $(\mathfrak{a}^\dagger(f)+\mathfrak{a}(f))^n w = \mathfrak{a}^\dagger(f)w$ y ya. Supongamos que la fórmula es correcta para alguna $n \geq 1$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
& (\mathfrak{a}^\dagger(f)+\mathfrak{a}(f))^{n+1} w \\
= \;& (\mathfrak{a}^\dagger(f)+\mathfrak{a}(f))(\mathfrak{a}^\dagger(f)+\mathfrak{a}(f))^n w \\
= \;& \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n+1} w + \alpha \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n} w + \alpha^2 \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n-1} w + \cdots \\
& + \alpha^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger k+1} w + \cdots \\
& + \alpha^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger 2} w + \alpha^{n} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger} w \\
& + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{\dagger n} w + \alpha \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{\dagger n-1} w + \alpha^2 \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{\dagger n-2} w + \cdots \\
& + \alpha^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{\dagger k} w + \cdots \\
& + \alpha^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{\dagger 1} w + \alpha^{n} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \mathfrak{a} w \\
= \;& \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n+1} w + \alpha \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n} w + \alpha^2 \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n-1} w + \cdots \\
& + \alpha^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger k+1} w + \cdots \\
& + \alpha^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger 2} w + \alpha^{n} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger} w \\
& + n\alpha^2 \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n-1} w + (n-1)\alpha^3 \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n-2} w + (n-2)\alpha^5 \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n-3} w + \cdots \\
& + k\alpha^{n-k+2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger k-1} w + \cdots \\
& + 2\alpha^{n} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger} w + \alpha^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} w + 0 \\
= \;& \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n+1} w + \alpha \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger n} w \\
& + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathfrak{a}^{\dagger k+1} w
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=2}^{n} k\alpha^{n-k+2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\mathfrak{a}^{\dagger k-1}w \\
&+\alpha^{n+1}\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} w \\
= \;&\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}\mathfrak{a}^{\dagger n+1}w+\alpha\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}\mathfrak{a}^{\dagger n}w \\
&+\sum_{k=0}^{n-2}\alpha^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\mathfrak{a}^{\dagger k+1}w+\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)\alpha^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k+2 \end{bmatrix}\mathfrak{a}^{\dagger k+1}w \\
&+\alpha^{n+1}\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} w \\
= \;&\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}\mathfrak{a}^{\dagger n+1}w+\alpha\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}\mathfrak{a}^{\dagger n}w \\
&+\sum_{k=0}^{n-2}\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}+(k+2)\begin{bmatrix} n \\ k+2 \end{bmatrix}\right\}\alpha^{n-k}\mathfrak{a}^{\dagger k+1}w \\
&+\alpha^{n+1}\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} w.
\end{aligned}
$$

Con esto, es fácil concluir.

□

Teorema 3.20. *Con las condiciones del Lema 3.18, si además el conjunto* $\{\mathfrak{a}^{\dagger}(f)^n w : n \geq 0, f \in H\}$ *es total en* $\widetilde{\mathfrak{H}}$*, entonces existe un único isomorfismo unitario* $U : \widetilde{\mathfrak{H}} \to \mathcal{F}(H)$ *tal que* $Uw = e(0)$ *y* $U\mathfrak{a}^{\dagger}(f)^n w = a^{\dagger}(f)^n e(0)$.

Demostración. Primero, notemos que

$$\langle \mathfrak{a}^{\dagger}(f)^n w, \mathfrak{a}^{\dagger}(g)^m w\rangle = \begin{cases} n!\langle f, g\rangle^n & \text{si} \quad n = m \\ 0 & \text{si} \quad n \neq m \end{cases}.$$

En efecto, para $n = m = 1$, usando las RCC-I se tiene

$$\langle \mathfrak{a}^{\dagger}(f)w, \mathfrak{a}^{\dagger}(g)w\rangle = \langle f, g\rangle.$$

Supongamos que para alguna $n \geq 1$ se da la igualdad $\langle \mathfrak{a}^{\dagger}(f)^m w, \mathfrak{a}^{\dagger}(g)^m w\rangle = m!\langle f, g\rangle^m$ para toda $0 \leq m \leq n$. Entonces:

$$\langle \mathfrak{a}^{\dagger}(f)^{n+1}w, \mathfrak{a}^{\dagger}(g)^{n+1}w\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \mathfrak{a}^\dagger(f)\mathfrak{a}^\dagger(f)^n w, \mathfrak{a}^\dagger(g)\mathfrak{a}^\dagger(g)^n w\rangle \\
&= \langle f, g\rangle\langle \mathfrak{a}^\dagger(f)^n w, \mathfrak{a}^\dagger(g)^n w\rangle \\
&\quad +\langle \mathfrak{a}(g)\mathfrak{a}^\dagger(f)^n w, \mathfrak{a}(f)\mathfrak{a}^\dagger(g)^n w\rangle \text{ (por la RCC-I)} \\
&= \langle f, g\rangle\langle \mathfrak{a}^\dagger(f)^n w, \mathfrak{a}^\dagger(g)^n w\rangle \\
&\quad +\langle f, g\rangle\langle f, g\rangle\langle n\mathfrak{a}^\dagger(f)^{n-1} w, n\mathfrak{a}^\dagger(g)^{n-1} w\rangle \text{ (por (b) del Lema 3.18)} \\
&= \langle f, g\rangle n!\langle f, g\rangle^n + n^2\langle f, g\rangle^2(n-1)!\langle f, g\rangle^{n-1} \\
&= (1+n)n!\langle f, g\rangle^{n+1} \\
&= (n+1)!\langle f, g\rangle^{n+1}.
\end{aligned}$$

Análogamente se muestra el caso en que $n \neq m$. Concluimos así que $\langle \mathfrak{a}^\dagger(f)^n w, \mathfrak{a}^\dagger(g)^m w\rangle = \langle a^\dagger(f)^n e(0), a^\dagger(g)^m e(0)\rangle$. Más aún, usando la Desigualdad de Schwartz, es sencillo probar que si $\mathfrak{a}^\dagger(f)^n w = \mathfrak{a}^\dagger(g)^m w$ entonces $f = g$ y $n = m$, de modo que el mapeo $\mathfrak{a}^\dagger(f)w \mapsto a^\dagger(f)e(0)$ está bien definido y conserva productos internos entre dos conjuntos totales. Luego, existe un único isomorfimo unitario $U : \widetilde{\mathfrak{H}} \to \mathcal{F}(H)$ tal que $U\mathfrak{a}^\dagger(f)w = a^\dagger(f)e(0)$. Este isomorfismo es el buscado.

□

Otra relación canónica de conmutación de importancia es la de Weyl. Dados dos espacios de Hilbert $\widetilde{\mathfrak{H}}$ y H con una familia de operadores unitarios $\{\widetilde{W}(f) \in \mathbb{B}(\widetilde{\mathfrak{H}}) : f \in H\}$, se dice que esta familia es una *representación en forma de Weyl de la relación canónica de conmutación en* $(H, \widetilde{\mathfrak{H}})$, abreviado como RCC-W, si, para cada $f \in H$ fija, la familia $\{\widetilde{W}(tf)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es fuertemente continua, y además se cumple la igualdad

$$\widetilde{W}(f)\widetilde{W}(g) = e^{-i\mathrm{Im}\langle f,g\rangle}\widetilde{W}(f+g). \tag{3.21}$$

Recordemos que, dados $u \in H$ y $t \in \mathbb{R}$, los elementos del grupo fuertemente continuo $\mathscr{W}(u)$, definido en el Teorema 2.9, son de la forma

$$W_t(u) = \Phi(e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2}, tu, I, -tu) = e^{-\frac{1}{2}\|tu\|^2} e^{a^\dagger(tu)} e^{a(-tu)}$$

en el dominio exponencial. Más aún, se trata de isometrías en este dominio, y por tanto admiten una extensión unitaria a todo el espacio de Fock.

Si tomamos $t = 1$ y escribimos $W(u)$ para referirnos a los operadores $W_1(u)$, entonces los elementos de la familia de operadores unitarios $\{W(u)\}_{u\in H}$ con dominio $\mathcal{F}(H)$ son conocidos como *operadores de Weyl*.

Teorema 3.21. *Los operadores de Weyl son una RCC-W en* $(H, \mathcal{F}(H))$

Demostración. Como $W(u) = \Phi(e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2}, u, I, -u)$ en el dominio exponencial y este conjunto es total en $\mathcal{F}(H)$, bastará con probar la ecuación (3.21) para estos vectores usando la definición del producto dada por (2.3) y el hecho de ser Φ una representación:

$$\begin{aligned}
W(u)W(v) &= \Phi(e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2}, u, I, -u)\Phi(e^{-\frac{1}{2}\|v\|^2}, v, I, -v) \\
&= \Phi((e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2}, u, I, -u)(e^{-\frac{1}{2}\|v\|^2}, v, I, -v)) \\
&= \Phi(e^{-\frac{1}{2}(\|u\|^2+\|v\|^2+2\langle u,v\rangle)}, u+v, I, -u-v) \\
&= e^{-\frac{1}{2}(\|u\|^2+\|v\|^2+2\langle u,v\rangle)} e^{a^\dagger(u+v)} e^{a(-u-v)} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(\|u\|^2+\|v\|^2+2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle+2i\mathrm{Im}\langle u,v\rangle)} e^{a^\dagger(u+v)} e^{a(-u-v)} \\
&= e^{-i\mathrm{Im}\langle u,v\rangle} e^{-\frac{1}{2}\|u+v\|^2} e^{a^\dagger(u+v)} e^{a(-u-v)} \\
&= e^{-i\mathrm{Im}\langle u,v\rangle} \Phi(e^{-\frac{1}{2}\|u+v\|^2}, u+v, I, -(u+v)) \\
&= e^{-i\mathrm{Im}\langle u,v\rangle} W(u+v),
\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

□

Proposición 3.22. *El conjunto* $\{W(u)e(0) : u \in H\}$ *es total en* $\mathcal{F}(H)$.

Demostración. Basta con notar que

$$W(u)e(0) = e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2} e^{a^\dagger(u)} e^{a(-u)} e(0) = e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2} e(u)$$

y usar la totalidad de los vectores exponenciales.

□

Usando el resultado anterior, se puede demostrar que la RCC-W también es única salvo isomorfismo siempre que se tenga un vector unitario con esta propiedad de totalidad.

Teorema 3.23. *Sea* $\{\widetilde{W}(f)\}_{f\in H}$ *una familia de operadores unitarios en un espacio de Hilbert* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *que satisface la RCC-W y que es continua como mapeo de* H *a* $\mathbb{B}(\widetilde{\mathfrak{H}})$*, donde este último es equipado con la topología de la convergencia fuerte, así que en particular el operador autoadjunto* $r(f) = -i\, \frac{d}{dt}\widetilde{W}(tf)\Big|_{t=0}$ *está bien definido en un cierto dominio. Supongamos que existe un vector* *unitario w perteneciente al dominio de cada $r(f)$ tal que, para toda $f \in H$, $(r(if) - ir(f))w = 0$, y que el conjunto $\{\widetilde{W}(f)w : f \in H\}$ es total en $\widetilde{\mathfrak{H}}$. Entonces existe un único isomorfismo de espacios de Hilbert U de $\widetilde{\mathfrak{H}}$ a $\mathfrak{H}$ que mapea a w en el vector vacío $e(0)$ del espacio de Fock y tal que $U\widetilde{W}(f) = W(f)U$ para cada $f \in H$.*

Demostración. Primero, es fácil comprobar la igualdad

$$\widetilde{W}(u)\widetilde{W}(v) = e^{-2i\mathrm{Im}\langle u,v\rangle}\widetilde{W}(v)\widetilde{W}(u).$$

Por otra parte, nótese que para cada $g \in H$ se tiene que $\widetilde{W}(g)w$ pertenece al dominio de $r(f)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{\widetilde{W}(tf) - I}{t}\widetilde{W}(g)w &= \lim_{t\to 0}\frac{e^{-2it\mathrm{Im}\langle f,g\rangle}\widetilde{W}(g)\widetilde{W}(tf)w - \widetilde{W}(g)w}{t} \\
&= \widetilde{W}(g)\lim_{t\to 0}\frac{e^{-2it\mathrm{Im}\langle f,g\rangle}\widetilde{W}(tf)w - w}{t},
\end{aligned}$$

lo cual claramente existe. Para cada $f \in H$, sean $\mathfrak{a}(f) = \dfrac{r(if) - ir(f)}{2}$ y $\mathfrak{a}^\dagger(f) = \dfrac{r(if) + ir(f)}{2}$. Notemos que $\mathfrak{a}(f)w = 0$ y $\mathfrak{a}^\dagger(f) = ir(f)w$.

Además, para todo t real y ϕ en el dominio de $r(u)$ arbitraria:

$$\begin{aligned}
& \widetilde{W}(tu)\widetilde{W}(v)\phi \\
= \;& e^{-2it\mathrm{Im}\langle u,v\rangle}\widetilde{W}(v)\widetilde{W}(tu)\phi \\
\Longrightarrow \quad & -i\left(\frac{\widetilde{W}(tu) - I}{t}\right)\widetilde{W}(v)\phi \\
= \;& \frac{-i}{t}\left(e^{-2it\mathrm{Im}\langle u,v\rangle}\widetilde{W}(v)\widetilde{W}(tu) - \widetilde{W}(v)\right)\phi \\
= \;& \frac{-i}{t}\widetilde{W}(v)\left([e^{-2it\mathrm{Im}\langle u,v\rangle} - 1]\widetilde{W}(tu) + \widetilde{W}(tu) - I\right)\phi \\
= \;& \widetilde{W}(v)\left(-i\frac{e^{-2it\mathrm{Im}\langle u,v\rangle} - 1}{t}\widetilde{W}(tu)\phi - i\frac{\widetilde{W}(tu) - I}{t}\phi\right).
\end{aligned}$$

Haciendo $t \to 0$, por la continuidad de $\widetilde{W}(v)$ y la definición de $r(v)$ se obtiene $r(u)\widetilde{W}(v)\phi = \widetilde{W}(v)(-2\mathrm{Im}\langle u, v\rangle\phi + r(u)\phi)$, o equivalentemente

$$r(u)\widetilde{W}(v)\phi = \widetilde{W}(v)r(u)\phi - 2\mathrm{Im}\langle u, v\rangle\widetilde{W}(v)\phi \tag{3.22}$$

para ϕ en el dominio de $r(u)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}(u)\widetilde{W}(v)w &= \frac{1}{2}(r(iu) - ir(u))\widetilde{W}(v)w \\
&= \frac{1}{2}\left(\widetilde{W}(v)r(iu)w - 2\mathrm{Im}(-i\langle u, v\rangle)\widetilde{W}(v)w\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(i\widetilde{W}(v)r(u)w - 2i\mathrm{Im}\langle u, v\rangle\widetilde{W}(v)w\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(i\widetilde{W}(v)r(u)w + 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle)\widetilde{W}(v)w\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(i\widetilde{W}(v)r(u)w - 2i\mathrm{Im}\langle u, v\rangle\widetilde{W}(v)w\right) \\
&= \langle u, v\rangle\widetilde{W}(v)w.
\end{aligned}$$

Más aún, es fácil ver que $\langle\mathfrak{a}(u)\widetilde{W}(v)w, \widetilde{W}(f)w\rangle = \langle\widetilde{W}(v), \mathfrak{a}^\dagger(u)\widetilde{W}(f)w\rangle$.

Nótese que el hecho de ser $r(f)w = -i\,\frac{d}{dt}\widetilde{W}(tf)w\Big|_{t=0}$ implica

$$\frac{d}{dt}\widetilde{W}(tf)w = ir(f)\widetilde{W}(tf)w. \tag{3.23}$$

En efecto. Obsérvense las igualdades

$$\widetilde{W}((t+h)f) = \widetilde{W}(tf + hf) = e^{i\mathrm{Im}\langle tf, hf\rangle}\widetilde{W}(hf)\widetilde{W}(tf) = \widetilde{W}(hf)\widetilde{W}(tf).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\widetilde{W}((t+h)f)w - \widetilde{W}(tf)w}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\widetilde{W}(hf)\widetilde{W}(tf)w - \widetilde{W}(tf)w}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\widetilde{W}(hf) - I}{h}\widetilde{W}(tf)w \\
&= \frac{d}{dh}\widetilde{W}(hf)\widetilde{W}(tf)w\Big|_{h=0} \\
&= ir(f)\widetilde{W}(tf)w.
\end{aligned}$$

Ahora bien, para f fija, como $\{\widetilde{W}(tf)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo unitario a un parámetro y fuertemente continuo, usando la ecuación (3.22) es fácil comprobar que $F(t) = ir(f)\widetilde{W}(tf)w$ es continuo como mapeo $F : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$. Por tanto, para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $I(t) := \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t ir(f)\widetilde{W}(sf)w\,\mathrm{d}s$. Esto significa que para cada $t \in \mathbb{R}$, $I(t) \in \widetilde{\mathfrak{H}}$ es tal que

$$\left\langle \int_0^t ir(f)\widetilde{W}(sf)w\,\mathrm{d}s, x \right\rangle = \int_0^t \langle ir(f)\widetilde{W}(sf)w, x\rangle\,\mathrm{d}s \tag{3.24}$$

para todo $x \in \widetilde{\mathfrak{H}}$.

La existencia de $I(t)$ cumpliendo (3.24) junto con la ecuación (3.23), nos muestra la igualdad

$$\widetilde{W}(tf)w = w + \int_0^t ir(f)\widetilde{W}(sf)w\,\mathrm{d}s \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

De esta forma:

$$\begin{aligned}
\langle\widetilde{W}(tf)w, w\rangle &= \langle w, w\rangle + \left\langle \int_0^t ir(f)\widetilde{W}(sf)w\,\mathrm{d}s, w \right\rangle \\
&= 1 + \int_0^t \langle ir(f)\widetilde{W}(sf)w, w\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= 1 - i\int_0^t \langle\widetilde{W}(sf)w, r(f)w\rangle\,\mathrm{d}s \text{ (por ser } r(f) \text{ autoadjunto)} \\
&= 1 - \int_0^t \langle\widetilde{W}(sf)w, ir(f)w\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= 1 - \int_0^t \langle\widetilde{W}(sf)w, \mathfrak{a}^\dagger(f)w\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= 1 - \int_0^t \langle\mathfrak{a}(f)\widetilde{W}(sf)w, w\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= 1 - \int_0^t \langle f, sf\rangle\langle\widetilde{W}(sf)w, w\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= 1 - \|f\|^2 \int_0^t s\langle\widetilde{W}(sf)w, w\rangle\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Esto muestra que el mapeo $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dado por $G(t) = \langle\widetilde{W}(tf)w, w\rangle$ es absolutamente continuo y derivable, y su derivada satisface $G'(t) = -\|f\|^2 tG(t)$

con condición inicial $G(0) = 1$, de donde $G(t) = e^{-\frac{t^2\|f\|^2}{2}}$. Luego, para $t = -1$, se concluye $\langle \widetilde{W}(-f)w, w\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2}$ y, usando la unitariedad de $\widetilde{W}(f)$, se sigue que

$$\langle w, \widetilde{W}(f)w\rangle = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2}. \tag{3.25}$$

Sea $S = \{\widetilde{W}(f)w : f \in H\}$. Tomemos $\widetilde{W}(f)w, \widetilde{W}(g)w \in S$ tales que $\widetilde{W}(f)w = \widetilde{W}(g)w$. Entonces $w = e^{i\mathrm{Im}\langle f,g\rangle}\widetilde{W}(g-f)w$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 1 &= \langle w, w\rangle \\ &= e^{i\mathrm{Im}\langle f,g\rangle}\left\langle w, \widetilde{W}(g-f)w\right\rangle \\ &= e^{i\mathrm{Im}\langle f,g\rangle}e^{-\frac{1}{2}\|g-f\|^2}. \end{aligned}$$

Tomando módulos, concluimos que $f = g$. Sea $U : S \to \mathcal{F}(H)$ dada por $U\widetilde{W}(f)w = W(f)e(0)$. Dado lo anterior, U está bien definida. Más aún:

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{W}(f)w, \widetilde{W}(g)w\rangle &= \langle w, \widetilde{W}(-f)\widetilde{W}(g)w\rangle \\ &= e^{i\mathrm{Im}\langle f,g\rangle}\langle w, \widetilde{W}(g-f)w\rangle \\ &= e^{i\mathrm{Im}\langle f,g\rangle}e^{-\frac{1}{2}\|g-f\|^2} \end{aligned}$$

y con esto es fácil deducir la igualdad

$$\langle \widetilde{W}(f)w, \widetilde{W}(g)w\rangle = \langle W(f)e(0), W(g)e(0)\rangle.$$

Finalmente, por la totalidad de S, se puede extender U a un operador unitario en todo $\mathfrak{H}$ tal que $U\widetilde{W}(f) = W(f)U$ y $Uw = U\widetilde{W}(0)w = e(0)$, que es lo que se quería probar.

□

Ejemplo 3.24. *De la Subsección anterior sabemos que para $H = L^2(\mathbb{R}_+)$ se tiene $\mathcal{F}(H) = L^2(P)$, donde P es la medida de Wiener (ver párrafo siguiente a la ecuación (3.6)). Bajo este abuso de notación, escribimos $e(f) = e^{\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)^2\,\mathrm{d}s}$. Luego, se sigue que*

$$a(u)e(f) = \langle u, f\rangle e(f) = \int_0^\infty \overline{u(s)}f(s)\,\mathrm{d}s\ \ e^{\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)^2\,\mathrm{d}s}\ \ y$$

$$a^\dagger(u)e(f) = \left\{\int_0^\infty u(s)\,\mathrm{d}W_s - \int_0^\infty f(s)u(s)\,\mathrm{d}s\right\}e^{\int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)^2\,\mathrm{d}s}.$$

Nótese que, en la expresión dada para $a^\dagger$, pareciera que $e(f)$ es un eigenvector de este operador. Esto no es así, debido a que la integral estocástica en el lado derecho no es un escalar, sino un elemento del álgebra $L^2(P)$.

Así, por un lado:

$$\begin{aligned}&\langle a^\dagger(u)e(f), a^\dagger(v)e(g)\rangle\\ = &\int_\Omega \left(\int_0^\infty \overline{u(s)}\,\mathrm{d}W_s - \int_0^\infty \overline{f(s)u(s)}\,\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^\infty v(s)\,\mathrm{d}W_s - \int_0^\infty v(s)g(s)\,\mathrm{d}s\right)\\ &\times e^{\int_0^\infty \overline{f(s)}\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty \overline{f(s)}^2\,\mathrm{d}s} e^{\int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)^2\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}P, \qquad (3.26)\end{aligned}$$

mientras que

$$\langle a(v)e(f), a(u)e(g)\rangle = \int_\Omega \int_0^\infty v(s)\overline{f(s)}\,\mathrm{d}s \int_0^\infty \overline{u(s)}g(s)\,\mathrm{d}s\; e^{\langle f,g\rangle}\,\mathrm{d}P. \quad (3.27)$$

Sustituyendo (3.26) *y* (3.27) *en* (3.18)*, la RCC-I en este caso toma la forma:*

$$\begin{aligned}\int_\Omega &\left(\int_0^\infty \overline{u(s)}\,\mathrm{d}W_s - \int_0^\infty \overline{f(s)u(s)}\,\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^\infty v(s)\,\mathrm{d}W_s - \int_0^\infty v(s)g(s)\,\mathrm{d}s\right)\\ &\times e^{\int_0^\infty \overline{f(s)}\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty \overline{f(s)}^2\,\mathrm{d}s} e^{\int_0^\infty g(s)\,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)^2\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}P\\ &= \int_0^\infty \overline{u(s)}v(s)\,\mathrm{d}s\; e^{\langle f,g\rangle}\\ &\quad + \int_\Omega \int_0^\infty v(s)\overline{f(s)}\,\mathrm{d}s \int_0^\infty \overline{u(s)}g(s)\,\mathrm{d}s\; e^{\langle f,g\rangle}\,\mathrm{d}P.\end{aligned}$$

Si hacemos $f = g = 0$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$\int_\Omega \int_0^\infty \overline{u(s)}\,\mathrm{d}W_s \int_0^\infty v(s)\,\mathrm{d}W_s\;\mathrm{d}P = \int_0^\infty \overline{u(s)}v(s)\,\mathrm{d}s. \qquad (3.28)$$

Finalmente, si en la ecuación (3.28) *tomamos $u = v$, tendremos:*

$$\int_\Omega \left|\int u(s)\,\mathrm{d}W_s\right|^2 \mathrm{d}P = \int_0^\infty |u(s)|^2\,\mathrm{d}s, \qquad (3.29)$$

que es la Isometría de Ito, por lo que esta es consecuencia de RCC-I.

3.2.2. Espacios de Bosones y Fermiones

Ahora, observemos que los operadores $a^\dagger(f)$ y $a(f)$ pueden expresarse como las integrales estocásticas

$$a^\dagger(f) = \int_0^\infty f dA^\dagger \ \text{ y } \ a(f) = \int_0^\infty \overline{f}\, \mathrm{d}A$$

en el sentido de que, para $g \in \mathrm{Loc}$ arbitraria,

$$a^\dagger(f)e(g) = \lim_{t\to\infty} a^\dagger(f_t)e(g) \ \text{ y } \ a(f)e(g) = \lim_{t\to\infty} a(f_t)e(g),$$

y

$$a^\dagger(f_t) = \int_0^t f(s)\, \mathrm{d}A^\dagger(s) \ \text{ y } \ a(f_t) = \int_0^t \overline{f}(s)\, \mathrm{d}A(s).$$

Denotemos por $a^\#$ cualquiera de los operadores a y $a^\dagger$.

Introduzcamos el *Proceso de paridad* que viene definido como

$$J(t)e(f) = e(-f_{[0,t]} + f_{(0,\infty)}),$$

con $f \in \mathrm{Loc}$. Es claro que $J(t)$ es autoadjunto y tiene una extensión unitaria. Además, deja al dominio exponencial restringido invariante y el proceso $\{J(t) : t \geq 0\}$ es adaptado.

Teorema 3.25. *El proceso de paridad conmuta consigo mismo para tiempos diferentes ($J(s)J(t) = J(t)J(s)$), anticonmuta con creación y aniquilación ($J(t)a^\#(f_t) = -a^\#(f_t)J(t)$), y satisface la ecuación diferencial estocástica*

$$dJ = -2Jd\Lambda \textit{ con condición inicial } J(0) = I.$$

Demostración. El hecho de ser $J(s)J(t) = J(t)J(s)$ es claro. Además, como $a^\dagger(f_t)$ y $a(f_t)$ son mutuamente adjuntos, bastará con ver que $a(f_t)J(t) = -J(t)a(f_t)$. Usando la Primera Forma Fundamental y la autoadjunticidad de $J(t)$, se tiene:

$$\begin{aligned} & \langle e(u), a(f_t)J(t)e(v)\rangle \\ = \ & \langle e(u)a(f_t)e(-v_t + v^t)\rangle \\ = \ & \left\langle e(u), \int_0^t f(s)\, \mathrm{d}A(s)\ e(-v_t + v^t)\right\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t (-1_{[0,t]}(s) + 1_{(t,\infty)}(s))v(s)\langle e(u), f(s)e(-v_t + v^t)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t -v(s)f(s)\langle J(t)e(u), e(v)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= -\int_0^t \langle J(t)e(u), v(s)f(s)e(v)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= -\left\langle J(t)e(u), \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}A(s)\ e(v)\right\rangle \\
&= -\langle J(t)e(u), a(f_t)e(v)\rangle \\
&= \langle e(u), -J(t)a(f_t)e(v)\rangle.
\end{aligned}
$$

Esto muestra que $a(f_t)J(t) = -J(t)a(f_t)$, y por lo tanto, $J(t)a^{\#}(f_t) = -a^{\#}(f_t)J(t)$. Finalmente:

$$
\begin{aligned}
& \langle e(u), (J(t) - J(0))e(v)\rangle \\
&= \langle e(u), J(t)e(v)\rangle - \langle e(u), e(v)\rangle \\
&= \langle e(u), e(-v_t + v^t)\rangle - \langle e(u), e(v)\rangle \\
&= \langle e(u_t), e(-v_t)\rangle\langle e(u^t), e(v^t)\rangle - \langle e(u), e(v)\rangle \\
&= \langle e(u_t), e(-v_t)\rangle\langle e(u_t), e(v_t)\rangle^{-1}\langle e(u_t), e(v_t)\rangle\langle e(u^t), e(v^t)\rangle - \langle e(u), e(v)\rangle \\
&= \left(\langle e(u_t), e(v_t)\rangle^{-2} - 1\right)\langle e(u), e(v)\rangle \\
&= \left(e^{-2\int_0^t \overline{u}v ds} - 1\right)\langle e(u), e(v)\rangle.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el mapeo $t \mapsto \langle e(u), (J(t) - J(0))e(v)\rangle$ es absolutamente continuo y derivable, y su derivada es igual a

$$
-2\overline{u(t)}v(t)e^{-2\int_0^t \overline{u}v ds}\langle e(u), e(v)\rangle.
$$

Por otra parte, nuevamente por la Primera Forma Fundamental,

$$
\begin{aligned}
\left\langle e(u), \int_0^t -2J(s)\,\mathrm{d}\Lambda(s)\ e(v)\right\rangle &= \int_0^t -2\langle e(u), \overline{u(s)}v(s)J(s)e(v)\rangle \,\mathrm{d}s \\
&= -2\int_0^t \overline{u(s)}v(s)\langle e(u), J(s)e(v)\rangle \,\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

y por tanto el mapeo $t \mapsto \left\langle e(u), \int_0^t -2J(s)\, \mathrm{d}\Lambda(s)\ e(v) \right\rangle$ es absolutamente continuo y derivable, y su derivada es

$$-2\overline{u(t)}v(t)\langle e(u), J(t)e(v)\rangle,$$

que, por los cálculos anteriores, es igual a $-2\overline{u(t)}v(t)e^{-2\int_0^t \overline{u}v ds}\langle e(u), e(v)\rangle$.

Como ambos mapeos tienen la misma derivada, y valen 0 en $t = 0$, se demuestra la igualdad pedida.

□

Para $f \in H$, introduzcamos los procesos $t \mapsto b^{\#}(f_t)$ dados por

$$b^{\dagger}(f_t) = \int_0^t f(s)J(s)\, \mathrm{d}A^{\dagger}(s) \quad \text{y} \quad b(f_t) = \int_0^t \overline{f(s)}J(s)\, \mathrm{d}A(s).$$

Evidentemente son mutuamente adjuntos. Comparémoslos con las expresiones integrales de $t \mapsto a^{\#}(f_t)$ anteriores. La comparación se vuelve clara al introducir los procesos de *creación y aniquilación Fermiónicos*

$$B^{\dagger}(f_t) = \int_0^t J(s)\, \mathrm{d}A^{\dagger}(s) \quad \text{y} \quad B(f_t) = \int_0^t J(s)\, \mathrm{d}A(s),$$

con lo cual podemos escribir

$$b^{\dagger}(f_t) = \int_0^t f(s)\, \mathrm{d}B^{\dagger}(s) \quad \text{y} \quad b(f_t) = \int_0^t \overline{f(s)}\, \mathrm{d}B(s).$$

Teorema 3.26. *Los procesos de creación y aniquilación Fermiónicos satisfacen las ecuaciones*

$$dB^{\#} = J(t)dA^{\#} \quad y \quad dA^{\#} = J(t)dB^{\#}.$$

Demostración. Es claro a partir de las definiciones.

□

Más aún, tenemos la siguiente regla de anticonmutación:

Lema 3.27. $b(f_t)J(t) = -J(t)b(f_t)$.

Demostración. Por la Primera Forma Fundamental, la autoadjunticidad de los $J(t)$ y el hecho de que estos conmutan para distintos valores del tiempo:

$$\begin{aligned}
& \langle e(u), b(f_t)J(t)e(v)\rangle \\
= & \langle e(u), b(f_t)e(-v_t + v^t)\rangle \\
= & \left\langle e(u), \int_0^t \overline{f(s)}J(s)\,\mathrm{d}A(s)\ e(-v_t + v^t)\right\rangle \\
= & \int_0^t [-1_{[0,t]}(s) + 1_{(t,\infty)}(s)]v(s)\langle e(u), \overline{f(s)}J(s)e(-v_t + v^t)\rangle\,\mathrm{d}s \\
= & \int_0^t -v(s)\overline{f(s)}\langle e(u), J(s)J(t)e(v)\rangle\,\mathrm{d}s \\
= & \int_0^t -v(s)\overline{f(s)}\langle e(u), J(t)J(s)e(v)\rangle\,\mathrm{d}s \\
= & \int_0^t -v(s)\overline{f(s)}\langle J(t)e(u), J(s)e(v)\rangle\,\mathrm{d}s \\
= & \int_0^t -v(s)\langle J(t)e(u), \overline{f(s)}J(s)e(v)\rangle\,\mathrm{d}s \\
= & -\left\langle J(t)e(u), \int_0^t \overline{f(s)}J(s)\,\mathrm{d}A(s)\ e(v)\right\rangle \\
= & -\langle J(t)e(u), b(f_t)e(v)\rangle \\
= & \langle e(u), -J(t)b(f_t)e(v)\rangle,
\end{aligned}$$

de donde se sigue la anticonmutación buscada.

□

Teorema 3.28. *Para cualesquiera* $u, v \in H$*,* $f, g \in \mathrm{Loc}$ *y* $t \in \mathbb{R}_+$*:*

$$\langle b^\dagger(f_t)e(u), b^\dagger(g_t)e(v)\rangle + \langle b(g_t)e(u), b(f_t)e(v)\rangle = \int_0^t \overline{f(s)}g(s)\,\mathrm{d}s\ \langle e(u), e(v)\rangle,$$

y

$$\langle b^\dagger(f_t)e(u), b(g_t)e(v)\rangle + \langle b^\dagger(g_t)e(u), b(f_t)e(v)\rangle = 0.$$

Demostración. Utilizando la Segunda Forma Fundamental:

$$\langle b^\dagger(f_t)e(u), b^\dagger(g_t)e(v)\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \int_0^t f(s)J(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s)\ e(u), \int_0^t g(s)J(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s)\ e(v) \right\rangle \\
&= \int_0^t \left\langle \int_0^s f(r)J(r)\,\mathrm{d}A^\dagger(r)\ e(u), \overline{u(s)}g(s)J(s)e(v) \right\rangle \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \left\langle \overline{v(s)}f(s)J(s)e(u), \int_0^s g(r)J(r)\,\mathrm{d}A^\dagger(r)\ e(v) \right\rangle \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \langle f(s)J(s)e(u), g(s)J(s)e(v)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \overline{u(s)}g(s)\langle b^\dagger(f_s)e(u), J(s)e(v)\rangle + v(s)\overline{f(s)}\langle J(s)e(u), b^\dagger(g_s)e(v)\rangle\ \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \overline{f(s)}g(s)\langle J(s)e(u), J(s)e(v)\rangle\,\mathrm{d}s \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Pero por el Lema anterior,

$$
\begin{aligned}
\langle b^\dagger(f_s)e(u), J(s)e(v)\rangle &= \langle e(u), b(f_s)J(s)e(v)\rangle \\
&= -\langle e(u), J(s)b(f_s)e(v)\rangle \\
&= -\langle J(s)e(u), b(f_s)e(v)\rangle \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\langle J(s)e(u), b^\dagger(g_s)e(v)\rangle &= \langle b(g_s)J(s)e(u), e(v)\rangle \\
&= -\langle J(s)b(g_s)e(u), e(v)\rangle \\
&= -\langle b(g_s)e(u), J(s)e(v)\rangle. \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo las igualdades (3.31) y (3.32) en (3.30), y usando que $J(s)$ es unitario:

$$
\begin{aligned}
&\langle b^\dagger(f_t)e(u), b^\dagger(g_t)e(v)\rangle \\
&= -\int_0^t \overline{u(s)}g(s)\langle J(s)e(u), b(f_s)e(v)\rangle + v(s)\overline{f(s)}\langle b(g_s)e(u), J(s)e(v)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \overline{f(s)}g(s)\,\mathrm{d}s\ \ \langle e(u), e(v)\rangle \\
&= -\int_0^t \langle u(s)\overline{g(s)}J(s)e(u), b(f_s)e(v)\rangle + \langle b(g_s)e(u), v(s)\overline{f(s)}J(s)e(v)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \overline{f(s)}g(s)\,\mathrm{d}s\ \ \langle e(u), e(v)\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^t \left\{ \left\langle u(s)\overline{g(s)}J(s)e(u), \int_0^s \overline{f(r)}J(r)\,\mathrm{d}A(r)\ e(v) \right\rangle \right. \\
&\quad + \left. \left\langle \int_0^s \overline{g(r)}J(r)\,\mathrm{d}A(r)\ e(u), v(s)\overline{f(s)}J(s)e(v) \right\rangle \right\} \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \overline{f(s)}g(s)\,\mathrm{d}s\ \ \langle e(u), e(v)\rangle \\
&= -\langle b(g_t)e(u), b(f_t)e(v)\rangle + \int_0^t \overline{f(s)}g(s)\,\mathrm{d}s\ \ \langle e(u), e(v)\rangle,
\end{aligned}
$$

en donde la última igualdad se obtiene nuevamente por la Segunda Forma Fundamental, y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\langle b^\dagger(f_t)e(u), b^\dagger(g_t)e(v)\rangle + \langle b(g_t)e(u), b(f_t)e(v)\rangle \\
&\qquad = \int_0^t \overline{f(s)}g(s)\,\mathrm{d}s\ \ \langle e(u), e(v)\rangle.
\end{aligned}
$$

Análogamente se muestra la otra igualdad.

□

Teorema 3.29. *$b^\dagger(f_t)$ y $b(f_t)$ son operadores acotados mutuamente adjuntos en el dominio $\mathcal{E}_*$.*

Demostración. Sea $\psi \in \mathcal{E}_*$. Entonces ψ es combinación lineal finita $\psi = \sum_j c_j e(u_j)$ de vectores exponenciales restringidos. Luego, usando la primera igualdad del Teorema anterior, tendremos:

$$
\begin{aligned}
&\|b^\dagger(f_t)\psi\|^2 + \|b(f_t)\psi\|^2 \\
&= \sum_{j,k} \overline{c_j}c_k[\langle b^\dagger(f_t)e(u_j), b^\dagger(f_t)e(u_k)\rangle + \langle b(f_t)e(u_j), b(f_t)e(u_k)\rangle] \\
&= \sum_{j,k} \overline{c_j}c_k \int_0^t \overline{f(s)}f(s)\,\mathrm{d}s\ \ \langle e(u_j), e(u_k)\rangle \\
&= \sum_{j,k} \overline{c_j}c_k \int_0^t |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\ \ \langle e(u_j), e(u_k)\rangle \\
&= \int_0^t |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\ \ \|\psi\|^2.
\end{aligned}
$$

Como $\int_0^t |f(s)|^2\,\mathrm{d}s \leq \|f\|^2 < \infty$, entonces los dos operadores son acotados y sus normas no son mayores a $\|f\|$.

$\square$

Por continuidad, podemos extender de forma única a $b^{\#}(f_t)$ en todo el espacio de Fock $\mathfrak{H}$. Denotemos de la misma manera a las extensiones. No es difícil ver que el mapeo $g \mapsto b^{\#}(g)$ es aditivo. Así, para $f \in H$ y $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\|b^{\#}(f_{[0,m]}) - b^{\#}(f_{[0,n]})\|^2 = \|b^{\#}(f_{[n\wedge m, n\vee m]})\|^2 \leq \int_{n\wedge m}^{n\vee m} |f(s)|^2\,\mathrm{d}s \to 0$$

cuando $n, m \to \infty$. Se deduce que la sucesión $\{b^{\#}(1_{[0,n]}g)\}$ es de Cauchy, y por tanto tiene límite en $\mathbb{B}(H)$. Es natural escribir estos operadores como

$$b^{\dagger}(f) = \int_0^{\infty} f dB^{\dagger} \;\text{ y }\; b(f) = \int_0^{\infty} \overline{f}\,\mathrm{d}B.$$

En vista del Teorema 3.28, estos satisfacen las *relaciones canónicas de anticonmutación* (RCA)

$$[b^{\dagger}(f), b^{\dagger}(g)]_+ = [b(f), b(g)]_+ = 0,$$

$$[b(f), b^{\dagger}(g)]_+ = \langle f, g\rangle I,$$
$$b^{\dagger}(f + \alpha g) = b^{\dagger}(f) + \alpha b^{\dagger}(g),$$

donde $[X, Y]_+$ denota el anticonmutador $XY + YX$. En efecto, denotemos por f_n y g_n a las funciones $1_{[0,n]}f$ y $1_{[0,n]}g$. Así,

$$\begin{aligned}
\langle e(u), b(f)b(g)e(v)\rangle &= \langle b^{\dagger}(f)e(u), b(g)e(v)\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle b^{\dagger}(f_n)e(u), b(g_n)e(v)\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} -\langle b^{\dagger}(g_n)e(u), b(f_n)e(v)\rangle \\
&= -\lim_{n\to\infty} \langle b^{\dagger}(g_n)e(u), b(f_n)e(v)\rangle \\
&= -\langle b^{\dagger}(g)e(u), b(f)e(v)\rangle \\
&= -\langle e(u), b(g)b(f)e(v)\rangle,
\end{aligned}$$

lo cual muestra la primera igualdad. Las otras se demuestran de forma análoga.

Teorema 3.30. *Para toda f, $b(f)e(0) = 0$.*

Demostración. Notemos que, por la Primera Forma Fundamental,

$$\begin{aligned}
\langle e(u), b(f)e(0)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle e(u), b(f_n)e(0)\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle e(u), \int_0^n \overline{f(s)} J(s)\,\mathrm{d}A(s)\ e(0)\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^n \langle e(u), 0\cdot \overline{f(s)} J(s) e(0)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De la totalidad de los vectores exponenciales restringidos se tiene lo pedido.

□

Para el siguiente resultado, sean $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\mathbb{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \\
\mathbb{F}(x_1, \cdots, x_m) &= \prod_{1\leq i<j\leq n} \sigma(x_j - x_i)
\end{aligned}$$

Teorema 3.31. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $t \geq 0$. Tomemos el conjunto $\Delta_n(t) = \{(s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq t\}$. Si f_j se anula fuera de $[0, t]$ para $j = 1, 2, \cdots, n$, entonces*

$$b^\dagger(f_1)\cdots b^\dagger(f_n)e(0) = \int_{\Delta_n(t)} \det[f_i(s_j)]\,\mathrm{d}A^\dagger(s_1)\cdots \mathrm{d}A^\dagger(s_n)\ e(0).$$

Demostración. Notemos que como f_j se anula fuera de $[0, t]$, entonces $f_j = f_j 1_{[0,t]}$, y por tanto $b^\#(f_j) = \int_0^t f_j(s)J(s)\,\mathrm{d}A^\#(s)$ en el dominio exponencial. Sea $f \in H$. Hagamos la prueba por inducción sobre n. Para $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\langle e(f), b^\dagger(f_1)e(0)\rangle &= \langle e(f), \int_0^t f_1(s)J(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s)\ e(0)\rangle \\
&= \int_0^t \overline{f(s)} \langle e(f), f_1(s)J(s)e(0)\rangle\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \overline{f(s)} f_1(s)\,\mathrm{d}s, \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\langle e(f), \int_0^t f_1(s)\,\mathrm{d}A^\dagger(s)\ e(0)\rangle &= \langle e(f), a^\dagger(f_{1t})e(0)\rangle \\ &= \int_0^t \overline{f(s)} f_1(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Comparando (3.33) y (3.34) se tiene lo pedido en este caso. Supongamos ahora que, para alguna $n \geq 1$,

$$b^\dagger(f_1)\cdots b^\dagger(f_n)e(0) = \int_{\Delta_n(t)} \det[f_i(s_j)]\,\mathrm{d}A^\dagger(s_1)\cdots\mathrm{d}A^\dagger(s_n)\ e(0).$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos por $\widehat{S_m}$ al vector $(s_1, \cdots, s_m)$; por $\mathrm{d}\widehat{S_m}$ al símbolo $\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_m$ y por $\tilde{f}_s$ a la función $-f_s + f^s$. Si f_j, $j = 1, \cdots, n+1$, son funciones que cumplen con las hipótesis, entonces, por un lado, usando la RCA y la Primera Forma Fundamental:

$$\begin{aligned}
& \langle e(f), b^\dagger(f_1)b^\dagger(f_2)\cdots b^\dagger(f_n)b^\dagger(f_{n+1})e(0)\rangle \\
= \ & (-1)^n\langle e(f), b^\dagger(f_{n+1})b^\dagger(f_1)b^\dagger(f_2)\cdots b^\dagger(f_n)e(0)\rangle \\
= \ & (-1)^n\langle b(f_{n+1})e(f), b^\dagger(f_1)b^\dagger(f_2)\cdots b^\dagger(f_n)e(0)\rangle \\
= \ & (-1)^n\int_0^t \overline{f(s)}f_{n+1}(s)\langle J(s)e(f), b^\dagger(f_1)b^\dagger(f_2)\cdots b^\dagger(f_n)e(0)\rangle\,\mathrm{d}s \\
= \ & (-1)^n\int_0^t \overline{f(s)}f_{n+1}(s)\langle e(\tilde{f}_s), b^\dagger(f_1)b^\dagger(f_2)\cdots b^\dagger(f_n)e(0)\rangle\,\mathrm{d}s \\
= \ & (-1)^n\int_0^t \overline{f(s)}f_{n+1}(s)\left\langle e(\tilde{f}_s), \int_0^t\int_0^{s_n}\cdots\int_0^{s_2}\det[f_i(s_j)]\,\mathrm{d}A^\dagger(s_1)\cdots\mathrm{d}A^\dagger(s_n)\ e(0)\right\rangle \\
= \ & (-1)^n\int_0^t \overline{f(s)}f_{n+1}(s)\int_0^t\overline{\tilde{f}_s(s_n)}\int_0^{s_n}\overline{\tilde{f}_s(s_{n-1})}\cdots\int_0^{s_2}\overline{\tilde{f}_s(s_1)}\det[f_i(s_j)]\,\mathrm{d}\widehat{S_n}\ \mathrm{d}s \\
= \ & (-1)^n\int_0^t \overline{f(s)}f_{n+1}(s)\left\{\int_0^t\int_0^{s_n}\cdots\int_0^{s_2}\det[f_i(s_j)]\overline{\tilde{f}_s(s_1)}\cdots\overline{\tilde{f}_s(s_n)}\,\mathrm{d}\widehat{S_n}\right\}\mathrm{d}s \\
= \ & (-1)^n\int_0^t \overline{f(s)}f_{n+1}(s)\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t\mathbb{F}(\widehat{S_n})\prod_{i=1}^n\overline{\tilde{f}_s(s_i)}f_i(s_i)\,\mathrm{d}\widehat{S_n}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la técnica de homogeneización de Bruijn dada en [2] para resolver integrales múltiples de determinantes consistentes en funciones reales:

$$\langle e(f), \int_0^t\int_0^{s_{n+1}}\int_0^{s_n}\cdots\int_0^{s_2}\det[f_i(s_j)]\,\mathrm{d}A^\dagger(s_1)\cdots\mathrm{d}A^\dagger(s_n)\,\mathrm{d}A^\dagger(s_{n+1})\ e(0)\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \overline{f(s_{n+1})} \int_0^{s_{n+1}} \overline{f(s_n)} \cdots \int_0^{s_2} \overline{f(s_1)} \det[f_i(s_j)]\, \mathrm{d}s_1\ \mathrm{d}s_2 \cdots \mathrm{d}s_{n+1} \\
&= \int_0^t \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t \mathbb{F}(s_1, s_2, \cdots, s_{n+1}) \prod_{i=1}^{n+1} f_i(s_i)\overline{f(s_i)}\, \mathrm{d}s_1\ \mathrm{d}s_2 \cdots \mathrm{d}s_{n+1} \\
&= \int_0^t \cdots \int_0^t \prod_{i=2}^{n} \sigma(s_{n+1} - s_i) \prod_{i=2}^{n+1} f_i(s_i)\overline{f(s_i)} \int_0^t \mathbb{F}(\widehat{S_n})\sigma(s_{n+1} - s_1) f_1(s_1)\overline{f(s_1)}\, \mathrm{d}\widehat{S_{n+1}} \\
&= -\int_0^t \cdots \int_0^t \prod_{i=2}^{n} \sigma(s_{n+1} - s_i) \prod_{i=2}^{n+1} f_i(s_i)\overline{f(s_i)} \int_0^t \mathbb{F}(\widehat{S_n})\overline{\tilde{f}_{s_{n+1}}(s_1)}\, \mathrm{d}\widehat{S_{n+1}} \\
&= -1 \int_0^t \cdots \int_0^t \prod_{i=3}^{n} \sigma(s_{n+1} - s_i) \prod_{i=3}^{n+1} f_i(s_i)\overline{f(s_i)} \int_0^t \sigma(s_{n+1} - s_2) f_2(s_2)\overline{f(s_2)} \int_0^t \mathbb{F}(\widehat{S_n}) f_1(s_1)\overline{\tilde{f}_{s_{n+1}}(s_1)}\, \mathrm{d}\widehat{S_{n+1}} \\
&= (-1)^2 \int_0^t \cdots \int_0^t \prod_{i=3}^{n} \sigma(s_{n+1} - s_i) \prod_{i=3}^{n+1} f_i(s_i)\overline{f(s_i)} \int_0^t f_2(s_2)\overline{\tilde{f}_{s_{n+1}}(s_2)} \int_0^t \mathbb{F}(\widehat{S_n}) f_1(s_1)\overline{\tilde{f}_{s_{n+1}}(s_1)}\, \mathrm{d}\widehat{S_{n+1}} \\
&= (-1)^2 \int_0^t \cdots \int_0^t \prod_{i=3}^{n} \sigma(s_{n+1} - s_i) \prod_{i=3}^{n+1} f_i(s_i)\overline{f(s_i)} \int_0^t \int_0^t \mathbb{F}(\widehat{S_n}) \prod_{i=1}^{2} f_i(s_i)\overline{\tilde{f}_{s_{n+1}}(s_i)}\, \mathrm{d}\widehat{S_{n+1}} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&= (-1)^{n-1} \int_0^t f_{n+1}(s_{n+1})\overline{f(s_{n+1})} \int_0^t \sigma(s_{n+1} - s_n) f_n(s_n)\overline{f(s_n)} \int_0^t \cdots \int_0^t \mathbb{F}(\widehat{S_n}) \prod_{i=1}^{n-1} f_i(s_i)\overline{\tilde{f}_{s_{n+1}}(s_i)}\, \mathrm{d}\widehat{S_{n+1}} \\
&= (-1)^{n} \int_0^t f_{n+1}(s_{n+1})\overline{f(s_{n+1})} \int_0^t f_n(s_n)\overline{\tilde{f}_{s_{n+1}}(s_n)} \int_0^t \cdots \int_0^t \mathbb{F}(\widehat{S_n}) \prod_{i=1}^{n-1} f_i(s_i)\overline{\tilde{f}_{s_{n+1}}(s_i)}\, \mathrm{d}\widehat{S_{n+1}} \\
&= (-1)^{n} \int_0^t f_{n+1}(s_{n+1})\overline{f(s_{n+1})} \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t \mathbb{F}(\widehat{S_n}) \prod_{i=1}^{n} f_i(s_i)\overline{\tilde{f}_{s_{n+1}}(s_i)}\, \mathrm{d}\widehat{S_{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Esto concluye la prueba.

□

Como consecuencia del Teorema anterior y la totalidad del conjunto

$$\{a^\dagger(f_1) \cdots a^\dagger(f_n) e(0) : f_i \in H, n \geq 1\},$$

se tiene el siguiente:

Corolario 3.32. *El conjunto* $\{b^\dagger(f_1) \ldots b^\dagger(f_n) e(0) : f_i \in H, n \geq 0\}$ *es total en* $\mathcal{F}(H)$.

Como en el caso de la RCC-I, la existencia de un vector unitario que anula a todos los operadores de aniquilación y la totalidad del conjunto de creación aplicado a este vector caracteriza, salvo equivalencia unitaria, una representación particular de RCA, la *representación de Fock*, que lleva al espacio de Hilbert en el *Espacio de Fock Fermiónico.*

Teorema 3.33. *Sean* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *y* H *dos espacios de Hilbert tales que existen dos familias de operadores acotados* $\mathcal{B} = \{\mathfrak{b}(f) : f \in H\}$ *y* $\mathcal{B}^\dagger = \{\mathfrak{b}^\dagger(f) : f \in H\}$ *con dominio* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *cumpliendo:*

$$\begin{aligned}[\mathfrak{b}^\dagger(f), \mathfrak{b}^\dagger(g)]_+ = [\mathfrak{b}(f), \mathfrak{b}(g)]_+ = 0 \\ [\mathfrak{b}(f), \mathfrak{b}^\dagger(g)]_+ = \langle f, g\rangle I, \\ \mathfrak{b}^\dagger(f + \alpha g) = \mathfrak{b}^\dagger(f) + \alpha \mathfrak{b}^\dagger(g).\end{aligned} \tag{3.35}$$

Si existe un $w \in \widetilde{\mathfrak{H}}$ *unitario tal que* $\mathfrak{b}(f)w = 0$ *para toda* $f \in H$ *y el conjunto* $S = \{\mathfrak{b}^\dagger(f_1) \cdots \mathfrak{b}^\dagger(f_n)w : f_j \in H, n \geq 0\}$ *es total en* $\widetilde{\mathfrak{H}}$*, entonces existe un único isomorfismo* $U : \widetilde{\mathfrak{H}} \to \mathcal{F}(H)$ *tal que* $Uw = e(0)$ *y* $U\mathfrak{b}^\dagger = b^\dagger U$.

Demostración. Primero, observemos que al ser $\mathfrak{b}(f)w = 0$, entonces, por la primera de las tres ecuaciones anteriores, se tiene que $\mathfrak{b}^\dagger(f_1) \cdots \mathfrak{b}^\dagger(f_n)w = 0$ si existen $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ con $f_i = f_j$. Luego, podemos suponer que los elementos de la familia S son tales que si $\mathfrak{b}^\dagger(f_1) \cdots \mathfrak{b}^\dagger(f_n)w \in S$, entonces $f_i \neq f_j$.

Ahora bien, afirmamos que

$$\langle \mathfrak{b}^\dagger(f_1) \cdots \mathfrak{b}^\dagger(f_n)w, \mathfrak{b}^\dagger(g_1) \cdots \mathfrak{b}^\dagger(g_m)w\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \det[\langle f_i, g_j\rangle] & \text{si } n = m. \end{cases}$$

En efecto. La prueba general se puede hacer por inducción. Por simplicidad, únicamente mostraremos los casos $n = m$ para $n = 1$ y 2.

Para $n = 1$:

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{b}^\dagger(f_1)w, \mathfrak{b}^\dagger(g_1)w\rangle &= \langle w, \mathfrak{b}(f_1)\mathfrak{b}^\dagger(g_1)w\rangle \\ &= \langle w, \langle f_1, g_1\rangle w - \mathfrak{b}^\dagger(g_1)\mathfrak{b}(f_1)w\rangle \\ &= \langle f_1, g_1\rangle\langle w, w\rangle \\ &= \langle f_1, g_1\rangle.\end{aligned}$$

Para $n = 2$:

$$\langle \mathfrak{b}^\dagger(f_1)\mathfrak{b}^\dagger(f_2)w, \mathfrak{b}^\dagger(g_1)\mathfrak{b}^\dagger(g_2)w\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \mathfrak{b}^\dagger(f_2)w, \mathfrak{b}(f_1)\mathfrak{b}^\dagger(g_1)\mathfrak{b}^\dagger(g_2)w\rangle \\
&= \langle \mathfrak{b}^\dagger(f_2)w, \langle f_1, g_1\rangle \mathfrak{b}^\dagger(g_2)w\rangle \\
&\quad -\langle \mathfrak{b}^\dagger(f_2)w, \mathfrak{b}^\dagger(g_1)\mathfrak{b}(f_1)\mathfrak{b}^\dagger(g_2)w\rangle \\
&= \langle f_1, g_1\rangle \langle \mathfrak{b}^\dagger(f_2)w, \mathfrak{b}^\dagger(g_2)w\rangle \\
&\quad -\langle \mathfrak{b}^\dagger(f_2)w, \mathfrak{b}^\dagger(g_1)(\langle f_1, g_2\rangle - \mathfrak{b}^\dagger(g_2)\mathfrak{b}(f_1))w\rangle \\
&= \langle f_1, g_1\rangle \langle w, \mathfrak{b}(f_2)\mathfrak{b}^\dagger(g_2)w\rangle \\
&\quad -\langle f_1, g_2\rangle \langle \mathfrak{b}^\dagger(f_2)w, \mathfrak{b}^\dagger(g_1)w\rangle \\
&\quad +\langle \mathfrak{b}^\dagger(f_2), \mathfrak{b}^\dagger(g_1)\mathfrak{b}^\dagger(g_2)\mathfrak{b}(f_1)w\rangle \\
&= \langle f_1, g_1\rangle \langle w, \mathfrak{b}(f_2)\mathfrak{b}^\dagger(g_2)w\rangle \\
&\quad -\langle f_1, g_2\rangle \langle w, \mathfrak{b}(f_2)\mathfrak{b}^\dagger(g_1)w\rangle \\
&= \langle f_1, g_1\rangle \langle w, (\langle f_2, g_2\rangle - \mathfrak{b}^\dagger(g_2)\mathfrak{b}(f_2))w\rangle \\
&\quad -\langle f_1, g_2\rangle \langle w, (\langle f_2, g_1\rangle - \mathfrak{b}^\dagger(g_1)\mathfrak{b}(f_2))w\rangle \\
&= \langle f_1, g_1\rangle \langle f_2, g_2\rangle \langle w, w\rangle \\
&\quad -\langle f_1, g_2\rangle \langle f_2, g_1\rangle \langle w, w\rangle \\
&= \begin{vmatrix} \langle f_1, g_1\rangle & \langle f_1, g_2\rangle \\ \langle f_2, g_1\rangle & \langle f_2, g_2\rangle \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Análogamente se muestra el caso en que $n \neq m$. Así, por la totalidad de S, existe un único isomorfimo unitario U tal que $Uw = e(0)$ y $U\mathfrak{b}^\dagger(f) = b^\dagger(f)U$. Esto concluye la prueba, y la Tesis.

□

Comentarios

En este Capítulo se han presentado algunas formas para entender al Movimiento Browniano como un proceso estocástico cuántico. Es posible hacer un estudio análogo trabajando con el Proceso de Poisson. Para ello, básicamente se utilizan los grupos $\mathscr{G}$ y $\mathscr{W}\mathscr{G}(u)$ estudiados en el Capítulo 2 a través de los Teoremas 2.12 y 2.13. Más aún, la Proposición 3.2 y la igualdad (3.6) siguen siendo válidas si tomamos $Q = e^{i\zeta}A^\dagger + e^{-i\zeta}A$ con $\zeta \in [0, \pi)$.

La demostración del Teorema 3.8 es obra del doctor García Corte, basada en la prueba del Lema 1.1.2 de [11]. En este sentido, el trabajo expuesto sobre las relaciones entre el isomorfismo U, que identifica a $\mathcal{F}(H)$ con $L^2(P)$ y a $Q(t)e(0)$ con W_t, y la integración estocástica cuántica es original del autor de esta tesis. En particular, la representación de $Q(t)^n e(0)$ y su uso para demostrar la versión de la Fórmula de Ito dada aquí fueron desarrollados por nosotros.

En [13], se presentan los operadores de Weyl mediante las RCC-W. A partir de ellos se construyen los operadores de creación y aniquilación, aunque no se demuestra la unicidad de sus relaciones de conmutación. Es importante señalar que la prueba que damos de este resultado (Teorema 3.23) es la más accesible que pudimos construir. Otras construcciones de esta prueba involucran, al menos informalmente, un desarrollo en serie de potencias del operador $e^{A^\dagger(t)+A(t)}$. De hecho, a partir de esta idea el autor se inspira para formular la representación de $Q(t)^n e(0)$, para después generalizarlo en el Corolario 3.19. Notemos que éste último a su vez puede ser generalizado para $(\mathfrak{a}^\dagger(f) + \mathfrak{a}(g))^n w$.

Conclusiones y Comentarios Finales

- El Cálculo Estocástico Cuántico es una de las teorías matemáticas más recientes, no obstante el tratamiento que se encuentra en [5] es considerado por varios expertos como antiguo en comparación con lo desarrollado en [3] y [13]. Sin embargo, nosotros hemos presentado aquí una manera bastante accesible de su estudio basándonos en estas tres obras.

- Como pudo verse, la construcción de la Integral Estocástica Cuántica es más elaborada que la Clásica. Sin embargo, es más poderosa y constituye una forma más general de la Integral Estocástica Clásica como pudo verse en el Capítulo 3.

- Se contribuyó con nuevas demostraciones de las Formas Fundamentales, además de haber encontrado otro Estimado Fundamental. En este sentido, las contribuciones fueron: definición de los coeficientes β_k (ver (2.6)), el Lema de Descomposición (Lema 2.24) y las Diferencias de Martingalas (Lemas 2.23 y 2.30).

- Se encontraron condiciones necesarias y suficientes para caracterizar a los espacios de Fock. En particular, se fue más allá que la mayoría de los textos sobre el tema para describir a $\mathcal{F}(H)$ cuando $H = L^2(\mathbb{R}_+)$, lo que nos permitió demostrar una versión de la Fórmula de Ito a través de argumentos cuánticos.

- Conjeturamos que el polinomio que describe el Corolario 3.19 está fuertemente relacionado con los Polinomio de Hermite. Más aún, para $H = L^2(\mathbb{R}_+)$, creemos que la acción de $a^\dagger(f)^n e(0)$ bajo el isomorfismo U que identifica a $\mathcal{F}(H)$ con $L^2(P)$ genera integración estocástica clásica múltiple. Es decir

$$Ua^\dagger(f)^n e(0) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_n} f(s_1) f(s_2) \cdots f(s_n)\, \mathrm{d}W_{s_n}\, \mathrm{d}W_{s_{n-1}} \cdots \mathrm{d}W_{s_1}.$$

Dicha conjetura está animada por el primer capítulo de [11] pero, aunque creemos que no es complicada de demostrar, por cuestiones de tiempo y espacio hemos preferido no corroborarla en estos momentos.

Apéndice A

Nociones Básicas de Probabilidad Cuántica

En Probabilidad Clásica, tenemos un espacio muestral, un conjunto de eventos, un conjunto de variables aleatorias, y distribuciones. En Probabilidad Cuántica, tenemos un espacio de estados, el cual es un espacio de Hilbert, en lugar de un espacio muestral; los eventos, las variables aleatorias y las distribuciones son representadas como operadores en dicho espacio. Sea f una variable aleatoria en un espacio finito de probabilidad $\{1, 2, \cdots, n\}$ con distribución de probabilidad $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
E[f] &:= \sum_{j=1}^{n} p_j f(j) \\
&= \langle (p_1, p_2, \cdots, p_n), (f(1), f(2), \cdots, f(n)) \rangle \\
&= \operatorname{tr} \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(2) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(n) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La segunda igualdad de la expresión anterior nos lleva a la idea de que el conjunto de todas las variables aleatorias reales es un espacio vectorial real de dimensión n y y la distribución de probabilidad es una funcional. La siguiene igualdad nos conduce a ver a la distribución de probabilidad como un elemento del dual del espacio vectorial real n^2-dimensional de todas la matrices hermitianas de orden n y describe al valor esperado en el lenguaje de operadores en espacios de Hilbert usando cantidades como la traza. La esencia de la Probabilidad Cuántica es tomar en cuenta la posibilidad de usar matrices hermitianas arbitrarias u operadores en lugar de únicamente matrices diagonales como en la expresión anterior.

En la siguiente tabla enunciamos parte del lenguaje usual de la Probabilidad Cuántica. En el lado izquierdo de cada tabla se encuentran conceptos de la Probabilidad Clásica, mientras que en el derecho sus análogos en Probabilidad Cuántica. Como se trata de un apéndice meramente introductorio, manejaremos los conceptos en espacios de dimensión finita para dar mayor claridad a la exposición, aunque estos conceptos pueden extenderse fácilmente a espacios más generales. Una buena introducción a la teoría abstracta de la Probabilidad Cuántica es [3] o bien [8].

Los Espacios	
1.1 El Espacio Muestral Ω: Es un conjunto finito $\{1, 2, \cdots, n\}$.	**1.2 El Espacio de Estados H:** Es un espacio de Hilbert complejo de dimensión n.

Los Eventos	
1.3 El conjunto de Eventos $\mathcal{F}_\Omega$: Es el conjunto de todos los subconjuntos de Ω. $\mathcal{F}_\Omega$ es un álgebra de Boole con las operaciones de un unión e intersección. En particular: $E\cap(F_1\cup F_2) = (E\cap F_1)\cup(E\cap F_2)$.	**1.4 El Conjunto de Eventos $\mathcal{P}(H)$:** Este es el conjunto de todas las proyecciones en H. Un elemento $E \in \mathcal{P}(H)$ es llamado *evento*. Aquí, en lugar de "$\cup$ " se tiene la operación máx, denotada por $\bigvee$, y en lugar de "$\cap$" tenemos la operación mín, denotada por $\bigwedge$. Si $E_1, \cdots, E_n \in \mathcal{P}(H)$, estas operaciones entre ellos representan, respectivamente, los eventos de ocurrencia de al menos un E_i y de ocurrencia de todos los E_i. Notemos que $E\bigwedge(F_1\bigvee F_2)$ no es siempre igual a $(E\bigwedge F_1)\bigvee(E\bigwedge F_2)$. La igualdad se da únicamente si E, F_1 y F_2 conmutan uno con otro.

<table>
<tr><th colspan="2">Variables Aleatorias y Observables</th></tr>
<tr>
<td>

1.5 El Conjunto de Variables Aleatorias $\mathcal{B}_\Omega$: Este es el conjunto de todas las funciones de valores complejos en Ω. Los elementos de $\mathcal{B}_\Omega$ son llamados *variables aleatorias*. $\mathcal{B}_\Omega$ es una C^*-álgebra con unidad, denotada con $\mathbf{1}$, la cual viene dada como $\mathbf{1}(\omega) = 1$, y en donde la involución * está dada por $f^* = \overline{f}$.

A cada evento $E \in \mathcal{F}_\Omega$ se le asocia la variable aleatoria 1_E. Para una variable aleatoria f, sea $\mathrm{Sp}(f) := f(\Omega)$. Entonces f se puede escribir como

$$f = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \lambda 1_{f^{-1}(\{\lambda\})},$$

de tal manera que

$$1_{f^{-1}(\{\lambda\})} \cdot 1_{f^{-1}(\lambda')} \equiv 0$$

para $\lambda \neq \lambda'$, y

$$f^r = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \lambda^r 1_{f^{-1}(\{\lambda\})},$$

y en general, para $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, se tiene la variable aleatoria

$$\phi(f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \phi(\lambda) 1_{f^{-1}(\{\lambda\})}.$$

Nos interesan las variables aleatorias f tales que $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \mathbb{R}$, es decir, de valores reales, o equivalentemente, las variables aleatorias f tales que $f^* = f$.

</td>
<td>

1.6 El Conjunto de Observables $\mathcal{O}(H)$: Tomemos $\mathbb{B}(H)$. Ésta es una C^*-álgebra no abeliana con unidad, la cual es el operador identidad I. Para los elementos de X de $\mathcal{O}(H)$, definimos $\mathrm{Sp}(X)$ como el conjunto de eigenvalores de X. Es decir, su espectro discreto. Como X es autoadjunto, entonces $\mathrm{Sp}(X) \subseteq \mathbb{R}$, y por el Teorema Espectral, podemos escribir X como

$$X = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(X)} \lambda E_\lambda,$$

donde E_λ es la proyección sobre el subespacio $\{u \in H | Xu = \lambda u\}$ y $E_\lambda E_{\lambda'} = \Theta$, siempre que $\lambda, \lambda' \in \mathrm{Sp}(X)$, $\lambda \neq \lambda'$ y

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(X)} E_\lambda = I.$$

De la misma forma, tenemos

$$X^r = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(X)} \lambda^r E_\lambda,$$

y en general, si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces

$$\phi(X) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(X)} \phi(\lambda) E_\lambda.$$

</td>
</tr>
</table>

Distribuciones y Estados

1.7 Distribuciones p: Una distribución es una función de $\mathcal{F}_\Omega$ a $\mathbb{R}$ determinada por n números $p = (p_1, \cdots, p_n)$ que satisfacen:

$$\begin{aligned} p_i &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i &= 1. \end{aligned}$$

La probabilidad del evento $E \in \mathcal{F}_\Omega$, bajo la distribución p, es

$$P(E; p) := \sum_{i \in E} p_i.$$

Cuando no hay peligro de confusión escribimos $P(E)$ en lugar de $P(E; p)$. La probabilidad de que una variable aleatoria f tome el valor $\lambda \in \mathbb{R}$ es

$$P(f = \lambda) := P(f^{-1}(\{\lambda\})).$$

1.8 Los Estados ρ: En Probabilidad Cuántica, tenemos un *estado* ρ en lugar de una distribución p. Un estado es un operador no negativo en H con $\mathrm{Tr}\rho = 1$. La probabilidad del evento $E \in \mathcal{P}(H)$ en el estado ρ se define como $\mathrm{Tr}\rho E$, y la probabilidad de que el observable X tome el valor λ es

$$P(X = \lambda) := 1_{\mathrm{Sp}(X)}(\lambda)\mathrm{Tr}\rho E_\lambda$$

Apéndice B

Introducción al Cálculo Estocástico Clásico

Un *proceso estocástico clásico* es una colección parametrizada de variables aleatorias $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t\geq 0}$ definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que toman valores en $\mathbb{R}^n$.

Notemos que para cada tiempo $t \geq 0$ fijo, tenemos una variable aleatoria $w \to X_t(w)$, $w \in \Omega$. Por otra parte, fijando a $w \in \Omega$, podemos considerar la función $t \to X_t(w)$, $t \geq 0$, la cual es llamada *trayectoria de* X_t.

Intuitivamente, puede ser útil pensar a cada w como una partícula individual o un experimento. Con esto en mente, $X_t(w)$ puede representar la posición, o resultado, al tiempo t de la partícula, o experimento, w. A veces es conveniente escribir $X(t, w)$ en lugar de $X_t(w)$. Por lo tanto, podemos ver al proceso $\mathbb{X}$ como una función de dos variables $(t, w) \mapsto X(t, w)$ que va de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ a $\mathbb{R}^n$.

Además, obsérvese que también podemos identificar a cada $w \in \Omega$ con la función $t \to X_t(w)$ de $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, podemos considerar a Ω como un subconjunto del espacio $\tilde{\Omega} = \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n\}$. Entonces la σ-álgebra $\mathcal{F}$ contendrá a la σ-álgebra $\mathcal{B}$ generada por los conjuntos de la forma

$$\{w : \ w(t_1) \in F_1, \ w(t_2) \in F_2, \cdots, \ w(t_k) \in F_k\},$$

con $F_i \subseteq \mathbb{R}^n$ boreliano ($\mathcal{B}$ es la misma σ-álgebra de Borel en $\tilde{\Omega}$ si a éste se le carga con la topología producto). Por lo tanto, podemos adoptar el punto de vista de que un proceso estocástico clásico es una medida de probabilidad P en el espacio medible $\left((\mathbb{R}^n)^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}\right)$.

Las *distribuciones finitodimensionales del proceso* $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t\geq 0}$ son las medidas $\mu_{t_1,\cdots,t_k}$ definidas en $\mathbb{R}^{nk}$, $k = 1, 2, \cdots$, dadas por

$$\mu_{t_1,\cdots,t_k}(F_1 \times \cdots \times F_k) = P(X_{t_1} \in F_1, \cdots, X_{t_k} \in F_k).$$

Aquí, las F_j son borelianos en $\mathbb{R}^n$. La familia de todas las distribuciones finitodimensionales determina muchas de las propiedades más importantes del proceso $\mathbb{X}$.

Recíprocamente, dada una familia de medidas de probabilidad $\{\nu_{t_1,\cdots,t_k} : k \in \mathbb{N},\ t_i \geq 0\}$ en $\mathbb{R}^{nk}$, es importante ser capaces de contruir un proceso estocástico clásico $\mathbb{Y} = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ que tenga a $\nu_{t_1,\cdots,t_k}$ como sus distribuciones finitodimensionales. Un famoso resultado de Kolmogorov establece que esto puede hacerse si la familia $\{\nu_{t_1,\cdots,t_k}\}$ satisface dos condiciones naturales de consistencia:

Teorema B.1 (de Extensión de Kolmogorov)**.** *Para cualesquiera* $t_1, \cdots, t_k \geq 0$*,* $k \in \mathbb{N}$*, sea* $\{\nu_{t_1,\cdots,t_k}\}$ *una colección de medidas de probabilidad en* $\mathbb{R}^{nk}$ *tales que*

$$\nu_{t_{\sigma(1)},\cdots,t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \cdots \times F_k) \quad = \quad \nu_{t_1,\cdots,t_k}(F_{\sigma(1)} \times \cdots \times F_{\sigma(k)}) \qquad \text{(B.1)}$$

para todas las permutaciones σ *en* $\{1, 2, \cdots, k\}$ *y*

$$\begin{aligned}\nu_{t_1,\cdots,t_k}&(F_1 \times \cdots \times F_k) \\ &= \nu_{t_1,\cdots,t_k,t_{k+1},\cdots,t_{k+m}}(F_1 \times \cdots \times F_k \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n) \qquad \text{(B.2)}\end{aligned}$$

para cualquier $m \in \mathbb{N}$*. Entonces existen un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y un proceso estocástico clásico* $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t\geq 0}$*,* $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$*, tales que*

$$\nu_{t_1,\cdots,t_k}(F_1 \times \cdots \times F_k) = P(X_{t_1} \in F_1, \cdots, X_{t_k} \in F_k)$$

para cualesquiera $t_j \geq 0$*,* $k \in \mathbb{N}$*, y cualquier boreliano* F_j*.*

El resultado anterior nos permite construir procesos estocásticos clásicos. Quizás su aplicación más importante es la existencia del Movimiento Browniano, también llamado proceso de Wiener.

Definición B.2 (Movimiento Browniano). *Sea* $\mathbb{W} = \{W_t\}$ *un proceso estocástico en el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *El proceso* $\mathbb{W}$ *es un Movimiento Browniano estándar si cumple que:*

- W_0 *es la variable aleatoria nula.*
- *Para* $0 < s < t$, *la variable aleatoria* $W_t - W_s$ *tiene una distribución normal con media 0 y varianza* $t - s$.
- *Los incrementos del proceso son variables aleatorias independientes.*

Como ya se dijo, el primer problema que presenta esta definición es la existencia del proceso $\mathbb{W}$ así como del espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en que se define. Para ver una demostración de estas existencias, puede consultarse [12],págs. 11-14.

Sin embargo, el Teorema de Extensión de Kolmogorov no garantiza la continuidad de las trayectorias de los procesos construidos. Otro teorema famoso del mismo autor nos permite garantizar esta continuidad.

Supongamos que $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ son dos procesos estocásticos clásicos en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Decimos que $\{X_t\}$ es una *versión* de $\{Y_t\}$ si

$$P(X_t = Y_t) = 1 \text{ para toda } t.$$

Nótese que si $\{X_t\}$ es una versión de $\{Y_t\}$, entonces ambos tienen las mismas distribuciones finitodimensionales. Luego, desde el punto de vista probabilístico, los dos procesos son el mismo, aunque sus trayectorias pueden tener propiedades diferentes.

Teorema B.3 (de Continuidad de Kolmogorov). *Supongamos que el proceso* $\mathbb{X} = \{X_t\}$ *satisface la siguiente condición: Para todo* $T > 0$, *existen constantes positivas* α, β *y* D *tales que*

$$E[|X_t - X_s|^\alpha] \leq D|t - s|^{1+\beta}, \text{ con } 0 \leq s, t \leq T.$$

Entonces existe una versión continua de $\mathbb{X}$. Es decir, con probabilidad 1, las trayectorias de $\mathbb{X}$ son continuas.

En particular, como se muestra en [12], pág. 15, para el Browniano es posible obtener una versión continua.

Hagamos ahora un breve repaso de la Integral Estocástica Clásica. Sea $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ el espacio filtrado donde se define el proceso $\mathbb{W}$. [1]

Un proceso $\{X_t\}$ se dice *progresivamente medible* si para cada $t \geq 0$, la función $X : [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}$ es medible en $\mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{F}_t$, y se dice *simple* si es de la forma $X(t,\omega) = \sum_{j=1}^{n} A_j(\omega) 1_{(t_{j-1},t_j]}(t)$. Si $\{X_t\}$ es progresivamente medible y simple, se define su *Integral Estocástica Clásica* como la variable aleatoria

$$\int_0^\infty X(s,\omega)\,\mathrm{d}W_s := \sum_{j=1}^{n} A_j(\omega)\,(W_j - W_{j-1})\,.$$

Esta integral cumple con ser lineal en el integrando, aunque su principal propiedad es la *Isometría de Ito*:

Teorema B.4 (Isometría de Ito)**.** *Si $\{X_t\}$ es progresivamente medible y simple, entonces*

$$E\left[\left(\int_0^\infty X(s,\omega)\,\mathrm{d}W_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^\infty X(s,\omega)^2\,\mathrm{d}s\right].$$

Más general. Sea $\{X_t\}$ progresivamente medible cumpliendo

$$E\left[\int_0^\infty X(s,\omega)^2\,\mathrm{d}s\right] < \infty.$$

Es posible demostrar que, bajo estas condiciones, este proceso se puede aproximar por procesos simples en la norma $\|\cdot\|_2$.

Para cada sucesión aproximante de procesos simples $\{X_n(t,\omega)\}$, el límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty X_n(s,\omega)\mathrm{d}W_s$$

[1] Es decir, para cada $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ es la σ-álgebra generada por W_t y $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$

existe en $L^2(P)$, y es independiente de dicha sucesión. Tal límite se define como *la Integral Estocástica Clásica*, o integral estocástica del proceso $\{X_t\}$.

Hay que decir que esta integral extendida sigue cumpliendo las mismas propiedades que la integral de procesos simples. Entre ellas, la Isometría de Ito. Ahora bien, para poder considerar a la integral como un proceso dependiente del tiempo, supongamos que $\{X_t\}$ es un proceso progresivamente medible y tal que $E[\int_0^T X(s,\omega)^2\, \mathrm{d}s] < \infty$ para alguna $T \geq 0$. Tomemos el proceso progresivamente medible $\{X^T(s,\omega)\}_{s\geq 0}$ dado por

$$X^T(s,\omega) = X(s,\omega)1_{[0,T]}(s).$$

Bajo estas condiciones, se define la integral estocástica hasta el tiempo T como

$$\int_0^T X(s,\omega)\, \mathrm{d}W_s := \int_0^\infty X^T(s,\omega)\, \mathrm{d}W_s.$$

Podemos ahora enunciar la Fórmula de Ito, o Lema de Ito.

Teorema B.5 (Fórmula de Ito)**.** *Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $E[\int_0^t f'(W_s)^2\, \mathrm{d}s] < \infty$ para alguna $t > 0$. Entonces, para casi toda $s \in [0,t]$,*

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)\, \mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, \mathrm{d}s.$$

Para una discusión más detallada de su demostración, así como de la construcción de la Integral, puede revisarse [9], págs. 190-200.

Apéndice C

Consideraciones a los A-coeficientes

Se definen los *A-coeficientes* como la colección de reales

$$\mathfrak{A} = \left\{ \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} : n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq r \leq n \right\}$$

tales que $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = 0$, $\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ y

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} = (r+1) \begin{bmatrix} n \\ r+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix}.$$

En este Apéndice mostramos los dos resultados más importantes que hemos usado acerca de los A-coeficientes. A saber:

Proposición C.1. *Los A-coeficientes* $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ *cumplen las relaciones:*

a) $\begin{bmatrix} n+2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{n+2}{r} \begin{bmatrix} n+1 \\ r-1 \end{bmatrix}$ *para* $r \geq 1$.

b) $(r+1) \begin{bmatrix} n+1 \\ r+1 \end{bmatrix} = \frac{n+2-r}{r} \begin{bmatrix} n+1 \\ r-1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} n+2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{(n+1)(n+2)}{n+2-r} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ *para* $0 \leq r \leq n$.

Demostración.

a) Por inducción sobre n. Para $n = 1$, $\begin{bmatrix} 1+2 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix}$. Observemos que $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. Luego:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} &= 2\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} &= 0 = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} &= 1 = \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así, para $n = 1$ se tiene lo pedido. Supongamos ahora que existe $n \geq 1$ tal que para toda $m \leq n$ se tiene $\begin{bmatrix} m+2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{m+2}{r}\begin{bmatrix} m+1 \\ r-1 \end{bmatrix}$ para $r \geq 1$. Entonces, para m fija, tendremos

$$(r+1)\begin{bmatrix} m+1 \\ r+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+1 \\ r-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{m+2}{r}\begin{bmatrix} m+1 \\ r-1 \end{bmatrix},$$

de donde $(r+1)\begin{bmatrix} m+1 \\ r+1 \end{bmatrix} = \frac{m+2-r}{r}\begin{bmatrix} m+1 \\ r-1 \end{bmatrix}$. Así, para $n+1$ tendremos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+3 \\ r \end{bmatrix} &= (r+1)\begin{bmatrix} n+2 \\ r+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+2 \\ r-1 \end{bmatrix} \\ &= (r+1)\frac{n+2}{r+1}\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+2 \\ r-1 \end{bmatrix} \\ &= (n+2)\frac{n+2-(r-1)}{r(r-1)}\begin{bmatrix} n+1 \\ r-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+2 \\ r-1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{(n+2)(n+3-r)}{r(r-1)}\frac{r-1}{n+2}\begin{bmatrix} n+2 \\ r-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+2 \\ r-1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{n+3-r}{r}\begin{bmatrix} n+2 \\ r-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+2 \\ r-1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{n+3}{r}\begin{bmatrix} n+2 \\ r-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (a) es cierto.

b) Está contenida en la demostración de (a).

c) Usando (a) y (b) se tiene:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+2 \\ r \end{bmatrix} &= (r+1)\begin{bmatrix} n+1 \\ r+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ r-1 \end{bmatrix} \\
&= (r+1)\frac{n+1}{r+1}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \frac{n+1}{r-1}\begin{bmatrix} n \\ r-2 \end{bmatrix} \\
&= (n+1)\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \frac{n+1}{r-1}\frac{(r-1)r}{n+1-(r-1)}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \\
&= (n+1)\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \frac{(n+1)r}{n+2-r}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \\
&= \left\{1 + \frac{r}{n+2-r}\right\}(n+1)\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{n+2-r}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto (c) es cierto. Esto concluye la prueba.

□

Corolario C.2. *Los A-coeficientes admiten una representación compacta dada por*

$$\begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{si } n-r \text{ es par} \\ \frac{1}{2^{(n-r+1)/2}}\frac{(n-r+1)!}{\left(\frac{n-r+1}{2}\right)!}\begin{pmatrix} n \\ r-1 \end{pmatrix} & \text{si } n-r \text{ es impar,} \end{cases}$$

donde $\binom{a}{b}$ *es el coeficiente de Newton. En particular, para* $r=1$ *se tiene*

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n!}{(n/2)!2^{n/2}} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Basta con aplicar inducción y usar (b) de la Proposición anterior.

□

Apéndice D

Formulario

Operadores Exponenciales Para $u, f \in H$:

$$e^{a(u)}e(f) = \exp\langle u, f\rangle e(f), \;\; e^{a^\dagger(u)}e(f) = e(f+u), \;\; \Gamma(S)e(f) = e(Sf).$$

Operadores Cuánticos Para $u, f \in H$:

$$a(u)e(f) = \langle u, f\rangle e(f),$$
$$a^\dagger(u)e(f) = \frac{d}{dz}e(f+zu)\bigg|_{z=0},$$
$$\lambda(S)e(f) = \frac{d}{dz}e(\exp(zS)f)\bigg|_{z=0}.$$

Martingalas Fundamentales Para $t \geq 0$:

$$A(t) = a(1_{[0,t]})\ ,\ A^\dagger(t) = a^\dagger(1_{[0,t]})\ ,\ \Lambda(t) = \lambda(m(1_{[0,t]})).$$

Coeficientes Fundamentales Si K es un integrador básico, entonces:

$$\beta_K(f,g) = \begin{cases} g & \text{si} \quad K = A \\ \overline{f} & \text{si} \quad K = A^\dagger \\ \overline{f}g & \text{si} \quad K = \Lambda \\ 1 & \text{si} \quad K = T_\phi \end{cases}.$$

Primera Diferencia de Martingalas Cuánticas

$$\langle e(f), [K(y) - K(x)]e(g) = \int_x^y [\beta_K(f,g)]\,(s)\,\mathrm{d}s\ \langle e(f), e(g)\rangle$$

Primera Forma Fundamental Si K es un integrador básico:

$$\langle e(f), M(t)e(g)\rangle = \int_0^t \langle e(f), [\beta_K(f,g)](s)F(s)e(g)\rangle \,\mathrm{d}s,$$

donde $M(t) = \displaystyle\int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K(s)$

Segunda Diferencia de Martingalas Cuánticas

$$\begin{aligned}\langle e(f), e(g)\rangle^{-1}&\langle [K_1(t)-K_1(c)]\, e(f), [K_2(t)-K_2(c)]\, e(g)\rangle \\ &= 2\int_c^t \beta_{K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \int_c^t \beta_{K_1^\dagger}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s \\ &\qquad + \int_c^t \delta_{K_1,K_2}(f,g)(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

donde

$$\delta_{K_1,K_2}(f,g)(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad K_1 = A \text{ ó } K_2 = A \\ 1 & \text{si} \quad K_1 = A^\dagger \text{ y } K_2 = A^\dagger \\ g(s) & \text{si} \quad K_1 = A^\dagger \text{ y } K_2 = \Lambda \\ \overline{f(s)} & \text{si} \quad K_1 = \Lambda \text{ y } K_2 = A^\dagger \\ \overline{f(s)}g(s) & \text{si} \quad K_1 = \Lambda \text{ y } K_2 = \Lambda \end{cases}$$

Segunda Forma Fundamental K_1, K_2 dos martingalas fundamentales (pudiendo ser $K_1 = K_2$). Sean

$$\begin{aligned} M_1(t) &= \int_0^t E(s)\,\mathrm{d}K_1(s) \\ M_2(t) &= \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}K_2(s). \end{aligned}$$

Entonces para cualesquiera $f, g \in H_*$ y $t \in \mathbb{R}_+$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle M_1(t)e(f), M_2(t)e(g)\rangle &= \int_0^t \{\langle M_1(s)e(f), \beta_{K_2}(f,g)F(s)e(g)\rangle \\ &\quad + \langle \beta_{K_1}(g,f)E(s)e(f), M_2(s)e(g)\rangle \\ &\quad + \langle [\gamma_{K_1}(f)]\,(s)E(s)e(f), [\gamma_{K_2}(g)]\,(s)F(s)e(g)\rangle\}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

donde

$$[\gamma_K(h)]\,(s) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad K = A^\dagger \\ h(s) & \text{si} \quad K = \Lambda \\ 0 & \text{si} \quad K = A \end{cases}$$

Estimado Fundamental Sea $f \in \mathrm{Loc}$ y $t \geq 0$. Entonces existe un número no negativo $\Psi(f,t)$ con la propiedad de que, para cualquier proceso adaptado simple E, y cualquier integrador estocástico $K \in \{A^\dagger, \Lambda, A, T\}$ y $s \in [0,t]$ se cumple

$$\left\| \int_0^s E(u)\,\mathrm{d}K(u)\ e(f) \right\|^2 \leq \Psi(f,t) \int_0^s \|E(u)e(f)\|^2\,\mathrm{d}u.$$

Bibliografía

[1] T.Bojdecki, *Teoría general de procesos e integración estocástica*, Monografías del Instituto de Matemáticas de la UNAM, Vol 14, Universidad Nacional Autónoma de México, (1989).

[2] N.G.Bruijn, On some multiple integrals involving determinants, J. Indian Math. Soc. **19**, 133-151 (1956).

[3] A.M. Chebotarev, *Lectures on Quantum Probability*, Textos nivel avanzado, Vol 14, SMM Aportaciones Matemáticas, (2000).

[4] G.G.Emch, *Algebraic methods in quantum field theory*, Interscience Monographs and Texts in Physics and Astronomy, Vol 26, Wiley Interscience (1972).

[5] R.L.Hudson, An Introduction to quantum stochastic calculus and some of its applications. Quantum Prob. Commun. **12**, 221-271 (2003).

[6] R.L.Hudson, K.R.Parthasarathy, Quantum Ito's formula and stochastic evolution. Commun. Math. Phys. **93**, 301-323 (1984).

[7] C.R.Johnson, *Matrix Theory and Applications*, Proceedings of symposia in applied mathematics, Vol 40, American Mathematical Society, (1990).

[8] P.A.Meyer, *Quantum Probability for Probabilists*, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1538, Springer Verlag, (1995).

[9] P.Morters, Y.Peres, *Brownian Motion*, http://www.stat.berkeley.edu/ peres/bmbook.pdf.

[10] H.Michiel, G.Nadiya and K.Vladimir, *Algebras, rings and modules I*, Mathematics and its Applications, Vol. 575, Kluwer Academic Publishers (2005).

[11] D.Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Probability and its Applications, Vol. 14, Springer Verlag, (1995).

[12] B.Oksendal, *Stochastic Differential Equations*, Universitext, Vol.31, Springer Verlag, (2003).

[13] K.R.Parthasarathy, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Monographs in Mathematics, Vol 85, Birkhauser Verlag, (1992).

[14] Ph.Protter, *Stochastic Differential Equations*, Stochastic Modelling and Applied Probability, Vol. 21, Springer Verlag (2003).

[15] J.Weidmann, *Operators in Hilbert Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Vol 68, Springer Verlag, (1980).

[16] K.Zhu, *Analysis on Fock Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Vol 263, Springer Verlag, (2012).

Índice alfabético