

Volatilidad Implícita y el Problema de la Sonrisa en Mercados de Opciones Financieras.

Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Iztapalapa.

Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales (MCMAI).
Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias presenta:

Carrasco Munguia Liz Arlette

Asesor: Carlos Ibarra Valdez Co-asesora: Myriam Cisneros Molina

19 de mayo de 2014

Dedicatoria.	I
Resumen	III
Agradecimientos	V
Introducción	1
1. Planteamiento General.	5
Introducción	6
El Problema de la Sonrisa de acuerdo a Emanuel Derman.	6
Modelo de Black - Scholes	8
Modelos de la Sonrisa con Volatilidad Local.	9
Arboles Implícitos.	11
Modelos de Volatilidad Estocástica.	13
Otros Modelos.	14
Notas y comentarios.	18
2. Volatilidad Implícita e Implicada, desde el punto de vista matemático.	19
Introducción	19
El artículo de Roger Lee.	20
Interpretación Probabilística.	22
Estática.	25
El artículo de Jesús Chargoy & Carlos Ibarra.	25
Notas y comentarios.	33
3. Temas especiales y complementarios.	35
Introducción.	35

Soluciones en forma cerrada.	35
Fórmulas Aproximadas.	42
Fórmula Chargoy-Ibarra.	42
Estática en volatilidad Local.	43
Problemas Inversos.	44
Unicidad y estabilidad.	44
La disociación de la sonrisa y estructuras temporales.	59
Notas y comentarios.	60
4. Índices de volatilidad en mercados financieros.	63
Introducción.	63
Algunos índices de Volatilidad.	66
El VIX	67
El VDAX	68
El VX1 – VX6	68
El VIMEX.	69
¿Qué es el MexDer?.	69
¿Qué es el IPC?	70
¿Qué es el VIMEX?	70
¿Qué es el INPC?	71
Las principales emisoras que componen el INPC.	72
La metodología de cálculo del VIMEX	73
La correlación inversa entre el IPC y el VIMEX.	77
Notas y comentarios.	77
5. Conclusiones.	79
Introducción.	79
Acerca de las variables.	79
Acerca de la solución.	80
Acerca de BS.	81
Acerca de los modelos de Volatilidad.	81
Acerca de los índices de volatilidad.	82
A. Opciones.	85
Ventajas de los derivados financieros.	88
IPC	88
Arbitraje Financiero.	89
Límites superiores e inferiores para los precios de las opciones.	90
Diferencial Mariposa (BUTTERFLY SPREADS).	91
Paridad Put-Call.	91
B. Modelo de Black Scholes.	93

ÍNDICE GENERAL	5
C. Volatilidad Histórica.	99
D. ‘Greeks’	103
Cálculo de las ‘Greeks’	107
Glosario.	111

Dedicado a

mi familia

La variable o parámetro más importante en los mercados de opciones financieras es la volatilidad. En la práctica al efectuar los diversos procedimientos teóricos o prácticos para determinar la volatilidad con base en precios observados en el mercado, ésta resulta ser variable. En particular, su gráfica tiene “forma de U” con respecto al precio de ejercicio. A esto se le llama coloquialmente “La sonrisa de la volatilidad”. Diversos investigadores consideran que el problema de la sonrisa constituye una compleja cuestión teórica y metodológica, la cual, junto con todas sus ramificaciones, es uno de los más importantes problemas de las finanzas cuantitativas. En este trabajo se dará el planteamiento del problema de la sonrisa de la volatilidad de manera descriptiva y matemática, además se abordará el problema que se tiene al intentar encontrar soluciones en forma cerrada y se darán algunos ejemplos de la obtención de fórmulas aproximadas para dicho problema. Por último se mencionan algunos índices de volatilidad y se hace principal énfasis en el Índice de Volatilidad México.

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Las matemáticas financieras surgen en 1900 con “Theorie de la speculation” de Louis Bachelier en donde asocia el Movimiento Browniano a los precios de las acciones, esta rama de las matemáticas tiene como objetivo principal minimizar riesgos de pérdidas y maximizar rendimientos en los mercados financieros, es por eso que en las últimas décadas ha sido de gran interés el estudio de los mercados financieros por parte de investigadores matemáticos, los cuales suelen enfocarse principalmente en la valuación de derivados financieros, en modelos de tasas de interés y en el manejo del riesgo, en éste último enfoque sin duda alguna la variable o parámetro más importante es la volatilidad.

Para entender dicha importancia es necesario tomar un ejemplo sencillo para puntualizar el concepto de volatilidad. En los mercados de opciones se tienen contratos entre compradores y vendedores, el comprador (en el caso de tener una opción de compra de tipo europeo) tiene el derecho, pero no la obligación de comprar un determinado activo en una fecha futura fijada a un precio acordado. Por ejemplo, se tienen 3, 000 acciones de Cemex y se hace un contrato para venderlas en 8 meses a partir de hoy a un precio de \$500,000, si cuando se concluye el plazo (8 meses) el precio de mercado de esas acciones es inferior a \$500,000 el comprador claramente no ejercerá la opción, pues no le conviene; pero si el precio del mercado es mayor entonces ejercerá la opción y obtendrá las acciones del vendedor al precio del ejercicio (\$500,000), así las puede vender en el mercado y con ello tendrá una ganancia. Es evidente que el vendedor se encuentra en una situación de desventaja si el contrato se lleva a cabo de esa manera, puesto que está destinado a no obtener ganancias y en el peor de los casos a "perder" puesto que estaría vendiendo sus opciones más baratas, el margen de "pérdida" dependerá de la volatilidad de la opción (que no es otra cosa más que lo que aumenta o disminuye la opción en el tiempo que se le da al contrato). Para que el trato sea equitativo, además de intentar predecir la volatilidad del activo, el comprador debe pagarle al vendedor una prima al momento de firmar el contrato; y con esto se podrá determinar el valor real de la opción.

En 1973 Black & Scholes mostraron al mundo su famosa fórmula la cual permite determinar el precio justo, de la opción de compra de tipo europeo para lo cual se supone

conocido el valor de la volatilidad. En la práctica, muchas veces se procede al revés, y dados precios de opciones observables en los mercados, se determina la volatilidad, que en este caso se denomina implícita o implicada. Aunque existen tres tipos de volatilidad (histórica, implícita y futura) sin duda alguna la que nos introduce a un mundo de problemáticas tanto prácticas como teóricas es la volatilidad implícita (VI), de dichas problemáticas la más importante es el problema de la sonrisa de la volatilidad. Este problema resulta ser muy interesante y es el punto central de la presente tesis, pues aunque se cuenta con decenas de artículos de investigación, reportes y working papers, que tratan de explicar el fenómeno anterior, o de enmarcarlo en el contexto de modelos matemáticos mucho más sofisticados que el de Black –Scholes; aun se trata de una compleja cuestión teórica y metodológica, por lo que no se ha encontrado una respuesta completamente satisfactoria. El problema se ha abordado desde muy diversos puntos de vista, desde los muy prácticos, hasta los que involucran herramientas matemáticas bastante avanzadas, nosotros daremos un vistazo a dichos enfoques.

El problema de la sonrisa de la volatilidad, junto con todas sus ramificaciones, se considera como uno de los más importantes problemas de las finanzas cuantitativas. Las principales herramientas involucradas en el tema pueden ser, dependiendo del enfoque que se utilice, cálculo estocástico y finanzas matemáticas, ecuaciones en derivadas parciales, análisis numérico. En esta tesis el objetivo principal es explicar y desarrollar los principales aspectos matemáticos del problema de la sonrisa de la volatilidad, tomando en cuenta que lo planteado debe ser consistente con las condiciones que presentan los mercados financieros. Se espera que sea de utilidad, tanto para matemáticos que quieren introducirse a la problemática, como para financieros que desean adquirir información más sólida desde el punto de vista matemático.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo uno, se da una perspectiva teórica muy general del problema de la sonrisa en los mercados de opciones financieras, se plantea dicho problema y se mencionan los diversos modelos utilizados para resolverlo. En el segundo capítulo, se plantea el problema de la volatilidad implícita desde el punto de vista matemático, lo reportado en dicho capítulo gira alrededor de los artículos “ Implied Volatility : statics Dynamics, and Probalistic Interpretation” de Roger W. Lee y “A note on Black - Scholes implied volatility” de Jesús Chargoy-Corona y Carlos Ibarra-Valdez, en donde se resuelven y explican características importantes de la volatilidad implícita e implicada con lo que se clarifica el problema de la sonrisa. En el capítulo tres se da una discusión del porque el problema de la sonrisa no tiene una solución en forma cerrada con las condiciones de mercado que se tienen, además se mencionan algunas fórmulas aproximadas y se plantea la problemática bajo la teoría de problemas inversos. En el capítulo cuatro de acuerdo a lo estudiado en los capítulos anteriores se da una descripción de la importancia de los índices de volatilidad disponibles en algunos mercados del mundo, haciendo énfasis en las características y propiedades matemáticas del Índice de Volatilidad México (VIMEX) que como su nombre lo dice ,es la aplicación utilizada en México para modelar el comportamiento de la volatilidad implícita de las opciones del Mercado Mexicano de Derivados (MexDer). Por último se agregó un capítulo

de conclusiones. Además en cada capítulo se da una breve introducción y se complementa con una sección de notas y comentarios, y al final de la tesis se encuentran diversos apéndices y un glosario que ayudarán a los lectores a comprender mejor los conceptos manejados en los cinco capítulos de la presente tesis.

CAPÍTULO 1

Planteamiento General.

“La sonrisa de la volatilidad es en realidad la relación empírica que se observa entre la volatilidad implícita y el precio de ejercicio de una opción (strike)...”

Emanuel Derman(2003).

“Si la volatilidad instantánea no es constante entonces, las volatilidades implícitas muestran variación con respecto al strike (lo que describe gráficamente una sonrisa) y al tiempo de madurez... ”.

Roger W. Lee (2002).

“La dependencia de la volatilidad implícita en los strikes, para un tiempo de madurez determinado es conocido como el efecto sonrisa...”

Bruno Dupire (1994)

Introducción

A continuación vamos a introducir de manera general la problemática financiera de la llamada *sonrisa de la volatilidad* (volatility smile), para posteriormente presentar una interpretación matemática (*capítulos 2 y 3*) y ejemplificaciones financieras (*capítulo 4*).

Comenzamos con la descripción del problema de la sonrisa de acuerdo a lo escrito por varios autores : Emanuel Derman, Roger W. Lee, Herbert Egger, Lorenzo Bergomi y Bruno Dupire. Posteriormente se mencionan algunos aspectos de modelos que han sido utilizados para el estudio de dicho problema, por ejemplo el modelo de Black-Scholes (*BS*) que sin duda alguna ha sido el parteaguas para la realización de otros modelos como son los de volatilidad local, de los cuales se da una primera descripción. Además se recuerda un poco de la teoría de árboles implícitos pues dichos modelos también tienen fundamentos en ésta. Otros modelos mencionados en esta parte de la tesis son los modelos de volatilidad estocástica. Se consideran las principales limitantes de los modelos mencionados anteriormente y cerramos el capítulo con algunos comentarios acerca de esta primera impresión del problema.

El Problema de la Sonrisa de acuerdo a Emanuel Derman.

De acuerdo a lo descrito por Emanuel Derman en “Laughter in the Dark-The Problem of the Volatility Smile”; (*Derman(2003)*), la sonrisa de la volatilidad es la relación empírica que se observa entre la volatilidad implícita y el precio de ejercicio de una opción. El problema es que hasta la fecha no se conoce un modelo que ajuste adecuadamente la complejidad de dicha relación. Esto se conoce como *el problema de la sonrisa de la volatilidad* el cual apareció por primera vez en los mercados de opciones después de la crisis bursátil en octubre 1987, aunque fue hasta diciembre de 1990 que dicho problema atrajo la atención de Derman, uno de los principales investigadores del tema, así como de algunos otros autores.

Derman afirma que existen diversas formas de abordar el problema, pero la más utilizada en el campo de la Economía Financiera es la metodología de valuación de opciones de Black-Scholes (*Black & Scholes(1973)*) La fórmula original planteada por Black y Scholes en 1973 permite obtener un precio teórico para una opción europea sobre acciones que no pagan dividendos en función de: el valor actual del activo subyacente, el precio de ejercicio, el tiempo de vencimiento, el tipo de interés libre de riesgo y la volatilidad del activo subyacente. De las variables mencionadas anteriormente, la única que es desconocida al valorar una opción es la volatilidad del subyacente. Por tanto, obtener una buena estimación de la volatilidad es crucial para valorar una opción. La volatilidad es una

medida de la incertidumbre sobre el comportamiento futuro de un activo, que se mide habitualmente como la desviación típica de la rentabilidad de dicho activo. Se puede usar la volatilidad histórica (*ver apéndice C*), basada en datos anteriores, aunque en los mercados se considera que es mejor un parámetro que “vea hacia el futuro” (forward-looking). Para poder estimar dicha volatilidad se acude a lo que llamamos volatilidades implícitas. La volatilidad implícita en el precio de una opción en el mercado es el valor de la volatilidad que, introducido en la fórmula de Black-Scholes, proporciona un valor teórico de la opción igual al valor de mercado de la misma. El principal problema que presenta el cálculo de la volatilidad implícita en el precio de mercado de una opción es que *no se conoce una fórmula explícita para invertir la fórmula de Black-Scholes y despejar la volatilidad en función del precio y del resto de variables*; debido a lo cual, el principal enfoque práctico para obtener la volatilidad implícita consiste en utilizar métodos numéricos y fórmulas aproximadas (esto se estudiará con más detalle en el capítulo 3).

A pesar de la gran popularidad de la fórmula de Black-Scholes, en los últimos años han aparecido gran cantidad de estudios que ponen de manifiesto la lejanía de la realidad de los resultados obtenidos con dicha fórmula. Por ejemplo, Rubinstein (1994) encuentra que, para opciones sobre el índice S&P 500, el modelo de Black-Scholes funcionó relativamente bien hasta 1986. Sin embargo, a partir de 1987 la situación comenzó a deteriorarse, obteniéndose errores de valoración que casi doblaban los del año anterior. Desde 1987 los errores han sido cada vez mayores. Estos resultados han sido confirmados por trabajos posteriores no sólo en el mercado americano, sino también en otros mercados.

Además de esa creciente divergencia entre los precios de mercado y los obtenidos mediante la fórmula de Black-Scholes, cuando se invierte dicha fórmula (de manera aproximada) para obtener la volatilidad implícita en el precio de mercado de las opciones, se pone de manifiesto que las volatilidades implícitas tienden a estar relacionadas con el precio de ejercicio. Esto contradice la teoría clásica de Black-Scholes, la cual afirma que la volatilidad implícita de una opción debe ser independiente de su precio de ejercicio (Strike) y de su tiempo de madurez, lo que se representa gráficamente con una superficie plana (fig 2-b).

En la superficie de lado izquierdo (figura 2-a) se observa la sonrisa de la volatilidad, llamada así pues se asemeja ligeramente a la línea superior de los labios al sonreír, siendo esta superficie un desafío para los analistas que intentan describirla de manera teórica.

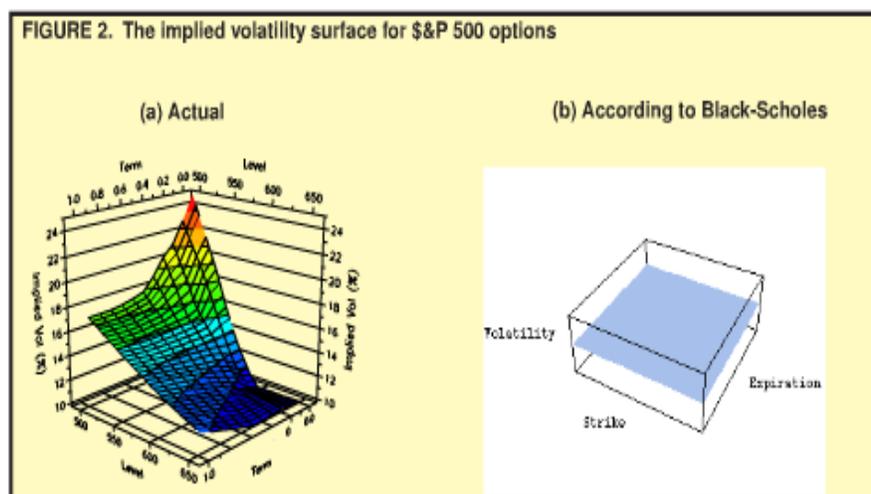


Figura tomada de *Laughter in the Dark- The Problem of the Volatility Smile*; Emanuel Derman, Mayo 26, 2003.

Debido a que la región representada por Black- Scholes no muestra de una forma real lo que sucede en los mercados de opciones, el nuevo reto fue y seguirá siendo, proponer un nuevo modelo que explique la superficie sesgada, aunque dicho problema se ha extendido a las opciones exóticas y a la mayoría de los mercados de opciones convirtiéndose éste en uno de los principales problemas a resolver; cabe señalar que cada mercado tiene su propio modelo de la sonrisa de la volatilidad, puesto que los encargados de dar una solución en los mercados ajustan los datos según lo que creen les resulta mejor en su contexto específico. A continuación se describen brevemente algunos modelos que se utilizan en el estudio del análisis de la volatilidad así como aspectos varios del problema de la sonrisa. En el próximo capítulo se hará una presentación matemática de los mismos.

Se ha intentado perfeccionar el modelo permitiendo, por ejemplo, que el subyacente pague dividendos conocidos previamente, lo que permite extender la fórmula para valorar opciones sobre índices bursátiles y divisas. Asimismo, han aparecido fórmulas para valorar otro tipo de opciones más complejas, como pueden ser opciones americanas o exóticas.

Modelo de Black - Scholes

El modelo de Black- Scholes valúa el precio de una opción europea mediante los valores de cinco variables (el precio del subyacente a las fecha actual, el tiempo de vencimiento, el precio del ejercicio, la tasa de interés libre de riesgo y la volatilidad o maduración del subyacente), casi todos estos pueden ser tomados de los precios de opciones observados en el mercado, a excepción de la volatilidad que resulta ser el más importante puesto que es

el indicador que nos dará una idea del comportamiento que tendrá el valor de la opción en el futuro. La ecuación de *BS* tiene el inconveniente de que no puede ser invertida en términos de funciones elementales para obtener el valor de la volatilidad implícita, por lo que se hacen aproximaciones numéricas a dicho valor (esto se verá con detalle en los capítulos 2 y 3) lo que aleja aún más el problema de la sonrisa de la realidad, ya que además uno de los principales supuestos de este modelo es que la volatilidad es constante para cualquier tiempo de madurez y cualquier precio del subyacente, de la opción.

Como ya se mencionó, con el paso de los años el precio de las opciones en los mercados han mostrado volatilidades implícitas con patrones más complejos y variables; por lo que es de suponerse que *BS* es un modelo demasiado simple para modelar los precios reales, ya que los resultados que se obtendrán de éste son inconsistentes con la sonrisa observada en la mayoría de los mercados.

Tomando en cuenta lo anterior se han propuesto modelos que tratan de mejorar la modelación del problema, es decir, se proponen modelos de la sonrisa de la volatilidad que sean capaces de modelar de una forma más realista el movimiento de los precios de los subyacentes del mercado. Sin embargo de acuerdo a lo estudiado, cada modelo va a tener sus propias limitantes; como se menciona a continuación.

Modelos de la Sonrisa con Volatilidad Local.

Según la literatura estudiada los primeros modelos propuestos para intentar abordar el problema de la sonrisa fueron los llamados *Modelos de la sonrisa de volatilidad local* (*Local volatility models of the smile*), éstos generalizan el proceso de volatilidad constante asumido en el modelo de *BS* a un proceso de volatilidad dependiente del precio del subyacente para con ello poder llegar a una superficie muy cercana a la que se observa en los mercados de opciones financieras.

En 1970 *Breeden y Litzenberger* mostraron que los precios de las opciones (o sus volatilidades implícitas) implican volatilidades locales futuras a corto plazo que pueden ser bloqueadas por una opción de posición mariposa (cobertura Butterfly, ver apéndice A), esto se explicará con mayor detalle en el apéndice A. Conociendo estas volatilidades pueden ser utilizadas para valorar y cubrir cualquier tipo de opción con el mismo activo subyacente. Se clarificará esto en el próximo capítulo, en donde se da la justificación matemática a los modelos de volatilidad local.

Mientras tanto podemos observar en la siguiente figura un árbol implícito, que es la extensión de un árbol estándar Cox-Ross-Rubinstein con volatilidad constante, este árbol nos servirá para determinar la volatilidad hacia el futuro, (Ver *Cox-Ross-Rubinstein (1978)*), prácticamente es así como funcionan estos modelos.

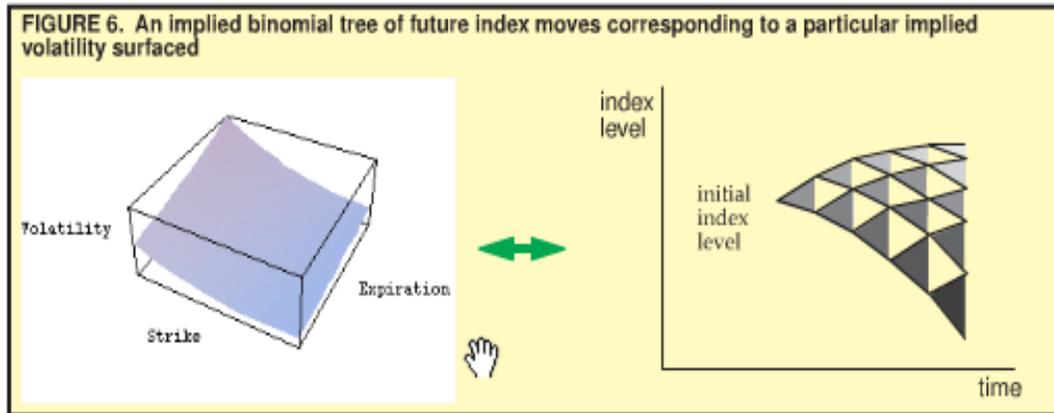


Figura tomada de *Laughter in the Dark- The Problem of the Volatility Smile*; Emanuel Derman, Mayo 26, 2003.

Es decir la idea detrás de los modelos de volatilidad local es que se puede construir un árbol implícito calibrado para el índice de los precios, pero estos modelos dan un nivel de cobertura menor que el índice de cobertura de *BS*, aunque quizás podrían dar cabida a la sonrisa aun a pesar del problema computacional que se tiene al querer suavizar las superficies continuas de volatilidades locales de precios de opciones discretas. Además según *Derman(2003)* estos modelos tienen el problema de que las volatilidades locales futuras son casi constantes, por lo que la sonrisa futura es intuitivamente más plana que la sonrisa actual.

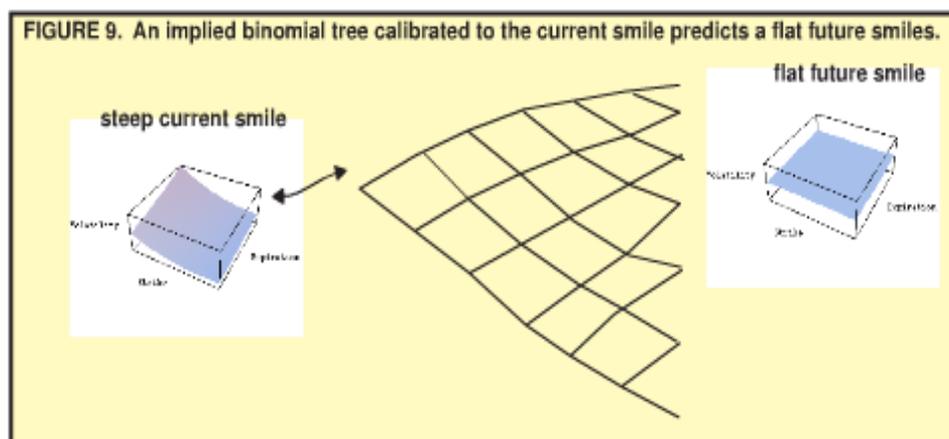


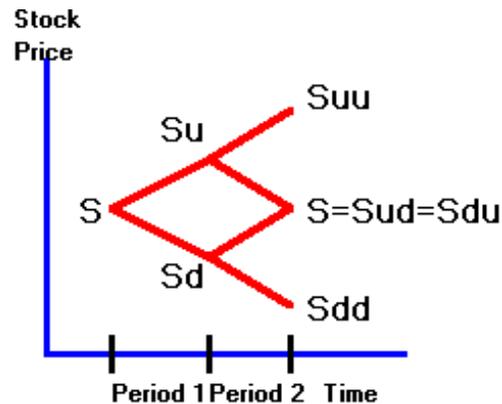
Figura tomada de *Laughter in the Dark- The Problem of the Volatility Smile*; Emanuel Derman, Mayo 26, 2003.

Árboles Implícitos.

Para entender un poco más sobre los modelos antes mencionados hay que señalar que los árboles implícitos permiten obtener el valor de las opciones a partir de una distribución neutral al riesgo consistente con la sonrisa de la volatilidad, con la ventaja que ofrecen los árboles de probabilidad en cuanto a simplicidad y flexibilidad.

Para construir los árboles binomiales correspondientes a los modelos de volatilidad local, la base es el enfoque del modelo CRR (*Cox-Ross-Rubinstein(1978)*). Este modelo se basa en el modelo binomial, y puede ser interpretado como un método numérico para resolver la ecuación *BS*. Para comenzar vamos a considerar un call europeo asumiendo que el subyacente no paga dividendos al tiempo de madurez. Vamos a trabajar a tiempo discreto; tomando solo en cuenta los tiempos; $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, t_2 = 2\Delta t, \dots, t_n = n\Delta t = T$ con $\Delta t = \frac{T}{n}$, además se supone que S_t sigue un movimiento Browniano geométrico. El modelo binomial tiene la característica de que a cualquier tiempo, el precio de la opción sólo tiene dos posibilidades para avanzar; la primera es que el precio se mueva a una velocidad u y con una probabilidad p en una dirección (se mueve u_p) y la segunda es que el precio se mueva a una velocidad d y con una probabilidad $1 - p = q$ en otra dirección (se mueve d_q).

Usando la notación introducida anteriormente, si el precio de las acciones en el tiempo t_j es igual a S_j^k al tiempo siguiente t_{j+1} puede tomar sólo los valores $u \cdot S_j^k$ y $d \cdot S_j^k$ como se muestra en la siguiente figura, cabe señalar que las probabilidades p y q son independientes de j .



Con el fin de aproximar la ecuación diferencial estocástica en la que se basa el modelo de *BS* por medio del enfoque de Cox-Ross-Rubinstein, las probabilidades p y q así como las tasas u y d tienen que ser elegidos de tal manera que en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ para que el modelo binomial converja.

Una de las ventajas del modelo es que permite reflejar el comportamiento de una volatilidad local dependiente del precio del subyacente y del tiempo, sin necesidad de especificar una relación funcional a priori. Esta volatilidad local refleja el comportamiento del subyacente en momentos específicos del tiempo, a diferencia de la volatilidad global, que es una medida de la variabilidad del subyacente a lo largo de todo el intervalo de tiempo hasta el tiempo de vencimiento de la opción. Aunque también se presentan inconvenientes, por un lado, en la construcción del árbol no se tienen en cuenta más que los precios de las opciones con un vencimiento igual al plazo considerado, pero no las opciones con vencimientos más cortos; y por otro lado, el supuesto de que todas las trayectorias que conducen al mismo valor final poseen la misma probabilidad de riesgo-neutral, estas limitaciones se pueden superar mediante la generalización del modelo de volatilidad local.

Para construir los árboles de volatilidad local, la manera más natural es sustituir en la fórmula de *BS* el valor de la volatilidad σ que depende del precio del subyacente y del tiempo es decir

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma(S, t) dZ.$$

El propósito de esto es obtener el valor numérico de $\sigma(S, t)$ a partir de la sonrisa, los precios de las opciones para cualquier strike y tiempo de madurez se obtienen por interpolación a partir de los precios obtenidos del mercado, con los que se determina la posición y la probabilidad con la que se llega a cada nodo del árbol.

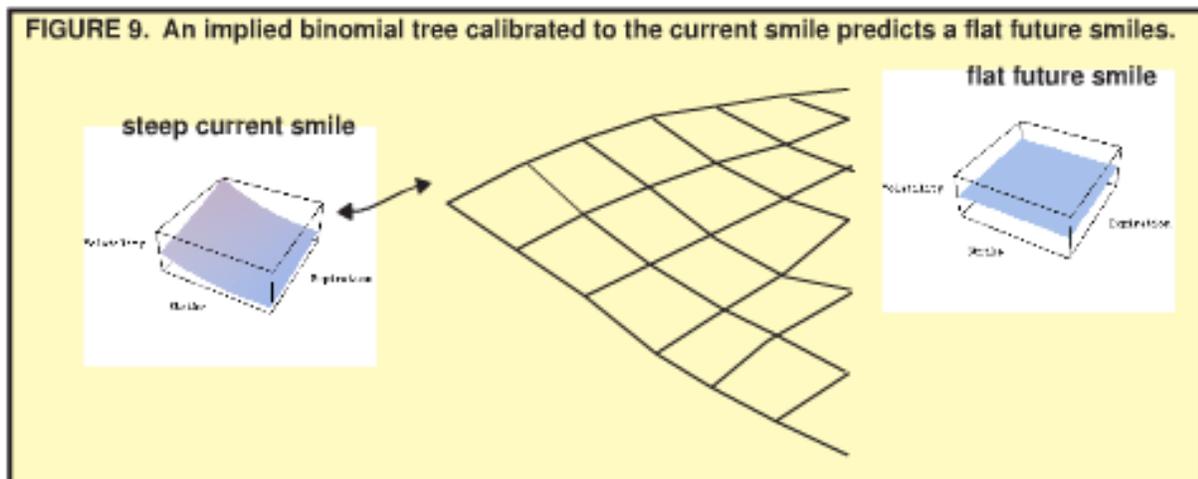


Figura tomada de *Laughter in the Dark- The Problem of the Volatility Smile*; Emanuel Derman, Mayo 26, 2003.

El método para la construcción del árbol binomial se supone que los niveles están uniformemente espaciados es decir Δt es el mismo para cada nivel; además tomamos en cuenta que los primeros n -niveles ya están construidos para todos los strikes al tiempo t_n , el objetivo es determinar los nodos del $(n + 1)$ –ésimo nivel en el tiempo t_{n+1} .

En el artículo de *Arregui (2004)*, se plantea el algoritmo para hacer los árboles binomiales como un algoritmo de redes neuronales, que es lo que comúnmente se realiza en la práctica.

Modelos de Volatilidad Estocástica.

Debido al pronóstico poco realista de los modelos locales, lo que hicieron diversos autores fue tomar en cuenta otros modelos, los llamados *Modelos de Volatilidad Estocástica (Stochastic volatility models)*, los cuales a diferencia de los modelos locales son más invariantes en el tiempo, tienen una volatilidad más fluctuante pero que a largo plazo se aproxima a una media, es decir se van aproximando a un promedio de valores esperados de la volatilidad, cosa que en la práctica resulta ser de mayor utilidad. En estos modelos se puede pensar al precio de una opción como el promedio de los valores obtenidos con un modelo *BS* para volatilidades altas y bajas.

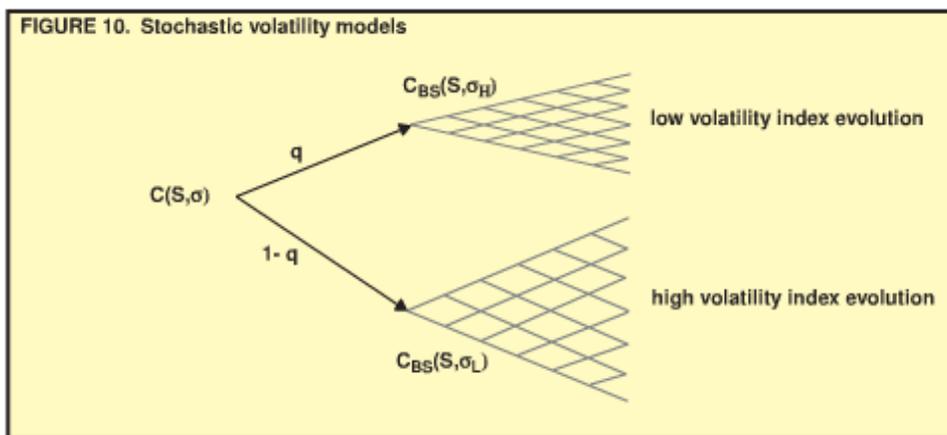


Figura tomada de *Laughter in the Dark- The Problem of the Volatility Smile*; Emanuel Derman, Mayo 26, 2003.

Y el resultado que se obtiene es una sonrisa que, en el caso más simple (es decir, cuando no hay correlación entre el subyacente y su volatilidad), es simétrica (una parábola) como se muestra a continuación, en donde la volatilidad implícita incrementa si el strike se aleja del precio del subyacente (*stock price*)

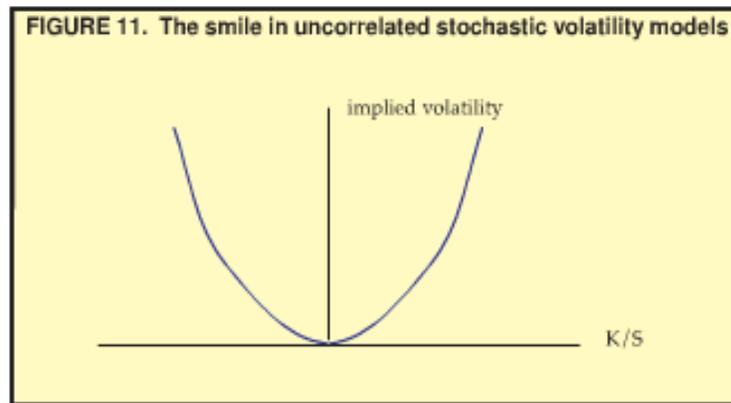


Figura tomada de *Laughter in the Dark- The Problem of the Volatility Smile*; Emanuel Derman, Mayo 26, 2003.

Si se permite la correlación entre la volatilidad y el subyacente, se agrega un término lineal que distorsionará la parábola (*skew*), produciendo una sonrisa asimétrica (*smirk*), esta puede ser “*Down-sloping skew*” que corresponde al caso cuando las volatilidades implícitas decrecen con el incremento de los strikes y también se tiene “*up-sloping skew*” cuando se tiene que las volatilidades implícitas incrementan conforme también lo hacen los strikes, estos tipos de sonrisa o “mueca” (*smirk*) también pueden coincidir con las sonrisas de los índices de precios reales.

Cabe señalar que la sonrisa obtenida con estos modelos (*stochastic volatility models*) es estable e inmutable en el tiempo, en este sentido son más parecidas a las del mundo real, lo que da una gran ventaja al utilizarlos, pero desgraciadamente estos modelos también tienen desventajas puesto que se tienen muchas incógnitas con respecto a la evolución de la volatilidad, osea que no se tiene muy claro de que es de lo que realmente depende la volatilidad. Por ejemplo el modelo de Heston utiliza volatilidad estocástica la cual ajusta el cambio en la volatilidad implícita del modelo de *BS* cuando cambia la fecha de vencimiento o el precio de ejercicio de la opción, por lo que los modelos de volatilidad estocástica llegan a explicar por sí mismos y de manera consistente el porqué las opciones financieras con las diferencias mencionadas tienen diferente volatilidad implícita.

Otros Modelos.

Por otra parte, se han considerado los *Modelos de salto de difusión (Jump diffusion models)*, que tienen la ventaja de ser realistas, además pueden modelar la sonrisa de una manera fija, pero tienen la gran desventaja de que a diferencia de los modelos anteriores, éstos son incompletos desde el punto de vista de la replicación y de la cobertura. Un modelo *ambicioso* fue desarrollado en *ito33.com*, en donde consideran como indispensable

la hipótesis de cobertura, también la ausencia de los costos de transacción y con ello el modelo replica el valor de la opción en forma exacta. Su enfoque determina el índice de cobertura óptima que minimiza la varianza de pérdidas y ganancias, el precio razonable de una opción es el costo de la estrategia de cobertura que mejor funciona, pero la implementación exitosa de este modelo dependerá de las discontinuidades de los subyacentes en los mercados.

Ya han pasado muchos años desde que el problema de la sonrisa de la volatilidad apareció en los mercados, desde entonces se ha tratado de encontrar el modelo “correcto” que lo resuelva, y lo cierto es que hasta la fecha cada empresa utiliza el modelo que mejor se ajusta a sus necesidades (de acuerdo a su criterio), por ejemplo en los mercados en donde son notables los niveles de correlación entre los subyacentes y su volatilidad, los modelos de volatilidad local pueden ser lo suficientemente razonables para obtener buenos resultados, todo depende de lo que piensan y quieren quienes aplican los modelos a los distintos mercados. Como primera conclusión tendríamos que, no se puede dar con certeza un modelo que reemplace de manera perfecta a *BS*, aunque se pueden hacer propuestas que modelen de manera adecuada a la volatilidad implícita.

A continuación vamos a ver un ejemplo de que es a lo que nos referimos cuando aseguramos que la volatilidad no cumple el supuesto de *BS* de ser constante, en la siguiente tabla obtenida de *Paul Wilmott (1998)* se muestran los precios del mercado de opciones call europeas a uno, tres y siete meses; cuyo precio de ejercicio es de 105 y el activo subyacente tiene valor actual de 106.25. La tasa de interés para cualquier periodo es de 5.6%. Al sustituir estos valores en la fórmula de *BS* los precios son consistentes con volatilidades de 21.2%, 21.5% y de 19.4% para uno, tres y siete meses respectivamente. Claramente estos precios no serían correctos con el supuesto de que la volatilidad es constante en el periodo de siete meses; puesto que los precios del mercado de opciones no serían consistentes con los precios teóricos obtenidos con *BS*, aquí surge la primer interrogante “¿Qué se debe hacer?”.

Precios de Mercado de Call Europeas.

Tiempo de madurez	Valor
1 mes	3.5
3 meses	5.76
7 meses	7..97

Para responder la interrogante, podemos pensar entonces que la volatilidad debe ser una función que depende del tiempo y/o del subyacente.

Los “griegos” o derivadas de la ecuación de *BS* con respecto a las diferentes variables suelen ser utilizadas para obtener información sobre el precio de las opciones y mas aun para obtener valores aproximados de las volatilidades implícitas de las opciones de mercado. Por ejemplo

Caso especial. Mercado FX

En el mercado de opciones FX , una superficie de volatilidad se da en términos de Delta y del tiempo de madurez (esta en una convención popular entre los comerciantes y los corredores). El proceso para la opción FX es:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r - r^*) dt + \sigma dW(t),$$

donde r y r^* son las tasas de interés interna y externa respectivamente. En *Garman-Kohlhagen (1983)* se obtuvo una fórmula para los precios de las opciones de FX en el marco de *BS*,

$$C_o = S_0 e^{-r^* T} N(d_1) - K e^{-r T} N(d_2),$$

con

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r^* + \frac{1}{2}\sigma^2) T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r^* - \frac{1}{2}\sigma^2) T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Con delta igual a la primera derivada de la opción con respecto al subyacente (se obtiene como se muestra en el apéndice), y para una opción FX es igual a :

$$\Delta = e^{-r^* T} N(d_1),$$

que a su vez esta en función del precio, del strike, el tiempo de madurez y de la volatilidad. Por lo que no se clarifica el hecho de expresar a la volatilidad implícita en términos de Δ . Por ejemplo, si

$$\Delta(\sigma = 0,12) = e^{-r^* T} N(d_1, \sigma = 0,12) = 0,15.$$

Los mercados de opciones FX citan tres opciones mas para un tiempo de madurez que son, -0.15 Delta put, ATM call y 0.15 Delta call en donde ATM significa que el strike K es igual al precio del plazo del FX, *i.e.*, $K = S_0 e^{(r-r^*)T}$.

Sean K_1, K_2 y K_3 y las volatilidades σ_{15P} , σ_{ATM} y σ_{15C} correspondientes a las opciones citadas anteriormente, tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} -0,15 &= -e^{-r^*T} N \left(-\frac{\ln(S_0/K_1) + (r - r^* + \frac{1}{2}\sigma_{15P}^2 T)}{\sigma_{15P}\sqrt{T}} \right), \\ \Delta &= -e^{-r^*T} N \left(\frac{1}{2}\sigma_{ATM}\sqrt{T} \right) \approx 0,5, \quad K_2 = S_0 e^{(r-r^*)T}, \\ 0,15 &= e^{-r^*T} N \left(-\frac{\ln(S_0/K_3) + (r - r^* + \frac{1}{2}\sigma_{15C}^2 T)}{\sigma_{15C}\sqrt{T}} \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Notemos que Delta a n tiempo de madurez corto de la opción ATM es aproximadamente igual a 0.5. Dados $(\sigma_{15P}, \sigma_{ATM}, \sigma_{15C})$, se puede calcular numéricamente (K_1, K_2, K_3) , y entonces tendremos una superficie de la sonrisa de volatilidad en términos del strike y del tiempo de madurez.

Sin embargo, si las volatilidades-Delta cotizadas cambian, los correspondientes Strike's cambian también. La superficie de la volatilidad FX, se desplaza en correspondencia al Strike y al tiempo de madurez. Mientras que algunas personas proporcionan una amplia lista de valores para las volatilidades- Delta de los puts como -0.10 Delta, -0.15 Delta, -0.20 Delta, ..., -0.45 Delta, y para los calls de 0.45 Delta, 0.40 Delta, 0.35 Delta, ..., 0.10 Delta, para así obtener una mejor superficie de la volatilidad FX.

Aunque es más interesante el caso en donde se considera la volatilidad Butterfly y la volatilidad risk-reversal, dados por:

$$\begin{aligned} \sigma_{RR} &= \sigma_{15C} - \sigma_{15P}, \\ \sigma_{BF} &= \frac{1}{2}(\sigma_{15P} + \sigma_{15C}) - \sigma_{ATM}. \end{aligned}$$

Con lo que podemos expresar las volatilidades- Delta de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \sigma_{15P} &= \sigma_{ATM} + \sigma_{BF} - \frac{1}{2}\sigma_{RR}, \\ \sigma_{15C} &= \sigma_{ATM} + \sigma_{BF} + \frac{1}{2}\sigma_{RR}. \end{aligned}$$

así tenemos una relación equivalente entre σ_{BF} , σ_{RR} y dos volatilidades- Delta. Para mas detalles sobre las opciones del mercado FX se puede checar *Wystup, U.(2006)*.

Ahora bien, las derivadas delta, gamma y theta son estimadas a partir del árbol binomial correspondiente a los modelos de Volatilidad local, que son una generalización de BS , con la volatilidad dependiente del precio del subyacente (*ver apéndice D*).

Notas y comentarios.

1. En la actualidad más que intentar ver cual es el modelo “correcto” para las empresas comerciales, lo que se hace es ver qué modelo es el que utilizan de acuerdo a sus necesidades.
2. Los modelos de volatilidad local tienden a producir radios de cobertura de las opciones *vanilla* que calibran la sonrisa del índice de opciones, y estos son más pequeños que los radios de cobertura que se obtienen con BS .
3. Aunque los radios de cobertura obtenidos con los modelos de volatilidad estocástica son mayores que los obtenidos con el modelo de BS , para opciones exóticas estos varían dramáticamente, cosa que en nuestro caso no sería grave puesto que estamos sólo interesados en las opciones de compra de tipo europeo (*call option european*).
4. Hasta la fecha los modelos utilizados en los mercados de opciones financieras dependen altamente de lo que piensen las personas encargadas del régimen del mercado, que intentan evitar tantos supuestos como sea posible.
5. En la práctica en lugar de tratar de elegir los métodos y los modelos cuyos resultados dependan lo menos posible en los resultados no verificados, utilizan los que a su parecer son más viables, es decir los más utilizados.

CAPÍTULO 2

Volatilidad Implícita e Implicada, desde el punto de vista matemático.

Introducción

En este capítulo presentaremos un enfoque matemático de los modelos mencionados en el capítulo anterior. Se intenta dar una justificación matemática apropiada al hecho de interpretar a la volatilidad implícita como un promedio esperado de la volatilidad futura, lo que se realizara bajo el supuesto de que la volatilidad instantánea es una función determinista que depende del subyacente y del tiempo, y del supuesto de que la volatilidad instantánea es estocástica en el sentido de que depende de un segundo factor aleatorio sobre el cual no tenemos mucha información. En el primer capítulo, se vio que si la volatilidad instantánea no es constante entonces, las volatilidades implícitas muestran variación con respecto al strike y al tiempo de madurez lo que se representa gráficamente con una superficie en forma de sonrisa. Aquí, presentaremos la base matemática de ello.

Se siguen muy de cerca los artículos **1)** “*Implied Volatility : Statics, Dynamics and Probabilistic Interpretation* de Roger W. Lee;2002” en donde se describen los detalles matemáticos de los distintos modelos de volatilidad; y **2)** “*A note on Black - Scholes implied volatility* de Jesús Chargo y Carlos Ibarra (2006)” donde se analizan varios aspectos matemáticos de la volatilidad implícita en la fórmula de Black-Scholes.

El artículo de Roger Lee.

A mi parecer éste artículo presenta de manera clara el enfoque para dar una interpretación adecuada a lo que se quiere obtener del estudio de la volatilidad implícita, aunque es obvio que el trabajo va encaminado a mostrar la fórmula de momento de *Roger Lee* la cual por si sola no sustituye un procedimiento de optimización por completo, pero si lo facilita puesto que proporciona un valor inicial preciso de los parámetros óptimos. En el camino que lleva a ésta se van presentando los detalles y las hipótesis necesarias para obtener algunas fórmulas aproximadas que se expresan como promedios de valores esperados de volatilidades implícitas, lo cual es de gran utilidad en la práctica puesto que estos valores pueden ser aproximados con la fórmula de *BS* que sin duda alguna es la “métrica” o “traductora” de los datos del mercado.

Roger Lee pretende apartarse del modelo de Black-Scholes y buscar valores de la volatilidad que provienen de modelos alternativos, tales como los modelos de volatilidad estocástica. Primero comienza con el análisis básico de la volatilidad implícita, para lo cual se tienen los siguientes supuestos:

1. El precio del activo subyacente S_t es estrictamente positivo.
2. Se tomará un call en S tal que tiene tiempo de madurez T y strike K .
3. Se tiene un portafolio auto-financiable y de cobertura para el tiempo de madurez; i.e., su valor es:

$$(S_T - K)^+ \quad \text{al tiempo } T.$$

4. El precio de la opción es una función $C(K, T)$ para el subyacente S_t con t la fecha actual.
5. La tasa de interés libre de riesgo será una constante $r > 0$.
6. Se escribe el *log-moneyness* de una opción al tiempo t como:

$$x := \log \left(\frac{K}{s_t e^{r(T-t)}} \right).$$

Suponiendo mercados sin fricciones, *BS* supone que S sigue el movimiento Browniano geométrico,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Entonces el precio de no-arbitraje del call satisface

$$C = C^{BS}(\sigma),$$

en donde la fórmula de BS esta dada por:

$$C^{BS}(\sigma) := C^{BS}(S_t, r, K, T, \sigma) := S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

con

$$d_{1,2} := \frac{\log(S_t e^{(T-t)}) / K}{\sigma \sqrt{T-t}} \pm \frac{\sigma \sqrt{T-t}}{2},$$

y N es la función de distribución acumulativa de una normal. En esta sección se utilizarán varias derivadas de la fórmula de BS las cuales se calculan en el apéndice.

Dada $C(K, T)$, la volatilidad implícita BS para un strike K y un tiempo de madurez T es definida como $I(K, T)$ la cual resuelve

$$C(K, T) = C^{BS}(K, T, I(K, T)).$$

Notemos que se está haciendo un abuso de notación al escribir que el precio del *call* sólo depende del precio del ejercicio (*strike*) y del tiempo de madurez. La solución es única puesto que C^{BS} es estrictamente creciente en σ , y como $\sigma \rightarrow 0$ ($\sigma \rightarrow \infty$) la función $C^{BS}(\sigma)$ se aproxima a los límites inferiores (*superiores*) de un call sin arbitraje. La volatilidad implícita también se puede escribir como una función \tilde{I} que depende del log-moneyness y del tiempo,

$$\tilde{I}(x, T) := I(S_t e^{x+r(T-t)}, T).$$

Se va a suprimir la tilde (abuso de notación), bajo la aclaración de que la diferencia estará en si la I depende de K o depende de x . La obtención de la fórmula de BS puede hacerse mediante un argumento de cobertura, obteniendo y resolviendo la siguiente EDP para $C(S, t)$.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \quad (2.1)$$

con condición de frontera

$$C(S, T) = (S - K)^+.$$

De forma alternativa se puede obtener haciendo uso de la teoría de Martingalas (*ver Björk (2005); Shreve (2004)*).

Interpretación Probabilística.

La cuestión a resolver es *¿En qué sentido la volatilidad implícita es una volatilidad media esperada?*, hay que verificar si existen definiciones naturales de “media” o “valor esperado”.

Volatilidad dependiente del tiempo.

Se analizará la volatilidad cuando depende del tiempo (pero no es aleatoria), más aún, suponemos que $\sigma \in L^2(0, T)$, y que

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t) S_t dW_t.$$

Definimos la volatilidad media cuadrática de 0 a T , como:

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(u) du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se puede mostrar que S_t es normal con media $\left(r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right) T$ y varianza $\bar{\sigma}^2 T$, de donde se sigue que:

$$C = C^{BS}(\bar{\sigma}).$$

y entonces $I = \bar{\sigma}$. Así la volatilidad implícita es igual a la media cuadrática de 0 a T .

Volatilidad dependiente del tiempo y del subyacente.

Dada la volatilidad local $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\sigma(S_t, t) = \theta_t$ es un proceso estocástico, suponemos de nuevo que

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(S_t, t) S_t dW_t,$$

y se define $\bar{\sigma}(x, T) := \sigma(S_0 e^{x+rT}, T)$, es decir, la volatilidad en función del tiempo T y del ‘moneyness’ x .

Volatilidad local y volatilidad local implicada.

La volatilidad local debe satisfacer la ecuación (2.1) pero con coeficientes variables

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(S, t)S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \quad (2.2)$$

con condición de frontera

$$C(S, T) = (S - K)^+.$$

Dupire (1994) mostró que se pueden fijar (S, t) y se obtiene una EDP (forward) para $C(K, T)$ en vez de fijar (K, T) y obtener una EDP (backward) para (S, t) . Diferenciando la ecuación (2.2) dos veces con respecto a K vemos que $G := \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$ satisface la misma EDP pero con condiciones de frontera $\delta(S - K)$, así G es la función de Green de la ecuación (2.2). Por un resultado en Friedman (1964) se deduce que G en función de (K, T) satisface la ecuación

$$\frac{\partial G}{\partial T} + \frac{\partial^2}{\partial K^2} \left(\frac{1}{2}\sigma^2(K, T)K^2G \right) + r\frac{\partial}{\partial K}(KG) + rG = 0 \quad (\text{EDP de Fokker-Planck})$$

Integrando dos veces con respecto a K y con las condiciones de frontera necesarias se obtiene la ecuación de Dupire

$$\frac{\partial C}{\partial T} - \frac{1}{2}K^2\sigma^2(K, T)\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + rK\frac{\partial C}{\partial K} = 0, \quad (2.3)$$

con condición inicial $C(K, 0) = (S_0 - K)^+$. Dados los precios del call para todo K y T , definimos la *Volatilidad Local Implícada* como,

$$L(K, T) := \left(\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK\frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \right)^{1/2}, \quad (2.4)$$

la cual se obtiene formalmente a partir de (2.3)

Definimos la *varianza local implicada* como $(L(K, T))^2$. Podemos relacionar los conceptos de volatilidad implícita y de varianza local implicada, como sigue. Sustituimos $C = C^{BS}(I(S_0e^{x+rT}, T))$ en la ecuación (2.4), para obtener

$$(L(x, T))^2 = \frac{2TI \frac{\partial I}{\partial T} + I^2}{\left(1 - x \frac{\partial I}{\partial x} / I\right)^2 + TI \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \frac{1}{4} T^2 I^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}}.$$

esta fórmula es de gran utilidad puesto que ya tenemos una aproximación que relaciona a los conceptos antes mencionados, y con ello podemos obtener valores más reales de la volatilidad y por tanto de los precios de las opciones.

Volatilidad Estocástica.

Regresamos a

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t.$$

en donde σ_t es estocástica. En contraste al modelo de volatilidad local, σ_t no está determinada por S_t y t . En virtud de que la volatilidad estocástica es dinámica, la varianza local implicada en (K, T) es la esperanza condicional neutral al riesgo de σ_t^2 dado por la condición $S_T = K$. El argumento de Derman y Kani [3] es el siguiente. Sea $f(S) = (S - K)^+$, calculamos la diferencial de Itô con respecto a T

$$\begin{aligned} d_T C &= d_t [e^{-rT} \mathbf{E}(S_T - K)^+] = \mathbf{E} d_T [e^{-rT} (S_T - K)^+], \\ &= e^{-rT} \mathbf{E} \left[f'(S_T) dS_T + \frac{1}{2} \sigma_T^2 S_T^2 \delta(S_T - K) dT - (S - K)^+ dT \right], \\ &= e^{-rT} \mathbf{E} \left[r S_T H(S_T - K) + \frac{1}{2} \sigma_T^2 S_T^2 \delta(S_T - K) - (S - K)^+ \right] dT, \\ &= e^{-rT} \mathbf{E} \left[-r K H(S_T - K) + \frac{1}{2} \sigma_T^2 S_T^2 \delta(S_T - K) \right] dT. \end{aligned}$$

donde H es la función de Heaviside. Asumimos que el vector aleatorio (S_T, σ_T^2) tiene una densidad conjunta (p_{S_T}, v_T) . Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= -rK \frac{\partial C}{\partial K} + \frac{1}{2} e^{-rT} \int \int v s^2 \delta(s - K) p_{S_T}, v_T(s, v) ds dv, \\ &= -rK \frac{\partial C}{\partial K} + \frac{1}{2} e^{-rT} K^2 \int v p_{S_T}, v_T(s, v) dv. \end{aligned}$$

Así, por la definición de la varianza local implicada,

$$L^2(K, T) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} = \frac{\int v p_{S_T}, v_T(s, v) dv}{p_{S_T}(K)} = \mathbf{E}(\sigma_t^2 | S_T = K).$$

Como consecuencia, cualquier caracterización de I como un promedio de la volatilidad esperada se puede ver como el promedio de la esperanza de la volatilidad estocástica. La argumentación anterior requiere de mayor precisión matemática, lo cual puede hacerse en el contexto de teoría de distribuciones (ver *L.Hörmander(1983): The Analysis y Linear Partial Differential Operators, Vol I; Springer*).

Estática.

El término “estático” se refiere al análisis de $I(x, T)$ o $I(K, T)$ para t fijo. Una gráfica de I no es constante con respecto a K (ó x). Puede tomar la forma de una sonrisa, en donde $I(K)$ es mayor para K fuera del dinero (*away-from-the-money*) de lo que es para K cerca del dinero (*near-the-money*), sin embargo el patrón más típico en los mercados de valores desde 1987 es una inclinación en el dinero (*at-the-money*) donde I se inclina hacia abajo, y la sonrisa es mucho más pronunciada para K pequeña. Empíricamente la sonrisa se aplanan a medida que crece la T . Se supone solo la ausencia de arbitraje, para obtener límites o cotas de la pendiente de la superficie de la volatilidad implícita; así como una caracterización de la rapidez con la que crece I a strikes extremos. Siguiendo muy de cerca lo realizado en *Gatheral (1999)*[4] y *Hodges(1996)* [5] se llega a que la tasa de decaimiento de la inclinación de la pendiente se aproxima como $T^{1/2}$ salvo para fechas de vencimiento largas.

El artículo de Jesús Chargo & Carlos Ibarra.

En el modelo de Black - Scholes, hay 5 parámetros que determinan el precio de la opción, éstos son: el precio de contado del subyacente al tiempo S_t , la tasa de interés constante r , el *strike* o precio de ejercicio K , la volatilidad σ y el tiempo de madurez T . A excepción de la volatilidad, los otros 4 parámetros son especificados por el contrato de la opción o pueden ser obtenidos directamente del mercado. El valor de σ que se usa en primera instancia es el de la volatilidad histórica (ver apéndice C).

Recordemos los supuestos del modelo *BS*:

1. El precio del subyacente S_t sigue un movimiento Browniano Geométrico.
2. La volatilidad es constante.
3. No hay arbitraje.
4. La tasa de interés libre de riesgo es una constante conocida.
5. No hay costos de transacción ni impuestos.
6. Se tiene un portafolio $q(t) = (a(t), b(t))$, cuyo valor es

$$V(t) = (V_q)(t) = a(t)S_t + b(t)e^{rt} \quad \text{con } t > 0$$

en donde $a(t)$ es la cantidad del activo riesgoso y $b(t)$ es la cantidad del bono; este portafolio es auto-financiable y además de cobertura en todo el intervalo de tiempo, desde cero hasta el tiempo de madurez; i.e., el portafolio cumple que:

$$d(a(t)S_t + b(t)e^{rt}) = a(t)dS_t + b(t)re^{rt}dt$$

y

$$a(t)S_t + b(t)e^{rt} \equiv c(t, S_t) \quad \forall t \in [0, T]$$

La volatilidad implícita satisface:

$$C^{\text{Mercado}} = C^{BS}(r, S_0, K, T, \sigma_{imp}) = f(r, S_0, K, T, \sigma_{imp}).$$

Como S_t y r están dadas por los mercados y (K, T) se especifica en la opción, podemos encontrar la volatilidad implícita correspondiente. Sin embargo, si consultamos las volatilidades implícitas de un grupo de precios de opciones con diferentes strike's y diferentes tiempos de madurez éstas no siempre son iguales, lo que origina "la sonrisa de la volatilidad". En general, la Sonrisa de la Volatilidad tiene dos modelos básicos, la sonrisa simétrica y la asimétrica. La sonrisa simétrica es el caso en el que la σ aumenta si el valor del strike se aleja del precio de contado de la opción y es al que nos referiremos en lo siguiente. El problema a resolver en sí es encontrar de manera explícita σ_{imp} . Aunque en muchos textos se afirma que esto es prácticamente imposible (ver discusión sobre soluciones en forma cerrada en el siguiente capítulo), aceptando esto nos quedan dos caminos a seguir: *el camino teórico* que nos lleva a obtener propiedades abstractas de la volatilidad implícita ó *el práctico* en donde obtendremos fórmulas aproximadas para evaluar con datos del mercado y así obtener valores para la volatilidad implícita (ver discusión sobre fórmulas aproximada en el capítulo siguiente). En lo que sigue, se considera un enfoque teórico.

Recordemos la fórmula de Black - Scholes:

$$C = f(r, S, K, T, \sigma) = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

con

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \& \quad d_2 = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$r, S, K, T, \sigma > 0.$$

Vamos a considerar el problema de la función implícita para σ . Sea

$$F(r, S, K, T, \sigma) = f(r, S, K, T, \sigma) - C.$$

como

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}N'(d_1) > 0,$$

entonces para cada condición inicial $P^0 = (r_0, S_0, K_0, T_0, \sigma_0, C_0) \in \mathbb{R}_{++}^6$, por el teorema de la función implícita existe una solución local única $\sigma = \sigma(r, S, K, T, c)$, alrededor de P^0 . Con esto garantizamos la existencia de la función de volatilidad localmente. Enseguida se obtiene una representación asintótica para la fórmula de *BS*, a partir de la cual se puede conseguir una buena aproximación a la volatilidad implícita. Recordemos que $N : \mathbb{R} \rightarrow (0,1)$ definida por

$$N(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

la cual es analítica, estrictamente creciente y además

$$N'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}},$$

entonces por el teorema de la función inversa existe $\varphi = N^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. De hecho esta inversa es global. Definimos el log-‘moneyness’ como:

$$\alpha = \log\left(\frac{S}{Ke^{-rT}}\right) = \log\left(\frac{S}{K}\right) + rT.$$

y la variedad de cero-log-‘moneyness’ como antes

$$M = \{(r, S, K, T, \sigma) \in \mathbb{R}_{++}^5 : S = Ke^{-rT}\}$$

i.e.

$$M = \{\alpha = 0\}.$$

Notación: $\mathbb{R}_{++}^N = \{(x_1 \dots x_N) : x_i > 0, \forall i\}$.

En esta variedad podemos obtener una solución en forma cerrada para la volatilidad puesto que:

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\sigma^2 T}{2\sigma\sqrt{T}} = \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \quad \& \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} - \sigma\sqrt{T} = -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

Entonces la fórmula de Black- Scholes se convierte en :

$$C = S \left[N\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) \right].$$

Vamos a hacer uso de algunas propiedades conocidas de la distribución normal, para completar detalles que no se muestran en el artículo *Chargoy-Ibarra (2006)*. Por ejemplo, sabemos que $N(d) - N(-d) = 2N(d) - 1$. Entonces para todo $d \in \mathbb{R}$,

$$C = S \left[2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - 1 \right]$$

de allí,

$$\begin{aligned} N\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) &= \frac{C}{2S} + \frac{1}{2}; \\ \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} &= N^{-1}\left(\frac{C}{2S} + \frac{1}{2}\right); \\ \sigma_{imp}^* &= \frac{2}{\sqrt{T}} \cdot N^{-1}\left(\frac{C}{2S} + \frac{1}{2}\right); \end{aligned}$$

y finalmente

$$\sigma_{imp}^* = \frac{2}{\sqrt{T}} \cdot N^{-1} \left(\frac{C}{2S} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{T}} \varphi \left(\frac{C}{2S} + \frac{1}{2} \right)$$

Ahora nuestro objetivo será extender esta solución a una vecindad de cualquier $P \in M$.

Dada $C_0 = f(r_0, S_0, K_0, T_0, \sigma_0)$, se tiene que

$$M \cap \{(r, S, K, T, \sigma) \in \mathbb{R}_{++}^5 : f(r_0, S_0, K_0, T_0, \sigma_0) = C_0\}$$

es una variedad de dimensión 3. Esto se sigue de argumentos elementales de topología diferencial. Lo anterior nos lleva a buscar solo 3 variables relevantes de las 5 que teníamos en la fórmula de *BS*. Esto se puede lograr mediante la búsqueda de elementos univariantes bajo la acción de un grupo de Lie apropiado. En particular dicha acción nos debe llevar explícitamente a una función simétrica $\alpha(r, S, K, T, \sigma)$ cuyas hipersuperficies de nivel son paralelas a M . La acción del grupo será similar a la del grupo abeliano aditivo \mathbb{R}^5 en \mathbb{R}_{++}^5 dada por:

$$(t_1, \dots, t_5) \cdot (r, S, K, T, \sigma) = (e^{t_1}r, e^{t_2}S, e^{t_3}K, e^{t_4}T, e^{t_5}\sigma)$$

en donde las variables relevantes son:

$$\begin{aligned} \theta &= \sigma\sqrt{T} \\ \alpha &= \log\left(\frac{S}{K}\right) + rT \\ S &= S \end{aligned}$$

Escribimos

$$C = f(r, K, T, S, \sigma) = u(\theta, \alpha, S),$$

Tenemos que $\alpha = 0$ en la variedad M , por lo cual

$$\frac{C}{S} = \frac{u(\theta, 0, S)}{S} = 2N\left(\frac{\theta}{\alpha}\right) - 1 = g(\theta)$$

Entonces una extensión a una vecindad de M debe tener la forma,

$$\frac{u(\theta, \alpha, S)}{S} = b(\theta, \alpha)g(\theta) + R(\theta, \alpha)$$

Esta descomposición se puede relacionar con el teorema de preparación de Malgrange (*ver "Function theory of several complex variables", S.G. Krantz (2000)*).

Enseguida, veremos cómo realizar lo anterior. Definimos $\Psi : \mathbb{R}_{++}^5 \longrightarrow \mathbb{R}_{++}^5$ como

$$\Psi(\sigma, T, r, S, K) = \left(\sigma\sqrt{T}, T, \log\left(\frac{S}{K}\right) + rT, S, K \right),$$

el cual es un mapeo analítico invertible con inversa analítica global $\phi : \Psi(\mathbb{R}_{++}^5) \longrightarrow \mathbb{R}_{++}^5$

dada por

$$\phi(\theta, T, \alpha, S, K) = \left(\sigma T^{-\frac{1}{2}}, T, T^{-1} \left(\alpha - \log\left(\frac{S}{K}\right) \right), S, K \right).$$

Haciendo el cambio de variable dado por ϕ y renombrando las variables en la fórmula de BS nos queda

$$u(\theta, \alpha, S) = C(\phi(\theta, T, \alpha, S, K)) = S \left[N\left(\frac{\alpha}{\theta} + \frac{\theta}{2}\right) - e^{-\alpha} N\left(\frac{\alpha}{\theta} - \frac{\theta}{2}\right) \right]$$

con lo que hemos reducido el número de variables significativas de 5 a 3, esto lo aprovecharemos para encontrar una representación asintótica del valor de la opción.

Teorema 1 (Asymptotic formula for Black Scholes option value) *Para cualquier $(\theta, \alpha, S) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$ se cumplir*

$$u(\theta, \alpha, S) = S \left[(1 + e^{-\alpha}) N\left(\frac{\theta}{2}\right) - e^{-\alpha} \right] + S \left(\frac{\alpha}{\theta}\right) \int_0^1 N'\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\alpha\xi}{\theta}\right) (1 - e^{-\alpha(1-\xi)}) d\xi,$$

Para establecer esta fórmula se utiliza la igualdad del valor medio

$$f(t+h) = f(t) + h \int_0^1 f'(t + \xi h) d\xi$$

y la propiedad

$$N(t) = 1 - N(-t), \quad (t \in \mathbb{R})$$

de la función acumulativa de la normal, para obtener

$$\begin{aligned}
 N\left(\frac{\alpha}{\theta} + \frac{\theta}{2}\right) &= N\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\alpha}{\theta} \int_0^1 N'\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta}\right) d\xi. \\
 N\left(\frac{\alpha}{\theta} - \frac{\theta}{2}\right) &= N\left(-\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\alpha}{\theta} \int_0^1 N'\left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta}\right) d\xi, \\
 &= 1 - N\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\alpha}{\theta} \int_0^1 N'\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta}\right) d\xi.
 \end{aligned}$$

Se sustituye esto en $u(\theta, \alpha, S) = S [N(\frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{2}) - e^{-\alpha} N(\frac{\alpha}{\theta} - \frac{\alpha}{2})]$, y se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{S}u(\theta, \alpha, S) &= N\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\alpha}{\theta} \int_0^1 N'\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta}\right) d\xi \\
 &\quad - e^{-\alpha} \left(1 - N\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\alpha}{\theta} \int_0^1 N'\left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta}\right) d\xi\right) \\
 &= N\left(\frac{\theta}{2}\right) (1 + e^{-\alpha}) - e^{-\alpha} \\
 &\quad + \frac{\alpha}{\theta} \left(\int_0^1 N'\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta}\right) d\xi - e^{-\alpha} \int_0^1 N'\left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta}\right) d\xi\right) \\
 &= N\left(\frac{\theta}{2}\right) (1 + e^{-\alpha}) - e^{-\alpha} \\
 &\quad + \frac{\alpha}{\theta} \left(\int_0^1 \left(N'\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta}\right) - e^{-\alpha} N'\left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta}\right)\right) d\xi\right) \\
 &= N\left(\frac{\theta}{2}\right) (1 + e^{-\alpha}) - e^{-\alpha} \\
 &\quad + \frac{\alpha}{\theta} \left(\int_0^1 \left(N'\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta}\right) \left(1 - \frac{e^{-\alpha} N'\left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta}\right)}{N'\left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta}\right)}\right)\right) d\xi\right),
 \end{aligned}$$

como $N'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$, tenemos que

$$\frac{N' \left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta} \right)}{N' \left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta} \right)} = \frac{e^{-\frac{\left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta} \right)^2}}}{e^{-\frac{\left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta} \right)^2}} = e^{\alpha\xi}.$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{S}u(\theta, \alpha, S) &= N \left(\frac{\theta}{2} \right) (1 + e^{-\alpha}) - e^{-\alpha} \\ &\quad + \frac{\alpha}{\theta} \left(\int_0^1 \left(N' \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\xi\alpha}{\theta} \right) (1 - e^{-\alpha(1-\xi)}) \right) d\xi \right). \end{aligned}$$

lo que equivale a la fórmula de la proposición.

Ahora llamamos

$$Q(\theta, \alpha) = \frac{\alpha}{\theta} \int_0^1 N' \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\alpha\xi}{\theta} \right) (1 - e^{-\alpha(1-\xi)}) d\xi.$$

entonces por la proposición podemos reescribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{S}u(\theta, \alpha, S) &= u(\theta, \alpha, 1) = N \left(\frac{\theta}{2} \right) (1 + e^{-\alpha}) - e^{-\alpha} + Q(\theta, \alpha) \\ &= N \left(\frac{\theta}{2} \right) (1 + e^{-\alpha}) - e^{-\alpha} - N \left(\frac{\theta}{2} \right) (1 - e^{-\alpha}) \\ &\quad + \theta e^{-\alpha} \int_0^{\frac{\alpha}{\theta}} N \left(\frac{\theta}{2} + \lambda \right) e^{\theta\lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

con $\lambda = \frac{\alpha\xi}{\theta}$, e integrando por partes queda

$$Q = e^{-\alpha} \left(2N \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 + \theta \int_0^{\frac{\alpha}{\theta}} N \left(\frac{\theta}{2} + \lambda \right) e^{\theta\lambda} d\lambda \right)$$

luego,

$$u(\theta, \alpha, S) = S e^{-\alpha} \left(2N \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 + \theta \int_0^{\frac{\alpha}{\theta}} N \left(\frac{\theta}{2} + \lambda \right) e^{\theta\lambda} d\lambda \right),$$

Lo anterior es una fórmula global, a partir de la cual definimos una aproximación al valor de la opción.

$$u_a(\theta, \alpha, S) = Se^{-\alpha} \left(2N\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \right), \quad (2.5)$$

Esta se utilizará en el siguiente capítulo para obtener una fórmula aproximada de la volatilidad implícita.

Notas y comentarios.

1. Los desarrollos del artículo de Roger Lee van enfocados a la fórmula del momento que se utiliza en la calibración de los parámetros del modelo; cabe señalar que la fórmula del momento por si sola, no sustituye el procedimiento de optimización por completo, pero si lo facilita puesto que proporciona un valor inicial preciso de los parámetros óptimos.
2. La fórmula del Teorema 1 es completamente equivalente a la de *BS*, lo cual puede verse regresando a las variables originales.
3. La consideración de las simetrías es una herramienta poderosa que se ha usado sólo esporádicamente en finanzas. Sin duda un uso más extensivo de ella sería muy fructífero.

CAPÍTULO 3

Temas especiales y complementarios.

Introducción.

Como ya lo mencionamos anteriormente, no se conoce una expresión explícita en términos de funciones elementales para la volatilidad implícita, en la actualidad se tienen tres principales enfoques para estudiar esta función y estos son :

1. **Teórico**, generalmente en el contexto de problemas inversos de ecuaciones en derivadas parciales.
2. La obtención de **fórmulas aproximadas** para la volatilidad implícita.
3. **Numérico**, en el que se busca obtener algoritmos cada vez más eficientes para aproximar los valores numéricos de la volatilidad implícita.

A continuación se da una pequeña explicación del porqué no se puede hablar de una solución en forma cerrada para el problema de la volatilidad implícita, después se explicarán algunas fórmulas aproximadas y se concluye el capítulo con el planteamiento de problemas inversos y la metodología que se utiliza para resolverlos.

Soluciones en forma cerrada.

Como ya lo mencionamos la fórmula de *BS* da el precio justo de una opción de compra europea (*call option*), es uno de los más importantes instrumentos financieros de valuación,

gracias a la cual podemos obtener el valor de la volatilidad implícita, aunque no sea de manera exacta puesto que este instrumento supone de antemano que dicha volatilidad debe ser constante, por lo que se ha convertido en un gran campo de estudio este problema. Lo ideal sería poder encontrar una solución en forma cerrada, es decir, poder invertir la fórmula de *BS* para obtener la volatilidad implícita en forma cerrada como función de el precio del activo subyacente, la tasa de interés, el precio del strike, el tiempo de madurez y el valor de la opción. Puesto que una solución que puede ser expresada analíticamente en términos de un número finito de funciones “conocidas”, es decir en términos de funciones elementales (operaciones elementales, constantes, logaritmos, exponenciales, funciones trigonométricas, etc...) se dice que tiene solución en forma cerrada. Estas soluciones son un subconjunto de las soluciones analíticas, puesto que no incluyen series infinitas, ni expresiones como integrales o límites, aunque en nuestro caso no representaría gran problema el hecho de incluir también estas últimas operaciones.

Existen muchos trabajos en donde se asume que es imposible invertir la fórmula de Black- Scholes y proceden en dos direcciones: La teórica, en donde se obtienen propiedades abstractas de la volatilidad implícita (en el marco de la teoría de derivadas parciales) y en la dirección práctica, en donde se obtienen fórmulas aproximadas y a través de métodos numéricos se evalúa con datos del mercado, que es lo que se presentara en las próximas secciones de éste capítulo.

Diremos que una ecuación tiene una solución en forma cerrada si y sólo si al menos una solución de esta se puede expresar en términos de funciones elementales. Un ejemplo “claro” es sin duda la teoría de Galois en donde se demuestra que el hecho de encontrar una solución en forma cerrada depende de las funciones que se permitan utilizar de acuerdo al contexto (*ver H. Umemura 1984 o J.P. Tignol 2004*). Sin embargo existen ecuaciones o sistemas demasiado complejos para soluciones de forma cerrada o analítica y a menudo pueden ser analizados por el modelado matemático y simulación por ordenador.

Aunque encontramos el artículo “*Alternative Formulas to Compute Implied Standard Deviation de James S. Ang*, Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies, Vol. 12, No. 2 (2009) 159–176” en donde se da una solución exacta en forma cerrada para de la desviación estándar implícita bajo la condición de que el precio del activo subyacente es igual al valor actual del precio de ejercicio, la solución en forma cerrada proporciona la verdadera desviación estándar implícita y no tiene ningún error estimado, además este documento desarrolla tres fórmulas alternativas para estimar la desviación estándar en el caso de que la hipótesis mencionada anteriormente no se cumpla.

La desviación estándar del activo subyacente es de suma importancia puesto que con esta se puede estimar el precio de las opciones y además es útil para capturar la volatilidad del activo subyacente en el mercado, en el modelo de valuación de opciones de *BS (1973)* la desviación estándar del activo subyacente (*volatilidad*) es el único parámetro que no puede ser observado directamente.

Entonces se tiene un caso especial para encontrar una solución exacta en forma cerrada para la desviación estándar implícita. El precio de una opción de compra europea (*call option*) obtenido con *BS* esta dado por:

$$C = S \left[N \left(\ln(S/K) / (\sigma\sqrt{T}) + \sigma\sqrt{T}/2 \right) \right] - K \left[N \left(\ln(S/K) / (\sigma\sqrt{T}) - \sigma\sqrt{T}/2 \right) \right], \quad (3.1)$$

en donde C es el precio de la opción, S es el valor del activo subyacente, K es el precio de ejercicio actual que es igual a Ee^{-rT} , con E el precio de ejercicio, r la tasa instantánea libre de riesgo, T el tiempo de madurez y σ la desviación estándar anual del activo subyacente. Bajo la condición de que $S = K = Ee^{-rT}$, *Brenner y Subrahmanyam (1988)* obtienen la siguiente fórmula simple para calcular la desviación implícita:

$$\sigma\sqrt{T} = \sqrt{2\pi}C/S \quad (3.2)$$

esta fórmula se obtiene al aplicar series de Taylor al rededor del cero en el modelo de Black-Scholes hasta los términos de primer orden, y los términos de orden superior son ignorados debido a lo cual la ecuación (3.2) es una aproximación en lugar de ser una solución exacta. Sin embargo, si tomamos en cuenta la hipótesis expuesta al principio y algunas de las propiedades de la normal, el modelo Black- Scholes se convierte en:

$$\begin{aligned} C &= S \left[N \left(\sigma\sqrt{T}/2 \right) - N \left(-\sigma\sqrt{T}/2 \right) \right] \\ &= S \left[1 - 2N \left(-\sigma\sqrt{T}/2 \right) \right] \\ &= S \left[2N \left(\sigma\sqrt{T}/2 \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

entonces una solución en forma cerrada para el problema de la desviación estándar (volatilidad) implícita es:

$$\sigma\sqrt{T} = 2N^{-1} [(C + S) / 2S]. \quad (3.4)$$

Como la distribución acumulativa de la normal es una función monótona creciente, entonces la inversa de dicha función en la ecuación (3.4) debe existir y ser única, por lo tanto la ecuación (3.4) debe ser exacta y única solución en forma cerrada para el problema de la volatilidad implícita cuando el precio de ejercicio es igual al valor actual del activo subyacente. Se hace la aclaración de que la expansión de Taylor no juega ningún papel en la ecuación (3.4) por lo que no hay truncamiento en los términos, lo que nos da como resultado una certeza de que no habrá ningún error en la estimación del cálculo de la volatilidad implícita, así es que esta ecuación es la mejor fórmula para calcular exactamente la volatilidad implícita si y sólo si $S = K$.

Dada la ecuación (3.3), podemos obtener además los “Greeks” en forma cerrada:

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -N\left(-\sigma\sqrt{T}/2\right) = -\frac{1}{2} + \frac{C}{2S}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N\left(\sigma\sqrt{T}/2\right) = \frac{1}{2} + \frac{C}{2S}. \quad (3.6)$$

Por lo que en este caso muy particular podemos asegurar que si se tiene una solución en forma cerrada entonces tendremos también la información de los “Greeks” en forma cerrada, aunque a mi parecer esta solución no será de mucha utilidad en la práctica puesto que debe resultar muy difícil el hecho de obtener la hipótesis con datos reales del mercado. Es por eso que a continuación se dan algunas fórmulas aproximadas para el problema de la volatilidad implícita.

Pero, ¿puede existir una fórmula explícita para la volatilidad implícita sin la hipótesis anterior?, esta interrogante se resuelve en el artículo “Can there be an explicit formula for implied volatility? *de Stefan Gerhold (2012)*”; en donde se da una justificación matemática para responder que en efecto no se puede encontrar una fórmula explícita de forma cerrada para la volatilidad implícita ya que está no pertenece al conjunto de clases $D - finitas$, lo que no descarta todas las expresiones explícitas, pero en efecto muestra que la volatilidad implícita no pertenece a una clase grande que contiene muchas funciones elementales y funciones especiales clásicas. Comencemos recordando que la volatilidad implícita es tal que:

$$C_{BS}(S, K, T, \sigma_{imp}(S, K, T)) = C_M(S, K, T) \quad (3.7)$$

con el supuesto de que la tasa de interés libre de riesgo es igual a cero, esto para simplificar los cálculos. Cabe recordar que el cálculo de dicha volatilidad a partir de la ecuación (3.7) se realiza con métodos numéricos, muchos autores llegan a asegurar que invertir esta ecuación de forma cerrada es imposible, esta última afirmación se ha hecho tantas veces que uno se pregunta si se puede convertir en algo tangible, hay que considerar que de acuerdo a lo descrito en la literatura referente a la volatilidad implícita y al problema de la sonrisa de la volatilidad es difícil decir algo acerca de las expresiones explícitas para la función que nos da el valor exacto de dicha volatilidad con respecto a los valores de las variables que podemos obtener del mercado.

$$(S, K, T) \longrightarrow \sigma_{imp}(S, K, T). \quad (3.8)$$

esta función en realidad depende de $C_M(\cdot, \cdot, \cdot)$ y no sería natural hacer suposiciones sobre la superficie del precio del call C para poder conseguir una forma cerrada para (3.8). Por lo que entonces consideramos la función I tal que satisface:

$$C_{BS}(S, K, I(S, K, c)) = c, \quad S, K > 0, (S - K)^+ < c < S, \quad (3.9)$$

es una función definida en el conjunto abierto

$$D_I := \{(S, K, c) \in \mathbb{R}^3 : S, K > 0, (S - K)^+ < c < S\}.$$

El tiempo de madurez T se omite, asumiendo $T > 0$ fijo en todas partes. Teniendo en cuenta que cualquier tipo de expresión explícita para I con T variable implicaría una expresión explícita para cualquier T fijo. La función que claramente existe y es única, ya que los precios de las C_{BS} incrementan del límite inferior de la condición de *no-arbitraje* al límite superior conforme σ aumenta. Si una superficie de precios *call* satisface

$$(S - K)^+ < C(S, K) < S, \quad (3.10)$$

con $T > 0$, entonces la volatilidad implícita σ correspondiente es,

$$\sigma_{imp}(K, T) = I(S, K, C(S, K)), \quad S, K > 0.$$

Como ya lo mencionamos por el teorema de la función implícita C es real analítica sobre D , y para dar una respuesta parcial al hecho de que si en verdad la volatilidad implícita tiene una representación en forma cerrada entonces vale la pena recordar la definición de la funciones $D - finitas$, ya que el resultado que se pretende demostrar a continuación es que en efecto I no es un función $D - finita$.

Supongamos que f es una función $C^\infty - suave$ definida en un conjunto abierto $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, esta función es llamada $D - finita$ si satisface las siguientes $EDP's$

$$\begin{aligned} P_{1,d_1}(x) \frac{\partial^{d_1} f(x)}{\partial x_1^{d_1}} + P_{1,d_1-1}(x) \frac{\partial^{d_1-1} f(x)}{\partial x_1^{d_1-1}} + \cdots + P_{1,1}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + P_{1,0}(x) f(x) &= (3.11) \\ &\vdots \\ P_{n,d_n}(x) \frac{\partial^{d_n} f(x)}{\partial x_n^{d_n}} + P_{n,d_n-1}(x) \frac{\partial^{d_n-1} f(x)}{\partial x_n^{d_n-1}} + \cdots + P_{n,1}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} + P_{n,0}(x) f(x) &= 0, \end{aligned}$$

valido para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f$, donde $d_i \geq 1$ para $i = 1, \dots, n$ y los P_{ij} son polinomios tales que P_{i,d_i} es distinto a cero en D_f con $i = 1, \dots, n$. Si f es real analítica, vamos a tomar un punto arbitrario $x_0 \in D_f$ y consideramos la expansión de Taylor de f en x_0 . Cuando se ve como una serie de potencias formal, las EDP (3.11) muestran que las derivadas parciales generan un espacio vectorial de dimensión finita en el campo de funciones racionales. Esta definición algebraica de las funciones $D - finitas$ es la más común en la literatura. Aunque no se puede utilizar directamente para las funciones, sin embargo, a diferencia del campo de las series de Laurent, $C^\infty(D_f)$ no es un espacio vectorial sobre el campo de funciones racionales. Además, la clase de funciones $D - finitas$ es cerrada bajo la adición,

multiplicación, en la integración definida y bajo la transformada de Laplace; por otro lado la división no conserva la $D - finites$, ni tampoco la composición, a menos que la función interna sea algebraica. Por lo tanto, $x \rightarrow e^{\sqrt{x}}$ es $D - finita$ mientras que $x \rightarrow e^{e^x}$ y $x \rightarrow \frac{1}{\text{sen}x}$ no lo son. La prueba de la cerradura bajo la condición de tener funciones algebraicas se puede ver en *Gerhold (2012)*.

El siguiente teorema da una respuesta parcial a la pregunta del por qué varios autores afirman que no existe una solución en forma cerrada para el problema de la volatilidad implícita.

Teorema 2 *La función $I : D_I \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow (0, \infty)$ definida por (3.9) no es $D - finita$.*

Prueba 1 *La estrategia consiste en encontrar una especialización útil de I a una función univariante. Vamos a tomar el precio actual del subyacente proporcional al strike, es decir $S = eK$, para $0 < K < \frac{1}{e}$, la desigualdad*

$$(e - 1)K < \hat{c}(K) := (e - 1)K + eK^2 < eK$$

se cumple y por lo tanto la función

$$f(K) := I(eK, K, \hat{c}(K))$$

está bien definida para $0 < K < \frac{1}{e}$. Se supone que I es $D - finita$ y se quiere mostrar entonces que f también lo es, mediante el estudio de su serie de Taylor en $K = \frac{1}{2e}$. En primer lugar se expande la función analítica I al rededor del punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2e}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4e}) \in D_I$:

$$I(S, K, c) = \sum_{i,j,k \geq 0} \gamma_{ijk} \left(S - \frac{1}{2}\right)^i \left(K - \frac{1}{2e}\right)^j \left(c - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4e}\right)\right)^k. \quad (3.12)$$

ya que I es $D - finita$, entonces

$$\sum_{i,j,k \geq 0} \gamma_{ijk} X^i Y^j Z^k$$

es la serie en los indeterminantes X, Y, Z . La sustitución algebraica $X \rightarrow eX, Y \rightarrow X, Z \rightarrow eX + eX^2$ preserva la $D - finites$, por lo que la serie de potencias formal univariada (univariate formal power series) es:

$$\sum_{i,j,k \geq 0} (eX)^i X^j ((e - 1)X + eX^2)^k \quad (3.13)$$

es $D - finita$. Esta serie representa la función analítica $x \rightarrow f(x + \frac{1}{2e})$ en una vecindad del cero. Por (3.12),

$$f(K) = \sum_{i,j,k \geq 0} \gamma_{ijk} \left(eK - \frac{1}{2}\right)^i \left(K - \frac{1}{2e}\right)^j \left(\hat{c}(K) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4e}\right)\right)^k.$$

$f(K)$ es igual a (3.13) tomando X como $K - \frac{1}{2e}$, lo que demuestra que la D -finites de I implica la D -finites de f .

Ahora bien, vamos a tomar la siguiente variante de la fórmula de BS con el tiempo de madurez $T > 0$ fijo:

$$C_{BS}(S, K, \sigma) = (S - K)^+ + S \int_0^{\sigma\sqrt{T}} N' \left(\frac{\log(S/K)}{v} + \frac{v}{2} \right) dv. \quad (3.14)$$

Definimos la función $F : (0, \infty) \rightarrow (0, \frac{1}{e})$

$$F(x) := \int_0^x N' \left(\frac{1}{v} + \frac{v}{2} \right) dv \quad (3.15)$$

Entonces, para $S = eK$, el log-moneyness es igual a $\log(\frac{S}{K})$ y la ecuación (3.14) se convierte en

$$C_{BS}(eK, K, \sigma) = (e - 1)K + eKF(\sigma\sqrt{T}).$$

Por la definición de f , se infiere que la ecuación

$$(e - 1)K + eKF(\sqrt{T}f(K)) = \hat{c}(K), \quad 0 < K < 1/e.$$

se cumple, y por lo tanto

$$F(\sqrt{T}f(K)) = \frac{\hat{c}(K) - (e - 1)K}{eK} = K.$$

o bien

$$f(K) = F^{-1}(K)/\sqrt{T}, \quad 0 < K < 1/e.$$

El siguiente lema muestra que F^{-1} no es D -finita y por tanto I y f tampoco lo son.

Lema 1 Sea la función $F : (0, \infty) \rightarrow (0, 1/e)$ definida por (3.15). Entonces la función inversa de F no es D -finita.

Prueba 2 ver Gerhold (2012)

Por lo que entonces podemos garantizar que no se puede dar una solución de forma explícita para la volatilidad implícita, debido a lo cual en la siguiente sección se dan algunas fórmulas aproximadas y la manera en la que se calcularon.

Fórmulas Aproximadas.

Debido a la problemática planteada en la sección anterior, ahora vamos a dar una serie de ejemplos de fórmulas aproximadas

Fórmula Chargoy-Ibarra.

De la ecuación (2.5) si reescribimos $\varphi = N^{-1}$

$$u_a = S e^{-\alpha} \left(2N \left(\frac{\theta_a}{2} \right) - 1 \right)$$

entonces tenemos que

$$N^{-1} \left(\frac{u_a}{2S} e^{\alpha} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\theta_a}{2} = \frac{\sigma_a \sqrt{T}}{2}$$

de donde

$$\begin{aligned} \sigma_a \sqrt{T} &= 2\varphi \left(\frac{u_a}{2S} e^{\alpha} + \frac{1}{2} \right) & (3.16) \\ &= 2\varphi \left(\frac{u_a}{2k} e^{rT} + \frac{k}{2k} \right) \\ &= 2\varphi \left[\frac{1}{2k} (u_a e^{rT} + k) \right]. \end{aligned}$$

entonces si $\alpha = 0$, $\sigma_a = \sigma_m$, aunque matemáticamente esto es razonable no se sabe si en la realidad funciona para estimar correctamente el valor de la volatilidad.

De acuerdo a lo estudiado en el artículo de Roger Lee podemos obtener algunas fórmulas aproximadas, por ejemplo para el caso de la volatilidad local, como se muestra a continuación

Estática en volatilidad Local.

Tenemos

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t(S_t, t)S_t dW_t.$$

escribimos $F := Se^{r(T-t)}$ y supongamos que la volatilidad local se puede expresar como una función h que depende de F

$$\sigma(S, t) = h(Se^{r(T-t)}).$$

Sea $\bar{F} := \frac{F_0 + K}{2}$ tal que $h(\bar{F})$ es una aproximación al punto medio de la volatilidad media de la zona a lo largo de $(F_0, 0)$ a (K, T) , con lo que Hagan y Woodward [6] llegan a una fórmula aproximada:

$$I(K, T) \approx h(\bar{F}) + \frac{1}{24} h''(\bar{F})(F_0 - K)^2.$$

Estática en Volatilidad Estocástica.

Ahora asumimos que el subyacente es tal que

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t,$$

$$dV_t = aV_t dt + bV_t dZ_t.$$

con W y Z con correlación ρ .

Renault y Touzi [7] prueban que en el caso $\rho = 0$, la volatilidad implícita es una “sonrisa simétrica”; simétrica en el sentido que

$$I(x, T) = I(-x, T),$$

y sonrisa en el sentido que I crece en x para $x > 0$. Además llegan a una aproximación

$$I^2 \approx \mathbf{E}\bar{V} + \frac{1}{4} \frac{\text{Var}(\bar{V})}{(\mathbf{E}\bar{V})^2} \left(\frac{x^2}{T} - \mathbf{E}\bar{V} - \frac{1}{4} (\mathbf{E}\bar{V})^2 T \right),$$

dado que $v = \mathbf{E}\bar{V}$.

Problemas Inversos.

Unicidad y estabilidad.

En el artículo “*Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial*” de *Ilia Bouchouev and Victor Isacov (1998)* se da una formulación matemática rigurosa de el problema inverso de la volatilidad implícita, además se dan resultados de unicidad y de estabilidad utilizando la ecuación dual. A continuación vamos a discutir algunos detalles del artículo, comenzamos con la ecuación de *BS* en su forma diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2(S, t) \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + S\mu \frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0 \quad (3.17)$$

La ecuación parabólica *backward* (3.17) se cumple para cualquier valor independientemente del derivado con el que se este trabajando, puesto que esto solo se va a reflejar en las condiciones finales del problema. Nosotros estamos trabajando con opciones de compra *call* europeas para las cuales el *payoff* es:

$$u(S, T) = (S - K)^+ \quad (3.18)$$

Sabemos ya, que el único parámetro en la ecuación (3.17) que no puede ser observado directamente es la volatilidad local $\sigma(S, t)$. El problema *directo* en este caso es, dada la función de volatilidad local $\sigma(S, t)$ encontrar la solución a (3.17) y (3.18).

Se va a suponer que la función de volatilidad local es Holder continua

$$\sigma(S, t) \in C^{\lambda, \lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [t_*, T]), \quad 0 < \lambda < 1$$

estrictamente positiva y acotada

$$0 < \sigma_{\min} \leq \sigma(S, t) \leq \sigma_{\max} < \infty$$

y el precio de la opción es acotado por

$$|u(S, t)| \leq \text{const} \tan te(S + 1).$$

La ecuación (3.17) es de tipo parabólica porque tiene una singularidad, por lo que se hace un cambio de variable, mediante una nueva variable espacial

$$x = \ln(S/K)$$

que conduce al problema de Cauchy estándar para la ecuación parabólica hacia atrás (*backward*) dada la condición al tiempo final T . La teoría conocida para ecuaciones parabólicas garantiza que existe solución única $u(s, t)$ para el problema directo de valuación de opciones y $u(s, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times (t_*, T)) \cup C^{\lambda, \lambda/2}(\mathbb{R}_+ \times [t_*, T])$ funciones Hölder.

Se han encontrado soluciones de forma cerrada para el precio de la opción con Black-Scholes para el caso de la volatilidad constante, por Merton para el caso en que la volatilidad es variable en el tiempo, pero independiente del precio, por Cox y Ross para casos específicos de volatilidad local. En general, los métodos de diferencias finitas se utilizan para resolver el problema numéricamente. En la última década el mercado de derivados financieros ha crecido de manera significativa. Hoy en día existen cientos de opciones con diferentes precios de ejercicio y tiempos de madurez para el mismo activo subyacente que se está negociando en el mercado. Por lo tanto, los precios de mercado de opciones contienen información valiosa y pueden ser utilizados para recuperar propiedades no observables del proceso estocástico del subyacente.

Ahora bien, el problema es encontrar la función de volatilidad local $\sigma(S, t)$ tal que la solución de (3.17) y (3.18) con diferentes strikes K y tiempos de madurez T satisface

$$u(S^*, t^*; K, T) = u^*(K, T) \tag{3.19}$$

donde el lado derecho de la igualdad denota el precio actual de la opción en el mercado con el correspondiente strike K y tiempo de madurez T en el tiempo t^* cuando el precio de subyacente es S^* . Los *Practitioners* se refieren a este problema como un modelo de calibración.

Vamos ahora con el problema inverso el cual se examinó por primera vez en Dupire (1993, 1994). Se ha demostrado que los precios de las opciones dadas para todas los strikes posibles y tiempos de madurez determinan completamente la función de la volatilidad local.

Debido a que en la práctica los precios de las opciones solo están disponibles para un conjunto discreto de strikes y tiempos de madurez, se complica el hecho de querer recuperar la información a través de los modelos de volatilidad que se sugieren para intentar

reproducir el comportamiento de los mercados financieros. El problema inverso se convierte en un problema de identificación de parámetros cuya regla de oro dice que “para una reconstrucción estable de las propiedades desconocidas del sistema en una dirección determinada, es necesario disponer de datos en la misma dirección”. La función de volatilidad local es dependiente del tiempo y del subyacente, y para el análisis de la estabilidad se separa la dependencia del tiempo y del subyacente y asumimos que la volatilidad tiene la forma

$$\sigma(S, t) = \sigma(S) \rho(t)$$

Más adelante se verá que si se supone que $\sigma(s)$ es una función dada se puede dar la reconstrucción de $\rho(t)$ a partir de precios de opciones con diferentes vencimientos. Este problema no es complicado ya que el coeficiente dependiente del tiempo desconocido en (3.17) a menudo se puede quitar simplemente ajustando la base de la variable de tiempo. En este caso la estructura de la distribución de probabilidad desconocida está predeterminada por la función conocida $\sigma(s)$ y la reconstrucción de la parte dependiente del tiempo es sencilla. En particular, cuando $\sigma(S)$ es constante, entonces la distribución de la rentabilidad sigue siendo gaussiana con desviación estándar igual a la volatilidad media de la vida de la opción y estos modelos no son capaces de tener opciones *in-of-the-money* y *out-of-the-money* consistentes con el mercado.

Idea. Se retoman lo realizado por Dupire (1993, 1994) para la ecuación dual, es decir la ecuación de *BS* (3.17) pero con la volatilidad dependiente del tiempo de madurez y del strike. Después se da una fórmula explícita para la volatilidad local en términos de precios de opciones con diferentes strikes y tiempos de madurez. Si sólo las propiedades de la volatilidad local dependientes del tiempo son desconocidas entonces, la volatilidad se puede recuperar de una manera estable mediante las opciones con un único strike y para todas las fechas de vencimiento, con la condición de que existe continuidad en los plazos puesto que esto es necesario para la reconstrucción de la estructura temporal de la volatilidad.

La idea en primer lugar es definir la derivada parcial del precio de una opción con respecto al strike, para lo cual consideramos $\frac{1}{\varepsilon}$ de las opciones extendidas.

$$u_\varepsilon(S, t; K, T) = \frac{1}{\varepsilon} (u(S, t; K + \varepsilon, T) - u(S, t; K, T)).$$

Esta diferencia finita satisface (3.17) al tiempo T , es igual a cero en el intervalo $(0, K)$, -1 en $(K + \varepsilon, \infty)$ y lineal en $(K, K + \varepsilon)$. Como se tiene que $(-ru_\varepsilon) \leq 0$ entonces se cumple el principio del máximo

$$-1 < u_\varepsilon(S, t; K, T) < 0, \quad \text{en } \mathbb{R}_+ \times (t_*, T).$$

con lo que tendremos que existe el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, el cual resuelve (3.17) con las con los datos finales dados por la función negativa de Heavyside. Repitiendo este argumento para $\frac{1}{\varepsilon^2}$ *butterflies* establecemos que existe una segunda derivada con respecto al *strike*

$$\frac{\partial^2 u(S, t; K, T)}{\partial K^2} = G(S, t; K, T)$$

que también resuelve la ecuación (3.17), y más aun

$$G(S, t; K, T) = \delta(S - K)$$

es la función delta de Dirac concentrada en K . Primero se supone que $\sigma(S, t) \in C^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [t_*, T])$ con $0 < \lambda < 1$. Puesto que $G(S, t; K, T)$ es la solución fundamental de (3.17) con los datos finales en $t = T$, y además para K y T fijos

$$g(S) = (S - K)^+$$

es continua, entonces

$$\int_D \frac{\partial^2 u}{\partial K^2}(S, t; K, T) u(K, T) dK \xrightarrow{t \rightarrow T} g(S)$$

que $G(S, t; K, T)$ sea solución fundamental de (3.17) significa que

$$u(S, t) = \int_D G(S, t; K, T) g(K) dK$$

es solución de (3.17). Llamemos

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2(S, t) \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + S \mu \frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0$$

por la teoría de operadores adjuntos

$$\text{Dado } G(L(u)) \longrightarrow \text{tenemos } (L^*(G))u$$

entonces dado

$$\begin{aligned} & \int_D G(S, t; K, T) (L(u(K, T))) dK \\ &= \int_t^T \int_D G \left(\frac{\partial u}{\partial T} + \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(K, T) \frac{\partial^2 u}{\partial K^2} + K \mu \frac{\partial u}{\partial K} - ru \right) dK dT \\ &= \int_t^T \int_D G \frac{\partial u}{\partial T} dK dT + \int_t^T \int_D G \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(K, T) \frac{\partial^2 u}{\partial K^2} dK dT \\ & \quad + \int_t^T \int_D G K \mu \frac{\partial u}{\partial K} dK dT - \int_t^T \int_D G r u dK dT \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_D \int_t^T G \frac{\partial u}{\partial T} dT dK + \int_D \int_t^T \frac{1}{2} G K^2 \sigma^2(K, T) \frac{\partial^2 u}{\partial K^2} dT dK \\
&\quad + \int_D \int_t^T G K \mu \frac{\partial u}{\partial K} dT dK - \int_D \int_t^T G r u dT dK,
\end{aligned}$$

integrando la última igualdad por partes, y recordando que u no es necesariamente solución y que además se anula en T , tenemos entonces que

$$\int_D L^*(G(S, t; K, T)) u(K, T) dK$$

es igual a

$$\begin{aligned}
&- \int_D \int_t^T u \frac{\partial G}{\partial T} dT dK + \int_D \int_t^T \frac{1}{2} u \frac{\partial^2}{\partial K^2} (K^2 \sigma^2(K, T) G) dT dK \\
&- \int_D \int_t^T \mu \frac{\partial}{\partial K} (KG) u dT dK - \int_D \int_t^T G r u dT dK,
\end{aligned}$$

por lo que la ecuación dual con respecto a K y a T , es:

$$-\frac{\partial G}{\partial T} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial K^2} (K^2 \sigma^2(K, T) G) - \mu \frac{\partial}{\partial K} (KG) - rG = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial T} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial K^2} (K^2 \sigma^2(K, T) G) - \mu \frac{\partial}{\partial K} (KG) - rG.$$

Ahora usamos la definición de $G(S, t; K, T)$ e integramos esta ecuación dos veces de K a ∞ . El segundo término en el lado derecho se puede integrar por partes y se considera el hecho de que $u, K \frac{\partial u}{\partial K}, K^2 \frac{\partial u^2}{\partial K^2}, K^3 \frac{\partial u^3}{\partial K^3} \rightarrow 0$ cuando $K \rightarrow \infty$,

$$\int_K^\infty \int_\eta^\infty \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) d\xi d\eta = - \int_K^\infty \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} d\eta = K \frac{\partial u}{\partial K} + \int_K^\infty \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = K \frac{\partial u}{\partial K} - u.$$

Lo que nos lleva a la siguiente ecuación dual para $u(., K, T)$

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(K, T) \frac{\partial^2 u}{\partial K^2} - \mu K \frac{\partial u}{\partial K} + (\mu - r) u. \quad (3.20)$$

En el caso general $\sigma(S, t) \in C^{\lambda, \lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [t_*, T])$ puede ser aproximada (en el espacio $\sigma(S, t) \in C^{\lambda/2, \lambda/4}$) por funciones suaves $\sigma(S, t)$. Puesto que (3.20) se cumple para $\sigma(S, t)$ suave, no es difícil de pasar al límite en (3.20) y demostrarlo para $\sigma(S, t)$, (ver *Ladyzenskaya (1968)*).

Si los precios de las opciones son conocidos para todos los *strikes* posibles K y tiempos de madurez T entonces la función de la volatilidad local se puede encontrar directamente de la ecuación (3.20) solo despejando

$$\sigma(K, T) = \sqrt{\frac{\frac{\partial u}{\partial T} + \mu K \frac{\partial u}{\partial K} - (\mu - r) u}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial K^2}}}$$

En ausencia de arbitraje el radicando debe ser positivo (*ver Andersen 1998*). Sin embargo, esta fórmula no se puede utilizar de manera eficiente para el cálculo numérico con valores reales de mercado, ya que los precios de mercado son escasos y ruidosos, además la positividad del radicando o la restricción de suavidad de la función de volatilidad pueden ser violados.

Ahora supongamos que

$$\sigma(S, t) = \sigma(S) \rho(t)$$

donde $\sigma(S)$ es una función dada y $\rho(t)$ se debe encontrar a partir de los precios de mercado de opciones con el mismo *strike* K y todos los tiempos de madurez T . También suponemos que $\mu = 0$, se usa nueva volatilidad dependiente del tiempo, normalizada

$$\tau = \int_t^T \rho^2(\eta) d\eta$$

y llamamos

$$v(S, \tau) = u(S, t) e^{r(T-t)}.$$

Entonces, la ecuación *BS* (3.17) se reduce a

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2} S^2 \sigma^2(S) \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}$$

con la condición inicial

$$v(S, 0) = (S - K)^+.$$

Dado que $\sigma(S)$ es conocida, $v(S, \tau)$ es determinada de manera única. Por lo tanto, $\rho(t)$ se puede encontrar a partir de la siguiente ecuación no lineal (*Ecuación de Volterra*)

$$v\left(S^*, \int_{t^*}^T \rho^2(t) dt\right) = u^*(T) e^{r(T-t^*)}.$$

Por el argumento de arbitraje tenemos que $\frac{\partial v}{\partial \tau} > 0$ para las opciones call con el *payoff* convexo y $\rho(t)$ es únicamente determinado por la función $u^*(T)$.

Para $\mu \neq 0$ y $\sigma(S) = \sigma_0$ se obtiene un resultado similar mediante el siguiente cambio de variables

$$\tau = \int_t^T \rho^2(\eta) d\eta \quad \xi = S e^{\mu(T-t)} \quad v(\xi, \tau) = u(S, t) e^{r(T-t)}.$$

en este caso la ecuación (3.17) se reduce a

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \xi^2 \sigma_0^2(S) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}.$$

Obviamente, el argumento se cumple cuando la volatilidad es una función de el precio siguiente $\sigma = \sigma(\xi)$.

Como hemos visto la calibración es sencilla para las opciones con tiempos de madurez continuos. Por desgracia, los datos de las opciones suelen estar disponibles sólo para unos pocos de estos tiempos y, a veces, incluso para un solo vencimiento. Esto hace que sea imposible interpolar los datos que faltan, por ejemplo, entre la fecha actual y el vencimiento más corto. Por lo tanto, hay que suponer que la volatilidad es una función a intervalos definidos de tiempo y reconstruir sus propiedades dependientes de espacio para cada intervalo entre dos tiempos de madurez consecutivos. La siguiente sección trata con este problema inverso más complicado y los estudios de la estabilidad de la reconstrucción de las propiedades del espacio-dependientes de la volatilidad local en un solo período.

A continuación se aborda un problema mucho más complicado, que es cuando se tienen los precios de las opciones para diferentes strikes y tiempo de madurez fijo. Lo que se va a intentar hacer es, una reconstrucción de un proceso de difusión no conocido puesto que es bien sabido que los retornos del mercado no siguen una distribución gaussiana. Con la ecuación dual se transforma el problema de la volatilidad en un problema inverso con condiciones de frontera, además de presentarse teoremas de unicidad y estabilidad.

Ahora bien para hacer la reconstrucción de la volatilidad dependiente del subyacente nuevamente escribimos a la volatilidad local como

$$\sigma(S, t) = \sigma(S) \rho(t)$$

en donde $\sigma(S)$ es ahora la función a determinar y $\rho(t)$ es la función dada. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que para un tiempo de madurez T fijo, $\rho(t) = 1$ y además $\sigma(S, T) = \sigma(S)$. También se supone que los datos de las opciones están disponibles para gran cantidad de *strikes* y el mismo vencimiento T y la reconstrucción de la volatilidad se centra en un solo período. Para reconstruir el valor de las opciones con varios vencimientos $T_1 \dots T_m$ se realiza un argumento similar al que se hace posteriormente en $(t^*, T_1), (T_1, T_2) \dots (T_{m-1}, T_m)$.

Utilizamos la ecuación dual (3.20) y se hacen los siguientes cambios de variable:

$$y = \ln \frac{K}{S^*} \quad \tau = T - t. \quad (3.21)$$

entonces las funciones

$$U(y, \tau) = u(S, t; K, T) \quad a(y) = \sigma(K) \quad (3.22)$$

satisfacen el siguiente problema inverso parabólico con condiciones de frontera **(me falta escribir por qué)**

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2} a^2(y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{1}{2} a^2(y) + \mu \right) \frac{\partial U}{\partial y} + (\mu - r) U \quad (y, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, \tau^*) \quad (3.23)$$

$$U(y, 0) = S^*(1 - e^y)^+ \quad y \in \mathbb{R} \quad (3.24)$$

$$U(y, \tau^*) = U^*(y) \quad y \in \omega \quad (3.25)$$

donde $\tau^* = T - t^*$. Nuestro problema es ahora encontrar un coeficiente $a(y)$ en el intervalo ω en donde están dados los precios de la opción, cabe señalar que ω puede ser todo \mathbb{R} .

Teorema 3 Sean U_1 y U_2 soluciones del problema parabólico (3.23) y (3.24) respectivamente, con $a = a_1$ y $a = a_2$ y las correspondientes condiciones de frontera están dadas por U_1^* y U_2^* . Sea $\omega_0 \neq \emptyset$ es un subintervalo abierto de ω .

Si $U_1^*(y) = U_2^*(y)$ en ω y $a_1(y) = a_2(y)$ en ω_0 entonces $a_1(y) = a_2(y)$ en ω .

Si además, $a_1(y) = a_2(y)$ en $\omega_0 \cup (\mathbb{R}/\omega)$ y ω es acotado, entonces existe una constante C que depende sólo en $|a_1|_\lambda(\omega)$, $|a_2|_\lambda(\omega)$, ω , ω_0 , τ^* de tal manera que tenemos la siguiente estimación de estabilidad

$$|a_1 - a_2|_\lambda(\omega) \leq C |U_1^* - U_2^*|_{2+\lambda}(\omega) \quad (3.26)$$

Prueba 3 La prueba se ve con detalle en Bouchouev & Isacov (1998) p. R101, en donde lo primero que se hace es la prueba de la unicidad y se plantea una idea para la prueba de estabilidad.

En la prueba del teorema se pueden ver las dificultades con la unicidad y la existencia de la solución del problema inverso no lineal (3.23) con condiciones (3.24) y (3.25), por lo que se sugiere estudiar el problema inverso linealizado. Por lo que asumimos que

$$\frac{1}{2} a^2(y) = \sigma_0 + f(y) \quad (3.27)$$

$f(y)$ denota una “pequeña” perturbación en $L^2(\omega)$, con $|a(y)|_\lambda(\omega) \leq M$ y ω relativamente pequeña.

Para obtener el problema linealizado se toma en cuenta las aproximaciones estándar de las soluciones de problemas parabólicos implican que

$$U = U_0 + V + v$$

con U_0 solución de (3.23) y (3.24) para $\frac{1}{2}a^2(y) = \sigma_0$, la función v satisface la siguiente desigualdad

$$|v|_{2+\lambda, 1+\lambda/2} \left(\omega \times \left(\frac{1}{2}\tau^*, \tau^* \right) \right) \leq C(M) |f|_{\lambda}^2(\omega)$$

y V es la parte principal de la solución perturbada U . Si se sustituye esto en la expresión de U y se desprecian los términos de orden superior con respecto a f , se llega al problema inverso linealizado

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \sigma_0 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - (\sigma_0 + \mu) \frac{\partial V}{\partial y} + (\mu - r)V + \alpha_0 f \quad (y, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, \tau^*) \quad (3.28)$$

$$V(y, 0) = 0 \quad y \in \mathbb{R} \quad (3.29)$$

$$V(y, \tau^*) = V^*(y) \quad y \in \omega \quad (3.30)$$

con

$$\alpha_0(y, \tau) = \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} - \frac{\partial U_0}{\partial y}$$

y

$$V^*(y) = U^*(y) - U_0(y, \tau^*).$$

sabemos que

$$\frac{\partial U_0}{\partial \tau} = \sigma_0 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} - (\sigma_0 + \mu) \frac{\partial U_0}{\partial y} + (\mu - r)U_0 \quad (y, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, \tau^*)$$

como se trata de una ecuación con coeficientes constantes la función $\left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial U_0}{\partial y} \right)$ también satisface la misma ecuación, entonces es fácil comprobar que la ecuación

$$\omega_0 = e^{-ay-b\tau} \left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} - \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) \quad a = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sigma_0} \quad b = -\frac{1}{4\sigma_0} (\sigma_0 + \mu)^2 + \mu - r$$

satisface la ecuación del calor

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial \tau} = \sigma_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2}$$

con la condición inicial dada por

$$\omega_0(y, 0) = S^* \delta(y).$$

de la fórmula conocida para la solución fundamental de la ecuación del calor tenemos

$$\alpha_0(y, \tau) = S^* \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma_0\tau}} e^{-(y^2/4\sigma_0\tau) + ay + b\tau}. \quad (3.31)$$

Sin embargo, no se puede demostrar la unicidad de una solución $f \in L^2(\omega)$, $f = 0$ en \mathbb{R}/ω incluso para el problema inverso linealizado (3.28). Por lo que se simplifica el problema al problema inverso aproximado linealizado

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial \tau} &= \sigma_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - (\sigma_0 + \mu) \frac{\partial \omega}{\partial y} + (\mu - r) \omega + \alpha f & (y, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, \tau^*) \quad (3.32) \\ \omega(y, 0) &= 0 & y \in \mathbb{R} \\ \omega(y, \tau^*) &= \omega^*(y) & y \in \omega\end{aligned}$$

en donde la función α_0 es reemplazada por α puesto que para ω pequeña la función $y^2/4\sigma_0\tau$ es casi cero, α está dada por

$$\alpha(y, \tau) = S^* \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma_0\tau}} e^{ay+b\tau}. \quad (3.33)$$

Y en este problema si podemos garantizar la unicidad con el siguiente teorema

Teorema 4 *Sea $f(y) = 0$ en \mathbb{R}/ω . Entonces la solución de $f(y) \in L(\omega)$ para el problema inverso (3.32) es única. Si además, $\sigma_0\tau^* \leq 1$ entonces la solución satisface la siguiente condición de estabilidad*

$$\|f\|_{(0)}(\omega) \leq C \|e^{-ay-b\tau^*} \omega^*(y)\|_{(2)}(\omega) \quad C = \frac{4\sqrt{\pi\sigma_0}}{S^*\sqrt{\tau^*}} \quad (3.34)$$

Prueba 4 *La prueba se ve con detalle en Bouchouev & Isacov (1998), p.R104.*

Ahora bien esto nos sirve puesto que existe una relación entre el problema aproximado y el problema inverso, dada en el siguiente teorema

Teorema 5 *Sea $|a(y)|_\lambda(\mathbb{R}) \leq M$ y $a^2(y)/2 = \sigma_0$ en \mathbb{R}/ω . Entonces, tenemos una constante ε que depende solo de S^* , τ^* , σ_0 , y M tal que para $\omega \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ la solución $a(y)$ del problema inverso (3.23) es única.*

Prueba 5 *Básicamente este resultado se sigue del teorema anterior, para ver los detalles se puede consultar el apéndice de Bouchouev & Isacov (1998)*

Entonces el planteamiento del problema inverso es:

Sabemos que la distribución real de la mayoría de los activos financieros es raramente log-normal y los precios teóricos de las opciones con diferentes strikes generados por el modelo de *BS* difiere de los precios de mercado observados; una manera de conciliar estas diferencias como ya lo habíamos mencionado puede ser sustituir el proceso de volatilidad constante por uno más general. Existen varios algoritmos numéricos que ayudan a recuperar la volatilidad dependiente del tiempo a partir de datos dados. Pero estos algoritmos

requieren de una justificación matemática rigurosa, A continuación se plantea el problema inverso de acuerdo a lo descrito por Isacov.

Para cualquier precio del subyacente, $0 < S < \infty$, y tiempo t , $0 < t < T$, el precio de una opción u que expira en el tiempo T satisface la siguiente ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}S^2\sigma^2(S) \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + S\mu \frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0. \quad (3.35)$$

En donde $\sigma(S)$ es el coeficiente de volatilidad que satisface, $0 < m < \sigma(S) < M < \infty$ y se asume que pertenecen al espacio de Hoelder $C^\lambda(\bar{\omega})$, con $0 < \lambda < 1$ en algún intervalo ω ; μ y r se suponen constantes. La ecuación parabólica (3.35) backward en el tiempo se ve aumentada por la condición final especificada por el payoff de la opción de compra con el precio de ejercicio K .

$$u(S, T) = (S - K)^+ = \text{máx}(0, S - K), 0 < S. \quad (3.36)$$

Ya sabemos que existe solución única a (3.35), (3.36) que pertenece a $C^1((0, \infty) \times (0, T])$ y a $C((0, \infty) \times [0, T])$ y satisface $|u(S, t)| < C(S + 1)$.

El problema inverso de valuación de opciones para σ dado

$$u(S^*, t^*; K, T) = u^*(K), \quad x \in \omega^*. \quad (3.37)$$

Con S^* el precio de mercado del subyacente al tiempo t^* , $u^*(K)$ denota el precio de mercado de las opciones con diferentes strikes K para un tiempo de madurez T dado. Tratamos de recuperar la volatilidad en el mismo intervalo de tiempo ω^* .

La opción $u(\cdot, \cdot; K, T)$ es tal que satisface la ecuación (3.35):

$$\frac{\partial u}{\partial T} + \frac{1}{2}K^2\sigma^2(K) \frac{\partial^2 u}{\partial K^2} + K\mu \frac{\partial u}{\partial K} - (r - \mu)u = 0. \quad (3.38)$$

La ecuación (3.38) fue encontrada por Dupire y se justifica rigurosamente en [26].

La sustitución logarítmica

$$y = \ln \frac{K}{S^*}, \quad \tau = T - t, \quad U(y, \tau) = u(\cdot, \cdot; K, T) \quad (3.39)$$

transforma el problema dual (3.38) y los datos adicionales (de mercado) en el siguiente problema inverso parabólico con la observación final

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}a^2(y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{1}{2}a^2(y) + \mu\right)\frac{\partial U}{\partial y} + (\mu - r)U \quad (3.40)$$

$$U(y, 0) = S^*(1 - e^y)^+, \quad y \in \mathbb{R} \quad (3.41)$$

$$U(y, \tau^*) = U^*(y), \quad y \in \omega. \quad (3.42)$$

A continuación se hará una revisión del artículo **On decoupling of volatility smile and term structure in inverse option pricing** de Herbert Egger (2006), en donde se menciona que la correcta determinación de precios de opciones y otros derivados financieros es de gran importancia para los mercados financieros y uno de los temas clave de la matemática financiera.

Por lo general, los parámetros en específico el subyacente en el modelo estocástico no es directamente observable, pero tiene que ser determinado indirectamente a partir de cantidades observables. Un ejemplo muy claro de esto es la identificación de las superficies de volatilidad local de los datos del mercado de opciones europeas de vanilla.

Como con muchos otros problemas de identificación de parámetro, la reconstrucción de las superficies de volatilidad local está mal planteado, y los resultados razonables sólo puede lograrse a través de métodos de regularización. Además, debido a la escasez de datos, la volatilidad local no se determina de forma única, sino que depende en gran medida del tipo de norma regularización utilizado y una buena conjetura a priori para el parámetro.

El problema inverso puede ser descompuesto en dos sub-problemas separados. Esto quita parte de la no unicidad y nos permite establecer la convergencia y la convergencia de las tasas de bajo supuestos débiles. Además, una solución numérica de los dos sub-problemas es mucho más barato que el de la identificación del problema general (los resultados teóricos se ilustran mediante pruebas numéricas).

Los modelos estocásticos para la evolución de los activos financieros son el núcleo de las finanzas matemáticas. En el famoso modelo de Black-Scholes, un activo financiero sigue un movimiento browniano geométrico ec. (3.43).

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (3.43)$$

Asumiendo la hipótesis de no arbitraje, y utilizando Ito, se puede demostrar que el valor de una opción de compra europea (*call*) sobre un activo debe satisfacer la ecuación de *BS* en derivadas parciales

$$C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{ss} + rSC_s - rC = 0, \quad (3.44)$$

donde r es la tasa de interés a corto plazo. Como consecuencia de la hipótesis de no arbitraje se utiliza r en (3.44) en lugar de μ . El valor de un call Europeo $C = C(S, t; K, T)$ con strike K y tiempo de madurez T al tiempo $t = T$ esta dada por el payoff

$$C = C(S, T; K, T) = \text{máx}(S - K, 0). \quad (3.45)$$

con el supuesto de que en (3.44) σ y r son constantes, (3.45) tiene una solución analítica. La tasa de interés r por lo general se puede determinar ; por lo tanto, el modelo (3.43) está dado únicamente por el parámetro σ , que puede ser determinada de para un precio de opción único. El único nivel de volatilidad correspondiente al precio de una opción también se llama *volatilidad implícita*.

Un gran inconveniente del sencillo modelo de Black-Scholes (3.43) es el supuesto de tener una volatilidad constante lo que en la mayoría de los casos contradice el comportamiento observado en el mercado, pues por lo general la volatilidad depende de K y T , a lo que se le conoce como el efecto de la sonrisa [21]. Los que nos lleva a proponer que la volatilidad sea una función $\sigma(S, t)$ en lugar de una constante, ver [22]. Con el fin de especificar un modelo estocástico (3.43) que sea consistente con los valores observados en el mercado, se debe encontrar una función de volatilidad local $\sigma(S, T)$ de tal manera que los precios de mercado $C^*(K, T)$ y los precios obtenidos con *BS* ($C(S_0, 0; K, T)$) sean iguales.

El siguiente problema inverso de valuación de opciones (**IPOP**-*inverse problem of option pricing*), también conocido como la calibración de mercado (*market calibration*), ha atraído un gran interés en el pasado debido a su importancia en la práctica

Problema inverso 1.1

Tomando los precios de opciones call del mercado $C^*(K, T)$, encontrar una función de volatilidad $\sigma(S, T)$ tal que la solución C de la ecuación de Black-Scholes (3.44) satisfice la condición de calibración $C(S_0, 0; K, T) = C^*(K, T)$ para todos K y T dados.

En [23], los autores utilizan una representación “*spline*” de la superficie volatilidad $\sigma(S, T)$ y proponen resolver el problema de identificación de parámetro correspondiente a (3.44) con un enfoque de mínimos cuadrados.

Como se muestra en [22] y [24], los precios de opciones call europeas alternativamente satisfacen la ecuación de Dupire

$$\begin{aligned} C_T &= \frac{1}{2}\sigma^2(K, T) K^2 C_{KK} - rKC_K, & (K, T) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T^*], & (3.46) \\ C(S_0, 0; K, 0) &= \max(S_0 - K, 0), & K \in \mathbb{R}_+, & \end{aligned}$$

donde T^* denota el horizonte de tiempo de interés máximo, respectivo para los cuales los precios de las opciones son conocidos.

Por lo tanto, el problema inverso de valuación de opciones puede ser visto como un problema de identificación de parámetros para la ecuación parabólica (3.46). Al igual que muchos de los problemas de identificación de parámetros el problema inverso 1,1, está mal planteado (ver [25]), es decir una solución no depende de manera estable en los datos y el problema puede sólo ser resuelto por algún método de regularización. Para recuperar de manera estable la función de la volatilidad $\sigma(K, T)$ a partir de los precios de opciones observados $C^*(K, T)$, que pueden ser considerados como los datos ruidosos de soluciones $C(K, T)$ a la ecuación de Dupire, se ha investigado previamente por varios autores ; véase, por ejemplo [2, 4, 7, 12, 16, 18].

Sin embargo, un aspecto importante que se ha descuidado en la mayoría de los trabajos anteriores es la situación de los datos específicos. Típicamente, los precios de las opciones están disponibles para un número relativamente grande de strikes K pero sólo para unos pocos tiempos de madurez T . Además, una determinación estable de volatilidades de altos / bajos (high/low) strikes sólo es posible para los tiempos de madurez relativamente grandes, y por lo tanto las reconstrucciones de plazos cortos dependen de los valores iniciales con respecto a la clase de regularización utilizada en la aproximación de mínimos cuadrados. Con el fin de incorporar la situación especial de datos, un ansatz

$$\sigma(K, T) = \sigma(K) \rho(T)$$

fue propuesto en [24]. A continuación se utiliza una descomposición similar de la sonrisa de la volatilidad con estructura temporal, es decir,

$$\sigma(K, T) = \sigma_1 \left(e^{-\int_0^T r(t)dt} K \right) \sigma_2(T) \quad (3.47)$$

y mostrar que tal descomposición tiene varias ventajas. En primer lugar, por la elección especial (3.47), el problema de identificación de parámetros se descompone en dos diferentes sub-problemas, es decir, puede ser la estructura de plazos y una sonrisa determina por separado. Los casos de una volatilidad puramente dependiente del precio y puramente dependiente del tiempo se han investigado en detalle anteriormente, véase, por ejemplo, [3, 7, 12, 18, 20], y las partes de las consideraciones teóricas también se aplican a nuestra situación. Para la solución estable de los sub-problemas proponemos analizar y regularizar los enfoques de mínimos cuadrados, es decir, la regularización de Tikhonov. Obtendremos nuestros resultados teóricos con los requisitos mínimos en los datos, es decir, se demuestra que la sonrisa de la volatilidad σ_1 puede determinarse a partir de precios de las opciones para un solo tiempo de madurez, mientras que la estructura temporal σ_2 puede ser recuperada de los datos de opción de un solo golpe. Nuestro problema inverso es el siguiente:

Problema inverso 1.2 (Decoupled IPOP)

Sean $C_1(K) := C^*(K, T^*)$, $C_2(T) := C^*(K^*, T)$ precios de las opciones para tiempos de madurez T y strikes K fijos respectivamente. Determinar las funciones $\sigma_1(\cdot)$, $\sigma_2(\cdot)$ tales que la solución $C(K, T)$ a (3.46) con $\sigma(K, T)$ definida por (3.47) satisface

$$\begin{aligned} C(K, T^*) &= C_1(K), & K \in \mathbb{R}_+ \\ &\& \\ C(K^*, T) &= C_2(T), & T \in [0, T^*]. \end{aligned}$$

Aunque, desde un punto de vista analítico, los precios de opción C_1 para todos los strikes y un tiempo de madurez, respectivamente C_2 para un strike y todos los tiempos de madurez son suficientes para la determinación de la sonrisa y los términos σ_1 y σ_2 , todos los precios de las opciones disponibles se pueden utilizar para los sub-problemas alternativos, que adicionalmente estabilizan su solución.

Observación. Las sonrisas de volatilidad $\sigma(\cdot, T)$ para los tiempos de madurez T dependen del strike de descuento: esto tiene sentido desde un punto de vista práctico, ya que la sonrisa de la volatilidad por lo general alcanza su mínimo cerca del punto $K = S(t)$.

Una de las conjeturas en contra de la hipótesis de una estructura especial (3.47) de la volatilidad, podría ser que la sonrisa de la volatilidad implícita por lo general se aplatina con el tiempo. Sin embargo, tal comportamiento no está en contradicción con nuestra hipótesis sobre la estructura de la volatilidad, es decir, las volatilidades (Black76) correspondientes a la superficie de volatilidad (3.47) también repite el fenómeno de engorde *flattening*.

En la siguiente sección, se formula el problema inverso con más detalle y muestran que, para una superficie de volatilidad de la forma (3.47), la calibración se descompone naturalmente en los dos sub-problemas que recuperan la sonrisa y la estructura temporal por separado.

La disociación de la sonrisa y estructuras temporales.

Nos referimos aquí a la identificación de una función de volatilidad local $\sigma(K, T)$ en la ecuación de Dupire para las observaciones de mercado $C^*(K, T)$ de precios de opciones que satisfacen la ecuación de BS (3.44). Debido a la limitada disponibilidad de datos, se restringe la clase de volatilidades admisibles como en la forma (3.47), es decir, suponemos que $Y = e^{-\int_0^T r(t)dt} K$. Con el fin de hacer que la descomposición en la sonrisa σ_1 y la estructura de plazo únicos,

$$\int_0^T \sigma_2^2(t) dt = 1, \quad (3.48)$$

donde T^* denota el mayor tiempo de madurez de los precios de las opciones que se toman en cuenta. Ahora demostramos que por una transformación de las variables del problema inverso se descompone naturalmente en dos diferentes sub-problemas.

Sean $A(Y) = \frac{1}{2}\sigma_1^2(Y)$ y $B(T) = \sigma_2^2(T)$ tales que denotan la sonrisa y la estructura temporal de la volatilidad. Por un cambio de escala de tiempo,

$$\tau(T) := \int_0^T B(t) dt, \quad (3.49)$$

y con la notación $U(Y, \tau) := C(K, T)$, la ecuación Dupire (??) se transforma en

$$\begin{aligned} U_\tau(Y, \tau) &= A(Y) Y^2 U_{YY}(Y, \tau), & (Y, \tau) &\in (0, \infty) \times (0, 1] \\ U(Y, 0) &= \max(S_0 - Y, 0), & Y &\in (0, \infty), \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde hemos utilizado que $\int_0^{T^*} B(t) dt = 1$ por (3.48). La degeneración en (3.50) puede ser elevado por transformación en variables logarítmicas $y = \log(Y)$, lo que nos lleva a:

$$\begin{aligned} u_\tau(y, \tau) &= a(y) (u_{YY}(y, \tau) - u_y(\tau)), & (y, \tau) &\in \mathbb{R} \times (0, 1], \\ u(y, 0) &= \max(S_0 - e^y, 0), & y &\in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde $a(y) = A(Y)$ y $u(y, \tau) = U(Y, \tau)$. Usando la teoría estándar para ecuaciones parabólicas se obtiene el siguiente resultado (ver [2]):

Proposición 1 Sean $A(Y) \in C^\lambda(\overline{\mathbb{R}_+})$ para algunos $\lambda \in (0, 1)$. Entonces (3.50) tiene solución única $U \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times (0, T^*]) \cap C^{\lambda, \lambda/2}(\mathbb{R}_+ \times [0, T^*])$.

Tengamos en cuenta que el sistema (3.50) ya no depende de la estructura de plazo B , y por lo tanto el problema de la identificación de la sonrisa de la volatilidad $A(Y)$ nos lleva a la identificación de una volatilidad independiente del tiempo:

Problema inverso 2.1 (problema inverso de la sonrisa). Sea $U_1(Y) := C(K, T^*)$ que denota los precios observados de opciones call europeas con tiempo de madurez T^* . Encontrar una función $A(Y)$ tal que la solución $U(Y, \tau)$ de (3.50) satisfice

$$U(Y, 1) = U_1(Y), \quad Y \in \mathbb{R}_+. \quad (3.52)$$

Una vez que se ha determinado la sonrisa de volatilidad $A(\cdot)$, la identificación del término de la estructura temporal $B(\cdot)$ se puede realizar mediante la resolución del siguiente problema inverso.

Problema inverso 2.2 (problema inverso de la estructura temporal). Sea $U_2(T) := C(K^*, T)$ tal que denota los precios de opciones observados para un strike fijo K^* , y $Y^*(T) := K^* e^{\int_0^T r(t) dt}$. Encontrar una función $B(T)$ tal que

$$U\left(Y^*(T), \int_0^T B(t) dt\right) = U_2(T), \quad T \in (0, T^*] \quad (3.53)$$

donde $U = U_A$ denota la solución de la ecuación de Dupire (3.50) para una dada sonrisa A .

La estructura temporal B sólo entra a través de (3.49). Sólo se menciona que en lugar de $Y^*(T) = K^* e^{\int_0^T r(t) dt}$ se usan otras trayectorias de precios, por ejemplo $Y^*(T) \equiv Y^*$ (at-the-money options), respectivamente todos los precios de las opciones disponibles se pueden utilizar para la determinación de la estructura temporal.

Notas y comentarios.

- El análisis cuantitativo de las matemáticas financieras suele basarse en tres tipos de matemáticas: la estadística y la probabilidad, el cálculo centrado en ecuaciones en derivadas parciales. La mayoría de los analistas cuantitativos tienen escasa formación en economía, y suelen aplicar un conjunto de herramientas tomadas de la

física. Los físicos suelen tener menos experiencia en técnicas estadísticas, por lo que suelen basarse en aproximaciones basadas en ecuaciones en derivadas parciales, y sus soluciones suelen basarse en el análisis numérico.

- No todos los problemas matemáticos pueden ser resueltos con la ayuda de una computadora. El matemático Jacques Hadamar, a principios del siglo XX, precisó las características que debe tener un problema para estar bien planteado:
 1. La solución debe existir, aunque sea localmente,
 2. La solución debe ser única.
 3. La solución debe depender en forma continua de los datos

Probar que un problema está bien planteado no es tarea fácil y en algunos casos es todavía un problema abierto a la investigación. De hecho, mucha de la investigación que se realiza hoy día está relacionada con el estudio de problemas mal planteados como los que aparecen con frecuencia en la solución de problemas inversos.

CAPÍTULO 4

Indices de volatilidad en mercados financieros.

Introducción.

La volatilidad e incertidumbre siempre están presentes en el día a día en los mercados de opciones financieras, por lo que para inversionistas, empresarios, administradores de riesgos, tesoreros corporativos y personas físicas resulta necesario considerar diversas alternativas para controlar y administrar de manera eficiente el riesgo al que se encuentran expuestos y claramente para optimizar el rendimiento de los portafolios de inversión. En los últimos años ha tenido un gran auge la administración de riesgos, puesto que otorga un gran beneficio el hecho de poder medir y monitorear las posibles causas que llevan a un quebranto además se tiene una planeación más eficiente.

La volatilidad implícita ha sido de suma relevancia en los últimos años y para calcularla es necesario que los activos tengan como referencia contratos de opción que se encuentren listados en Mercados Organizados de Derivados o cotizadas en Mercados OTC, ya que con esto la información se hace pública, transparente, oportuna y basada en estándares, lo que facilita el interés de los participantes, y con ello se brinda liquidez a los productos listados.

Después de lo estudiado en los capítulos anteriores nos podemos percatar que la volatilidad tiene las siguientes propiedades:

1. La existencia de Clóster; es decir, la volatilidad tiende a aparecer agrupada por periodos.
2. Reversión a la media; la cual se presenta debido a la existencia de clóster, o sea que la volatilidad baja después de un periodo en donde se mantuvo “alta”, y de manera inversa tiende a subir después de ser “baja” regresando a un nivel medio de manera eventual.

3. Presenta discontinuidades de saltos en los precios; lo que quiere decir que se observa alta volatilidad en un periodo específico.
4. Asimetría; que es cuando la volatilidad es afectada de forma diferente según el comportamiento del mercado.
5. Presenta además influencia de variables exógenas.
6. Exceso de Curtosis; que no es otra cosa que una gran aglomeración en la media de la distribución (los rendimientos presentan distribuciones leptocúrticas).

Debido a dichas propiedades se han originado intentos para elaborar indicadores (índices) que brinden los niveles de volatilidad que espera el mercado, para poder realizar mejores estrategias de cobertura y hacer más eficiente el manejo de portafolios, para calcularlos se utilizan opciones cuyos precios de ejercicio están ATM. Los índices propuestos por algunos mercados de derivados son ampliamente utilizados en la literatura financiera, se han constituido como indicadores fundamentales tanto en la negociación de opciones como en la percepción de la marcha del mercado en general. En la actualidad las propuestas para tener indicadores efectivos de la volatilidad futura se inclinan a favor de la obtención de la volatilidad implícita aun teniendo en cuenta los antecedentes de en donde se pone en cuestionamiento el tipo de modelo de valuación que es utilizado, además de que las opciones no se presentan estrictamente at the money (ATM), otro inconveniente a mencionar es que al momento de valorar las opciones se presenta una distinción entre la VI de las opciones de compra y la VI de las opciones de venta, puesto que en la práctica la calidad de los datos disponibles de mercado es muy deficiente y se utiliza la volatilidad implícita de la opción más cercana a la fecha de vencimiento y más ATM, debido a que en ocasiones la opción estará más cerca ATM que otras no se pueden generar series históricas homogéneas y también es observable que las volatilidades implícitas no tienen un periodo de predicción constante puesto que dicho periodo va disminuyendo a medida de que el tiempo avanza y se acerca la fecha de vencimiento de la opción. Los inconvenientes antes mencionados no son otra cosa que la motivación principal de los practitioners para sugerir la creación de un índice de volatilidad que aglutine la información contenida en diferentes

Desde 1973 que se comenzaron a cotizar las opciones en los mercados financieros han surgido intentos de indicadores de volatilidad, los primeros intentos para crear un índice de volatilidad estuvieron a cargo de Gastineau (1977) y Cox & Rubinstein (1985), los cuales se centraron en elaborar un índice a partir de las volatilidades implícitas de diferentes opciones sobre acciones. Más adelante, Brenner y Galai (1989) propusieron utilizar directamente la información contenida en las propias opciones sobre índices bursátiles, lo que simplificó enormemente el trabajo. Pero fue hasta 1993 cuando aparece el Volatility Index (VIX) calculado por el Chicago Board Options Exchange (CBOE) con las opciones del Standar & Poor's 100 (S&P 100), y en el 2003 las cambian por S&P 500 y consideran precios de ejercicio OTM en vez de solo ATM, además de que no utilizan BS (Ref. Rubio

y Marrero 2004). En 1994 la bolsa de derivados alemana Deutsche Börse publicó el VDAX (Volatility Deutscher Aktienindex) sobre los contratos de opciones del DAX (Deutscher Aktienindex), posteriormente en el 2005 cambia al VDAX-NEW en donde se usan precios OTM con un periodo de 30 días hábiles. En la actualidad diversos mercados publican índices de volatilidad que se calculan de muy diferentes maneras, aunque todos ellos basados en un promedio de información de diferentes opciones sobre un índice bursátil, con el fin de conseguir una medida de volatilidad estándar referida a un horizonte de tiempo constante.

Los índices de Volatilidad tienen gran aceptación entre los analistas, Administradores de Fondos, Administradores de Riesgos y “arbitradores”, quienes siguen el comportamiento para la toma oportuna de decisiones. Su utilidad radica en brindar de los niveles de volatilidad que espera el mercado. Con ello se pueden realizar mejores estrategias de cobertura y llevar a cabo un mejor manejo de portafolios. Para darnos una idea de la importancia de dichos índices a continuación presentamos un listado de las fechas en que surgen tales indicadores en los diferentes mercados:

- 1973** Modelo Black & Scholes para valuación de Opciones
- 1989** Menachem Brenner y Dan Galai proponen crear un índice que midiera la volatilidad.
- 1993** Robert Whaley, desarrolla el primer índice de volatilidad con las Opciones del S&P 100 cotizadas en el CBOE. Ese mismo año se empieza a calcular y a publicar en tiempo real en dicho mercado denominándolo como VIX[®].
- 1994** La Bolsa Alemana, Deutsche Börse, empieza a publicar su índice de volatilidad utilizando las Opciones sobre el índice DAX (VDAX).
- 1997** La Bolsa de Francia empieza a publicar en tiempo real dos índices de volatilidad utilizando las opciones del CAC-40, el VX1 y VX6.
- 1998** Deutsche Boerse lista Futuros sobre el VDAX (VOLAX Futures).
- 1998** Se empiezan a operar OTC Swaps de Volatilidad Implícita y de Varianzas.
- 2001** El CBOE empieza a publicar un nuevo índice de volatilidad con las Opciones sobre el NASDAQ-100 (VXN).
- 2003** CBOE lista nueva metodología para el cálculo del VIX basado en las Opciones sobre el S&P 500.
- 2004** CBOE lista Futuros sobre el VIX y Varianza.
- 2005** CBOE empieza a publicar un nuevo índice de volatilidad con las Opciones sobre el Dow Jones.
- 2005** EUREX lista 3 Futuros sobre índices de Volatilidad.

1. Dow Jones EURO STOXX 50 (VSTOXX)
2. DAX (VDAX con nueva metodología)
3. SWX Swiss Exchange SMI[®] (VSMI[®]).

2006 CBOE lista Opciones sobre el VIX.

2006 MexDer, Mercado Mexicano de Derivados empieza a publicar el VIMEX[®] (Índice de Volatilidad México).

Debido a la importancia de dichos índices de volatilidad a continuación vamos a dar una breve descripción de algunos de ellos en distintos mercados financieros para posteriormente enfocarnos en el índice de volatilidad México (VIMEX) que como su nombre lo dice no es otra cosa que el índice de la volatilidad esperada para el Mercado Accionario Mexicano en el corto plazo, calculado por el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) y que resulta ser la aplicación financiera más palpable en México.

Algunos índices de Volatilidad.

Ya mencionamos que el primer mercado en introducir un índice de volatilidad fue el CBOE que adoptó el VIX en Febrero de 1993 como un indicador de la volatilidad de las opciones sobre el S&P 100 (OEX), basándose principalmente en la propuesta de Cox y Rubinstein (1985) en relación a la ponderación de los tiempos de madurez y precios de ejercicio (strikes), para un análisis detallado de la fórmula de cálculo véase Fleming et al (1995). Posteriormente, otros mercados de opciones han ido sumándose a esta iniciativa de crear y proponer índices; por ejemplo en el mercado alemán se calcula el VDAX desde 1994 de forma bastante similar al VIX. Sobre el Nasdaq-100 el CBOE calcula el VXN desde Diciembre de ese mismo año siguiendo la misma metodología que para el VIX. En Octubre de 1997, el MONEP calcula dos índices de volatilidad sobre el CAC-40, el VX1 y VX6, basándose en el trabajo de Brenner y Galai (1989). De acuerdo a lo anterior, vemos que en estos tres mercados se calculan los índices de volatilidad siguiendo metodologías diferentes. Según la literatura trabajada en esta investigación la metodología empleada en el VIX es la que mejor aceptación ha tenido, quizás esto sea por ser la primera en aparecer (como la característica que presenta la fórmula de BS), por la sencillez de sus reglas y también por tratarse de un índice de importante difusión en los medios de información. De esto nos percatamos puesto que además dicha metodología también se utiliza para el cálculo del VXN, calculado como decíamos por el CBOE sobre el índice Nasdaq-100 (NDX), y también por la Bolsa de Montreal para el cálculo del denominado MVX

A pesar de que cada mercado financiero tiene un modo distinto de calcular el índice de volatilidad, la idea que hay detrás de dicho cálculo es la misma y consiste principalmente en ponderar la volatilidad implícita de un conjunto de opciones elegidas siguiendo determinados criterios respecto a su precio de ejercicio (generalmente lo más ATM posible) y su fecha de expiración. Vamos a dar la idea del cálculo de los principales índices de volatilidad, comenzamos con el VIX.

El VIX

El VIX se calcula a partir de la volatilidad implícita de un conjunto de ocho opciones (cuatro calls y cuatro puts) cercanas a una situación ATM dentro del primer y segundo plazo a vencimiento. El primer plazo a vencimiento se elige con fecha de expiración más cercana y superior a siete días, ya que en general las opciones con un vencimiento menor a una semana presentan niveles extremadamente altos de volatilidad. El segundo plazo a vencimiento corresponde a la segunda fecha de expiración más cercana. Para cada vencimiento se escogen dos precios de ejercicio diferentes lo más cerca ATM posible: el que se encuentra justo por debajo del precio de contado del subyacente, $K < S$; y el que se encuentra justo por encima de éste, $K > S$. Después estas volatilidades implícitas se ajustan a los días negociados de forma aproximada, quitando dos días por cada siete días naturales para elevar los niveles de volatilidad esto debido a que se consideran menos días hasta el vencimiento. Hecho lo anterior se van promediando las volatilidades en pasos sucesivos hasta obtener el VIX. Así, en una primera etapa se obtienen cuatro subíndices (uno por cada vencimiento y precio de ejercicio) a partir de la media simple de cada par de opciones call y put de idénticas características con esto se establece una media entre las volatilidades implícitas de las opciones call y de las opciones put para lograr en cierto modo mitigar posibles sesgos causados por la diferente velocidad de reacción de las primas de las call y de las put a los cambios en el subyacente. Puesto que, cuando el mercado se mueve muy rápidamente al alza se produce un sesgo positivo en las call y negativo en las put). Posteriormente se calcula la posición ATM de cada vencimiento a partir de las medias anteriores, para por último, promediar estos dos valores para que representen un periodo estandarizado de 22 sesiones, lo que se consigue interpolando linealmente.

Aunque a partir del 22 de Septiembre de 2003, el CBOE modificó el cálculo del VIX en dos sentidos¹: El primero fue utilizar como referencia el índice S&P 500, debido a su mayor liquidez y el segundo sentido fue en relación a su método de cálculo, es decir la volatilidad esperada se calcula ahora considerando un amplio rango de precios de ejercicios out of money no sólo la posición at the money, por otro lado se abandona el uso del modelo de Black-Scholes y se emplea nuevas técnicas que no dependen de ningún modelo específico con el fin de reflejar las nuevas tendencias teóricas y prácticas acerca de la volatilidad y su negociación.

El VDAX

El cálculo del VDAX es bastante similar al del VIX, solo que el periodo de referencia es de 45 días naturales por lo que no se realiza el ajuste de volatilidad a días de negociación que se realiza en el VIX, y además el precio del subyacente para el cálculo de la posición ATM es el precio forward del subyacente para el vencimiento considerado.

Por lo tanto, para calcular dicho índice de volatilidad es requisito indispensable calcular antes el precio a plazo del DAX (índice bursátil del mercado alemán). Para lo cual, si se pueden encontrar contratos de futuros sobre el DAX cuyo vencimiento coincida con la fecha requerida, entonces se escoge el precio de estos como precio a plazo del DAX, de lo contrario se calcula interpolando linealmente los precios de los futuros precedente y siguiente en vencimiento. Tomando en cuenta que el VDAX es calculado para un periodo constante de 45 días naturales, se escogen aquellos contratos cuya fecha de expiración esté lo más próxima por defecto y por exceso de ese plazo. Para cada vencimiento, de forma similar al VIX, se eligen cuatro opciones (2 call y 2 put) cuyo precio de ejercicio se encuentra lo más cerca por encima y por debajo del precio forward calculado previamente. A estas opciones se les calcula la volatilidad implícita y se procede a calcular los diferentes subíndices de volatilidad, uno para cada vencimiento, promediando linealmente las dos opciones (call y put) de precio de ejercicio más alto y las de precio de ejercicio más bajo, igual que para el VIX. Y se vuelve a interpolar linealmente entre estas dos medias para hallar el valor de la posición ATM de cada vencimiento. De igual forma que para el VIX, a partir de estos dos subíndices se calcula el VDAX para un periodo constante de 45 días.

El VX1 – VX6

El MONEP calcula dos índices de volatilidad sobre el CAC-40, el VX1 de 31 días de referencia y el VX6 de 185 días de referencia. La construcción de ambos es idéntica salvo en lo que se refiere a los días que representan por lo que expondremos sólo la metodología de cálculo del VX1 que se basa en la propuesta de Brenner y Galai (1989) que parte de que la relación entre las primas de las opciones y la volatilidad del subyacente alrededor de la posición ATM es casi lineal. Las diferencias que presenta respecto a los índices anteriores son notables, por un lado, sólo emplea opciones de compra y por otro calcula el precio de una opción teórica ATM con fecha de expiración 31 días y sobre ese precio se aplica un modelo de valoración binomial para calcular la volatilidad implícita que es el valor del índice de volatilidad. Por lo tanto, para calcular el VX1 hay que elegir cuatro call cuya fecha de expiración sea inmediatamente inferior e inmediatamente superior a 31 días y cuyos precios de ejercicio estén justo por encima y justo por debajo de la posición ATM, esto es por encima y por debajo del valor de contado del CAC-40. Con estas opciones se calcula para cada precio de ejercicio considerado el valor de una opción teórica de vida residual 31 días. Posteriormente se ponderan estos dos valores para obtener la posición ATM. Este es el precio que se emplea para calcular la volatilidad implícita de esa opción teórica y esa volatilidad implícita es el VX1.

EL VIMEX.

Antes de irnos de lleno a la metodología de cálculo de dicho índice resulta pertinente introducir la definición de algunos conceptos que son necesarios para la total comprensión de lo que a nuestro parecer es la aplicación financiera de la volatilidad implícita más relevante en nuestro país EL VIMEX.

En marzo del 2004 fue creado y puesto en marcha el Mercado de Opciones en México con lo que se obtuvieron los insumos necesarios para calcular un índice para México que sirve como referencia de la volatilidad esperada que perciben los participantes en el Mercado accionario mexicano, tomando como insumo principal las opciones listadas en el MexDer sobre el Futuro del IPC.

¿Qué es el MexDer?.

El Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), es la Bolsa de Derivados de México, la cual inició operaciones el 15 de Diciembre de 1998 al listar Contratos de Futuro sobre subyacentes financieros, siendo constituida como una sociedad anónima de capital variable, autorizada por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP). Éste mercado ofrece diversas ventajas, entre la cuales se encuentran la liquidez, la transparencia, la diversidad de instrumentos para sus estrategias, la solidez, el anonimato, un mercado autorregulado, la administración global de riesgos financieros, entre otras. La puesta en marcha del MexDer constituye uno de los avances más significativos en el proceso de desarrollo e internacionalización del Sistema Financiero Mexicano.

La importancia de que México cuente con derivados cotizados en una bolsa, es que organismos financieros internacionales lo recomiendan para promover esquemas de estabilidad macroeconómica y facilitar el control de riesgos en intermediarios financieros y entidades económicas.

En el Mercado Mexicano de Derivados se encuentran listados Contratos de Futuro sobre los siguientes subyacentes financieros:

- Divisas.- Dólar de los Estados Unidos de América (DEUA), Euro.
- Índices.- Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV (IPC).
- Deuda.- Cetes a 91 días (CE91), TIEE a 28 días (TE28), Bono a tres años (M3), Bono a 10 años (M10), UDI y Swaps de 10 años (SW10).
- Acciones.- Cemex CPO, Femsa UBD, GCarso A1, Temex L y América Móvil L.

A partir del 22 de marzo de 2004 el MexDer inició operaciones el Mercado de Opciones, a la fecha se encuentran listados Put's y Call's sobre los siguientes subyacentes financieros.

Activo Subyacente	Tipo de Opción	Liquidación
Futuros IPC	Europea	En efectivo
Divisas	Europea	En especie
Acciones	Americana	En especie
ETF's	Americana	En especie
Dólar	Europea	En especie

Dentro del MexDer existen clases y series; una clase está integrada por todos los contratos de Futuro o de Opción que están referidos a un mismo activo subyacente, mientras que la serie está integrada por todos aquellos contratos que pertenecen a la misma clase con diferente fecha de vencimiento. Un contrato puede ser negociado a partir de la fecha emisión hasta la fecha de vencimiento cuando se efectúa la liquidación, dicha liquidación puede ser en especie o en efectivo según sea el caso. Los activos utilizados como referencia en los contratos de futuro y opción, son activos reales que podrán ser traspasados en especie al vencimiento del contrato, o indicadores que se expresan en dinero y cuyo equivalente será expresado en la fecha de vencimiento del contrato.

¿Qué es el IPC?

El IPC es el principal indicador del comportamiento del mercado accionario de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), el cual expresa el rendimiento de este mercado tomando como referencia las variaciones de precios de una muestra balanceada, ponderada y representativa del total de los títulos accionarios cotizados en la BMV; éste índice expresa en forma confiable la situación del mercado bursátil, puesto que pondera la participación de cada una de las empresas que comprende la muestra con base en el valor total de mercado de sus acciones en circulación además es actualizado en tiempo real.

En marzo del 2004 fue creado y puesto en marcha el Mercado de Opciones en México con lo que se obtuvieron los insumos necesarios para calcular un índice para México que sirve como referencia de la volatilidad esperada que perciben los participantes en el Mercado accionario mexicano, tomando como insumo principal las opciones listadas en el MexDer sobre el Futuro del IPC.

¿Qué es el VIMEX?

El MexDer desarrolló el Índice de Volatilidad México (VIMEX), basándose en la metodología de Fleming, Ostdiek y Whaley publicado en 1995. El VIMEX es el índice de la volatilidad esperada para el Mercado Accionario Mexicano en el corto plazo, calculado por el Mercado de Derivados (MexDer), en donde se agrupa la información de las opciones de dicho mercado, mide la volatilidad implícita para un solo contrato teórico de opción sobre el IPC que se encuentra en el dinero (At The Money) y con un tiempo de

vencimiento de 66 días hábiles; es publicado diariamente en la página del MexDer, tres veces al día entre las 8:00 y las 15:30 horas. El VIMEX toma como insumo principal la volatilidad implícita contenida en el precio de las opciones del INPC, además es muy empleado por los inversionistas institucionales tanto en el mercado de derivados como en el accionario, pues es útil para realizar una mejor estrategia de cobertura y un mejor manejo de portafolios.

Cabe mencionar que la volatilidad implícita que incorpora el VIMEX, recoge los precios de los contratos de opciones los cuales incorporan las expectativas reales de los participantes, a diferencia de la volatilidad histórica que toma como referencia eventos pasados.

Dicho índice de volatilidad tiene gran aceptación entre los analistas, administradores de fondos, administradores de riesgos, etc., quienes siguen su comportamiento para la toma oportuna de decisiones, puesto que brinda en tiempo real los niveles de volatilidad que espera el mercado a corto plazo, con ello se pueden mejorar las estrategias de cobertura y llevara a cabo un mejor manejo de portafolios.

¿Qué es el INPC?

El Índice Nacional de Precios al Consumidor INPC es un indicador económico que se encarga de medir con respecto al tiempo la variación de los precios de una canasta fija de bienes y servicios representativa del consumo de los hogares, es decir se encarga de medir la inflación.

El Índice Nacional de Precios al Consumidor que se publica quincenalmente, tiene como objetivo medir la evolución en el tiempo del nivel general de precios de los bienes y servicios que consumen los hogares urbanos del país.

Para conocer la precisión de un índice de precios al consumidor se deben tomar en cuenta las siguientes cualidades fundamentales:

- La representatividad, que se logra en la medida que la canasta de bienes y servicios que se utiliza para dar seguimiento a los precios, refleje los patrones de consumo de los hogares.
- La comparabilidad temporal, que requiere que la medición en la evolución de los precios se realice respecto a un punto o periodo base en el tiempo, es decir, cuál ha sido el cambio en el nivel de precios respecto de los que se tenían en una fecha determinada.

Lo anterior se logra en la medida que las variaciones que registre el INPC sean sólo debidas a cambios en precios.

El INPC se elabora dando seguimiento a los precios de una canasta de bienes y servicios representativa del consumo de los hogares en un momento de tiempo dado; dicha canasta agrupa el total del gasto en consumo de los hogares urbanos en concepto genéricos

representativos que son 283, de los cuales a cada uno se le asigna una ponderación que corresponde al peso que tiene dentro del gasto total.

La medición oficial de la inflación se realiza por medio del INPC. El Banco de México cuenta con la obligación legal de calcular y publicar con determinada periodicidad los resultados del INPC. Además es utilizado como referente en diversas negociaciones contractuales, como determinante del valor de la Unidad de Inversión (UDI) y como deflactor en el Sistema de Cuentas Nacionales, entre otros.

Las principales emisoras que componen el INPC.

Los derivados son negociados en mercados organizados (MEXDER, CME, EUREX, etc) en donde existe una estandarización.^{en} cuanto al monto, la calidad y la liquidación, estos mercados utilizan un sistema de márgenes (AIMS) para mitigar el riesgo del mercado y es posible salir del mercado en cualquier momento debido a la liquidez en la negociación de los contratos en dichos mercados organizados; también existen los mercados extra-bursátiles (OTC) en donde es difícil o penalizable vencer un contrato en forma anticipada. Nos vamos a enfocar en el Mercado Mexicano de Derivados (MEXDER), el cual inició operaciones en diciembre de 1998 como la Bolsa de Derivados en México, su objetivo es ofrecer mecanismos de cobertura sobre las principales variables económicas que afectan a la economía mexicana, los principales listados de opciones son:

1. América móvil (AMX L).- Es una empresa mexicana de telecomunicaciones con presencia en 18 países de América, con más de 200 millones de usuarios y actualmente es la cuarta compañía de telecomunicaciones más grande e importante del mundo. Su principal accionista es el empresario mexicano de origen libanés Carlos Slim. Nace tras la extinción de los activos de telefonía celular, televisión por cable (Cablevisión) y otros activos internacionales pertenecientes a Teléfonos de México, Telmex. Ocupa el primer lugar en valor de mercado bursátil y tiene un peso en el índice de precios y cotizaciones del 25.54 %.
2. Wal Mart de México (WALMEX V).- Es una de las cadenas comerciales más importantes de México, opera 800 unidades comerciales distribuidas en 109 ciudades a nivel nacional; es la segunda empresa más grande en valor de mercado bursátil y tiene un peso en el índice de precios y cotizaciones del 11.49 %.
3. Fomento Económico Mexicano (FEMSA UBD).- Es una compañía mexicana con sede en Monterrey, México, es la compañía de bebidas más grande de Latinoamérica y la segunda más grande del sistema Coca-Cola en el mundo; tiene un peso en el índice de precios y cotizaciones del 8.3 %.
4. Televisa (TLVISA CPO).- Es la compañía de medios de comunicación más grande en el mundo de habla hispana con base en capitalización de mercado, y es uno de los principales participantes en el negocio de entretenimiento a nivel mundial.

México encabeza la lista de mayor concentración de medios de comunicación a nivel mundial y ocupa el tercer lugar entre los países de la OCDE que más caros ofrecen sus servicios. En este marco, el mercado de telecomunicaciones en México está dominado por el Grupo Televisa y el Grupo Slim. Televisa tiene un peso en el índice de precios y cotizaciones del 6.76 %.

5. Grupo México (GMEXICO B).- Es la compañía minera más grande de México y la tercera productora de cobre más grande del mundo, tiene un peso en el índice de precios y cotizaciones del 6.61 %.
6. Grupo Financiero Banorte (GFNORTE O).- Es uno de los grupos financieros mexicanos más grandes, importantes y sin fusiones con la banca extranjera. Actualmente sólo opera en Nuevo León y México; tiene un peso en el índice de precios y cotizaciones del 6.04 %.
7. Cemex (CEMEX CPO).- Es una compañía global de soluciones para la industria de la construcción, que ofrece productos y servicio a clientes y comunidades en más de 50 países en el mundo. La compañía mexicana ocupa el tercer lugar mundial en ventas de cemento y clinker además tiene un peso en el índice de precios y cotizaciones del 3.48 %.

La metodología de cálculo del VIMEX

Para obtener las volatilidades implícitas existen tres factores a considerar:

1. El Modelo de Valuación de Opciones que en el caso del MexDer es el modelo de Black Scholes con el que se infieren las volatilidades implícitas.
2. El modelo asume que todos los parámetros ya son conocidos a excepción de las volatilidades implícitas.
3. El precio de las opciones a utilizarse.

A partir del nivel del IPC al momento del cálculo se sabrá que strikes deben ser tomados en cuenta para extraer las volatilidades implícitas. Además se necesitan dos tiempos de madurez listadas del MexDer, el primero debe ser aquel con fecha de expiración más cercana a la fecha del cálculo y superior a 10 días hábiles; el segundo corresponde al vencimiento siguiente al más cercano; se necesitan también las volatilidades implícitas de ocho opciones, la volatilidad implícita del call y del put del precio de ejercicio listado en MexDer que está por arriba del nivel del IPC al cierre del mercado y de igual manera la

volatilidad implícita del call y del put del precio de ejercicio que está por debajo del nivel del IPC al cierre, de la misma manera se extraen estos datos para el segundo tiempo de madurez, con lo que tenemos entonces las 8 volatilidades implícitas.

El cálculo del VIMEX se divide en tres etapas:

1. Se calcula la media simple de las volatilidades implícitas de los pares de opciones que están por arriba y por abajo del Strike ATM (*At The Money*) teórico, se define $\sigma_{i,j,k}$ la volatilidad implícita estandarizada en donde, $i = c$ si se trata de un *call* e igual a p si nos referimos a un *put*, la $j = 1$ está asociada al vencimiento más cercano mientras que $j = 2$ es para representar al vencimiento siguiente al más cercano y la k tendrá como referencia las letras a y b asociadas al precio de ejercicio que se encuentra por debajo y por arriba del nivel de IPC al cierre de mercado respectivamente, entonces al promediar las volatilidades implícitas para el vencimiento más cercano tenemos:

$$\sigma_{1,a} = \frac{(\sigma_{c,1,a} + \sigma_{p,1,a})}{2},$$

$$\sigma_{1,b} = \frac{(\sigma_{c,1,b} + \sigma_{p,1,b})}{2}.$$

y para el vencimiento siguiente al más cercano:

$$\sigma_{2,a} = \frac{(\sigma_{c,2,a} + \sigma_{p,2,a})}{2},$$

$$\sigma_{2,b} = \frac{(\sigma_{c,2,b} + \sigma_{p,2,b})}{2}.$$

2. El siguiente paso es encontrar la volatilidad implícita del precio de ejercicio ATM interpolando las volatilidades implícitas obtenidas en el paso 1 de la siguiente manera:

$$\sigma_1 = \sigma_{1,a} \left(\frac{S - K_b}{K_a - K_b} \right) + \sigma_{1,b} \left(\frac{K_a - S}{K_a - K_b} \right),$$

$$\sigma_2 = \sigma_{2,a} \left(\frac{S - K_b}{K_a - K_b} \right) + \sigma_{2,b} \left(\frac{K_a - S}{K_a - K_b} \right).$$

en donde K_a representa al precio de ejercicio que se encuentra por arriba del nivel del índice al momento del cálculo, K_b es el precio de ejercicio que se encuentra por debajo del nivel del índice en el momento del cálculo y S es el nivel actual del IPC.

3. Finalmente se tienen que ponderar las volatilidades a 90 días puesto que son vencimientos trimestrales, ya que se tiene que mantener un periodo constante para el VIMEX, es decir

$$VIMEX = \sigma_1 \left(\frac{T_2 - 90}{T_2 - T_1} \right) + \sigma_2 \left(\frac{90 - T_1}{T_2 - T_1} \right)$$

con T_1 = días de operación restantes del vencimiento de la opción más cercana a la fecha del cálculo del VIMEX y T_2 = días de operación restantes del segundo vencimiento de la opción siguiente más cercano a la fecha del cálculo del VIMEX.

A continuación se muestra la gráfica del VIMEX, en donde podemos observar su comportamiento a partir de marzo del 2004 hasta marzo del 2013. Existen varios períodos que se pueden analizar de manera particular, por ejemplo de marzo del 2004 a mediados del 2006 la volatilidad parecía ser casi constante puesto que presenta ligeras variaciones, posteriormente se presenta el primer período de alza llegando a su máximo en septiembre del 2006 y aunque seguido de este máximo parece que la volatilidad decae a la misma velocidad que a la que se incrementó a finales del 2006 se comienza a comportar de manera constante a un nivel de aproximadamente 25 hasta finales del 2007. Justo a principios del 2008 el indicador comienza a elevarse y a sufrir cambios muy bruscos de alza y baja lo que representa la inestabilidad del mercado debido a la crisis económica, también denominada “Gran Recesión” que fue originada en los Estados Unidos, debido a diversos factores como lo fueron la desregulación económica, una elevada inflación global, la sobrevalorización del producto, la crisis alimentaria mundial y energética, y la amenaza de una recesión en todo el mundo, así como una crisis crediticia, hipotecaria y de confianza en los mercados. Y aunque la crisis iniciada en 2008 ha sido señalada por muchos especialistas internacionales como la «crisis de los países desarrollados», ya que sus consecuencias se observan fundamentalmente en los países más ricos del mundo, con la gráfica del VIMEX observamos que también afecto a países como el nuestro, puesto que dentro de este período de crisis se presentan tres puntos críticos de alza, siendo el más alto el que se presenta en marzo del 2009, después de dicho pico la volatilidad comienza a bajar pero no de manera “estable”, es decir, presenta variaciones sin parecer que alcanzará un nivel en donde volverá a ser constante.

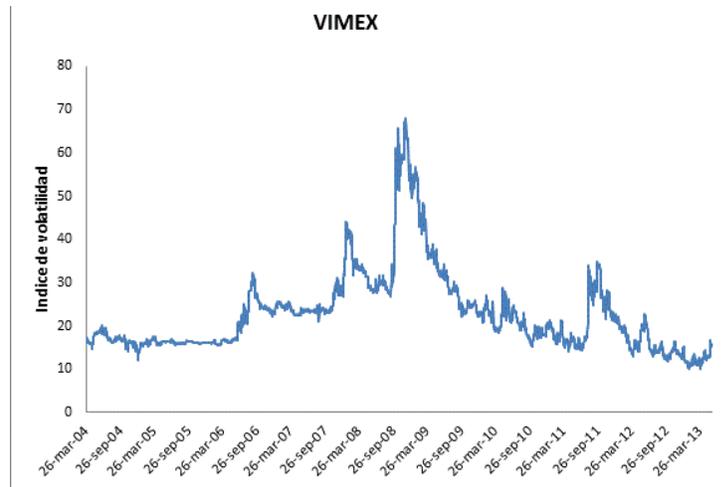


Figura 4-1 Gráfico del Índice de Volatilidad México.

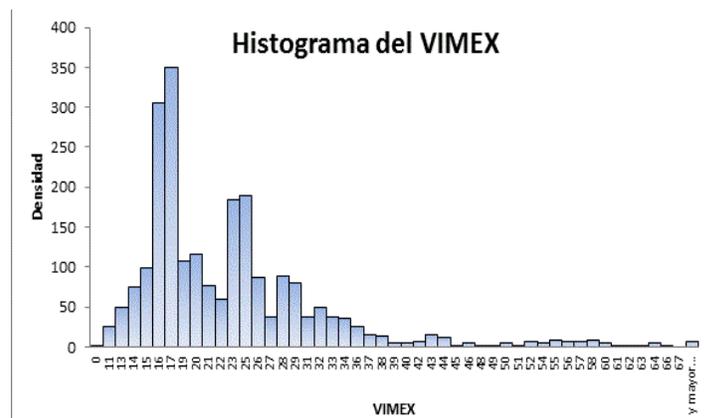


Figura 4-2 Histograma de Índice de Volatilidad México.

Para ver que distribución tiene el índice de volatilidad VIMEX, nos fijamos en el histograma.

A continuación se dan algunos parámetros estadísticos obtenidos del histograma:

Media	22.7775313
Desv Est	9.64580654
Mediana	20.05
Moda	16.07

El “punto de equilibrio” del VIMEX va a estar justamente cuando alcance un nivel de 22.77 puesto que ya no se va a presentar mucha variabilidad en periodos pequeños, aunque también observamos que el valor más repetido es de 16.07, mientras que la desviación estándar es alta es de casi 10 puntos.

La correlación inversa entre el IPC y el VIMEX.

Generalmente los periodos de baja en el índice accionario *IPC* son seguidos de incrementos importantes en la volatilidad, sin embargo, si lo que tenemos es una mayor capacidad de predicción en el mercado, es decir, una volatilidad menor implicará un favorecimiento para que un mercado este a la alza; dicho en otras palabras, la naturaleza propia del mercado de opciones muestra que los niveles máximos de volatilidad suelen coincidir con lo niveles mínimos del mercado lo que se explica por una probable venta excesiva o también conocida “ventas de pánico”, mientras que los niveles mínimos de volatilidad están directamente relacionados con alzas prolongadas del mercado, que se interpreta comúnmente como exceso de confianza.

Notas y comentarios.

- Nos hubiera gustado hacer el contraste entre varios modelos de volatilidad, pero nos resultó imposible obtener los datos de mercado.
- Pudimos utilizar datos de otro mercado de opciones, pero nos pareció mejor dejar en claro que una aplicación importante de modelos de volatilidad se utiliza en México.

Introducción.

En los capítulos anteriores se analizó y discutió el problema de la sonrisa de la volatilidad en mercados de opciones financieras, desde muy diversos enfoques, además se dieron detalles y justificaciones a aspectos que no se mencionan en la literatura revisada, pero sin duda alguna la aportación más importante la daremos en el presente capítulo en donde mencionamos las principales interrogantes que nos llevaron a iniciar la investigación y recopilación del problema antes mencionado.

Acerca de las variables.

Para la realización de este trabajo se consultaron gran cantidad de artículos, libros y reportes mencionados en la bibliografía, para poder plantear, desarrollar y explicar los aspectos que nos permiten entender el problema de la volatilidad implícita y muy en particular el problema central de esta tesis .el problema de la sonrisa en mercados de opciones financieras", para dar algunas conclusiones fue necesario comenzar a estudiar de manera muy global dicho problema, con lo que nos pudimos percatar de que a pesar de lo estudiado que está el problema de la sonrisa aún hay muchas interrogantes por resolver.

El primer cuestionamiento que nos hicimos al comenzar con la investigación fue, ¿Por qué dado que el precio de una opción depende de 5 variables, en la mayoría de los textos se escribe como una variable que depende de 3,2 ó solo una variable?

Dicha interrogante nos hizo pensar en un principio que tal vez se trataba de un cambio de variables, un cambio en el espacio en donde se estaba trabajando o quizás una reducción

de variables para facilitar el trabajo en la búsqueda de una solución que se adecuaba al problema de encontrar la volatilidad implícita, pero después de trabajar matemáticamente el problema de la sonrisa y de manera muy particular con la ecuación de Black-Scholes me atrevo a concluir que solo se trata de un abuso de notación para evitar saturar a los lectores con la escritura de 5 variables en cada ocasión que se necesita citar el precio de una opción, puesto que aunque se haga la omisión en la escritura, en cada paso de los procedimientos se toman en cuenta las variables no escritas (cinco en total).

Acerca de la solución.

La segunda interrogante que nos motivó en continuar con el trabajo de investigación alrededor del problema de la sonrisa fue, ¿Por qué se afirma que dicho problema no tiene solución en forma cerrada?, dicha interrogante la intentamos resolver en el capítulo 3 con una discusión acerca de la Teoría de galois en base a la cual nos podemos percatar que para obtener una solución en forma cerrada al problema de la sonrisa es necesario introducir quizás hipótesis en formas de funciones que para nada reflejan el comportamiento real de los mercados, y de hecho en el capítulo 3 se enuncia un teorema en el que se demuestra de forma parcial el porque la mayoría de los autores afirman que no existe una solución en forma cerrada para el problema de la volatilidad implícita; a través de la demostración de que la función de volatilidad implícita no es D-finita, y se dio el ejemplo de una solución en forma cerrada la cual se pudo obtener solo bajo la hipótesis (para nada real) de que el precio del strike a tiempo presente sea exactamente igual al tiempo de madurez, con lo que descartamos la idea de crear toda una teoría para encontrar soluciones en forma cerrada tal como lo hizo Galois. Por tal motivo nos dimos a la tarea de enfocar lo estudiado en los primeros dos capítulos para encontrar fórmulas útiles de soluciones aproximadas de las cuales ya existen una infinidad, por ello solo mencionamos algunas, que si bien no son las más importantes en cuanto a su uso en la práctica en los mercados de opciones financieras, si nos resultan representativas y sobre todo claras para que los lectores de la presente tesis se empapen del uso y la manipulación de la fórmula de BS para llegar a soluciones de mayor utilidad en los mercados, matemáticamente están fuertemente sustentadas el problema es que la mayoría de ellas no han sido probadas con datos reales, para ver que tan bien modelan la sonrisa y si de verdad se ajustan al comportamiento del mercado. En cuanto a la solución por medio del estudio de los problemas inversos la dificultad se presenta al no tener los datos suficientes para evaluar la solución ya que en el mercado son muy pocos los tiempos de madurez que se manejan, lo que hecha a la borda la simplicidad con la que se obtienen las formas explícitas para obtener el valor de la volatilidad implícita.

Acerca de BS.

La tercer interrogante que a mi parecer es la más fuerte: ¿Por qué a pesar de saber que la fórmula de Black- Scholes es obtenida a partir del supuesto de que la volatilidad es constante, se sigue utilizando para obtener la volatilidad implícita? Y después de toda la investigación que se realizó, me atrevo a decir que no existe una respuesta concreta desde el punto de vista matemático. Una explicación al hecho de seguir utilizando BS, es que las personas encargadas del mercado han encontrado cierta .estabilidad.en los mercados al hacer uso de dicha fórmula, en la práctica no es la única ecuación que se utiliza para modelar con supuestos que no se cumplen, por ejemplo la ecuación del calor en donde se tienen ciertos supuestos que no son muy reales, pero para quienes trabajan con ella les sigue funcionando. Como se dice muy coloquialmente "más vale viejo por conocido, que nuevo por conocer"

Acerca de los modelos de Volatilidad.

Y en efecto BS ha funcionado .adecuadamente" hasta la fecha, en donde el mercado paga más por cubrirse de un posible crack bursátil que por protegerse de subidas "violentas" de los mercados. También es evidente que en los mercados de opciones financieras se seguirá haciendo uso de diversos modelos como: Los modelos de volatilidad local que asumen que la volatilidad depende del precio del subyacente, pero presentan problemas al intentar obtener una función continua de la volatilidad en función del subyacente a partir de los pocos precios de ejercicio con los modelos econométricos clásicos. Además dichos modelos tienen una prefijada, ya que dependen específicamente de un determinado nivel del índice y de un plazo, lo que complica su utilización para estimar futuras estructuras de volatilidades. También están los Modelos de difusión de saltos y los Modelos de volatilidad estocástica cuya mayor dificultad se presenta en determinar de que variables depende la volatilidad, existen trabajos muy recientes en donde se hace uso de nuevas metodologías, como son los modelos de redes neuronales, que no son otra cosa que algoritmos matemáticos no lineales que se basan en la forma que tiene el cerebro de los mamíferos superiores de procesar la información, corrigen sus parámetros en función del error que obtienen en la fase del entrenamiento de la misma, este tipo de redes son aproximadores universales de funciones, dicho procedimiento no es nuevo en las matemáticas financieras ya ha sido utilizado en datos financieros y económicos para generar predicciones de los rendimientos de los valores y de nuevo, se encuentra que las redes neuronales proveen mejor predicción de la validación y de los test que los modelos lineales Qi (1999), en Hutchinson et al (1994) utiliza las redes neuronales para estimar los precios de las opciones y muestra que las redes neuronales son efectivas incluso en los casos en donde falla BS, aunque debido a la escases de datos

disponibles para la prueba de dichos modelos es prácticamente imposible hacer un test que permita poner en evidencia las deficiencias de lo propuesto para intentar modelar la sonrisa de la volatilidad. Los algoritmos de redes neuronales son metodológicamente muy sencillos y al parecer ofrece resultados satisfactorios.

Claro que si hacemos a un lado la problemática de la disponibilidad de datos reales, podemos proponer como trabajo futuro, la realización de un modelo haciendo uso de la estadística bayesiana, sería una propuesta no tan descabellada y de mucha utilidad puesto que podríamos aproximar los datos inexistentes para diversos strikes y tiempos de maduración de los contratos de opciones negociados en los mercados. Ésta sin duda alguna será una propuesta con futuro, puesto que además de no estar estudiada la problemática de la volatilidad desde este punto de vista se estará introduciendo una nueva metodología al campo del análisis del riesgo.

Pero siempre se seguirá dependiendo de los operadores de cada mercado, los cuales intentan valorar las opciones lo más eficientemente posible, dada la información disponible, y quienes a pesar de seguir utilizando (en su gran mayoría) a BS, siguen pensando que dicho modelo no es eficiente en un cien por ciento, por lo observado en un amplio conjunto de volatilidades implícitas encontradas en cada contrato de opciones.

El cuadro de ventajas y desventajas resume y agrupa todo lo tratado durante la presente tesis a fin de orientar a los lectores para tomar decisiones que los ayuden a elegir un modelo de lo volatilidad que les permita cubrir sus expectativas, con respecto a lo que quieran obtener de la llamada “sonrisa de la volatilidad”.

Acerca de los índices de volatilidad.

Ahora bien, todo lo anterior va en caminado a formar un índice de volatilidad que nos permita reflejar en forma real y certera el comportamiento de dicha variable (la volatilidad implícita de los mercados de opciones financieras), puesto que en la mayoría de los casos los índices nos funcionan para interpretar las condiciones de los mercados y en el más favorable de los casos nos brindaran una predicción del comportamiento de las opciones en los mercados para que los inversionistas puedan realizar una estrategia de inversión y cobertura idónea, que se reflejará directamente en los contratos de opciones del mercado.

Nota. Poner más sobre el VIX que será la mejor propuesta También llamado “El índice del miedo” fue creado por los Profesores Brenner y Galai, mismos que se refieren a que su índice es el reflejo del valor de las primas de las opciones sobre el S&P 500.

Modelo	Ventajas	Desventajas
Modelos de Volatilidad Local.	<p>1.- Son simples y flexibles. 2.- Reflejan el comportamiento de una volatilidad implícita local dependiente del precio del subyacente y del tiempo, sin necesidad de especificar una relación funcional a priori. 3.- Reflejan el comportamiento de la volatilidad implícita en momentos específicos del tiempo.</p>	<p>1.- Se presentan problemas computacionales al querer suavizar las superficies continuas de volatilidades locales de precios de opciones discretas. 2.- Las volatilidades locales futuras son casi constantes, por lo que la sonrisa futura es intuitivamente más plana que la sonrisa actual. 3.- No toman en cuenta opciones con vencimientos más cortos, solo opciones con un vencimiento igual al plazo considerado. 4.- Tienen el supuesto de que todas las trayectorias que conducen al mismo valor final poseen la misma probabilidad de riesgo neutral.</p>
Modelos de probabilidad estocástica.	<p>1.- Son más invariantes en el tiempo. 2.- La volatilidad se aproxima a un promedio de valores esperados de la volatilidad.</p>	<p>1.- No se tiene claro de que es de lo que realmente depende la volatilidad.</p>
Modelos de difusión de salto.	<p>1.- Son realistas. 2.- Pueden modelar la sonrisa de una manera fija.</p>	<p>1.- son incompletos desde un punto de vista de replicación y cobertura.</p>
Modelos de redes neuronales.	<p>1.- Son aproximadores universales. 2.- Proveen mejor predicción de la validación. 3.- Sencillos de programar. 4.- Ofrecen resultados satisfactorios.</p>	<p>1.- Hay escases de datos para modelar la sonrisa de la volatilidad.</p>

Cuadro 5.1 Ventajas y desventajas de los modelos de volatilidad.

APÉNDICE A

Opciones.

Llamáronle los Flamencos Opsie, derivado del verbo latino Optio Optionis, que significa elección, por quedar a elección del que lo da el poder pedir o entregar la partida al que lo recibe... pues desea el que desembolsa el premio elegir lo que más convenga, y en falta siempre puede dejar de elegir lo que desea.

*Confusión de Confusiones
JOSÉ DE LA VEGA, 1688*

En este apéndice se explicará uno de los conceptos fundamentales de la tesis, el concepto de **Opción de compra europea (*European call option*)**. Lo cual resulta ser necesario para comprender lo que se ha realizado en los capítulos anteriores en términos de este concepto financiero.

Comenzamos definiendo el concepto de *Derivados*, que son instrumentos cuyo valor depende o deriva del valor de un subyacente (divisas, tasas de interés, acciones, productos básicos (commodities), índices sobre el stock etc.), se sabe que existe fluctuación diaria en los precios de estos activos por lo que para las empresas se vuelve necesario asegurar sus precios sobre insumos de producción mediante la adquisición de productos derivados el cual juega el papel de “un seguro”. Existen diversos tipos de derivados:

- **Swaps.** Son instrumentos que permiten el intercambio de flujos o posiciones en distintos vencimientos y/o divisas.
- **Contratos de Futuros.** Son instrumentos financieros que permiten fijar hoy el precio de compra y/o venta de un “bien” para ser pagados y entregados en un tiempo futuro. Estos son listados en una Bolsa de Derivados puesto que son productos “estandarizados” en tamaño de contrato, fecha, forma de liquidación y negociación.

- **Opciones.** Son contratos estandarizados, en el cual el comprador paga una prima y adquiere el derecho pero no la obligación de comprar o vender un activo subyacente a un precio pactado en una fecha futura, cabe señalar que el vendedor está obligado a cumplir.

En nuestro caso trabajamos con las opciones, las cuales como ya se mencionó pueden ser de compra (*call*) o de venta (*put*), los términos *call* (*llamar*) y *put* (*poner*) tienen su origen en el mercado OTC de opciones que comenzó en el siglo XIX en los Estados Unidos, puesto que eran las denominaciones utilizadas por los operadores. El activo sobre el que se instrumenta la opción se denomina *activo subyacente* mientras que el precio de compra o de venta garantizado en la opción es el *precio de ejercicio* (*Strike*). Además, si la opción se puede ejercer en cualquier momento desde la fecha de su adquisición hasta la fecha de ejercicio, se dice que esta es *americana*; pero si la opción sólo se ejerce en una determinada fecha entonces se habla de una opción *europea*. Dicha distinción se debe principalmente a que en un principio en los Estados Unidos de América las opciones sobre acciones tradicionalmente se podían ejercer en cualquier día desde la fecha de adquisición hasta su tiempo de madurez, mientras que en Europa se decide que los contratos negociados tendrían una única fecha de vencimiento. Hoy en día, se negocian ambas modalidades en los diferentes mercados financieros mundiales, por lo que su acepción geográfica no tiene gran sentido (*ver Copeland (2001)*).

De acuerdo a la definición de opción que se dio anteriormente resulta evidente el hecho de que los compradores ejercerán las opciones cuando la evolución de los precios de mercado del activo subyacente les permita obtener beneficios con el ejercicio. Precisamente estos beneficios del ejercicio de las opciones suponen pérdidas para los vendedores, quienes tienen como compensación la prima pagada por el comprador

Adicionalmente, las opciones de compra y venta se pueden clasificar según el activo subyacente sobre el que se instrumentan.

1. Opciones sobre el contado, en donde el ejercicio supone una compraventa al contado del activo subyacente
2. Opciones sobre instrumentos a plazo (*forward*) las cuales facilitan al comprador de la opción posicionarse como adquirente o vendedor de un contrato *forward* (en divisas, tipos de interés, etc.) ejerciendo la correspondiente opción.
3. Opciones sobre futuros en donde el ejercicio se traduce en una posición de compra o venta de un contrato de futuros, dentro de un mercado especializado en estos instrumentos.

Estos tres tipos de opciones son negociadas en la actualidad de acuerdo al mercado y las necesidades de quienes compran y/o venden, aunque cabe señalar que los contratos con mayor auge en los últimos años, son las opciones americanas sobre futuros. Ahora bien las opciones financieras tienen cuatro modalidades:

1. Opciones sobre acciones.
2. Opciones sobre divisas.
3. Opciones sobre tipos de interés y/o instrumentos de deuda.
4. Opciones sobre índices bursátiles.

Nosotros trabajamos con las opciones en particular las de compra de tipo europeo. Comencemos con dar una definición formal de opción de compra europea:

Definición 1 *Una opción de compra europea (european call option) es un contrato que da al poseedor de la opción el derecho, más no la obligación de comprar cierta cantidad de un activo a un precio fijo acordado en la fecha actual, conocido como precio de ejercicio K (strike price), a una fecha futura prefijada, llamada tiempo de maduración T (maturity date).*

Al usar derivados es de suma importancia cuantificar y fijar límites para el riesgo, no es aceptable exceder dichos límites aun cuando se presenten buenos resultados, tampoco hay que asumir que un operador con buena trayectoria siempre tiene razón por lo que es conveniente realizar escenarios y pruebas de estrés.

El vendedor de una opción call o put, asume la obligación de respetar la decisión o requerimiento del comprador, para tal efecto recibe un pago (prima) por el riesgo asumido en la venta de la opción.

El valor o la prima de una opción se divide en dos componentes: el valor intrínseco y el valor extrínseco (valor temporal); el primero depende de las propias características de la opción y se define como el valor que tendría una opción en un momento determinado si se ejerce de forma inmediata, el segundo componente del valor de la opción va a depender de factores externos al contrato, es la valoración que hace el mercado de las mayores probabilidades de mayores beneficios con la opción si el movimiento del precio del activo subyacente es favorable.

En función del valor intrínseco, las opciones se pueden clasificar en tres categorías:

- 1 Opciones dentro del dinero "In The Money" (*ITM*). Son las opciones en las que su valor intrínseco es positivo

Para las opciones CALL ; $S > K$.

Para las opciones PUT; $S < K$.

Con S el precio del activo subyacente y K el precio del Strike.

- 2** Opciones en el dinero “At the Money” (ATM). Su valor intrínseco es nulo y su ejercicio no supone ni pérdida ni beneficio.

Para las CALL y PUT; $S=K$.

- 3** Opciones fuera del dinero “Out Of The Money” (OTM). Son aquellas cuyo ejercicio implica una pérdida en términos analíticos:

Para las opciones CALL; $S < K$.

Para las opciones PUT; $S > K$.

Dado que estas opciones no se ejercerán, el ejercicio se traduce en pérdidas, si se asume que el comprador es racional, su valor intrínseco también es cero.

En cada contrato de opciones hay dos partes; en una parte está el inversor que ha tomado la posición larga (es quien compró la opción) y en la otra parte está el inversor que toma la posición corta (es quien ha vendido o emitido la opción).

Ventajas de los derivados financieros.

Principal función de los derivados es servir de cobertura ante fluctuaciones de precio de los subyacentes, por lo que se aplican preferentemente a portafolios accionarios, obligaciones contraídas a tasa variable, pagos o cobranzas en moneda extranjera a un determinado plazo, planeación de flujos de efectivo, entre otros. Los derivados son instrumentos que contribuyen a la liquidez, estabilidad y profundidad de los mercados financieros; generando condiciones para diversificar las inversiones y administrar riesgos.

Uno de los usos de los derivados financieros es cuando se desean cubrir pérdidas potenciales en portafolios accionarios, realizar una compra anticipada de acciones cuando no se poseen flujos hoy, otorgar la posibilidad de ganar en mercados a la baja y simular ventas en corto; por ejemplo:

IPC

Se tiene un portafolio accionario con valor de \$3,000,000 que se desea cubrir ante una posible baja en el precio de las acciones que lo componen. El portafolio tiene una alta correlación con el IPC, por lo que se decide cubrir su valor vendiendo futuros del IPC cotizados en el MexDer. Supongamos que el IPC hoy se encuentra a 29,500 puntos y se venden diez contratos de futuros de IPC al mes de diciembre en 30,000 puntos. El importe

que cubre cada contrato de futuro del IPC, es 10 veces su cotización en ese momento, por lo que el importe de cobertura es de \$300,000 (30,000*10). Llegando diciembre, las acciones que componen el portafolio caen en valor neto el 5 % y el IPC de contado (29,500) desciende 7 %. Entonces

La pérdida en portafolios es:

$$\$3,000,000 - 5\% = \$150,000$$

Las ganancias futuras son:

$$\begin{aligned} 30,000 - (29,500 - 7\%) &= 2,565 \text{ puntos} \\ 2,565 \times \$10 \text{ por punto} &= 25,650 \text{ por contrato} \\ 25,650 \times 10 \text{ contratos} &= \$256,500 \end{aligned}$$

Aún cuando el entorno fue inestable, se cubrió y ganó

$$\$256,500 - \$150,000 = \$106,500$$

Este ejemplo se obtuvo de la pagina web de MexDer. www.mexder.com

Arbitraje Financiero.

Al proceso de comprar y vender simultáneamente un mismo contrato en mercados distintos, generando algún beneficio en base a los diferenciales de precio se le denomina arbitraje financiero. Con lo que se tiene una estrategia de inversión que nos proporciona una ganancia libre de riesgo y sin inversión alguna de por medio. En los mercados financieros se estudian las implicaciones de la ausencia de oportunidades de arbitraje, para con ello evitar que se genere dinero "mágicamente", además de que en presencia de arbitraje no se tendría equilibrio en el mercado.

Existen dos tipos de arbitraje, para definirlos consideraremos un horizonte de tiempo $I \subset \mathbb{R}$, y un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I}, P)$ con (Ω, \mathcal{F}, P) completo. El mercado consiste de n activos cuyo proceso de precios es $S(t) = (S_1(t), \dots, S_n(t))$, para $t \in I$.

Definición 2 (Arbitraje débil) *Un arbitraje débil es un portafolio $q(t)$ admisible y autofinanciable para el que existe $T \in I$ tal que*

$$P[V_q(0) = 0] = 1,$$

$$P[V_q(T) \geq 0] = 1,$$

$$P[V_q(T) > 0] > 0.$$

Definición 3 (Arbitraje fuerte) *Un arbitraje fuerte es un portafolio $q(t)$ admisible y auto-financiable para el que existe $T \in I$ tal que*

$$P[V_q(0) = 0] = 1,$$

$$P[V_q(T) > 0] = 1.$$

El concepto de arbitraje financiero fue propuesto inicialmente por *Robert C. Merton*, este principio dio paso al modelo propuesto por *F. Black y M. Scholes* (con asistencia de *Merton*) en 1973, del cual se desprende la fórmula que lleva sus nombres (ver apéndice B) y que ha sido la más usada por los financieros en las últimas décadas. Por otra parte, si en un modelo de mercado se especifica que no existe arbitraje, entonces se dice que dicho mercado es eficiente. Además de que la ausencia de arbitraje equivale a la existencia de un portafolio de inversión óptimo en mercados completos. Todo esto se puede ligar con la teoría de la valuación por martingalas, debido a que la ausencia de arbitraje implica la existencia de una medida martingala para el proceso de precios de algún reclamo contingente; dicha medida es una condición necesaria y suficiente para garantizar la ausencia de arbitraje.

Límites superiores e inferiores para los precios de las opciones.

El límite superior en una opción de compra está dado por el precio de la acción, puesto que si se tiene un precio de la opción de compra superior al de acción las opciones no tendrían valor, no interesaría acudir a ellas; es necesaria esta relación pues de lo contrario se tendría arbitraje. Es decir se debe cumplir la relación:

$$C \leq S_0$$

en donde C es el precio de la opción de compra y S_0 es el precio del activo subyacente (acción). Mientras que para la opción de venta el límite superior de la prima está en el mismo precio de ejercicio que incorpora la opción para el momento del vencimiento. El precio que da la posibilidad de ejercer una venta no puede ser superior al precio de ejercicio que obtienes de ejercer dicha venta. Por lo tanto:

$$P \leq K$$

en donde P es el precio de la opción de venta y K es precio de ejercicio, para conservar la condición no arbitraje debemos tener

$$P \leq Ke^{-rT}$$

Ahora bien, el límite inferior para una opción de compra es

$$S_0 - Ke^{-rT} \leq C$$

lo que resulta de la condición de no arbitraje:

$$C + Ke^{-rT} \geq S_0$$

Mientras que para la opción de venta tenemos la condición de no arbitraje

$$P + S_0 \geq Ke^{-rT}$$

de la cual se despeja P y obtenemos:

$$P \geq Ke^{-rT} - S_0$$

que es el límite inferior.

Diferencial Mariposa (BUTTERFLY SPREADS).

Esta estrategia es utilizada por los inversores cuando lo que se pretende es acotar los movimientos en la cotización de la acción. Puede formarse tanto con las opciones de compra como con las opciones de venta. Para hacer uso de esta estrategia es necesario realizar una inversión inicial, como primer paso se deben comprar dos CALL (o PUT) una a un precio de ejercicio bajo y otra a un precio de ejercicio alto, además se venden otras dos CALLS (o PUT) a un precio de ejercicio que es igual a un valor aproximado a la media de los “strikes” de las opciones compradas, por lo general se busca que este valor sea cercano al precio actual de la acción.

Paridad Put-Call.

Existe una relación entre los precios de las opciones de compra y los precios de las opciones de venta, conocida como la ecuación fundamental de las opciones (paridad put-call),

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0 \tag{A.1}$$

con C un call europeo, P un put europeo, ambos con el mismo precio de ejercicio K y tiempo de madurez T . Para demostrar dicha igualdad, suponemos que no se cumple, es decir

$$C - P > S_0 - Ke^{-rT}$$

ocurre con probabilidad positiva, se considera un portafolio tal que

$$q = (call, put, activo) \sim (-1, 1, 1).$$

así es que

$$Vq(0) = 0$$

Al tiempo de madurez T se tienen dos casos

$$S(T) < K \quad \text{ó} \quad S(T) > K$$

si nos encontramos en el primer caso se ejerce el put, mientras que en el segundo caso se ejerce el call, entonces el balance del portafolio está dado por la siguiente relación

$$Vq(T) = Ce^{rT} - Pe^{rT} - S_0e^{rT} + K$$

lo que por hipótesis es positivo, lo que estaría contradiciendo el principio de no arbitraje. De manera similar tenemos una contradicción para el caso

$$C - P < S_0 - Ke^{-rT}$$

con

$$q = (call, put, activo) \sim (1, -1, -1).$$

por lo que entonces queda demostrada la igualdad A.1; la cual nos permite obtener los precios de las opciones de venta con un precio de ejercicio y un tiempo de madurez a partir de los precios de las opciones de compra con iguales precios de ejercicios y fecha de madurez, y viceversa.

Hoy en día las opciones resultan ser los derivados más populares dentro del mercado financiero y dichos instrumentos financieros se comerciaban desde la edad media en Europa, como ya se mencionó en esta tesis nos centramos en las opciones europeas principalmente en las de compra (*call option*)

APÉNDICE B

Modelo de Black Scholes.

El modelo y la fórmula de Black-Scholes son los más utilizados para la valuación de opciones, uno de los supuestos más relevantes de este modelo es que en ausencia de dividendos, las acciones siguen un movimiento aleatorio que conduce a una distribución normal de los rendimientos a corto plazo de los precios de las acciones, lo que conduce a pensar que el precio de las acciones en el futuro tiene una distribución log-normal, lo que nos lleva a tener rendimientos positivos en un periodo de tiempo a largo plazo. Además de este supuesto también están:

- No hay costos de transacción ni impuestos.
- No hay penalizaciones a la venta en descubierto.
- No hay dividendos sobre las acciones durante el periodo de vida de la opción.
- No hay oportunidad de arbitraje.
- Los activos se negocian a tiempo continuo.
- El tipo de interés es fijo y conocido a corto plazo.
- Los inversores pueden prestar y pedir prestado al mismo tipo de interés libre de riesgo.

Se ha intentado perfeccionar el modelo permitiendo, por ejemplo, que el subyacente pague dividendos conocidos previamente, lo que permite extender la fórmula para valuar opciones sobre índices bursátiles y divisas. Asimismo, han aparecido fórmulas para valuar otro tipo de opciones más complejas, como pueden ser opciones americanas o exóticas.

Recordemos la fórmula de Black - Scholes para $t = 0$:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \quad (\text{B.1})$$

con

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \& \quad d_2 = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$r, S, K, T, \sigma > 0.$$

C := Precio de mercado de la opción Call

S := Activo subyacente

T := Tiempo de madurez

r := Tasa de interés libre de riesgo

K := Precio del strike

σ := Volatilidad

$N(\cdot)$ Es la función de distribución de la normal, $N(d_1)$ es la cantidad de acciones (o unidades del activo subyacente) necesarios para la cartera de réplica de la opción, lo que nos lleva a que $SN(d_1)$ es el coste de las acciones que se necesita para la cartera de réplica. El segundo término $Ke^{-rT}N(d_2)$ es el importe necesario a financiarnos al tipo de interés libre de riesgo para replicar la opción, en conclusión, la diferencia entre ambos términos es el coste de la cartera de réplica; es decir, del lado izquierdo de la igualdad (B.1) tenemos el valor de la opción mientras que del lado derecho se encuentra el precio de mercado de la cartera de réplica.

Para llegar a la fórmula anterior, debemos trabajar sobre el modelo de BS cuyas hipótesis son:

1. El precio del subyacente $S(t)$ evoluciona de acuerdo a un Movimiento Browniano Geométrico (MBG):

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW_t \quad (\text{B.2})$$

En particular, la volatilidad σ del subyacente es constante. Esta es la hipótesis mas fuerte del modelo.

2. El mercado BS consiste del subyacente y de un bono que evoluciona de acuerdo a

$$dB(t) = rB(t) dt$$

3. El subyacente y el bono se pueden comerciar de forma continua y divisiblemente, es decir, en cualquier instante del horizonte de tiempo $0 \leq t \leq T$, y en cualesquiera cantidades reales no negativas.
4. El subyacente no paga dividendos.
5. En la economía *BS* no hay arbitraje.
6. La tasa de interés libre de riesgo r es conocida y fija.
7. No hay costos de transacción ni impuestos.

Sea $C = C(t, S)$ el valor de la opción al tiempo t con valor del subyacente S . Suponemos que $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase \mathcal{C}^2 y además tenemos un portafolio $q(t) = (a(t), b(t))$ definido para $t \geq 0$, en donde $a(t)$ es la cantidad del activo riesgoso (el subyacente) y $b(t)$ es la cantidad del bono libre de riesgo cuyo precio $B(t)$ al tiempo t es igual a e^{rt} . Dichos procesos $(a(t)$ y $b(t))$ son adaptados y satisfacen:

$$E \left[\int_0^T a^2(t) dt \right], E \left[\int_0^T |b(t)| dt \right] < \infty.$$

El valor del portafolio a cualquier instante de tiempo es

$$V_q(t) = a(t) S(t) + b(t) e^{rt},$$

ademas debe ser auto-financiable, es decir

$$d(a(t) S(t) + b(t) e^{rt}) = a(t) dS(t) + b(t) r e^{rt} dt.$$

debido a la condición que se tiene de *no-arbitraje* se sigue que:

$$a(t) S(t) + b(t) e^{rt} \equiv C(t, S(t)), \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{B.3})$$

lo que quiere decir que el portafolio replica el valor de la opción a lo largo de todo el horizonte de tiempo y no solo en el momento de ejercicio.

Ahora aplicamos el lema de Ito para el lado derecho de la igualdad (B.3), y para el lado izquierdo utilizamos la condición de autofinanciamiento:

$$a(t) dS(t) + b(t) e^{rt} dt = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \left(\frac{\partial C}{\partial S} \right) dS(t) \quad (\text{B.4})$$

ahora se sustituye la igualdad (B.2) en la igualdad (B.4)

$$(\mu a S + r b e^{rt}) dt + \sigma a S dW_t = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial C}{\partial S} \right) dW_t$$

se hizo un abuso de notación al escribir $a = a(t)$, $b = b(t)$, $S = S(t)$. Si se igualan los coeficientes de dW_t y obtenemos que

$$a(t) \equiv \frac{\partial C}{\partial S} \quad (\text{B.5})$$

e igualando los de dt

$$\mu a S + r b e^{rt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \quad (\text{B.6})$$

por otro lado de la ecuación (B.3) tenemos

$$b(t) = e^{-rt} (C - aS)$$

si sustituimos en la ecuación anterior la ecuación (B.5) llegamos a

$$b(t) = e^{-rt} \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \quad (\text{B.7a})$$

con las ecuaciones (B.5) y (B.7a) sustituidas en la ecuación (B.6) obtenemos la siguiente expresión:

$$\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + rC - rS \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

y finalmente a la EDP de BS

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0 \quad (\text{B.8})$$

Para obtener la solución a la EDP se hacen los siguientes cambios de variable

$$\begin{aligned} S &= K e^x, & x &= \log \left(\frac{S}{K} \right), \\ t &= T - 2 \frac{\lambda}{\sigma^2}, & \lambda &= \frac{1}{2} (T - t) \sigma^2 = \frac{1}{2} \tau \sigma^2, \\ C &= K v(x, \lambda), & v(x, \lambda) &= \frac{C}{K}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

de donde se calculan $\frac{\partial C}{\partial t}$, $\frac{\partial C}{\partial S}$ y $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$, las cuales se sustituyen en la EDP (B.8), multiplicando la misma expresión por $\left(\frac{-2}{K\sigma^2}\right)$ y simplificando, llegamos a la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{2r}{\sigma^2} = 0, \quad (\text{B.10})$$

y la condición de frontera

$$v(x, 0) = (e^x - 1, 0)^+.$$

la ecuación (B.10) es de difusión y para resolverla la convertimos en una ecuación de calor mediante el cambio de variable

$$v = e^{(\alpha x + \beta \lambda)} u(x, \lambda),$$

con α y β a determinar. Calculamos las derivadas parciales $\frac{\partial v}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ y las sustituimos en B.10, entonces obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(2\alpha + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\beta - \alpha^2 - \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) \alpha + \frac{2r}{\sigma^2}\right) u = 0,$$

si se escoge

$$\begin{aligned} 2\alpha + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) &= 0, \\ \beta - \alpha^2 - \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) \alpha + \frac{2r}{\sigma^2} &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right), \\ \beta &= -\frac{1}{4} \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)^2. \end{aligned}$$

entonces

$$v = e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)x - \frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)^2\lambda\right)} u(x, \lambda)$$

con lo que la ecuación (B.10) se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} -\infty &< x < \infty, \\ \lambda &> 0, \\ u(x, 0) &= \left(e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)x} - e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)x}\right)^+. \end{aligned} \tag{B.11}$$

cuya solución es

$$u(x, \lambda) = e^{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)x - \frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)^2\lambda\right)} N(d_1) + e^{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)x - \frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)^2\lambda\right)} N(d_2).$$

donde

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\lambda}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right) \sqrt{2\lambda} = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\lambda}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \sqrt{2\lambda} = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Regresamos al cambio de variable entre u y v , y simplificando

$$\begin{aligned} v(x, \lambda) &= e^{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)x - \frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)^2\lambda\right)} u(x, \lambda) \\ &= e^x N(d_1) - e^{-K\lambda} N(d_2). \end{aligned}$$

Finalmente regresamos a las variables originales dadas en (B.9), para obtener la fórmula de BS

$$C = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

con

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

APÉNDICE C

Volatilidad Histórica.

En la toma de decisiones de compra y venta de activos financieros se tratan de minimizar eventos no deseados en el futuro, para hacer referencia a este riesgo los inversionistas y la gente que participa en los mercados financieros usan la palabra “volatilidad”, asociado a esta palabra están las pérdidas que se pueden tener al participar en los mercados financieros. La volatilidad nos habla de la incertidumbre sobre la evolución del activo subyacente y concretamente de la evolución del rendimiento de este último

Es bien sabido que las volatilidades son una aportación vital en la valuación de las opciones, la volatilidad es un indicador que mide la frecuencia y magnitud con la que un activo se desvía de su comportamiento habitual o promedio. Dicho indicador es utilizado para medir y controlar riesgos, así como para medir la eficiencia de portafolios cuando se relaciona con un rendimiento esperado. La volatilidad muestra la incertidumbre que existe en los mercados respecto a eventos pasados o que están por ocurrir, por lo que generalmente es asociada al riesgo para “adivinar el futuro”. Un incremento en la volatilidad generalmente esta asociado a periodos de insertumbre, es decir, a cambios radicales en la dirección del mercado.

La volatilidad se cotiza como cualquier otro instrumento financiero, normalmente se mide como la desviación típica del cambio porcentual del precio, con ello podemos obtener el riesgo de un valor en un periodo, a través del análisis estadístico de los movimientos de sus cotizaciones; si un valor es muy volátil, es más difícil predecir su comportamiento, por lo que incorpora mayor incertidumbre para el inversionista. Por lo tanto, a mayor volatilidad, mayor riesgo. Existen varios tipos de volatilidad

- Histórica
- Futura

- Actual
- Implícita
- Estimada
- Estacional

En la práctica lo que se acostumbra hacer es utilizar la volatilidad del precio de un activo calculado a partir de datos históricos (a esto se le llama volatilidad histórica) ósea que se realiza una medición retrospectiva para con ello poder valuar las opciones y así obtener una aproximación certera del valor de las opciones para con ello obtener la volatilidad implícita. Por ejemplo, si un determinado activo subyacente ha tenido una volatilidad en el pasado entre un 15 % y un 20 %, en general será más probable que su volatilidad en el futuro se encuentre dentro de este intervalo a que alcance un 30 %; es decir, la volatilidad histórica brinda cierta información relevante de su comportamiento pasado y se asume que entonces la volatilidad tendrá un comportamiento futuro con los mismos signos y tendencia.

El concepto de volatilidad histórica esta definido por la volatilidad experimentada en el rendimiento del activo subyacente en un periodo de tiempo que ya paso y con una duración determinada. Si se supone que el activo mantiene un comportamiento estándar, dicho activo tendrá un precio siempre mayor a cero y una función de distribución lognormal, lo que permite que el rendimiento de dicho activo provocado por la variación del precio se distribuya de forma normal, es decir, el rendimiento de la acción tendrá una función de distribución de probabilidad en forma de campana de Gauss con una media y una desviación estándar (esta desviación será la volatilidad histórica) para una serie de datos dados.

El cálculo de la volatilidad histórica se puede realizar de dos maneras:

1. En base a los precios de cierre del subyacente, este enfoque es el más utilizado en los estudios académicos de los mercados de opciones y por quienes negocian dichos instrumentos. El primer paso es considerar la expresión del rendimiento periódico del subyacente

$$r_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$$

en donde r_t es el rendimiento del subyacente de $t - 1$ a t , S_t es el precio de cierre del activo subyacente a la fecha t y S_{t-1} es el precio de cierre del activo subyacente a la fecha $t - 1$. El logaritmo convierte la variación de precios $\left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$ en una tasa de rentabilidad continua lo cual hace esta expresión más adecuada para los modelos de

valuación de opciones. Teniendo la serie de la tasa de rendimiento, entonces podemos calcular la media y la varianza de los rendimientos mediante las expresiones:

$$\bar{r} = \sum_{t=1}^n \frac{r_t}{n} \quad (\text{Media})$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2 \quad (\text{Varianza})$$

con n igual al número de datos utilizados en los cálculos.

Nota.- En la varianza se divide por $(n - 1)$ y no por n para corregir la estimación por el número de grados de libertad.

La desviación estándar (σ) nos dará una estimación de la volatilidad histórica en términos del período elegido para calcular r_t , es decir, si r_t se calcula en base semanal entonces tendremos una volatilidad histórica en términos semanales. La mejor manera para el cálculo de la tasa de rendimiento es utilizar datos diarios puesto que esto nos permitirá que la estimación de la volatilidad sea insensible a la estimación de la media.

El período histórico sobre el que se van a realizar los cálculos depende en gran manera del mercado en el que se esté trabajando, aunque una regla general es escoger un período equivalente al del vencimiento de las opciones que se están analizando

2. La otra forma de calcular la volatilidad histórica es con los precios máximo y mínimo de las series históricas de cotización del subyacente, la fórmula de cálculo es:

$$\sigma = \frac{0,627}{n} \sum_{t=1}^n \log \left(\frac{P_{Mt}}{P_{mt}} \right)$$

con, P_{Mt} igual al precio máximo del día t y P_{mt} igual al precio mínimo del día t . Aunque este enfoque es muy poco utilizado debido a que se presenta una discontinuidad en la negociación del subyacente durante el transcurso del día además de que la información de máximos y mínimos para muchos subyacentes es peor que la de precios de cierre.

Una pregunta importante sería, ¿lo sucedido en el pasado, necesariamente determina el comportamiento futuro? lo que evidentemente se responde con un NO, por lo que en los últimos años han surgido nuevas ideas y propuestas que intentan modelar la volatilidad de los activos. En esta tesis nos enfocamos a una de ellas “La Volatilidad Implícita”. Pero entonces ¿cuál es la importancia de la volatilidad histórica?; para responder esta interrogante hay que señalar que una primera aproximación al análisis de la volatilidad futura sería la comparación entre las volatilidades históricas del subyacente y las volatilidades implícitas. Por ejemplo:

$$\sigma_i - \sigma_H = \Delta_{\sigma}^E$$

en donde σ_i es la volatilidad implícita y σ_H la volatilidad histórica, la diferencia entre ambas nos proporcionará el valor esperado de la Delta que mantiene el mercado en un intervalo de tiempo dado, la cual suele ser muy pequeña puesto que las volatilidades históricas e implícitas deben estar correlacionadas.

APÉNDICE D

'Greeks'

Lo que se pretende con las opciones es tener la posibilidad de poder mantener una posición libre de riesgo que no dependa de la evolución del activo subyacente para con ello poder disminuir las posibles ineficiencias en la valuación de las opciones en el mercado; para lo cual se utilizan instrumentos de medición del riesgo como las 'Greeks' (letras griegas) que son una herramienta vital debido a que informan de la exposición al riesgo de la cartera en cada momento. Hemos visto que la forma de valuar las opciones del mercado se hace principalmente a través de la fórmula de Black-Scholes. Entonces, al suponer que el precio de mercado es eficiente, se debe considerar que el coste de la emisión y cobertura de dichas opciones deben tener un coste similar a su precio de mercado, puesto que de lo contrario se tendrían oportunidades de arbitraje. Por consiguiente, es comprensible que las coberturas no son gratuitas por lo que en la práctica se deben utilizar instrumentos de control de riesgo para con ello realizar coberturas eficientes.

Comencemos con la letra **DELTA** que es la variación que experimenta el precio de la opción ante un cambio del activo subyacente. Este parámetro está especificado por el activo subyacente en función de las opciones (de compra o venta), y debido a que se trata de un parámetro variable con respecto al tiempo, ésta solo es significativa en un periodo determinado, por lo que debe ser actualizada de forma periódica. También puede ser definida como:

1. El equivalente en el subyacente de la opción.
2. La probabilidad de que la opción sea ejercida.
3. La sensibilidad o elasticidad de la prima a las variaciones del precio del subyacente.

Para las opciones de compra este parámetro es positivo, puede variar entre cero y uno, ya que un incremento en el precio del activo subyacente incrementa el precio de la

call; de forma análoga, un incremento en el activo subyacente supone una reducción del precio de un put para el cual la delta varía entre -1 y cero. El activo subyacente, tiene por definición, una delta positiva. En el caso de un call, cuando la opción está muy fuera del dinero la delta está próxima a cero ya que una variación pequeña del precio del subyacente, no cambia la posición fuera del dinero de la opción; mientras que si la opción está en el dinero, la delta se aproxima a 0.5 y conforme el valor intrínseco de la opción aumenta la delta se aproxima a 1. Para los put

Una cobertura mediante la delta supone obtener una delta neutral en nuestra cartera de activos. Entonces, la combinación de opciones (tanto de compra, como de venta) y la posición en el activo subyacente (tanto comprado como vendido), debe proporcionarnos una posición *delta neutral*, la cual en una gran parte de los programas de gestión de opciones que se comercializan, se expresa en porcentajes, con lo que las posiciones de compra y venta tendrán una delta entre 100 y -100.

Del modelo de Black-Scholes, tenemos que:

$$\Delta \text{ de una opción call} = N(d_1)$$

$$\Delta \text{ de una opción put} = N(d_1) - 1$$

Los principales factores que influyen en dicha posición son: la volatilidad del subyacente, el incremento del tiempo y el precio del subyacente. En la siguiente sección se explicará como calcular dicha derivada, la cual facilita muchísimo la comprensión de la cobertura a realizar, por ejemplo en acciones que no pagan dividendos las opciones de compra implican una posición de $N(d_1)$ acciones en cartera, mientras que para una opción de venta tenemos una posición de $N(d_1) - 1$ acciones en cartera; ahora bien, si se trata de acciones que pagan dividendos igual a q , entonces para una opción de compra implica una posición de $e^{-qt}N(d_1)$ acciones en cartera, de igual manera para una opción de venta se tiene una posición de $e^{-qt}(N(d_1) - 1)$ acciones en cartera.

Mediante esta metodología se puede obtener la posición delta neutral de cualquier activo (futuros, divisas, . . .), a través de la adición de las diferentes deltas neutrales de las diferentes posiciones que se mantengan en dicho activo; es decir, se deben sumar las deltas correspondientes a la emisión y compra de opciones sobre el mismo activo, con las deltas de las posiciones largas y cortas de el mismo activo, y con ello determinar cuál es la posición final a tomar en el activo subyacente para obtener una situación de delta neutralidad.

Nota.- Las opciones que requieren más ajustes para lograr una posición *delta neutral* son las opciones en el dinero (At The Money).

La delta se ve afectada principalmente por las fluctuaciones del precio del subyacente, lo que se pretende medir a través de la letra griega **GAMMA** (*la delta de la delta*),

la cual nos indica cuál es la evolución de delta con respecto a la evolución del activo subyacente. Esto lo podemos interpretar como una protección ante grandes variaciones del precio del activo subyacente, mientras que la letra griega delta se interpreta como una protección ante pequeños cambios. Gamma, para acciones que no pagan dividendos, viene definida por:

$$\begin{aligned}\Gamma \text{ de una opción call} &= N(d_1) \\ \Gamma \text{ de una opción put} &= S_t \sigma \sqrt{T}\end{aligned}$$

Lo que nos indica es la velocidad de los ajustes para las posiciones delta neutral, aunque suele ser denominada como “*la curvatura*” de una opción y matemáticamente es la segunda derivada parcial del valor de la opción con respecto al precio del subyacente, su valor indica lo que aumente o disminuye la delta de la opción con respecto a las subidas o bajadas en el precio del subyacente. Al igual que la delta, la gamma suele expresarse en porcentajes, y es importante mencionar que para call y put equivalentes, la gamma es idéntica, además en todas las opciones es positiva a excepción de las que son vendidas. además en ella también influyen el tiempo de madurez y la volatilidad; es decir, cuando se acerca el tiempo de vencimiento, para las opciones en el dinero (At The Money) la gamma incrementa bruscamente, mientras que para las opciones fuera y dentro del dinero (Out - In The Money) la gamma tiende a cero; con respecto a la volatilidad los aumentos de la misma hacen que la gamma disminuya para opciones en el dinero (At The Money) y que aumente para opciones fuera y dentro del dinero (Out - In The Money).

Esta letra es de suma importancia puesto que nos proporciona la medida del riesgo específico asumido en nuestras posiciones en opciones, ya que la delta mide el riesgo de posición en términos del subyacente. Por simplicidad suele considerarse que la gamma es la misma si el subyacente aumenta alguna cantidad o si disminuye en la misma cantidad, lo que es falso debido a que no se tiene una distribución normal en los movimientos del precio del activo subyacente, por lo que algunos autores proponen el cálculo de una *doble gamma* la cual se obtiene con la media de los siguientes dos valores:

1. Gamma Superior, es la gamma existente para la cartera si el activo subyacente sube en una determinada proporción sin que el operador haya realizado una nueva operación.
2. Gamma Inferior, es la gamma existente para la cartera si el activo subyacente baja en una determinada proporción sin que el operador haya realizado una nueva operación.

La gamma resultante de la media de estos dos valores va a variar ligeramente de la gamma calculada según Black-Scholes. Este cálculo introduce a la tercera derivada del precio de la opción con respecto al activo subyacente, la cual se denomina como *skew gamma* (*asimetría*) o *speed of gamma* (*velocidad*) que expresa la variación de la gamma

ante variaciones del precio del activo subyacente y que posibilita conocer el desajuste que se producirá en la cartera por movimientos de dicho activo, aunque esta derivada no suele ser muy utilizada por los operadores de opciones.

Nota.- Entre más factores se tomen en cuenta para el cálculo de la gamma, mejor será la aproximación del riesgo de las posiciones, con lo que se podrá maximizar el beneficio de la cartera.

Nota.- Una cobertura debe ser dinámica, como mínimo de forma diaria para ejercer una tarea eficiente.

La **Theta** de una opción mide la sensibilidad del precio de una opción con el paso del tiempo, es decir, es la derivada parcial de la opción con respecto al tiempo de madurez. La mayoría de las opciones tiene un valor de theta positivo a excepción de las put y call europeas muy dentro del dinero (*Deep In The Money*), y para reflejar más claramente el efecto negativo del tiempo se acostumbra a invertir el signo inicial de dicha derivada, así las thetas negativas aparecen en las posiciones compradoras de opciones y las thetas positivas en las posiciones vendedoras.

Los efectos de la gamma y de la theta son inversos y se contrarrestan. Por ejemplo, cuando se vende una opción se tiene una gamma negativa pero con el transcurso del tiempo le favorece (theta positiva), ya que con el paso del tiempo las opciones vendidas pierden valor, sin embargo cuando se compran opciones la gamma positiva es compensada por los efectos negativos del paso del tiempo (theta negativa).

Otro método de cobertura es la letra griega **VEGA**, con la que se pretende medir la evolución del precio de la cartera en función de la evolución de la volatilidad. Algunos también denominan a este parámetro con otras letras griegas como kappa, omega, etc. Al igual que gamma, intenta proteger la cartera ante grandes cambios en el precio del activo subyacente; matemáticamente es la derivada parcial del valor de una opción con respecto a la volatilidad y está dada por:

$$v = S_t \sqrt{T} N(d_1)$$

Las opciones en el dinero (At The Money) son las que tienen un mayor valor de la vega, es decir, son las más sensibles a las alteraciones de la volatilidad, mientras que las opciones fuera del dinero (Out The Money) son más sensibles a las variaciones de la volatilidad que las opciones dentro del dinero (In The Money). Una cartera con una gamma negativa se ve compensada con un parámetro theta positivo y tendrá una vega también negativa, es por eso que en la práctica los inversionistas tienden a decidirse por una cartera gamma-neutral, o bien por una cartera vega-neutral, lo que dependerá de los parámetros de las opciones

con los que se estén trabajando (de la volatilidad en su volatilidad o de los periodos de ajuste en el tiempo).

Otro parámetro que se puede calcular para una opción es la sensibilidad del precio al tipo de interés, y esta se representa con la letra griega **RHO**, matemáticamente es la derivada parcial de la prima con respecto al tipo de interés, pero a la fecha no es muy utilizada puesto que solo aporta información para opciones a largo plazo.

Nota.- Cabe señalar que los principales gestores no pueden obedecer a estos parámetros con exactitud, debido a la limitante de tiempo y recursos necesarios para tener una cobertura continua.

Cálculo de las ‘Greeks’.

Como ya se mencionó en la sección anterior, en la práctica son muy utilizadas las derivadas de la ecuación de BS ya que nos dan información sobre las opciones del mercado, a continuación enunciamos un lema necesario para obtener de manera explícita dichas derivadas:

Lema 2 : $S_t N'(d_1) = K e^{-rT} N(d_2)$ con $t = 0$,

Para comprobar que es cierta la igualdad, vemos que es equivalente a:

$$\left(\frac{S_t}{K}\right) e^{rT} = \frac{N'(d_2)}{N'(d_1)} = \exp\left(-\frac{(a-b)^2}{c}\right) / \exp\left(-\frac{(a+b)^2}{c}\right) = \exp\left(\frac{4ab}{c}\right) \quad (\text{D.1})$$

donde $a = \log(S_t/K) + rT$, $b = (1/2)\sigma^2 T$ y $c = 2\sigma^2 T$. Debido a que

$$\frac{4ab}{c} = 2\sigma^2 T [\log(S_t/K) + rT] / 2\sigma^2 T = \log(S_t/K) + rT,$$

entonces se satisface de manera obvia la igualdad D.1.

$$(S_t/K) e^{rT} = \exp[\log(S_t/K) + rT].$$

Cada derivada recibe el nombre de una letra del alfabeto griego ('greeks');

1. **Rho** es la derivada con respecto a la tasa de interés libre de riesgo

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r} = S_t N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} + K T e^{-rT} N(d_2) - K e^{-rT} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r},$$

como $\frac{\partial d_1}{\partial r} = \sqrt{T/\sigma} = \frac{\partial d_2}{\partial r}$, usando el lema anterior, vemos que el primer y tercer sumando del lado derecho se anulan, así que

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r} = K T e^{-rT} N(d_2).$$

2. La derivada con respecto al precio de ejercicio.

$$\frac{\partial C}{\partial K} = S_t N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial K} - e^{-rT} N(d_2) - K e^{-rT} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial K},$$

como $\frac{\partial d_1}{\partial K} = -1/\sigma K \sqrt{T} = \frac{\partial d_2}{\partial K}$, usando el lema anterior, vemos que el primer y tercer sumando del lado derecho se anulan, así que

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -e^{-rT} N(d_2).$$

3. **Theta** (la derivada con respecto al tiempo de madurez);

$$\Theta = -\frac{\partial C}{\partial T},$$

Notemos que,

$$d_{1,2} = \frac{\log(S_t/K)}{\sigma\sqrt{T}} + \left(\frac{r}{\sigma}\right)\sqrt{T} \pm \frac{\sigma}{4\sqrt{T}}$$

$$\frac{\partial d_{1,2}}{\partial T} = \left[\left(\frac{-1}{2}\right) \frac{\log(S_t/K)}{\sigma T^{3/2}} + \left(\frac{r}{2\sigma\sqrt{T}}\right) \right] \pm \frac{\sigma}{4\sqrt{T}}$$

Ahora,

$$\frac{\partial C}{\partial T} = S_t N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial T} + r K e^{-rT} N(d_2) - K e^{-rT} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial T},$$

sustituyendo $\frac{\partial d_{1,2}}{\partial T}$ en la ecuación anterior, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{\partial C}{\partial T} = S_t N'(d_1) \left[2 \left(\frac{\sigma}{4\sqrt{T}} \right) \right] + r K e^{-rT} N(d_2) \\ &= \left(1/2\sqrt{T} \right) S_t \sigma N'(d_1) + r K e^{-rT} N(d_2), \end{aligned}$$

4. **Delta** (la derivada con respecto al subyacente)

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S_t} = N(d_1) + S_t N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_t} - K e^{-rT} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S_t},$$

como $\frac{\partial d_1}{\partial S_t} = 1/\sigma\sqrt{T} S_t = \frac{\partial d_2}{\partial S_t}$ por el lema, se eliminan los dos últimos términos del lado derecho, y

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S_t} = N(d_1).$$

5. **Vega** (la derivada con respecto a la volatilidad)

$$v = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_t N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K e^{-rT} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma},$$

tenemos que

$$\frac{\partial d_{1,2}}{\partial \sigma} = - \left[\frac{\log(S_t/K)}{\sqrt{T}} + r\sqrt{T} \right] \sigma^{-2} \pm \frac{\sqrt{T}}{2},$$

de donde se sigue que:

$$v = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_t \sqrt{T} N'(d_1).$$

Activo financiero (financial asset).- Nombre genérico que se da a las inversiones en títulos, valores (acciones, obligaciones, fondos públicos, bonos), ciertos derechos sobre inmuebles realizables de inmediato (opciones, títulos hipotecarios) ó bien documentos expresivos de créditos, cupones de subscripción preferentes, etc. Su precio es el valor actual de los flujos de caja operados: intereses o cupones y principal.

Activo libre de riesgo (free risk asset).- Es aquel activo financiero cuyos intereses y principal serán pagados con toda certeza.

Arbitraje (arbitrage).- Compraventa simultánea de títulos en dos o más plazas para aprovechar la diferencia de precios entre unas y otras.

Butterfly.- Es un riesgo limitado, que esta diseñado para tener una gran probabilidad de obtener un beneficio limitado cuando la volatilidad futura del subyacente se espera que sea inferior a la volatilidad implícita.

Call europeo (european call option).-Es un contrato que confiere al poseedor de la opción el derecho, pero no la obligación de comprar cierta cantidad de un activo por un precio fijo acordado de antemano, conocido como precio de ejercicio K (strike), a una fecha futura prefijada, la cual se llama tiempo de maduración T.

Cerca del dinero (Close The Money).- Es cuando la diferencia entre el precio de ejercicio y el subyacente es muy cercana a cero, independientemente de que la diferencia sea positiva o negativa.

Cobertura (hedging) .- Con ella se pretende la reducción del riesgo que supone mantener una posición en algún tipo de activo. Puede tratarse de cubrir el riesgo de tipos de interés, de cambios de divisas, etc. Consiste en tomar una posición en algún instrumento financiero (opciones, futuros, etc.) cuyo comportamiento sea opuesto al de la variable (precios, cotizaciones, etc.) que se quiere cubrir. Como solamente existen opciones y futuros sobre determinados instrumentos, a veces se produce un riesgo de cobertura al

no poder cubrir la posición completamente. Se llama corta o larga dependiendo del tipo de posición que se quiera cubrir.

Dividendo (dividend).- El dividendo activo es la cantidad de dinero que, al distribuir los beneficios una compañía corresponde a cada acción. En UK se le llama así a los intereses que pagan los bonos del tesoro.

Dentro del dinero (In The Money).- Indica que el precio de ejercicio es menor al precio de mercado del subyacente, por lo que de mantenerse así hasta el vencimiento se obtendría una ganancia. En caso de que esta diferencia sea amplia se le llama *profundamente dentro del dinero (Deep In The Money)*.

En el dinero (At The Money).- Ocurre cuando la diferencia entre el precio del subyacente y el de ejercicio es igual a cero.

Estocástico (stochastic).-Proceso cuya evolución en el tiempo es aleatoria, tal como la secuencia de las tiradas de un dado.

Fuera del dinero (Out The Money).- Sucede cuando el precio de ejercicio es mayor al precio de mercado del subyacente, por lo que en caso de mantenerse esta condición, la opción no se ejercería. En el supuesto de que esta diferencia fuera muy amplia, se suele llamar *profundamente fuera del dinero (Deep Out The Money)*.

Inflación.- Crecimiento continuo y generalizado de los precios de los bienes y servicios que se expenden en una economía.

Inversión (investment)I.- Es el gasto que se realiza en un proyecto, con la intención de que los flujos de caja compensen el capital invertido. Son cinco los métodos de juzgar la bondad de la inversión: payback, rentabilidad media sobre el valor en libros, tasa interna de rendimiento, índice de rentabilidad media sobre el valor en libros y valor actual neto. Es este último el que mejor mide la creación de valor para los inversionistas.

Liquidación Diaria.- Es la suma de dinero que deberá solicitarse, recibirse y entregarse diariamente por los participantes, según corresponda, y que resulta de la valuación diaria de las posiciones.

Liquidación Extraordinaria.- Es la suma de dinero que se exige ante posibles variaciones intradía en el precio de los subyacentes o incrementos de posiciones de los participantes. Estas liquidaciones deberán cubrirse en un plazo máximo de una hora.

Liquidación a Vencimiento.- Los contratos abiertos al cierre de la negociación en su fecha de vencimiento se liquidarán en especie o en efectivo de acuerdo a las Condiciones Generales de Contratación.

Liquidez (stochastic).- Naturaleza de ciertos activos de los particulares, de las empresas o de las entidades financieras según la cual son transformables en dinero efectivo de forma inmediata.

Martingala (martingale).- Término proveniente del francés, de las calzas utilizadas en la ciudad de Martingale en la Provenza. Se dice que un proceso estocástico es martingala si su valor esperado en el tiempo T coincide con su valor en algún tiempo inicial t .

Mercado (market).- Sitio público destinado permanentemente o en días señalados para vender, comprar o permutar generos. En teoría económica, según el número de oferentes el mercado puede ser de competencia perfecta, de duopolio, oligopolio ó monopolio. Según del tipo de bienes o servicios de que se trate cabe hablar de distintos tipos de mercados: De materias primas (cereales, carnes, algodón, etc.), de metales, de crudos, de divisas, etc. Por el momento de la realización de la transacción, cabe diferenciar los mercados spot o los de futuros.

Moneyness.- Indica la posición de los contratos de acuerdo a su valor intrínseco.

Opción (option).- Es el derecho, no la obligación a comprar o vender un activo, llamado activo subyacente en una fecha futura, por un precio pactado. Atendiendo al momento en que pueden ser ejercidas, serán opciones europeas u opciones americanas. Los parámetros que definen una opción son: la prima o precio que se paga por la opción, el precio de ejercicio, la fecha de ejercicio y el activo subyacente sobre el que se adquiere la opción. El valor de una opción depende del precio de ejercicio, del precio del subyacente y de su volatilidad, del tiempo de madurez y de los tipos de interés.

Opción americana (american option).- Es la que puede ser ejercida en cualquier momento, antes de, o en la fecha de ejercicio.

Opción europea (european option).- Es la que solo puede ser ejercida en la fecha de ejercicio, no antes.

Opción exótica (exotic option).- Todas aquellas que no son estándar, estas opciones son creadas para adaptarse a las necesidades del cliente (riesgo que quieren asumir, rendimiento exigido, coberturas que precisan), a veces es posible diseñar opciones exóticas que no tengan coste inicial y que permitan al poseedor cancelarlas cuando mantenerlas suponga un elevado coste de cobertura.

Posiciones límite.- Es el número máximo de Contratos Abiertos de una misma clase o serie que podrá tener un cliente.

Posiciones opuestas.- Son las posiciones que resultan de integrar Contratos en Posición Larga de una serie con igual número de Contratos en Posición Corta de otra serie, cuando las dos series son de una misma clase.

Perfil de pago (Payoff).- Expresión inglesa referente al periodo de amortización de una deuda o al periodo de recuperación de una inversión.

Precio (price).- Lo que debe darse a cambio de una cosa, expresándose generalmente ese contravalor en unidades monetarias, si bien el trueque es la cantidad de otro bien o servicio. En la economía de mercado, los cambios en los precios constituyen el mecanismo básico que rige la asignación de recursos.

Precio de contado (spot price).- Es el de un bien o activo financiero en el mercado spot por contraposición al que tiene en los mercados de futuros.

Precio de ejercicio (strike price). Es aquel al que puede ejercerse una opción, comprando o vendiendo un activo.

Prima de Riesgo (risk premium). Diferencia entre el rendimiento de un activo concreto y el que se obtendría con un activo libre de riesgo.

Productos financieros(financial products).- Todos los que se mueven en los mercados financieros, desde la deuda pública hasta los pagarés de empresas pasando por bonos, futuros, divisas, etc.

Put europeo (european option).- Es un contrato que confiere al poseedor de la opción el derecho, pero no la obligación de vender cierta cantidad de un activo por un precio fijo acordado de antemano (precio de ejercicio) K , a una fecha futura prefijada T .

Replicación (replication).- En finanzas es la técnica que consiste en la adquisición de un portafolio conformado por activos adecuados, que tome el mismo valor que el de un activo dado en ciertos instantes de tiempo.

Riesgo (risk).- En un mercado financiero es la parte atribuida al azar y que puede conducir a una pérdida de capital.

Stock (acervo).- Palabra inglesa empleada comúnmente para hacer referencia al conjunto de mercancías acumuladas en un almacén, y por extensión para cualquier agregado de unidades, incluida la población.

Valor intrínseco de una opción.- es la diferencia entre el precio pactado (*strike price*) con respecto al precio actual del subyacente.

Volatilidad (Volatility).- Es un indicador que pretende cuantificar las probabilidades de cambios bruscos en los precios de los distintos valores de las opciones.

- [1] Avner Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice Hall, 1964
- [2] Bruno Dupire. Pricing with a smile. *Risk*, 7:18-20, January 1994..
- [3] Emanuel Derman and Iraj Kani, Stochastic implied trees: Arbitrage pricing with stochastic term and strike structure of volatility. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1(1):61-110,1998.
- [4] Jim Gatheral. The volatility skew: Arbitrage constraints and asymptotic behaviour. Merrill Lynch, 1999..
- [5] Hardy M. Hodges. Arbitrage bounds on the implied volatility strike and term structures of European-style options. *Journal of Derivatives*, pages 23-35, 1996.
- [6] Patrick Hagan and Diana Woodward. Equivalent black volatilities. *Applied Mathematical Finance*, 6(3):147-157, April 1999.
- [7] Eric Renault and Nizar Touzi. Option hedging and implied volatilities in a stochastic volatility model. *Mathematical Finance*, 6(3):279-302, July 1996.
- [8] Roger W. Lee. Implied Volatility : statics Dynamics, and Probabilistic Interpretation. Noviembre 22, 2002.
- [9] Jesús Chargo-Corona, Carlos Ibarra-Valdez (2006), *A note on Black - Scholes implied volatility*. Physica A 370, pp. 681-688.
- [10] J.Gatheral (2002), *Stochastic Volatility and Local Volatility*. Case Studies in Financial Modelling. Course Notes. Fall Term, 2002 Merrill Lynch Lecture.
- [11] H.Egger

- [12] Lorenzo Bergomi (2004). *Smile Dynamics*. Option Pricing. Cutting edge series. September 2004. RISK MAGAZINE.
- [13] Emanuel Derman (May 26 , 2003), *Laughter in the Dark - The Problem of the Volatility Smile*.
- [14] Jianwei Zhu (2004), *Applications of Fourier Transform to Smile modeling - Theory an Implementation*, Springer, pp.15-19.
- [15] Emanuel Derman - Iraj Kani (1994), *The Volatility Smile an Its Implied Tree*, Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs.
- [16] R. Tamames, S. Gallego (2006), *Diccionario de Economía y Finanzas* (13a ed.). Alianza Editorial.
- [17] Wystup, U.(2006), *FX Options and Structured Products*, Wiley.
- [18] Paul Wilmott (1998),*Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering*, John Wiley & Sons.
- [19] Gerardo Arregui Ayastui(2004), *Los Modelos Implícitos de Valoración de Opciones*, Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea.
- [20] Black F and Scholes M 1973 The pricing of options and corporate *liabilities J. Polit. Econ.* 81 637–59
- [21] Derman E and Kani I 1994 Riding on a smile *RISK* 7 32–9
- [22] Dupire B 1994 Pricing with a smile *RISK* 7 18–20
- [23] Lagnado R and Osher S 1997 A technique for calibrating derivative security pricing models: numerical solution of the inverse problem *J. Comput. Finance* 1 13–25
- [24] Bouchouev I and Isakov V 1999 Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets *Inverse Problems* 15 R95–R116
- [25]
- [26]
- [27] Copeland T and Antikarov V (2001), *Real Options. A Practitioner's Guide*, ed. Texere, Nueva York.
- [28] Hutchinson, J.Lon A and Poggio, T. Foecasting wirh artificial neural netwoks: the estate of the art. *Journal of finance*, 49, 88-89
- [29] *L.Hörmander(1983): The Analysis y Linear Partial Differential Operators, Vol I; Springer*