



---

**Universidad Autónoma Metropolitana  
Unidad Iztapalapa**

---

**Análisis de Estabilidad y Estabilización de una  
Clase de Cuasipolinomios con  
dos Términos Trascendentales**

---

Tesis que presenta  
**L.M. Francisco Iván Medina Dorantes**

Para obtener el grado de  
**Maestro en Ciencias en Matemáticas  
Aplicadas e Industriales**

Directores de tesis  
**Dr. Baltazar Aguirre Hernández  
Dr. Raúl Villafuerte Segura**

Ciudad de México  
Septiembre de 2016



---

# Dedicatoria

---

Esta tesis está dedicada a mi familia, mis amigos, mis compañeros y mis profesores,  
por creer en mí y por ayudarme a alcanzar mis metas.

---

## Agradecimientos

---

A mis Padres, por apoyarme de forma incondicional a lo largo de mi carrera, estaré siempre agradecido.

A mis asesores de tesis, Dr. Baltazar Aguirre Hernández y Dr. Raúl Villafuerte Segura, por permitirme trabajar en este proyecto. Su paciencia, su motivación, sus enseñanzas y sus consejos han sido muy valiosos para mí.

A mis compañeros y amigos de la UAM-I, Alexandra, Marco, Belem, Isabel, Samuel, Alan, Angélica, Emiliano y Felipe, por acompañarme en esta gran aventura y por su valiosa amistad.

A mis compañeros y amigos de la UAEH, Tere, Miguel, Omar, Mario y Gildardo, por su apoyo durante mi estancia en el estado de Hidalgo.

A mis sinodales, Dr. José Héctor Morales Bárcenas y Dr. Gilberto Ortega Ochoa, por sus valiosas observaciones, sugerencias y consejos acerca de este trabajo.

Al CONACYT, por su apoyo económico.

Gracias.  
Francisco Iván Medina Dorantes

---

## Resumen

---

En el presente trabajo de investigación se estudian la  $\sigma$ -estabilidad y la  $\sigma$ -estabilización de plantas de primer y segundo orden con retardo, utilizando controladores de tipo Proporcional Integral Retardado (PIR) como alternativa a los controladores clásicos de tipo Proporcional Integral Derivativo (PID). La clase de planta estudiada en lazo cerrado con la ley de control PIR propuesta resulta ser un sistema con dos retardos, un retardo inherente de la planta y un retardo en el controlador utilizado para  $\sigma$ -estabilizar.

El análisis de  $\sigma$ -estabilidad del sistema en lazo cerrado se lleva a cabo en el dominio de la frecuencia, por medio del análisis de la ubicación de las raíces de su correspondiente función característica, que en el caso de sistemas con retardo resultan ser funciones analíticas con términos polinomiales y exponenciales, llamados cuasipolinomios. En particular un sistema con dos retardos requiere el análisis de un cuasipolinomio con dos términos exponenciales.

Como resultado de la investigación se obtiene un conjunto de reglas básicas para sintonizar un controlador de tipo PIR, y así  $\sigma$ -estabilizar el sistema en lazo cerrado. Los resultados teóricos obtenidos son ejemplificados vía simulación y vía experimentación sobre una plataforma experimental térmica. También, se presenta una comparación con una ley de control de tipo PID.

---

# Abstract

---

In this research, the  $\sigma$ -stability and  $\sigma$ -stabilization of first and second order plants with time-delay, using Proportional Integral Retarded (PIR) controllers is studied. The closed-loop system with the class of plant studied and a PIR controller results a system with two time-delays, one time-delay inherent of the plant and other in the controller used to  $\sigma$ -stabilize.

The  $\sigma$ -stability and  $\sigma$ -stabilization analysis of the closed loop system in the frequency domain is performed, by analyzing the roots location of its corresponding characteristic function. For the case of time delay systems, the characteristic function is an analytic function with polynomial and exponential terms, well-known as quasi-polynomial. In particular a system with two delays requires analysis of a quasi-polynomial with two exponential terms.

As a result of the research, a set of basic rules is provided to tune a PIR controller to  $\sigma$ -stabilize the closed-loop system. The theoretical results obtained are exemplified via simulation and via experimentation using a thermal experimental platform. Also, a comparison with a PID controller is presented.

---

# Índice General

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Planteamiento del Problema . . . . .	2
1.3. Justificación . . . . .	4
1.4. Objetivos . . . . .	5
1.4.1. Objetivo General . . . . .	5
1.4.2. Objetivos Específicos . . . . .	5
1.5. Hipótesis . . . . .	6
1.6. Metodología . . . . .	6
1.7. Organización de la Tesis . . . . .	7
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>9</b>
2.1. Teoría de Control . . . . .	9
2.1.1. Plantas de Primer y Segundo Orden . . . . .	11
2.1.2. Controlador PID . . . . .	12
2.2. Sistemas con Retardo . . . . .	13
2.2.1. Plantas de Primer y Segundo Orden con Retardo . . . . .	15
2.2.2. Controlador PIR . . . . .	16
2.2.3. Estabilidad de Sistemas con Retardos . . . . .	16
2.3. Efecto Estabilizador del Retardo . . . . .	22
2.4. Método de $D$ -particiones . . . . .	23
2.5. Conclusiones del Capítulo . . . . .	28
<b>3. Resultados Principales</b>	<b>29</b>
3.1. Sistemas de Primer Orden . . . . .	29
3.1.1. Máxima Cota de Decaimiento Exponencial . . . . .	39
3.2. Sistemas de Segundo Orden . . . . .	51

3.2.1. Máxima Cota de Decaimiento Exponencial . . . . .	58
3.3. Conclusiones del Capítulo . . . . .	63
<b>4. Implementación de Resultados</b>	<b>64</b>
4.1. Simulaciones . . . . .	65
4.2. Experimentos . . . . .	71
4.3. Conclusiones del Capítulo . . . . .	73
<b>5. Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>74</b>



---

# Índice de Figuras

---

2.1. Esquema de un sistema SISO. . . . .	10
2.2. Sistema en lazo cerrado. . . . .	10
2.3. Sistema en lazo cerrado el dominio de la frecuencia. . . . .	11
2.4. Acciones de un controlador PID. . . . .	12
2.5. Sistema masa-resorte-amortiguador. . . . .	22
2.6. Raíces de la ecuación (2.26). . . . .	23
2.7. Regiones de estabilidad del cuasipolinomio (2.28). . . . .	26
2.8. Regiones de estabilidad del cuasipolinomio (2.28). . . . .	26
2.9. Regiones de $\sigma$ -estabilidad del cuasipolinomio (2.28). . . . .	27
3.1. Planta de primer orden con retardo y controlador PIR en lazo cerrado. . . . .	30
3.2. Conjunto frontera de estabilidad de (3.3) en el plano $h$ - $k_r$ . . . . .	32
3.3. Determinación de la región de estabilidad de (3.3) en el plano $h$ - $k_r$ . . . . .	33
3.4. Raíces de (3.3), en las regiones indicadas en la Figura 3.3. . . . .	33
3.5. Regiones de $\sigma$ -estabilidad de (3.3). . . . .	38
3.6. Detalle de las regiones de $\sigma$ -estabilidad de (3.3). . . . .	39
3.7. Curvas paramétricas en el plano $h$ - $k_r$ , para distintos valores de $\sigma$ . . . . .	41
3.8. Raíces del cuasipolinomio (3.3), para los puntos señalados en la Figura 3.7. . . . .	42
3.9. Raíces del cuasipolinomio (3.3), para los puntos señalados en la Figura 3.7. . . . .	43
3.10. Salida del sistema en lazo cerrado para diferentes valores de $\sigma$ , los valores de $h$ y $k_r$ son tomados de acuerdo a la Figura 3.7. . . . .	46
3.11. Raíces de (3.3), de acuerdo a la Proposición 6, con $\sigma = 1$ , para distintos valores de $k_i$ . . . . .	49
3.12. Valor de $k_p$ en el intervalo $(k_{i,inf}, k_{i,sup})$ , en la proposición 6. . . . .	50
3.13. Valor de $h$ en el intervalo $(k_{i,inf}, k_{i,sup})$ , en la proposición 6. . . . .	50
3.14. Diagrama de una planta de segundo orden con retardo y un controlador PIR en lazo cerrado. . . . .	51

3.15. Conjunto frontera de estabilidad de (3.40) en el plano $h-k_p$ . . . . .	53
3.16. Región estable de (3.3). . . . .	54
3.17. Raíces de (3.40), en las regiones indicadas en la Figura 3.16. . . . .	54
3.18. Curvas de la frontera de $\sigma$ -estabilidad del cuasipolinomio (3.40). . . . .	56
3.19. Regiones de $\sigma$ -estabilidad de (3.40). . . . .	57
3.20. Detalle de las regiones de $\sigma$ -estabilidad de (3.40). . . . .	58
3.21. Valor de $k_p$ en el intervalo $(k_{i,inf}, k_{i,sup})$ , en la proposición 12. . . . .	61
3.22. Valor de $h$ en el intervalo $(k_{i,inf}, k_{i,sup})$ , en la proposición 12. . . . .	62
4.1. Plataforma experimental Quanser HVAC. . . . .	64
4.2. Esquema de un sistema de ventilación y calefacción. . . . .	65
4.3. Sistema en lazo cerrado, con un controlador PIR. . . . .	65
4.4. Sistema en lazo, con un controlador PID. . . . .	66
4.5. Regiones de estabilidad para la plataforma experimental. . . . .	67
4.6. Temperatura de la planta en simulación (sin ruido). . . . .	68
4.7. Señal de control en simulación (sin ruido). . . . .	68
4.8. Error de seguimiento en simulación (sin ruido). . . . .	69
4.9. Temperatura de la planta en simulación (con ruido). . . . .	69
4.10. Señal de control en simulación (con ruido). . . . .	70
4.11. Error de seguimiento en simulación (con ruido). . . . .	70
4.12. Temperatura de la planta en los experimentos. . . . .	71
4.13. Señal de control en los experimentos. . . . .	72
4.14. Error de seguimiento en los experimentos. . . . .	72

# Capítulo 1

---

## Introducción

---

Los retardos están presentes en gran cantidad de sistemas dinámicos que surgen en diversas áreas como física, biología, economía, finanzas, entre otras [5], [9], [49], [53]. Su presencia se debe típicamente a tiempos no triviales en procesos tales como la adquisición de información, análisis de datos, toma de decisiones, entre otros. Estrictamente hablando, la mayoría de los sistemas reales presentan retardos en su dinámica, aunque no sean perceptibles a simple vista. La importancia del estudio de esta clase de sistemas se debe a que los retardos pueden afectar a la dinámica de un sistema de forma significativa [5], [32].

Comúnmente se piensa que los retardos sólo pueden inducir un mal desempeño. Sin embargo, los retardos pueden ser empleados para garantizar un comportamiento deseable en la respuesta de un sistema, mediante la inclusión de una acción retardada, ver [40], [30].

En el marco de la teoría de control, un controlador con acción retardada ha demostrado ser una eficiente alternativa al empleo de leyes de control clásicas que emplean una acción derivativa. En el presente trabajo de investigación se estudia una clase de sistemas con dos retardos. Derivado de este análisis se obtiene una metodología para el diseño y la sintonización de controladores con una acción retardada para la estabilización de plantas de primer y segundo orden con un retardo.

### 1.1. Antecedentes

A pesar de que se ha desarrollado y fortalecido ampliamente la teoría de control, surgiendo algoritmos cada vez más sofisticados, es innegable que el controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) sigue siendo el controlador más utilizado en la industria, incluso para plan-

tas con retardo [34]. Esto quizás se deba a la simplicidad de su estructura y su eficiencia, además de que satisface la mayoría de los requerimientos de la industria [34]. Se estima que hasta la década pasada el 90 % de los procesos industriales empleaban controladores PID y sus variantes [2].

Sin embargo, la implementación de una acción derivativa suele amplificar el ruido existente en los instrumentos de medición [30], además de requerir un instrumento para medir la velocidad o en su defecto un algoritmo para estimar el valor de la derivada. Una forma de resolver el problema de la amplificación de ruido es el empleo de filtros pasa altas como se propone en [23], sin embargo, esto puede incrementar la complejidad del diseño del controlador. Aunque en un principio la acción derivativa puede omitirse, el controlador puede tener ciertas limitantes de convergencia que son compensadas con la acción derivativa [35].

Una alternativa al uso de una acción derivativa es el empleo de una acción retardada. El empleo de retardos para estabilizar un sistema ha sido estudiado previamente en [1], [54], [55], [56]. Años más tarde, se mostró que además de estabilizar, el empleo de retardos en una ley de control no amplifica el ruido presentado en los aparatos de medición, a diferencia de las leyes de control clásicas que emplean una acción derivativa [30].

## 1.2. Planteamiento del Problema

Un controlador Proporcional Integral Derivativo tiene la forma siguiente

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \dot{e}(t), \quad (1.1)$$

donde  $e(t) = r(t) - y(t)$ , con  $y(t)$  es la señal de salida de la planta y  $r(t)$  es la señal de referencia; y  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  son llamadas la ganancias proporcional, la ganancia integral y la ganancia derivativa, respectivamente. Al reemplazar el término derivativo con un término retardado, se obtiene el siguiente controlador, llamado controlador PIR

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_r e(t - h), \quad (1.2)$$

donde  $k_i$ ,  $k_p$  y  $k_r \in \mathbb{R}$  son llamadas ganancias proporcional, integral y retardada, respectivamente, y  $h > 0$  es el retardo de la acción retardada. La función de transferencia para este controlador es

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_r e^{-hs}. \quad (1.3)$$

Considere ahora una planta con la función de transferencia siguiente

$$G(s) = \frac{K}{p(s)} e^{-\theta s}, \quad (1.4)$$

donde  $K > 0$ ,  $\theta > 0$  y  $p(s)$  es un polinomio de grado uno, en el caso de una planta de primer orden, o de grado dos en el caso de una de segundo orden.

El sistema en lazo cerrado (1.4)-(1.3) tiene la función de transferencia siguiente

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \\ &= \frac{(K k_p s + K k_i) e^{-\theta s} + K k_r s e^{-(\theta+h)s}}{s p(s) + (K k_p s + K k_i) e^{-\theta s} + K k_r s e^{-(\theta+h)s}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Por lo tanto la estabilidad del sistema en lazo cerrado (1.4)-(1.3) está determinada por la ubicación de las raíces de la ecuación característica, dada por la expresión siguiente

$$q(s) = s p(s) + K (k_p s + k_i) e^{-\theta s} + K k_r s e^{-(\theta+h)s}. \quad (1.6)$$

Suponga que  $\sigma > 0$ , si todas las raíces de la ecuación característica (1.6) están del lado derecho de la abscisa  $-\sigma$ , entonces la salida del sistema en lazo cerrado (1.4)-(1.3) tendrá una cota exponencial con una tasa de decaimiento igual a  $\sigma$ . Se dice que un sistema con esta propiedad es  $\sigma$ -estable.

Se plantea el problema de determinar qué ganancias de control  $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_r$  y  $h$ , estabilizan y  $\sigma$ -estabilizan al sistema en lazo cerrado (1.4)-(1.3), con el valor más grande de  $\sigma$  posible. También, se propone obtener una metodología para la sintonización e implementación de controladores PIR, como se ha presentado anteriormente en [57].

### 1.3. Justificación

Anteriormente en los trabajos relacionados a la estabilización de plantas de primer y segundo orden con retardo, se han empleado controladores PID y en gran medida controladores PI, para evitar el uso de la acción derivativa. Se ha visto que una buena alternativa al uso de este tipo de controladores se obtiene al reemplazar la acción derivativa por una acción retardada, logrando un desempeño similar o superior al de un controlador PID. De esta forma un controlador PD puede sustituirse por un controlador PR y un controlador PID por un controlador PIR. Sin embargo, hasta ahora no se ha considerado la situación en la que una planta presenta retardos de manera natural en su dinámica.

Aunque existen resultados acerca de la estabilidad de un sistema con dos o más retardos, aún no se ha considerado a uno de estos retardos como parámetro de estabilización, ni tampoco se ha considerado conjuntamente la  $\sigma$ -estabilidad del sistema. El interés que se tiene en plantas de primer y segundo orden con retardo, se debe a que la mayoría de las plantas que se ocupan en la industria pueden ser modeladas satisfactoriamente como alguno de estos casos.

Además, el análisis se realiza en el dominio de la frecuencia debido a que permite encontrar condiciones necesarias y suficientes de estabilidad. Por lo tanto, es posible determinar el conjunto completo de parámetros que  $\sigma$ -estabilizan un sistema, a diferencia de las técnicas que se utilizan para el análisis de estabilidad en el dominio temporal, que sólo proveen condiciones suficientes de estabilidad que suelen ser muy conservativas y a veces difíciles de implementar.

Aunque actualmente la mayoría de los estudios relacionados con sistemas con retardos se realizan en el dominio del tiempo, algunos trabajos recientes llevados a cabo en el dominio de la frecuencia estudian el problema de estabilizar plantas de primer y segundo orden con retardo empleando controladores PI o PID, [12], [13], [21], [36], [42], [60]. Para el análisis de estabilidad en el dominio de la frecuencia es necesario estudiar la ubicación de las raíces de su correspondiente ecuación característica, que en el caso de sistemas con retardo resultan ser funciones analíticas con términos polinomiales y exponenciales llamadas cuasipolinomios.

Una de las características más destacadas de un cuasipolinomio es que tiene un número infinito de raíces. A diferencia del análisis de estabilidad en el dominio del tiempo, en el dominio de la frecuencia es posible obtener condiciones necesarias y suficientes de estabilidad, esto ha hecho posible encontrar o caracterizar el conjunto de todos los parámetros que estabilizan un sistema en lazo cerrado con una ley de control PI o PID, en plantas de primer y segundo orden con retardo [12], [60].

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo General

Diseñar y sintonizar leyes de control PIR, mediante un análisis en el enfoque frecuencial, para estabilizar y  $\sigma$ -estabilizar plantas de primer y segundo orden con retardo, alcanzando el mayor valor de  $\sigma$  posible.

Para alcanzar este objetivo, se han propuesto los siguientes objetivos específicos, los cuales se consideran necesarios para su consecución.

### 1.4.2. Objetivos Específicos

- Analizar la estabilidad y  $\sigma$ -estabilidad, en el dominio de la frecuencia, de un sistema en lazo cerrado que consta de una planta de primer orden (segundo orden) y un controlador PIR, aplicando métodos existentes en la literatura.
- Encontrar una caracterización del conjunto completo de ganancias de un controlador PIR que estabilizan y  $\sigma$ -estabilizan una planta de primer orden (segundo orden) con retardo.
- Determinar de forma gráfica o de forma analítica, los parámetros de un controlador PIR, que garanticen la  $\sigma$ -estabilidad del sistema en lazo cerrado, para un valor de  $\sigma$  deseado, con la finalidad de establecer reglas para la sintonización del controlador PIR.
- Implementar los resultados teóricos obtenidos, empleando un software de simulación y

posteriormente empleando una plataforma experimental con retardo, para mostrar la factibilidad del uso de controladores PIR en plantas con retardo.

- Comparar los resultados teóricos obtenidos con métodos clásicos disponibles en la literatura, en simulación y experimentación, para verificar si se obtiene algún beneficio con el uso de esta ley de control como alternativa a las leyes de control PID clásicas.

## 1.5. Hipótesis

Un controlador PIR es capaz de estabilizar y  $\sigma$ -estabilizar una planta de primer o segundo orden, a pesar de la presencia de un retardo. Además, esta ley de control puede ser utilizada en la práctica y lograr resultados tan satisfactorios como los obtenidos empleando un controlador PID. Por último, es posible obtener reglas simples para sintonizar un controlador PIR de forma sencilla.

## 1.6. Metodología

La metodología empleada en este trabajo se describe a continuación.

- En primer lugar, se considera una planta de primer (segundo) orden con retardo y una ley de control PIR. Se debe tomar en cuenta la naturaleza de los parámetros de la planta, para no incluir casos innecesarios. El cuasipolinomio característico  $q(s)$ , del sistema en lazo cerrado, se determina con la descripción del sistema en el dominio frecuencial o bien con la descripción del sistema en espacio de estados.
- Para encontrar las regiones de estabilidad se emplea el método de  $D$ -particiones, un método geométrico basado en el hecho de que las raíces del cuasipolinomio característico varían de forma continua en función de los parámetros del sistema. Debido a las limitantes de este método, únicamente se toman en cuenta dos parámetros, manteniendo a los demás como constantes. En esta memoria, se considera a las ganancias  $k_p$  y  $k_i$  como fijas y se trabaja en el plano  $h$ - $k_r$ .

El primer paso de este método consiste en hallar el conjunto frontera de estabilidad, dado por los valores de  $h$  y  $k_r$  en los que existe una raíz sobre el eje Imaginario. En



las regiones delimitadas por el conjunto frontera de estabilidad, el número de raíces inestables es el mismo para cada región, por lo tanto basta con analizar las raíces del cuasipolinomio característico en un punto para determinar la estabilidad o inestabilidad en toda la región.

- Para encontrar las regiones de  $\sigma$ -estabilidad del cuasipolinomio  $q(s)$ , se analiza un nuevo cuasipolinomio, dado por  $q_\sigma(s) := q(s - \sigma)$ , y se repite el procedimiento anterior. Las regiones donde el cuasipolinomio  $q_\sigma(s)$  es estable son las regiones donde el cuasipolinomio  $q(s)$  es  $\sigma$ -estable.
- Se analizan las regiones de estabilidad obtenidas con el fin de hallar un punto en el plano  $h-k_r$  donde se obtenga el valor máximo de  $\sigma$ . De ser posible se determina una fórmula para hallar este punto y el valor de  $\sigma$ , en función de los parámetros del sistema. Finalmente se ocupan los valores obtenidos para sintonizar las ganancias del controlador PIR.

## 1.7. Organización de la Tesis

La tesis está organizada de la forma siguiente:

- En el Capítulo 2 se presentan algunos conceptos y resultados básicos de teoría de control y de sistemas con retardos, haciendo énfasis en el análisis de estabilidad en el dominio de la frecuencia. Se mencionan algunos de los métodos más importantes para análisis de estabilidad en este enfoque. Más adelante se habla acerca del empleo de retardos para  $\sigma$ -estabilizar un sistema. También se explica de forma detallada el método de  $D$ -particiones, el cual ha sido utilizado en trabajos previos directamente relacionados con el controlador PIR.
- En el Capítulo 3 se presenta detalladamente el análisis de estabilidad y  $\sigma$ -estabilidad llevado a cabo para obtener los resultados principales. La primera parte de este capítulo incluye el caso de plantas de primer orden con retardo y en la segunda parte se generalizan los resultados para el caso de segundo orden.

- En el Capítulo 4 se presenta una aplicación de los resultados teóricos obtenidos en el Capítulo 3. Se presentan resultados obtenidos en simulación y posteriormente los resultados de la implementación de un controlador PIR en una plataforma experimental térmica. Asimismo, se presenta una comparación con un controlador PID.
- En el Capítulo 5, se presentan las conclusiones de este trabajo, así como algunas sugerencias para trabajos futuros que sigan esta línea de investigación.

# Capítulo 2

---

## Marco Teórico

---

En este capítulo se presentan algunos tópicos de teoría de control y sistemas con retardo, considerados indispensables en el desarrollo de este trabajo. En la primera sección se introduce el concepto de sistema en lazo cerrado, así como la definiciones de planta y controlador. En la segunda parte se definen formalmente los conceptos de estabilidad y  $\sigma$ -estabilidad en sistemas con retardo, para luego incluir los resultados básicos que se emplean para el análisis de estabilidad de sistemas con retardo lineales. Por ultimo, se presenta un análisis donde se ejemplifica la aplicación del método de  $D$ -particiones, tal como ha sido empleado en [57] para obtener fórmulas de sintonización de una ley de control PR en sistemas de segundo orden libres de retardo. Las referencias principales de este capítulo son [3], [5], [6], [16], [18], [35], [53] y [58].

### 2.1. Teoría de Control

Hoy en día, el control automático sigue siendo una de las herramientas más importantes en la industria, pues está presente en la mayoría de los procesos industriales que involucran el uso de temperatura, electricidad, presión, entre otras variables [35].

En general, el término *sistema* se emplea para hacer referencia a un sistema dinámico, ya sea un vehículo en movimiento o la reacción química de dos sustancias, por mencionar algunos ejemplos. En Teoría de Control, se estudia una clase de sistemas, donde están presentes dos señales; una señal de entrada  $u(t)$  y una señal de salida  $y(t)$ . Además, se asume que la señal de salida está determinada de forma única por la señal de entrada y el estado inicial del sistema, véase la Figura 2.1, en un escenario general,  $u(t)$  y  $y(t)$  pueden tener más de una componente, aunque para los fines que aquí interesan solamente se considera el caso de una componente. Estos sistemas son conocidos como sistemas SISO (siglas del inglés single-input



Figura 2.1: Esquema de un sistema SISO.

single-output).

El término *planta* se refiere a un sistema SISO utilizado para describir un equipo o dispositivo cuya señal de salida requiera ser manipulada. El objetivo de una ley de control es lograr que la variable de salida de una planta se comporte de manera prescrita. Existen dos maneras de controlar a una variable; ya sea por medio de un controlador en *lazo abierto* o por medio de un controlador en *lazo cerrado*. Cuando se lleva a cabo el control en lazo abierto la variable que se quiere controlar se genera únicamente a partir de la variable de entrada. Por ejemplo, si se desea controlar la luminosidad de un lampara, bastará con limitar la cantidad de voltaje actual.

Por otro lado, el control en lazo cerrado se basa en un proceso llamado *realimentación* que en términos generales es en una comparación entre la señal de referencia  $r(t)$  con la señal de salida de la planta  $y(t)$ . La señal de entrada  $u(t)$  de la planta suele estar en términos del error, definido como  $e(t) := r(t) - y(t)$ . En la Figura 2.2 se muestra un esquema natural de un control en lazo cerrado. Se dice que la planta y el controlador forman un *sistema en lazo cerrado*.

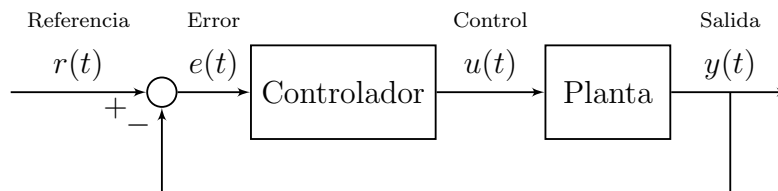


Figura 2.2: Sistema en lazo cerrado.

En teoría de control, se utilizan funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada entre salida. La función de transferencia  $G(s)$  de un sistema SISO se define como

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)},$$

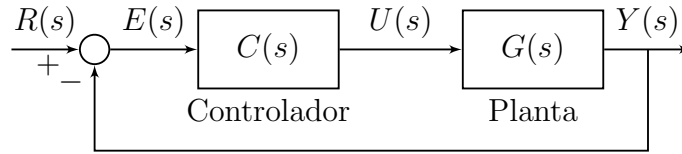


Figura 2.3: Sistema en lazo cerrado el dominio de la frecuencia.

donde  $Y(s)$  y  $U(s)$  son las transformadas de Laplace de las funciones de salida y entrada,  $y(t)$  y  $u(t)$ , respectivamente, considerando condiciones iniciales triviales. De esta forma  $Y(s) = G(s)U(s)$ . Se dice que la función resultante de aplicar la transformada de Laplace a una función en el dominio temporal, es otra función en el dominio de la frecuencia o bien en el dominio frecuencial. Las variables escritas en el dominio de la frecuencia facilitan muchas operaciones en los diagramas de bloques, empleados en el diseño de leyes de control más complejas. En la Figura 2.3, se muestra un esquema de un sistema en lazo cerrado, en términos de las funciones de transferencia de la planta  $G(s)$  y del controlador  $C(s)$ . La función de transferencia del sistema en lazo cerrado de la Figura 2.3, es [35]:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}. \quad (2.1)$$

### 2.1.1. Plantas de Primer y Segundo Orden

En teoría de control, el orden de una planta hace referencia al grado del denominador de su función de transferencia [35]. Habitualmente la función de transferencia de una planta de primer orden se representa de la forma siguiente

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}, \quad (2.2)$$

donde  $K > 0$ , y  $T \neq 0$ . Esta relación de entrada entre salida, en el dominio temporal, está determinada por la ecuación diferencial ordinarias

$$Ty'(t) + y(t) = K u(t), \quad (2.3)$$

Por otro lado, la función de transferencia de una planta de segundo orden general, se puede representar con la función de transferencia

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (2.4)$$

donde  $b \neq 0$ ,  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ . La descripción de esta planta en el dominio temporal está dada por

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b u(t), \quad (2.5)$$

Físicamente, una planta de primer orden puede representar un circuito RC, un sistema térmico, un proceso químico, entre otros sistemas, mientras que una planta de segundo orden suele representar sistemas de tipo oscilatorio, como un sistemas de masa-resorte, un circuitos RLC, por mencionar algunos ejemplos [3].

### 2.1.2. Controlador PID

El controlador PID es indudablemente el controlador más empleado en la práctica. Por lo común se piensa que no se obtienen beneficios significativos al emplear otro tipo de controlador más complejo. Un controlador PID tiene la estructura siguiente

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \dot{e}(t), \quad (2.6)$$

donde  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_d$  son llamadas la ganancias proporcional, la ganancia integral y la ganancia derivativa, respectivamente. El primer sumando en la ecuación (2.6) es conocido como la acción proporcional, el segundo como la acción integral, y el tercero como la acción derivativa. En la Figura 2.4, se representa un escenario hipotético en el cual la salida de una planta sigue

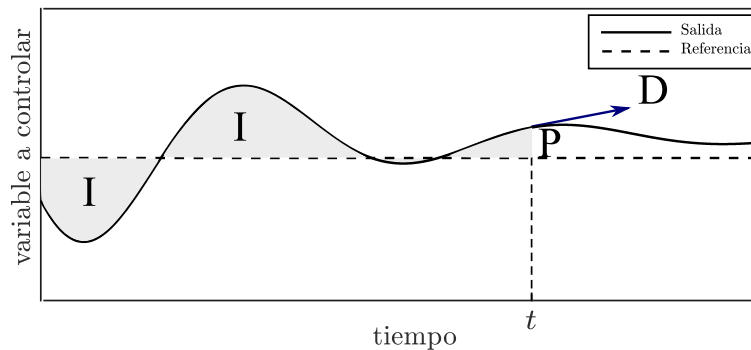


Figura 2.4: Acciones de un controlador PID.

una referencia deseada. De forma intuitiva, las acciones de un controlador PID representan la manipulación del presente, el pasado y el futuro del error de seguimiento (acciones proporcional, integral y derivativa respectivamente).

Un controlador PID tiene la función de transferencia siguiente

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s. \quad (2.7)$$

## 2.2. Sistemas con Retardo

Para el estudio de sistemas con retardo se utiliza el concepto de ecuación diferencial funcional (EDF), el cuál será presentado en esta sección.

La forma tradicional de modelar sistemas dinámicos es por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$

donde la variable  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es conocida como la variable de estado. En este tipo de modelos matemáticos se asume que la derivada está determinada completamente por el estado actual, y por lo tanto la evolución de  $x(t)$  está determinada completamente por el estado inicial  $x(t_0) = x_0$ .

Las definiciones y resultados siguientes son empleados actualmente para trabajar con sistemas con retardo.

Una ecuación diferencial funcional con retardo se define como la relación

$$\dot{x} = f(t, x_t), \quad (2.8)$$

donde  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función dada y  $x_t$  denota a la función definida como

$$x_t := x(t + \xi), \quad \xi \in [-\tau, 0].$$

Aquí  $x_t \in \mathcal{C}$ ,  $\tau > 0$  es un número fijo,  $\mathcal{C} = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  es el espacio vectorial de las funciones continuas que mapean el intervalo  $[-\tau, 0]$  a  $\mathbb{R}^n$ . El espacio vectorial  $\mathcal{C}$ , es un espacio de Banach con la norma  $\|\cdot\|_\tau$ , definida por

$$\|x_t\|_\tau := \sup_{\theta \in [t-\tau, t]} \|x(\theta)\|_2, \quad (2.9)$$

donde  $\|\cdot\|_2$  denota la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ .

Lo anterior implica que el valor de la derivada está en función del tiempo y de la función  $x_t$ . Para cada instante  $t$ , se dice que  $x_t$  es el *estado del sistema* o bien la *variable de estado*. Una solución al problema con condición inicial se define de manera análoga a un problema de valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Definición 1.** [53] Una condición inicial para el sistema (2.8) está dada por

$$\phi := x_{t_0}, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad \phi \in \mathcal{C}, \quad (2.10)$$

donde  $t_0$  es el tiempo inicial y  $\phi$  también recibe el nombre de *función historia*, *estado inicial* o *función inicial*.

**Definición 2.** [53] Una función  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una solución de la ecuación (2.8), con la condición inicial (2.10) si existe un escalar  $\delta > 0$  tal que  $x_t \in \mathcal{C}$  y  $x(t)$  satisface las ecuaciones (2.8) y (2.10), para toda  $t$  en el intervalo  $[t_0, t_0 + \delta]$ . Para denotar esta solución y hacer énfasis en las condiciones iniciales se utiliza la expresión  $x(t; t_0, \phi)$ , o simplemente  $x(t; \phi)$  cuando  $t_0 = 0$ .

**Observaciones:** Cuando se trabaja con sistemas invariantes en el tiempo, comúnmente se asume que  $t_0 = 0$  y se omite el término  $t_0$  en la notación. Se dice que esta clase de sistemas es de dimensión infinita debido a que la variable de estado pertenece a un espacio de dimensión infinita.

En la práctica a veces es necesario ocupar un espacio diferente a  $\mathcal{C}$ , por ejemplo, cuando la función historia no es continua, pero si es continua a trozos, se debe extender el espacio  $\mathcal{C}$ , al menos al espacio de las funciones continuas a trozos.

Si la función  $f(t, \phi)$  en la ecuación (2.8) es continua y satisface localmente una condición de Lipschitz en la variable  $\phi$ , entonces se puede demostrar la existencia y unicidad de la solución de (2.8) con la condición inicial (2.10), así como la dependencia continua en los valores iniciales [49], [53].



Considere ahora el sistema con retardo lineal invariante en el tiempo siguiente

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i), \quad (2.11)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ , son matrices con coeficientes reales y  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ , son los retardos del sistema. Para este ejemplo, la variable de estado pertenece al espacio  $\mathcal{C} = C([- \tau_m, 0], \mathbb{R}^n)$ .

Debido a la linealidad del mapeo  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definido por

$$f(t, \phi) := A_0 \phi(0) + \sum_{i=1}^m A_i \phi(-\tau_i), \quad (2.12)$$

la existencia y unicidad de las soluciones está garantizada para cualquier condición inicial  $\phi \in \mathcal{C}$ , [29].

### 2.2.1. Plantas de Primer y Segundo Orden con Retardo

Ahora considere la presencia de un retardo en una planta de primer orden. En el dominio temporal, esta clase de sistemas se representan mediante la ecuación

$$T y'(t) + y(t) = K u(t - \theta), \quad (2.13)$$

donde  $K > 0$  y  $T > 0$ , como en el caso libre de retardos, mientras que  $\theta > 0$  es el retardo de la planta. Al aplicar la transformada de Laplace, en ambos lados de la ecuación anterior, se tiene que

$$(Ts + s)Y(s) = KU(s)e^{-\theta s}, \quad (2.14)$$

por lo tanto, la función de transferencia de la planta es

$$G(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{Ts + 1}.$$

Análogamente, una planta de segundo orden con retardo se representa como

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = K u(t - \theta), \quad (2.15)$$

donde  $b, a_0, a_1 \in \mathbb{R}, \theta > 0$ . Su respectiva función de transferencia está dada por

$$G(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{s^2 + a_1 s + a_0}.$$

### 2.2.2. Controlador PIR

La estructura de un controlador PIR puede parecer más natural al compararse con un controlador PID. Suponga que se tiene un controlador PID dado por la expresión

$$v(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \dot{e}(t)$$

donde el término derivativo puede ser aproximado como sigue

$$\dot{e}(t) \approx \frac{e(t) - e(t-h)}{h} = \frac{e(t)}{h} - \frac{e(t-h)}{h},$$

Al sustituir la acción derivativa por esta aproximación, se tiene que

$$v(t) \approx \left( K_p + \frac{K_d}{h} \right) e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau - \frac{K_d}{h} e(t-h),$$

es decir un controlador PIR puede considerarse como una aproximación a un controlador PID. No obstante, en lugar de considerar al término con retardo simplemente como parte de una aproximación a una derivada, ahora se propone un controlador PIR donde se tienen, como en el controlador PID, las acciones proporcional e integral, pero la acción derivativa es reemplazada por una acción retardada,

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_r e(t-h). \quad (2.16)$$

donde  $k_i, k_p$  y  $k_r \in \mathbb{R}$  son llamadas ganancias proporcional, integral y retardada, respectivamente, y  $h > 0$  es el retardo de la acción retardada .

### 2.2.3. Estabilidad de Sistemas con Retardos

Típicamente, el análisis de estabilidad de los sistemas con retardos se realiza en el marco de dos enfoques primordiales: Temporal y Frecuencial.

En el dominio temporal, el análisis de estabilidad mediante el enfoque de Lyapunov-Krasovskii para sistemas con retardo (ecuaciones diferenciales funcionales), es una extensión del enfoque clásico de Lyapunov para sistemas libres de retardo (ecuaciones diferenciales ordinarias), en el cuál las funcionales de Lyapunov-Krasovskii se utilizan como una herramienta para determinar la estabilidad en sistemas con retardo de forma similar a las funciones de Lyapunov en sistemas libres de retardo. A continuación las definiciones de estabilidad, estabilidad asintótica y estabilidad exponencial para ecuaciones diferenciales funcionales en el dominio del tiempo son presentadas.

#### Estabilidad en el Dominio del Tiempo

**Observación:** La función  $f$  en la ecuación (2.12), satisface  $f(t, 0) = 0$ . Por consiguiente, la función  $x(t) \equiv 0$  es una solución del sistema (2.11), llamada *solución de equilibrio trivial*, o simplemente *solución trivial*.

**Definición 3.** [53] *La solución trivial de (2.11), es estable si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que*

$$\|\phi\|_\tau < \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, \phi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

**Definición 4.** [53] *La solución trivial de (2.11), es llamada asintóticamente estable, si es estable y para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existe una  $\Delta = \Delta(t_0)$ , tal que*

$$\|\phi\|_\tau < \Delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, \phi) = 0.$$

**Definición 5.** [53] *La solución trivial de (2.11), es llamada estable exponencialmente si existen constantes  $\delta > 0$ ,  $\sigma > 0$  y  $\beta > 1$ , tales que*

$$\|\phi\|_\tau < \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, \phi)\| < \beta \|\phi\|_\tau e^{-\sigma(t-t_0)}, \forall t > t_0.$$

**Definición 6.** [53] *Se dice que un sistema es estable (asintóticamente estable, exponencialmente estable) si su solución de equilibrio trivial es estable (asintóticamente estable, exponencialmente estable).*

El análisis de estabilidad en el dominio temporal no es considerado en este trabajo. El lector interesado en este dominio encontrará interesante consultar la referencia siguiente [25].

### Estabilidad en el Dominio de la Frecuencia

Ahora bien, como se ha mencionado anteriormente, el análisis de estabilidad en el dominio de la frecuencia se basa en el análisis de la función característica. La definición de función característica, como en el caso de los sistemas libres de retardo, puede obtenerse con al menos dos perspectivas equivalentes. Para obtener la primera definición, se sustituye la siguiente función en (2.11)

$$x(t) = e^{st} \nu, \quad \nu \in \mathbb{R}^n / \{0\}, s \in \mathbb{C}, \quad (2.17)$$

entonces se deduce que, si (2.17) es una solución del sistema (2.11), el número  $s$  debe ser una raíz de la función característica.

**Definición 7.** [29] *Se define la función característica del sistema (2.11) como*

$$q(s) = \det \left( s I - A_0 - \sum_{i=1}^m A_i e^{-s\tau_i} \right), \quad (2.18)$$

*asimismo, se define la ecuación característica del sistema (2.11) como  $q(s) = 0$ . Cualquier raíz de la ecuación (2.18), es llamada raíz característica.*

Otra definición de ecuación característica, que es equivalente a la anterior es la siguiente

**Definición 8.** [35] *Dado sistema en lazo cerrado con función de transferencia  $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ , se define su ecuación característica como la ecuación  $D(s) = 0$ .*

Como ejemplo, considere una planta de primer orden y un controlador PID, la función de transferencia (2.3) del sistema en lazo cerrado es

$$H(s) = \frac{K k_p s + K k_i + K k_d s^2}{s (T s + 1) + K k_p s + K k_i + K k_d s^2}. \quad (2.19)$$

Mientras que la función característica de este sistema en lazo cerrado es

$$f(s) = s (T s + 1) + K k_p s + K k_i + K k_d s^2 = 0.$$

Considere ahora el caso de una planta de primer orden con retardo, dada por (2.13) y un controlador PIR dado por (2.16). Sin pérdida de generalidad, suponga que  $r(t) \equiv 0$ , entonces el controlador se reduce a

$$u(t) = -k_p y(t) - k_i \int_0^t y(\tau) d\tau - k_r y(t - h),$$

lo que implica que

$$T \dot{y}(t) + y(t) + K k_p y(t - \theta) + K k_i \int_0^{t-\theta} y(\tau) d\tau + K k_r y(t - \theta - h) = 0.$$

Si se definen  $x_1(t) := y(t)$ , y  $x_2(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau$ , entonces el sistema puede ser representado de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t)/T - K k_p x_1(t - \theta)/T - K k_i x_2(t - \theta)/T \\ &\quad - K k_r x_1(t - \theta - h)/T \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t), \end{aligned} \tag{2.20}$$

por lo que su descripción en espacio de estados es

$$x(t) = A_0 x + A_1 x(t - \theta) + A_2 x(t - \theta - h) \tag{2.21}$$

donde  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ , y

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1/T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -(K k_p)/T & -(K k_i)/T \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -K k_r/T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, en el dominio de la frecuencia, el sistema en lazo cerrado tiene la función de transferencia siguiente

$$F(s) = \frac{(K k_p s + K k_i) e^{-\theta s} + K k_r s e^{-(\theta+h)s}}{T s^2 + s + (K k_p s + K k_i) e^{-\theta s} + K k_r s e^{-(\theta+h)s}} \tag{2.22}$$

La ecuación característica puede obtenerse de acuerdo a la ecuación (2.21), con el determinante de la matriz  $(s I - A_0 - e^{-h s} A_1 - e^{-(\theta-h)s} A_2)$ , o bien con el denominador de la función de transferencia (2.22), lo cual da como resultado en ambos casos

$$q(s) = T s^2 + s + (k_p s + k_i) e^{-\theta s} + k_r s e^{-(\theta+h)s}. \tag{2.23}$$

Cabe mencionar que la presencia de términos exponenciales, implica la existencia de una infinidad de raíces en la ecuación característica, haciendo más difícil el análisis de estabilidad por medio de los métodos clásicos empleados en el dominio de la frecuencia, lo que a su vez dificulta el problema de diseñar y sintonizar sistemas de control con retardo. La función característica de un sistema con retardo es una función entera (analítica en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$ ) y es llamada polinomio exponencial o cuasipolinomio [5]. Algunas de las propiedades de las raíces de funciones enteras son las siguientes [49]:

- A lo más existe un número contable de raíces.
- Toda raíz tiene orden finito.
- El conjunto de raíces no tiene puntos de acumulación finitos.
- Dado  $\gamma \in \mathbb{R}$ , existen a lo más un número finito de raíces características que satisfacen  $\text{Re}(\lambda) > \gamma$ .

Debido a que el cuasipolinomio (2.18) tiene coeficientes reales, las raíces características complejas coexisten en parejas, es decir, un número complejo  $s$  es una raíz de la ecuación característica (2.18) si y sólo sí, el número complejo conjugado  $s, \bar{s}$ , es también una raíz característica, pues  $\overline{q(s)} = q(\bar{s})$ .

**Definición 9.** [53] *Se dice que un cuasipolinomio  $q(s)$  es estable si*

$$\forall s \in \mathbb{C}, q(s) = 0 \Rightarrow \text{Re}(s) < 0.$$

*Una raíz de  $q(s)$  con parte real positiva o cero es llamada raíz inestable.*

En el caso de sistemas libres de retardo, la estabilidad exponencial de un sistema es equivalente a la estabilidad de su polinomio característico. La misma propiedad se satisface para sistemas lineales de la forma (2.11), es decir, un sistema lineal con retardo es exponencialmente estable si y sólo sí su cuasipolinomio característico es estable. Sin embargo esto no es cierto en general para ecuaciones diferenciales funcionales [32].

**Teorema 1.** [49] *Suponga que  $\text{Re}(s) \leq -\sigma$ , para toda raíz característica de (2.18), entonces existe una constante  $L > 0$ , tal que*

$$\|x(t, t_0, \phi)\| < L \|\phi\|_\tau e^{-\sigma(t-t_0)}, \quad \forall t > t_0, \phi \in \mathcal{C}.$$

**Definición 10.** *Se dice que un sistema que satisface las condiciones del teorema 1 es un sistema  $\sigma$ -estable.*

**Definición 11.** [29] *Sea  $p \in \mathbb{R}^k$  un vector que representa el conjunto de parámetros del sistema (2.11). El espacio  $\mathbb{R}^k$  es llamado espacio paramétrico del sistema (2.11). Suponga que  $q(s; p)$  denota el cuasipolinomio característico del sistema (2.11). El conjunto de todos los valores  $p \in \mathbb{R}^k$ , donde  $q(s; p)$  es estable es llamado el dominio de estabilidad o bien región de estabilidad del sistema (2.11). El conjunto de todos los valores  $p \in \mathbb{R}^k$  donde  $q(s; p)$  tiene al menos una raíz en el eje imaginario (abscisa  $-\sigma$ ) es llamado conjunto frontera de estabilidad ( $\sigma$ -estabilidad) del sistema (2.11).*

Existen diversos métodos para determinar la estabilidad de un cuasipolinomio en el enfoque frecuencial, entre los más utilizados se encuentran:

- El criterio de Pontryagin [5] [53], se basa en una generalización del teorema de Hermite-Biehler que incluye el caso de cuasipolinomios.
- El criterio de Chebotarev, que es la más directa generalización del criterio de Routh-Hurwitz para cuasipolinomios [53].
- El método de  $D$ -particiones, se basa en la construcción de un mapa de estabilidad en el espacio paramétrico [31], [39], [53].
- El método de  $\tau$ -particiones, similar al anterior, pero es utilizado solamente en sistemas en donde se tiene un solo retardo.
- El criterio de Nyquist, y el criterio de Michailov, son frecuentemente utilizados como criterios geométricos para determinar la estabilidad de sistemas con retardo [53].

Además de los mencionados anteriormente, también existen diversas combinaciones de los métodos anteriores en la literatura [39], [53].

## 2.3. Efecto Estabilizador del Retardo

Considere el sistema masa-resorte-amortiguador que se muestra en la Figura 2.5. El modelo matemático de este sistema está dado por la ecuación

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = u(t), \quad (2.24)$$

donde  $m > 0$  es la masa del objeto,  $c \geq 0$  es el coeficiente de amortiguamiento, y  $k > 0$  es la constante de Hooke. En este sistema  $x(t)$  representa la distancia del objeto al lugar donde se sujeta, mientras que  $u(t)$  representa una señal de entrada o bien una acción externa. Es bien sabido que la estabilidad de este sistema está determinada por las raíces de su ecuación característica.

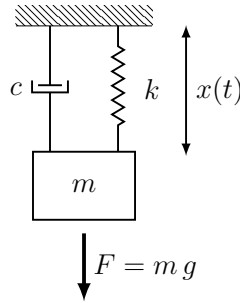


Figura 2.5: Sistema masa-resorte-amortiguador.

Suponga por ahora que  $c = 0$  y que  $u(t) = k_p x(t)$  es una acción proporcional a  $x$ . Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (2.24), se tiene que la ecuación característica del sistema

$$p(s) = m s^2 + k - k_p = 0.$$

Observe que en el lado derecho de la ecuación anterior se tiene un polinomio de grado dos en  $s$ , cuyas únicas raíces son

$$s_1 = \sqrt{-k + k_p}, \quad s_2 = -\sqrt{-k + k_p},$$

lo que significa que este sistema no será estable para ningún valor de  $k_p$ , pues para ningún valor de  $k_p$  ambas raíces tendrán parte real negativa.

Ahora considere el mismo sistema pero con una acción retardada, es decir  $u(t)$  es proporcional al valor de  $x$  un instante de tiempo  $h$  atrás, en este caso se tiene el sistema siguiente



$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = k_r x(t - h), \quad h > 0, \quad (2.25)$$

en este caso, como en el anterior, la estabilidad está determinada por las raíces de su función característica dada por

$$q(s) = m s^2 + k - k_r e^{-\lambda h} = 0. \quad (2.26)$$

Las raíces características del sistema (2.25), para  $m = 1$ ,  $c = 0$ ,  $g = 9.8$ ,  $k_r = 1$  y  $h = 0.1$ , se muestran en la Figura 2.6. Debido a que todas estas raíces tienen parte real negativa, el sistema será estable.

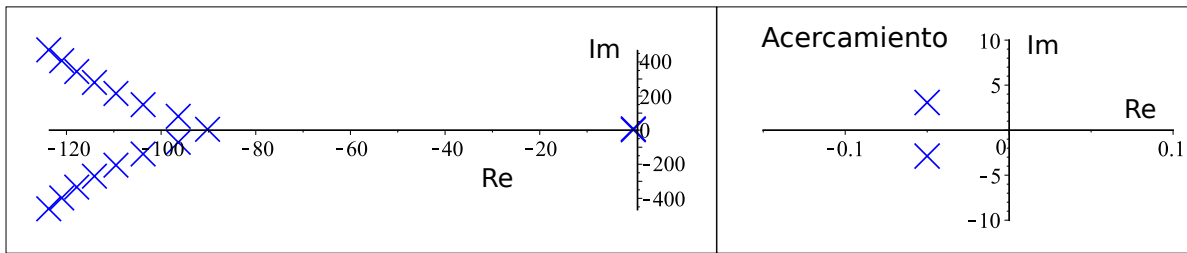


Figura 2.6: Raíces de la ecuación (2.26).

Por lo tanto, es posible estabilizar un sistema con una acción retardada, a pesar de que no es posible estabilizar el sistema con una acción proporcional. Naturalmente surgen algunas preguntas acerca del uso de un término retardado para estabilizar un sistema:

- ¿qué valores de la ganancia retardada  $k_r$  y del retardo  $h$  hacen que el sistema es estable?
- ¿qué valores de  $h$  y  $k_r$  son los mejores para estabilizar un sistema?

## 2.4. Método de $D$ -particiones

Este método fue propuesto por Neimark en 1949 [31] y está basado en el hecho de que las raíces características varían de forma continua con respecto a los parámetros del sistema, incluyendo los retardos. Los resultados que se presentan en esta sección, pueden encontrarse en [57].

Considere un sistema de segundo orden con un retardo, dado por la ecuación

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\nu\dot{y}(t) + \nu^2 y(t) = b k_r y(t - h), \quad (2.27)$$

donde  $\delta, \nu, b \in \mathbb{R}^+$  son parámetros conocidos y  $k_r \neq 0$ , y  $h > 0$  parámetros empleados para estabilizar. Esta ecuación se emplea para modelar una gran variedad de sistemas físicos, entre ellos el sistema 2.24, [35].

$$q(s) = s^2 + 2\delta\nu s + \nu^2 - b k_r e^{-hs}. \quad (2.28)$$

El siguiente paso consiste en encontrar el conjunto frontera de estabilidad, para ello es necesario encontrar los valores de los parámetros donde existen raíces sobre el eje imaginario, es decir

$$q(0) = 0 \text{ y } q(i\omega) = 0, \text{ para } \omega \in \mathbb{R},$$

el resultado será un conjunto de ecuaciones que describen la frontera de estabilidad, que dividen el espacio paramétrico en regiones. Cada región se caracteriza por tener el mismo número de raíces con parte real positiva [31]. Por lo que basta con verificar la estabilidad únicamente para un punto que represente la región. La estabilidad se verifica calculando de forma numérica las raíces del cuasipolinomio característico.

Por otro lado, además de la estabilidad del sistema, si se requiere que el sistema sea  $\sigma$ -estable, se considera ahora el siguiente cuasipolinomio

$$\begin{aligned} q_\sigma(s) &:= q(s - \sigma) \\ &= (s - \sigma)^2 + 2\delta\nu(s - \sigma) + \nu^2 - b k_r e^{-(s-\sigma)h}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

La estabilidad del cuasipolinomio (2.29) implica la  $\sigma$ -estabilidad del cuasipolinomio (2.28), pues un número  $z$  es una raíz de  $q_\sigma$ , si y sólo si  $z - \sigma$  es una raíz de  $q$ , además,  $\text{Re}(z) < 0$  si y sólo si  $\text{Re}(z - \sigma) < -\sigma$ , por lo tanto, las raíces de  $q_\sigma$  tienen parte real menor que cero si y sólo si las raíces de  $q$  tienen parte real menor que  $-\sigma$ . La proposición siguiente caracteriza el conjunto frontera de  $\sigma$ -estabilidad.

**Proposición 1.** *Sea  $\sigma \geq 0$ . Las curvas que delimitan las regiones de  $\sigma$ -estabilidad del sistema (2.27), están dadas por*

$$k_r = \frac{\sigma^2 - 2\delta\nu\sigma + \nu^2}{b e^{\sigma h}}, \quad (2.30)$$

cuando  $s = 0$  es una raíz de (2.29). Mientras que las curvas paramétricas que delimitan las regiones de  $\sigma$ -estabilidad, cuando  $s = \pm \omega i$  ( $\omega > 0$ ) es una raíz de (2.29), son

$$h(\omega) = \frac{\left( \arctan \left( \frac{2\omega\sigma - 2\delta\nu\omega}{-\omega^2 + \sigma^2 - 2\delta\nu\sigma + \nu^2} \right) + n\pi \right)}{\omega}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.31)$$

$$k_r(\omega, h(\omega)) = 2 \frac{\omega(\sigma - \delta\nu)}{b e^{\sigma h} \operatorname{sen}(\omega h)}, \quad (2.32)$$

**Demostración:** para la primera ecuación del resultado anterior suponga que  $s = 0$  es una raíz de (2.29)

$$q(0) = \sigma^2 - 2\delta\nu\sigma + \nu^2 - bk_r e^{h\sigma},$$

donde se obtiene la ecuación (2.38), despejando  $k_r$  de la ecuación anterior.

Para obtener las ecuaciones (2.31) y (2.32), se sustituye la raíz  $s = \omega i$  en la ecuación (2.29) obteniendo

$$q_\sigma(i\omega) = (i\omega - \sigma)^2 + 2\delta\nu(i\omega - \sigma) + \nu^2 - bk_r e^{-(i\omega - \sigma)h} = 0,$$

lo cual es equivalente a

$$\operatorname{Re}(q_\sigma(\omega i)) = -2\delta\nu\sigma + \nu^2 - \omega^2 + \sigma^2 - bk_r e^{h\sigma} \cos(h\omega) = 0, \quad (2.33)$$

$$\operatorname{Im}(q_\sigma(\omega i)) = 2\delta\nu\omega - 2\omega\sigma + bk_r e^{h\sigma} \operatorname{sen}(h\omega) = 0. \quad (2.34)$$

lo que implica que

$$\tan(h\omega) = \frac{2\delta\nu\omega - 2\omega\sigma}{-2\delta\nu\sigma + \nu^2 - \omega^2 + \sigma^2},$$

la ecuación (2.31) se obtiene al despejar  $h$  en la ecuación anterior, mientras que la ecuación (2.32) se obtiene al despejar  $k_r$  en la ecuación (2.34). □

Las ecuaciones paramétricas (2.31) y (2.32) definen una partición del plano  $h$ - $k_r$  en zonas, donde, para cada punto de la zona, el cuasipolinomio (2.28) tiene el mismo número de raíces con parte real positiva. Por lo tanto, determinar la  $\sigma$ -estabilidad de (2.28) en una zona basta

con determinar la  $\sigma$ -estabilidad de (2.28) en un punto cualquiera del interior de la zona. En la Figura 2.7 se muestran las zonas que determinan las curvas paramétricas, para  $\sigma = 0$  (región estable), con  $b = 1, \nu = 2.3968$  y  $\delta = 0.0038$ . Mientras que en la Figura 2.8 se muestran las raíces de la ecuación característica para un punto representante de cada región. La región estable es señalada en la Figura 2.7 en color azul.

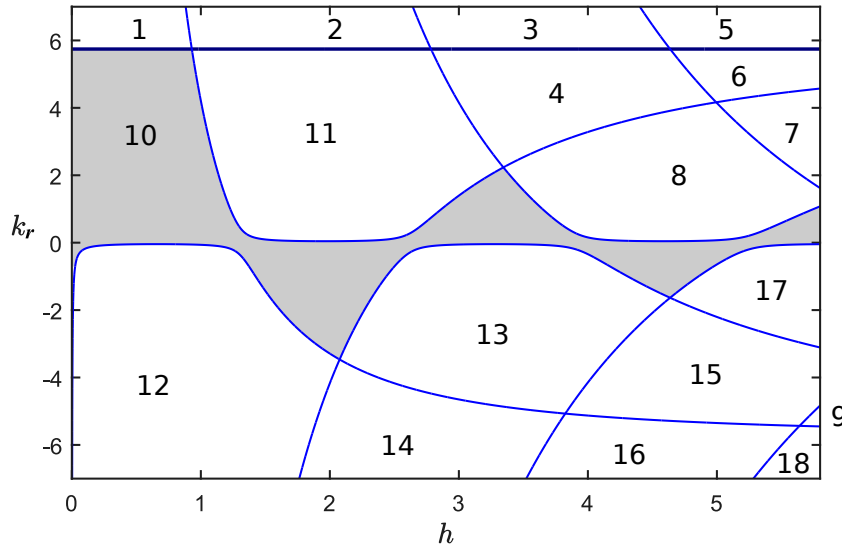


Figura 2.7: Regiones de estabilidad del cuasipolinomio (2.28).

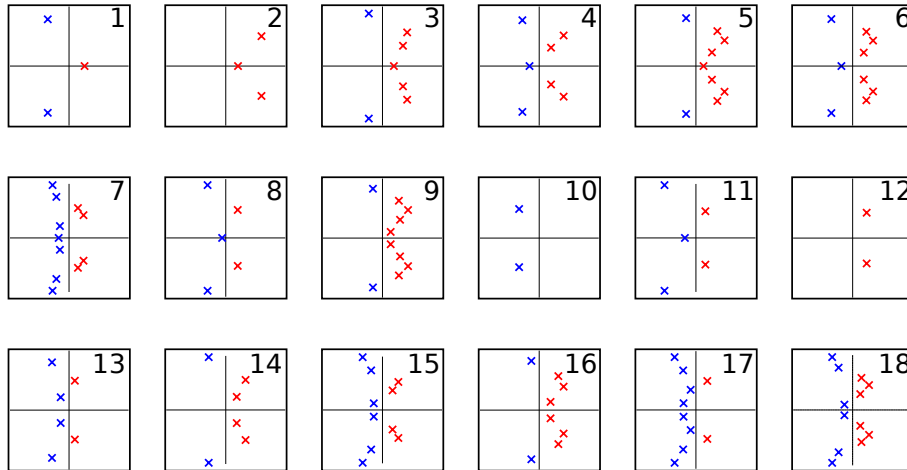


Figura 2.8: Regiones de estabilidad del cuasipolinomio (2.28).

En la Figura 2.9, se observa que las regiones de  $\sigma$ -estabilidad están contenidas en la región de estabilidad y que dichas regiones colapsan en varios puntos, para distintos valores de  $\sigma$ . La región de estabilidad más grande colapsa en el punto señalado con un punto de color

rojo. Esto significa que los valores de  $h$  y  $k_r$  que hacen que las raíces se encuentren más a la derecha posible del eje imaginario están dados por las coordenadas de este punto.

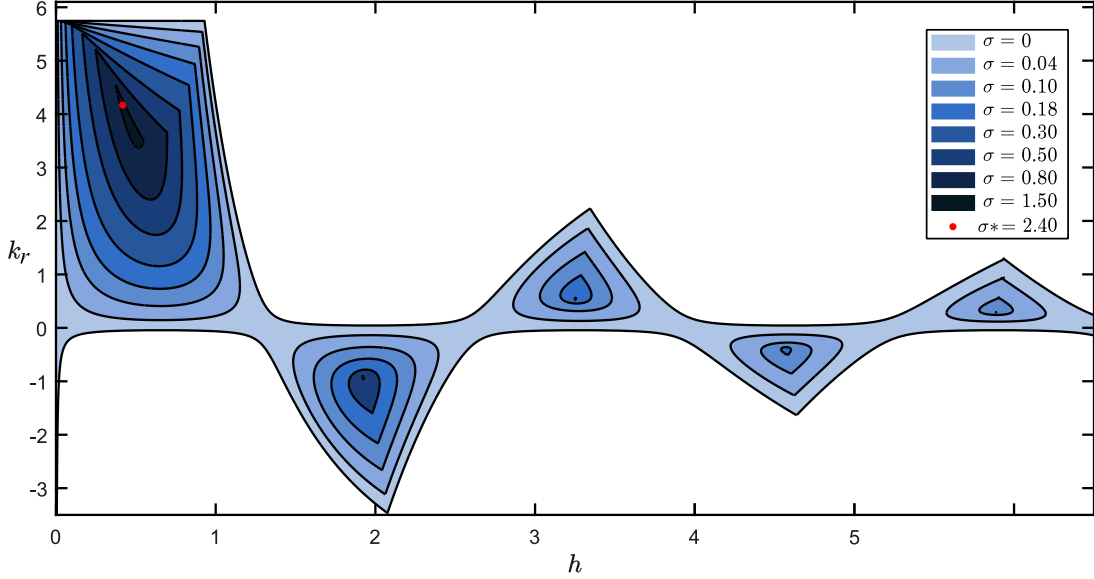


Figura 2.9: Regiones de  $\sigma$ -estabilidad del cuasipolinomio (2.28).

El colapso de las regiones de estabilidad del cuasipolinomio (2.28) se caracteriza como el lugar en el plano  $h$ - $k_r$  donde se presenta una raíz con multiplicidad 3 de (2.28) [57]. La proposición siguiente relaciona las coordenadas del punto de colapso de la región de estabilidad más grande.

**Proposición 2.** *El cuasipolinomio (2.28), tiene una raíz de multiplicidad al menos tres si*

$$h^* = \frac{1}{\nu\sqrt{1-\delta^2}} \quad k^* = \frac{2(\sigma^* - \delta\nu)}{h^*e^{h^*\sigma^*}}$$

donde  $\sigma^* = (\delta + \sqrt{1-\delta^2})\nu$ .

Para demostrar este resultado, se asume que  $s = 0$  es una raíz de multiplicidad 3, de (2.29), (lo que equivale a que  $s = \sigma$  es una raíz de multiplicidad 3 de (2.28))

$$q(0) = \sigma^2 - 2\delta\nu\sigma + \nu^2 - b k_r e^{\sigma h} = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{d}{ds}q(0) = -2\sigma + 2\delta\nu + b k_r e^{\sigma h} h = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{d^2}{ds^2}q(0) = -2 + b k_r e^{\sigma h} h^2 = 0. \quad (2.37)$$

Es posible despejar a  $k_r$  de la ecuación (2.37), obteniendo

$$k_r = \frac{2}{e^{h\sigma} b h^2}, \quad (2.38)$$

sustituyendo lo anterior en (2.36), y despejando  $h$

$$h = \frac{1}{\sigma - \delta \omega}, \quad (2.39)$$

al sustituir (2.38) y (2.39) en (2.35), se obtiene

$$\sigma^2 - 2 \delta \nu \sigma + \nu^2 - \frac{2}{h^2} = 0. \quad (2.40)$$

esta ecuación tiene como raíces a

$$\sigma_1 = \left( \delta + \sqrt{-\delta^2 + 1} \right) \nu, \quad \sigma_2 = \left( \delta - \sqrt{-\delta^2 + 1} \right) \nu.$$

Al asumir que  $\delta < 1$ , únicamente la  $\sigma_1$  será una raíz positiva, lo que significa que las regiones colapsan cuando  $\sigma = \sigma^* = \sigma_1$ , el resultado para  $h^*$  y  $k_r^*$  se obtiene al sustituir  $\sigma^*$  en (2.39) y en (2.38), respectivamente. En la Figura 2.9, el punto que señala el colapso de las regiones de estabilidad, para los valores de los parámetros antes mencionados esta dado por  $h^* = 0.4172$ ,  $k_r^* = 4.2105$ , para  $\sigma^* = 2.4058$ .

## 2.5. Conclusiones del Capítulo

En este capítulo se han presentado los conceptos principales de sistemas de control con retardo, así como los principales resultados con respecto a estabilidad en el marco del enfoque frecuencial. Se presenta la estructura de un controlador clásico PID, así como la estructura de un controlador PIR. Además, se presentó un ejemplo donde una acción retardada puede ser empleada para estabilizar un sistema, aunque esto no sea posible por medio de una acción proporcional. Adicionalmente, se presentó un problema similar al de este trabajo en el cuál se aplica el método de  $D$ -particiones y se determinan condiciones en las cuales un cuasipolinomio de segundo orden tiene una raíz real de multiplicidad tres, que caracteriza el colapso de las regiones de estabilidad en el espacio paramétrico. Las ideas principales de este capítulo serán utilizadas a lo largo del Capítulo 4.

# Capítulo 3

---

## Resultados Principales

---

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir del análisis de estabilidad y estabilidad exponencial de los sistemas con dos retardos tratados en este trabajo. En la primera sección se aborda el problema de estabilizar plantas de primer orden con un retardo utilizando un controlador de tipo Proporcional Integral Retardado. Se presenta el conjunto completo de valores que estabilizan y  $\sigma$ -estabilizan el sistema, así como un análisis de la ubicación de las raíces del cuasipolinomio característico. En la segunda sección se presentan resultados similares pero enfocados a sistemas de segundo orden con un retardo. Como consecuencia se obtienen restricciones para el uso de este tipo de controladores en sistemas con un retardo, así como reglas básicas para su sintonización.

### 3.1. Sistemas de Primer Orden

Considere de nuevo una planta de primer orden con un retardo, con la función de transferencia siguiente

$$G(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{Ts + 1}, \quad (3.1)$$

donde  $T \neq 0$ ,  $K, \theta > 0$ . Se propone un controlador PIR con función de transferencia

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_r e^{-hs}, \quad (3.2)$$

donde  $k_p$ ,  $k_i$  y  $k_r$  son las ganancias proporcional, integral y retardada respectivamente, y  $h$  es el retardo de la acción retardada. Un esquema del sistema en lazo cerrado se muestra en la Figura 3.1,

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es la siguiente

$$q(s) = Ts^2 + s + K(k_p s + k_i) e^{-\theta s} + K k_r s e^{-(\theta+h)s} = 0. \quad (3.3)$$

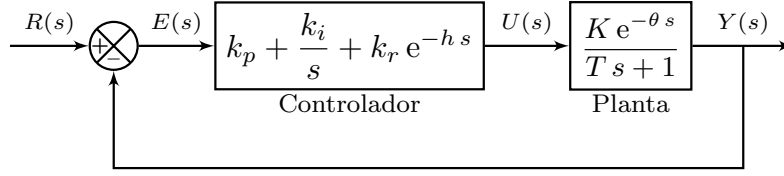


Figura 3.1: Planta de primer orden con retardo y controlador PIR en lazo cerrado.

El conjunto estabilizador del cuasipolinomio (3.3) es el subconjunto de  $\mathbb{R}^4$  definido como

$$S = \{(k_p, k_i, k_r, h) \in \mathbb{R}^4 : \text{el cuasipolinomio } q(s) \text{ es } \sigma\text{-estable}\}.$$

Sin embargo, debido a las limitantes del método de  $D$ -particiones, es más práctico considerar únicamente dos parámetros, manteniendo a los demás como constantes. De ahora en adelante se asume que  $k_p$  y  $k_i$  son parámetros fijos. Un primer paso para llevar a cabo el método de  $D$ -particiones es determinar cuando existen raíces del cuasipolinomio (3.3), lo cual se caracteriza en el siguiente resultado.

**Proposición 3.** *Sea  $k_i \neq 0$ . El conjunto frontera de estabilidad del sistema en lazo cerrado (3.1)-(3.2), está dado por las ecuaciones paramétricas siguientes*

$$h(\omega) = \left( \arctan \left( \frac{-T\omega^2 + K(k_p\omega \sin(\theta\omega) + k_i \cos(\theta\omega))}{\omega + K(k_p\omega \cos(\theta\omega) - k_i \sin(\theta\omega))} \right) + n\pi \right) / \omega - \theta, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.4)$$

y

$$k_r(h(\omega), \omega) = \frac{\omega + K(k_p\omega \cos(\theta\omega) - k_i \sin(\theta\omega))}{-K\omega \cos((\theta + h)\omega)}, \quad (3.5)$$

cuando  $s = \pm\omega i$  ( $\omega > 0$ ) son raíces del cuasipolinomio característico (3.3).

**Demostración:** Al sustituir  $s = 0$  la ecuación (3.3),

$$q(0) = K(k_i) = 0, \quad (3.6)$$

lo que significa que  $s = 0$  es una raíz característica, si y sólo si  $k_i = 0$ . Sin embargo, si el término integral no se considera desde el comienzo, el cuasipolinomio característico es simplemente

$$q(s) = Ts + 1 + e^{-\theta s} K(k_p + k_r e^{-h s}). \quad (3.7)$$



Este caso es especial y no será tratado en este trabajo, pues debe ser analizado de forma individual.

Por otro lado, es posible que existan dos raíces conjugadas sobre el eje imaginario, sin pérdida de generalidad suponga que  $s = \omega i$ , con  $\omega \in \mathbb{R}^+$ , al sustituir en (3.3)

$$\begin{aligned}
q(\omega i) &= -T\omega^2 + \omega i + (Kk_p\omega i + Kk_i) e^{-\theta\omega i} + Kk_r\omega i e^{-(\theta+h)\omega i} \\
&= -T\omega^2 + \omega i + (Kk_p\omega i + Kk_i) (\cos(\theta\omega) - \text{sen}(\theta\omega) i) \\
&\quad + Kk_r\omega (\cos((\theta+h)\omega) - \text{sen}((\theta+h)\omega) i) i \\
&= -T\omega^2 + \omega i + Kk_p\omega \cos(\theta\omega) i + Kk_p\omega \text{sen}(\theta\omega) + Kk_i \cos(\theta\omega) \\
&\quad - Kk_i \text{sen}(\theta\omega) i + Kk_r\omega \cos((\theta+h)\omega) i + Kk_r\omega \text{sen}((\theta+h)\omega) = 0,
\end{aligned}$$

lo que equivale a que

$$\text{Re}(q(\omega i)) = -T\omega^2 + Kk_p\omega \text{sen}(\theta\omega) + Kk_i \cos(\theta\omega) + Kk_r\omega \text{sen}((\theta+h)\omega) = 0,$$

$$\text{Im}(q(\omega i)) = \omega + Kk_p\omega \cos(\theta\omega) - Kk_i \text{sen}(\theta\omega) + Kk_r\omega \cos((\theta+h)\omega) = 0,$$

despejando las ecuaciones anteriores

$$-Kk_r\omega \text{sen}((\theta+h)\omega) = -T\omega^2 + K(k_p\omega \text{sen}(\theta\omega) + k_i \cos(\theta\omega)), \quad (3.8)$$

$$-Kk_r\omega \cos((\theta+h)\omega) = \omega + K(k_p\omega \cos(\theta\omega) - k_i \text{sen}(\theta\omega)), \quad (3.9)$$

por lo tanto, al dividir la ecuación (3.8) entre la ecuación (3.9)

$$\tan((\theta+h)\omega) = \frac{-T\omega^2 + K(k_p\omega \text{sen}(\theta\omega) + k_i \cos(\theta\omega))}{\omega + K(k_p\omega \cos(\theta\omega) - k_i \text{sen}(\theta\omega))}. \quad (3.10)$$

El resultado se sigue de las ecuaciones (3.10) y (3.9), despenjando  $h$  y  $k_r$  respectivamente.  $\square$

Para ilustrar la geometría de las curvas dadas por las ecuaciones (3.4) y (3.5), se consideran algunos valores arbitrarios de los parámetros. Las curvas de cruce de estabilidad, para  $K = 1$ ,  $T = 10$ ,  $\theta = 0.1$ ,  $k_i = 2$  y  $k_p = 1$  se muestran en la Figura 3.2, donde  $n$  indica el número entero en la ecuación(3.4). En cada punto de las curvas se tiene que el cuasipolinomio (3.3) tiene al menos dos raíces complejas conjugadas sobre el eje imaginario, de la forma

$s = \pm\omega i$ , para algún valor de  $\omega$  positivo, el número  $n$  indica el número entero en la ecuación (3.4).

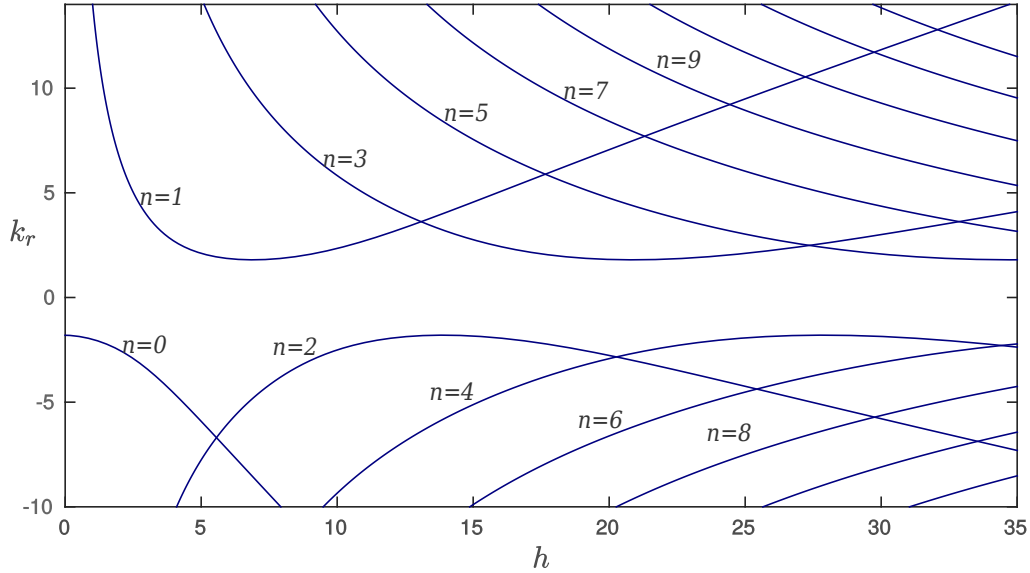


Figura 3.2: Conjunto frontera de estabilidad de (3.3) en el plano  $h$ - $k_r$ .

El siguiente paso para encontrar la región de estabilidad es verificar si las zonas determinadas por el conjunto frontera de estabilidad son estables o inestables. Se considera únicamente un representante de cada zona y se determina el número de raíces que están en el semiplano derecho del plano complejo. En la Figura 3.3 se muestran las regiones determinadas por las curvas de cruce, mientras que en la Figura 3.4 se muestran las raíces de algún representante de cada zona indicada en la Figura 3.3, para  $K = 1$ ,  $T = 10$ ,  $\theta = 0.1$ ,  $k_i = 2$ ,  $k_p = 1$ , los puntos de color negro representan raíces con que están del lado izquierdo del plano complejo y los puntos de color rojo representan raíces que están de lada derecho del eje imaginario. La región estable está indicada en color azul.

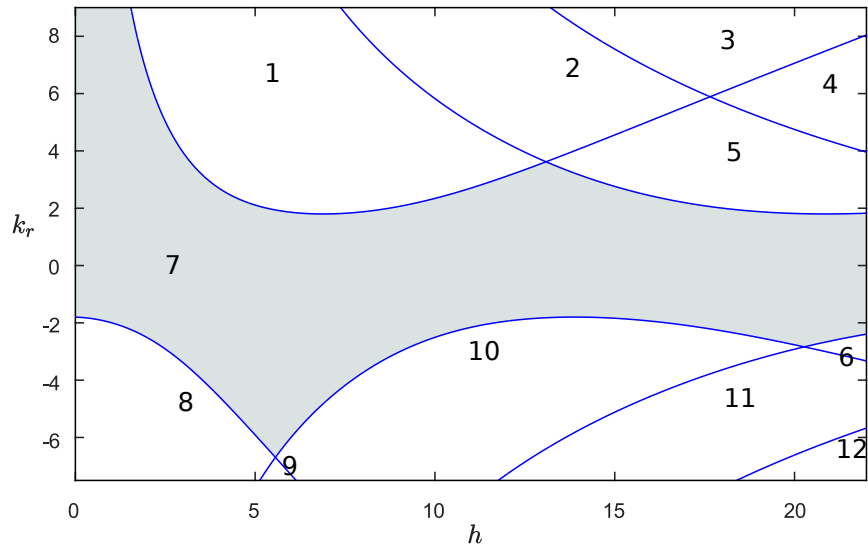


Figura 3.3: Determinación de la región de estabilidad de (3.3) en el plano  $h$ - $k_r$ .

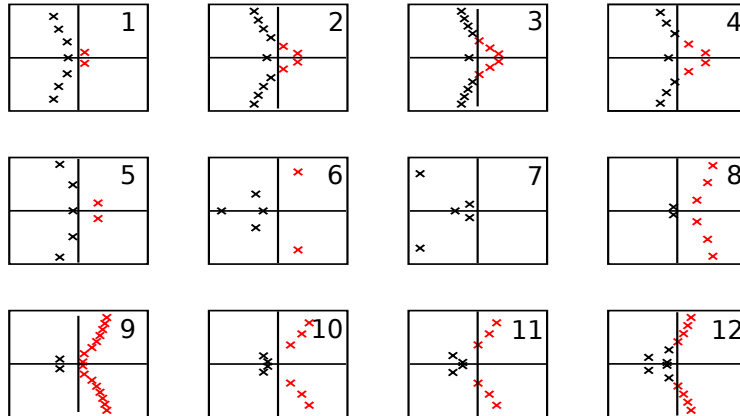


Figura 3.4: Raíces de (3.3), en las regiones indicadas en la Figura 3.3.

Para determinar las regiones de  $\sigma$ -estabilidad, se define el cuasipolinomio siguiente

$$\begin{aligned}
 q_\sigma(s) := q(s - \sigma) &= T(s - \sigma)^2 + s - \sigma + K(k_p(s - \sigma) + k_i) e^{-\theta(s - \sigma)} \\
 &+ Kk_r(s - \sigma) e^{-(\theta+h)(s - \sigma)}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Como en el ejemplo del capítulo anterior, la estabilidad del cuasipolinomio (3.11) es equivalente a la estabilidad del cuasipolinomio (3.3). La proposición siguiente caracteriza el conjunto frontera de  $\sigma$ -estabilidad

**Proposición 4.** Sea  $k_i \neq 0$  y  $\sigma > 0$ , el conjunto frontera de  $\sigma$ -estabilidad del sistema en lazo cerrado (3.1)-(3.2), está dado por las ecuaciones siguientes

$$k_r(h) = \frac{K(k_i - k_p\sigma)e^{\theta\sigma} + T\sigma^2 - \sigma}{K\sigma e^{(\theta+h)\sigma}}, \quad (3.12)$$

para una raíz de la forma  $s = 0$ , y las siguientes ecuaciones paramétricas

$$h(\omega) = \left( \arctan\left(\frac{\omega M + \sigma N}{\omega N - \sigma M}\right) + n\pi \right) / \omega - \theta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.13)$$

$$k_r(\omega, h(\omega)) = \frac{-\alpha - \phi_1 \sin(\theta\omega) - \phi_2 \cos(\theta\omega)}{K e^{(\theta+h)\sigma} (\omega \sin((\theta+h)\omega) - \sigma \cos((\theta+h)\omega))}, \quad (3.14)$$

para raíces de la forma  $s = \pm\omega i$ ,  $\omega > 0$ , donde

$$\begin{aligned} M &:= \alpha + \phi_1 \sin(\theta\omega) + \phi_2 \cos(\theta\omega) \\ N &:= \beta + \phi_1 \cos(\theta\omega) - \phi_2 \sin(\theta\omega), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \alpha &= -T\omega^2 + T\sigma^2 - \sigma, & \beta &= \omega(1 - 2T\sigma), \\ \phi_1 &= e^{\theta\sigma} K k_p \omega, & \phi_2 &= e^{\theta\sigma} K (k_i - k_p\sigma). \end{aligned} \quad (3.15)$$

**Demostración:** suponga que  $s = 0$  es una raíz del cuasipolinomio (3.11), entonces

$$q_\sigma(0) = T\sigma^2 - \sigma + K(k_i - k_p\sigma)e^{\theta\sigma} - \sigma K k_r e^{(\theta+h)\sigma} = 0,$$

despejando  $k_r$  en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación (3.12).

Si ahora se considera  $s = \omega i$ , con  $\omega \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned}
q_\sigma(\omega i) &= T(\omega i - \sigma)^2 + \omega i - \sigma + e^{\theta\sigma} K(k_p \omega i - k_p \sigma + k_i) e^{-\theta\omega i} \\
&\quad + e^{(\theta+h)\sigma} K(k_r \omega i - k_r \sigma) e^{-(\theta+h)\omega i} \\
&= -T(\omega^2 - 2\omega\sigma i + \sigma^2) + \omega i - \sigma \\
&\quad + e^{\theta\sigma} K(k_p \omega i - k_p \sigma + k_i) (\cos(\theta\omega) - \text{sen}(\theta\omega) i) \\
&\quad + e^{(\theta+h)\sigma} K(k_r \omega i - k_r \sigma) (\cos((\theta+h)\omega) - \text{sen}((\theta+h)\omega) i) \\
&= -T\omega^2 + T\sigma^2 - \sigma + \omega(1 - 2T\sigma) i \\
&\quad + e^{\theta\sigma} K[k_p \omega \text{sen}(\theta\omega) + K(k_i - k_p \sigma) \cos(\theta\omega)] \\
&\quad + e^{\theta\sigma} K[k_p \omega \cos(\theta\omega) - (k_i - k_p \sigma) \text{sen}(\theta\omega)] i + e^{(\theta+h)\sigma} K[k_r \omega \text{sen}((\theta+h)\omega) \\
&\quad - k_r \sigma \cos((\theta+h)\omega)] + e^{(\theta+h)\sigma} K[k_r \omega \cos((\theta+h)\omega) + k_r \sigma \text{sen}((\theta+h)\omega)] i
\end{aligned}$$

al emplear las variables definidas en (3.15), se tiene que

$$\begin{aligned}
q_\sigma(i\omega) &= \alpha + \beta i + \phi_1 \text{sen}(\theta\omega) + \phi_2 \cos(\theta\omega) + [\phi_1 \cos(\theta\omega) - \phi_2 \text{sen}(\theta\omega)] i \\
&\quad + K k_r e^{(\theta+h)\sigma} [\omega \text{sen}((\theta+h)\omega) - \sigma \cos((\theta+h)\omega)] \\
&\quad + K k_r e^{(\theta+h)\sigma} [\omega \cos((\theta+h)\omega) + \sigma \text{sen}((\theta+h)\omega)] i \\
&= q_r(\omega) + i q_i(\omega)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
q_r(\omega) &:= \text{Re}(q_\sigma(i\omega)) = \alpha + \phi_1 \text{sen}(\theta\omega) + \phi_2 \cos(\theta\omega) \\
&\quad + K k_r e^{(\theta+h)\sigma} (\omega \text{sen}((\theta+h)\omega) - \sigma \cos((\theta+h)\omega)),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
q_i(\omega) &:= \text{Im}(q_\sigma(i\omega)) = \beta + \phi_1 \cos(\theta\omega) - \phi_2 \text{sen}(\theta\omega) \\
&\quad + K k_r e^{(\theta+h)\sigma} (\omega \cos((\theta+h)\omega) + \sigma \text{sen}((\theta+h)\omega)),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Para encontrar una expresión explícita de  $h$  en términos de los demás parámetros, se utilizan algunas identidades trigonométricas para simplificar una combinación lineal de senos y cosenos.

Para el lado derecho de la ecuación (3.16), se propone

$$\omega \operatorname{sen}((\theta + h)\omega) - \sigma \cos((\theta + h)\omega) = A \operatorname{sen}((\theta + h)\omega + \varphi),$$

al expandir el lado derecho de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \omega \operatorname{sen}((\theta + h)\omega) - \sigma \cos((\theta + h)\omega) = \\ A (\operatorname{sen}((\theta + h)\omega) \cos \varphi + \cos((\theta + h)\omega) \operatorname{sen} \varphi), \end{aligned}$$

al igualar términos se obtienen los valores siguiente

$$\omega = A \cos \varphi \quad \text{y} \quad -\sigma = A \operatorname{sen} \varphi,$$

de esta forma

$$A = \sqrt{\omega^2 + \sigma^2} \quad \text{y} \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right).$$

Análogamente, para el lado derecho la ecuación 3.17, se propone

$$\omega \cos((\theta + h)\omega) + \sigma \operatorname{sen}((\theta + h)\omega) = B \cos((\theta + h)\omega + \psi),$$

expandiendo el lado derecho de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \omega \cos((\theta + h)\omega) + \sigma \operatorname{sen}((\theta + h)\omega) = \\ B (\cos((\theta + h)\omega) \cos \psi - \operatorname{sen}((\theta + h)\omega) \operatorname{sen} \psi), \end{aligned}$$

al igualar los términos, se tiene que

$$\omega = B \cos \psi \quad \text{y} \quad \sigma = -B \operatorname{sen} \psi,$$

por lo tanto

$$B = \sqrt{\omega^2 + \sigma^2} \quad \text{y} \quad \psi = -\arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right).$$

Al reescribir las ecuaciones las ecuaciones (3.16) y (3.17) de acuerdo a las identidades anteriores, se observa lo siguiente

$$\begin{aligned}
q_r(\omega) &= \alpha + \phi_1 \operatorname{sen}(\theta\omega) + \phi_2 \operatorname{cos}(\theta\omega) \\
&\quad + k_r e^{(\theta+h)\sigma} \sqrt{\omega^2 + \sigma^2} \operatorname{sen}\left((\theta+h)\omega - \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)\right), \tag{3.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_i(\omega) &= \beta + \phi_1 \operatorname{cos}(\theta\omega) - \phi_2 \operatorname{sen}(\theta\omega) \\
&\quad + k_r e^{(\theta+h)\sigma} \sqrt{\omega^2 + \sigma^2} \operatorname{cos}\left((\theta+h)\omega - \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)\right). \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Cuando  $q_r(\omega) = 0$  y  $q_i(\omega) = 0$ ,

$$\operatorname{sen}\left((\theta+h)\omega - \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)\right) = \frac{-\alpha - \phi_1 \operatorname{sen}(\theta\omega) - \phi_2 \operatorname{cos}(\theta\omega)}{k_r e^{(\theta+h)\sigma} \sqrt{\omega^2 + \sigma^2}}, \tag{3.20}$$

$$\operatorname{cos}\left((\theta+h)\omega - \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)\right) = \frac{-\beta - \phi_1 \operatorname{cos}(\theta\omega) + \phi_2 \operatorname{sen}(\theta\omega)}{k_r e^{(\theta+h)\sigma} \sqrt{\omega^2 + \sigma^2}}. \tag{3.21}$$

Al combinar la ecuación 3.20 con la ecuación 3.20, se obtiene

$$\tan\left((\theta+h)\omega - \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)\right) = \frac{\alpha + \phi_1 \operatorname{sen}(\theta\omega) + \phi_2 \operatorname{cos}(\theta\omega)}{\beta + \phi_1 \operatorname{cos}(\theta\omega) - \phi_2 \operatorname{sen}(\theta\omega)}.$$

Lo anterior implica que

$$(\theta+h)\omega - \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right) = \arctan\left(\frac{\alpha + \phi_1 \operatorname{sen}(\theta\omega) + \phi_2 \operatorname{cos}(\theta\omega)}{\beta + \phi_1 \operatorname{cos}(\theta\omega) - \phi_2 \operatorname{sen}(\theta\omega)}\right) + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces

$$h = \left( \arctan\left(\frac{\alpha + \phi_1 \operatorname{sen}(\theta\omega) + \phi_2 \operatorname{cos}(\theta\omega)}{\beta + \phi_1 \operatorname{cos}(\theta\omega) - \phi_2 \operatorname{sen}(\theta\omega)}\right) + \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right) + n\pi \right) / \omega - \theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Lo anterior se puede escribir de forma más compacta, definiendo

$$M := \alpha + \phi_1 \operatorname{sen}(\theta\omega) + \phi_2 \operatorname{cos}(\theta\omega),$$

$$N := \beta + \phi_1 \operatorname{cos}(\theta\omega) - \phi_2 \operatorname{sen}(\theta\omega),$$

entonces, de acuerdo a la identidad

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),$$

$$\arctan\left(\frac{M}{N}\right) + \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{M}{N} + \frac{\sigma}{\omega}}{1 - \frac{M\sigma}{N\omega}}\right) = \arctan\left(\frac{\omega M + \sigma N}{\omega N - \sigma M}\right), \quad (3.22)$$

lo que determina la ecuación (3.13), la ecuación (3.14) se obtiene despejando  $k_r$  de (3.16).  $\square$

Ahora es posible obtener las regiones de  $\sigma$ -estabilidad, de acuerdo a la proposición anterior; las regiones de sigma estabilidad para el cuasipolinomio (3.3), con  $K = 1$ ,  $T = 10$ ,  $\theta = 0.1$ ,  $k_i = 2$ ,  $k_p = 1$ , se muestran en la Figura 3.5.

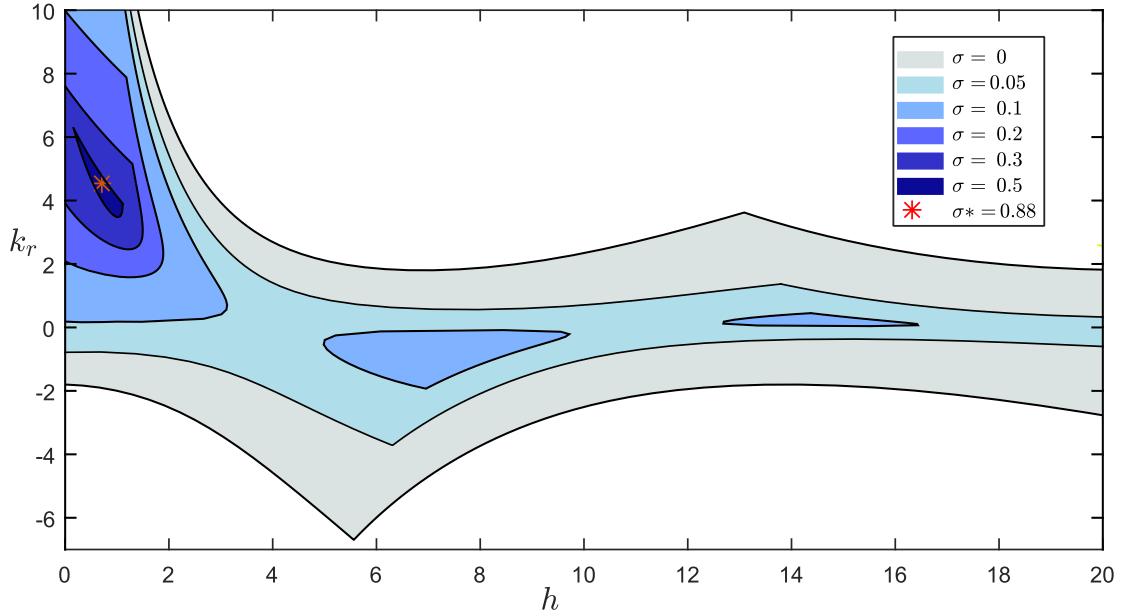


Figura 3.5: Regiones de  $\sigma$ -estabilidad de (3.3).

Un acercamiento a la región de  $\sigma$ -estabilidad más grande se muestra en la Figura 3.6. Suponiendo que  $\sigma_2 > \sigma_1$ , entonces es evidente que el conjunto de puntos para los cuales el cuasipolinomio (3.3) es  $\sigma_2$ -estable está contenido en el conjunto de puntos para los cuales el cuasipolinomio  $q(s)$  es  $\sigma_1$ -estable.



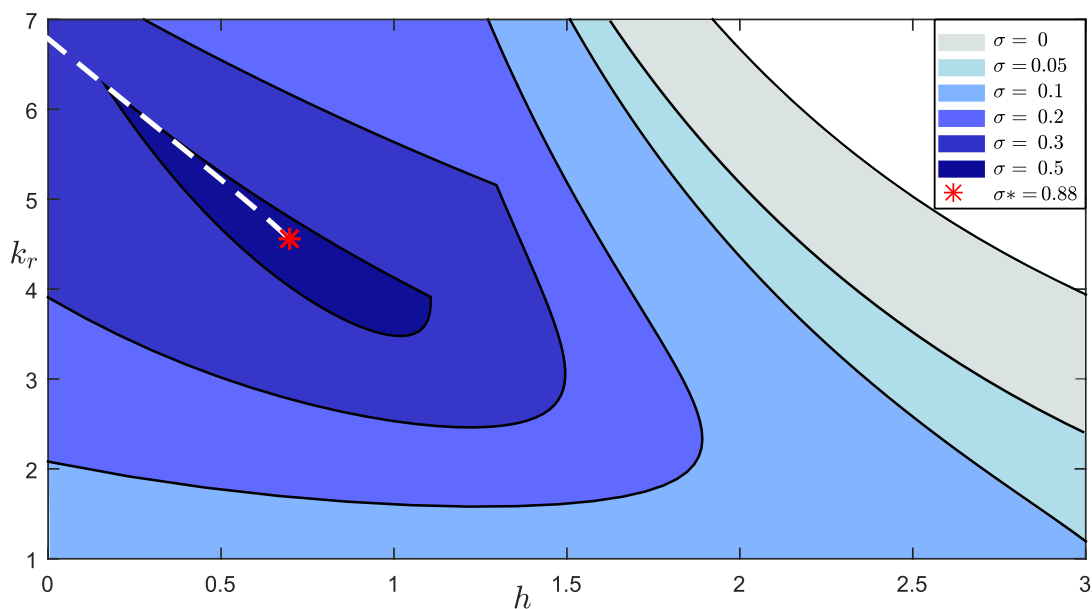


Figura 3.6: Detalle de las regiones de  $\sigma$ -estabilidad de (3.3).

### 3.1.1. Máxima Cota de Decaimiento Exponencial

Cabe mencionar que en la práctica, las curvas de cruce de estabilidad junto con las regiones de estabilidad pueden ser utilizadas para asignar polos en la ecuación característica y de esta forma sintonizar un controlador PIR para sistemas con retardo. La Figura 3.6 sugiere que las regiones colapsan en un punto al aumentar  $\sigma$ , lo que significa que en aquel punto las raíces estarán más a la izquierda posible. Evidentemente, de acuerdo a las Figuras 3.5 y 3.6, en el punto de colapso se alcanza la máxima cota de decaimiento exponencial denotada con  $\sigma^*$ .

Se puede observar que al aumentar el valor de sigma, la región de estabilidad se hará cada vez más pequeña hasta colapsar en un punto en el que se tiene el valor máximo de  $\sigma$  posible. A continuación se presenta un análisis que ayuda a determinar las coordenadas de este punto. En la Figura 3.7, se muestran las curvas paramétricas del conjunto frontera de estabilidad, para diferentes valores de  $\sigma$ , y con los mismos parámetros que en las Figuras 3.5 y 3.6. Las curvas punteadas representan la existencia de una raíz real  $s = -\sigma$  de (3.3), mientras que las demás curvas representan raíces complejas puras de la forma  $s = -\sigma \pm \omega i$ . Los puntos en los que estas curvas se cortan representados por círculos, indican que existen tres raíces en el eje  $s = -\sigma$ , una de las cuales tiene parte imaginaria igual a cero.

Note la presencia del siguiente término a la ecuación (3.13),

$$\arctan\left(\frac{\omega M + \sigma N}{\omega N - \sigma M}\right)$$

donde el argumento de arcotangente puede expandirse como

$$\frac{\omega M + \sigma N}{\omega N - \sigma M} = \frac{K((\omega^2 k_p + \sigma^2 k_p - \sigma k_i) \sin(\theta \omega) + \cos(\theta \omega) \omega k_i) e^{\theta \sigma} - T \omega^3 - T \sigma^2 \omega}{K((-\omega^2 k_p - \sigma^2 k_p + \sigma k_i) \cos(\theta \omega) + \sin(\theta \omega) \omega k_i) e^{\theta \sigma} + T \omega^2 \sigma + T \sigma^3 - \omega^2 - \sigma^2}$$

de esta expresión se sigue que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega M + \sigma N}{\omega N - \sigma M} = \frac{(\sigma^2 k_p - \sigma k_i) \sin(0) e^{\theta \sigma} K}{K((-\sigma^2 k_p + \sigma k_i) \cos(0)) e^{\theta \sigma} + T \sigma^3 - \sigma^2} = 0,$$

lo que significa que el límite

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} h(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \arctan\left(\frac{\sigma N + \omega M}{\sigma M - \omega N}\right) - \pi \right) / \omega - \theta,$$

es infinito para  $n \neq 0$  e indeterminado para  $n = 0$ . Utilizando la regla de L'Hôpital se obtiene

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} h(\omega) = \frac{(\sigma^2 \theta k_p - \theta \sigma k_i + k_i) e^{\theta \sigma} K - T \sigma^2}{\sigma ((\sigma k_p - k_i) e^{\theta \sigma} K - T \sigma^2 + \sigma)} - \theta, \quad (3.23)$$

lo cual es igual a  $h_\sigma$  en la ecuación (3.25). De forma similar, en la ecuación (3.26), es fácil ver que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} k_r(\omega, h(\omega)) = \frac{T \sigma^2 - \sigma - (\sigma k_p - k_i) e^{\theta \sigma} K}{K \sigma e^{(\theta + h_\sigma) \sigma}}. \quad (3.24)$$

Cabe aclarar que para algún  $\sigma > 0$ , el punto  $h_\sigma - k_{r,\sigma}$  representa el corte de la curva (3.12) con la curva paramétrica dada por (3.13)-(3.14), como se puede apreciar en la Figura 3.7, estos puntos están representados por una  $\mathbf{x}$ . La curva de color blanco punteada en la Figura 3.6 es una curva paramétrica dada por las ecuaciones (3.23)- (3.24), donde  $\sigma > 0$  es el parámetro de esta curva.

En la Figura 3.7 puede observarse que al aumentar  $\sigma$ , los puntos marcados con  $\mathbf{x}$  se aproximan cada vez más a los marcados con  $\bullet$ . En las Figuras 3.8 y 3.9 se muestran las raíces

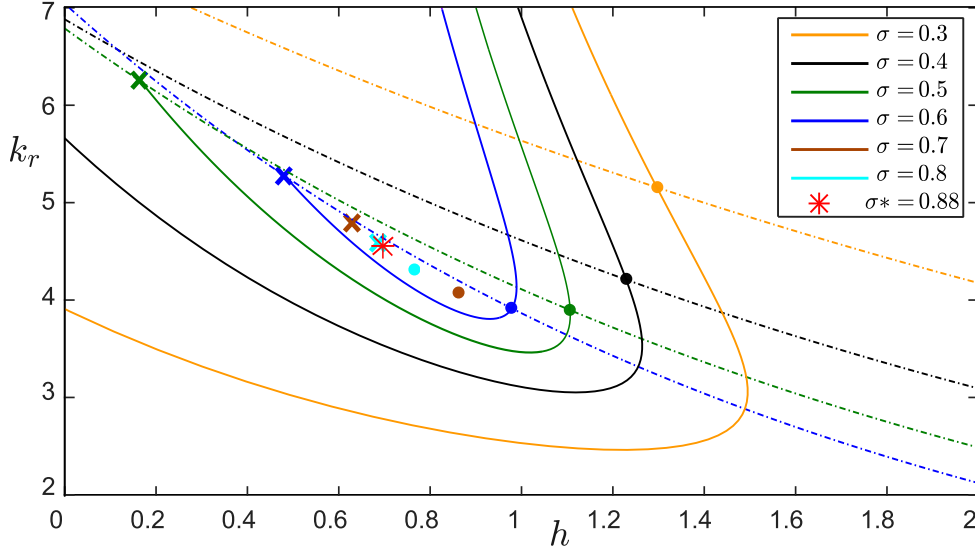


Figura 3.7: Curvas paramétricas en el plano  $h$ - $k_r$ , para distintos valores de  $\sigma$ .

características de para los puntos señalados en la figura 3.7. Observe que al aumentar el valor de  $\sigma$  los puntos de la Figura (3.7) se aproximan entre sí, lo que corresponde a la existencia de una raíz de multiplicidad tres, es decir el colapso de las regiones de estabilidad ocurre cuando se tiene una raíz de multiplicidad tres. A continuación se presentan algunos resultados que ayudan a encontrar en forma explícita las coordenadas del punto de colapso de las regiones de estabilidad.

**Proposición 5.** Para  $k_p$  y  $k_i \neq 0$  fijos,  $s = -\sigma$ ,  $\sigma > 0$ , es una raíz de multiplicidad al menos dos del cuasipolinomio (3.3), si  $h$  y  $k_r$  toman los siguientes valores:

$$h_\sigma = \frac{Kk_i e^{\sigma\theta} + T\theta\sigma^3 - (T + \theta)\sigma^2}{((K\sigma k_p - Kk_i)e^{\sigma\theta} - T\sigma^2 + \sigma)\sigma} \quad (3.25)$$

y

$$k_{r,\sigma} = \frac{K(k_i - k_p\sigma)e^{\theta\sigma} + T\sigma^2 - \sigma}{K\sigma e^{(\theta+h_\sigma)\sigma}} \quad (3.26)$$

**Demostración:** suponga que el cuasipolinomio (3.3) tiene una raíz de multiplicidad al menos dos en  $s = -\sigma$ , esto es equivalente a que

$$q(-\sigma) = T\sigma^2 - \sigma + e^{\sigma\theta}K(k_i - \sigma k_p) - Kk_r\sigma e^{(\theta+h)\sigma} = 0, \quad (3.27)$$

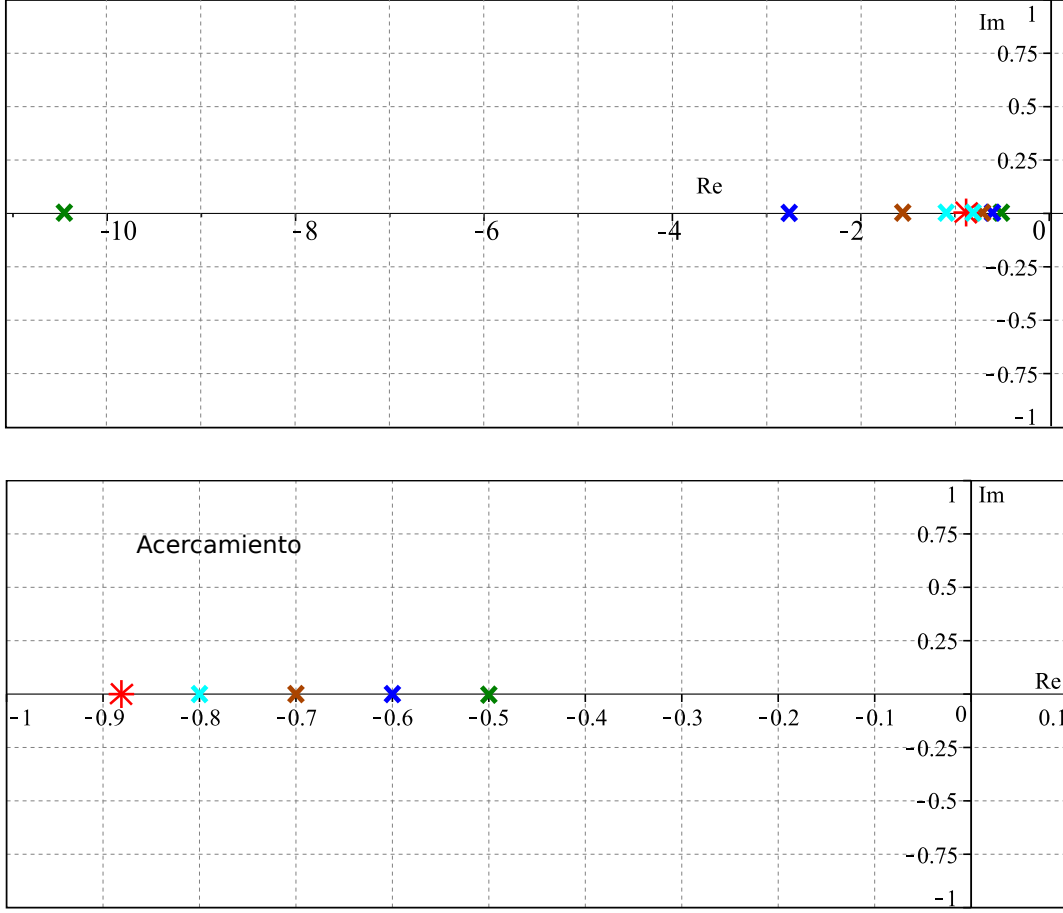


Figura 3.8: Raíces del cuasipolinomio (3.3), para los puntos señalados en la Figura 3.7.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}q(-\sigma) &= 1 + e^{(\theta+h)\sigma} h\sigma Kk_r + e^{(\theta+h)\sigma} \sigma \theta Kk_r + e^{\sigma\theta} \sigma \theta Kk_p \\ &\quad - e^{\sigma\theta} \theta Kk_i + Kk_r e^{(\theta+h)\sigma} + Kk_p e^{\sigma\theta} - 2T\sigma = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

de la ecuación (3.28), al despejar  $k_r$  se tiene que

$$k_r = -\frac{1 + e^{\sigma\theta} \sigma \theta Kk_p - e^{\sigma\theta} \theta Kk_i + Kk_p e^{\sigma\theta} - 2T\sigma}{Ke^{(\theta+h)\sigma} (h\sigma + \sigma \theta + 1)},$$

al sustituir la ecuación anterior en (3.27), se tiene que

$$\begin{aligned} T\sigma^2 - \sigma + e^{\sigma\theta} (Kk_i - \sigma k_p) + \\ \frac{(1 + e^{\sigma\theta} \sigma \theta Kk_p - e^{\sigma\theta} \theta Kk_i + Kk_p e^{\sigma\theta} - 2T\sigma) \sigma}{h\sigma + \sigma \theta + 1} = 0, \end{aligned}$$

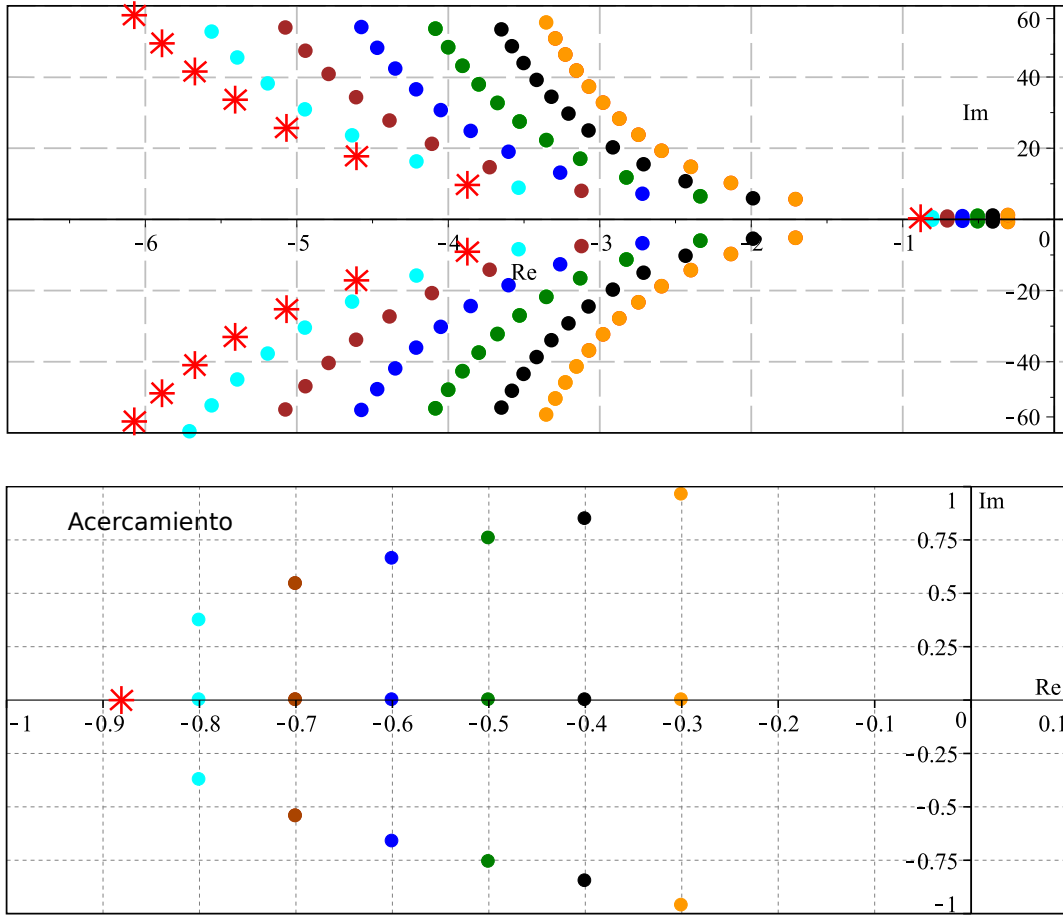


Figura 3.9: Raíces del cuasipolinomio (3.3), para los puntos señalados en la Figura 3.7.

por lo tanto  $h_\sigma$  de la ecuación (3.25) se obtiene despejando  $h$  en esta última ecuación, mientras que  $k_{r,\sigma}$  de la ecuación (3.26) se obtiene despejando  $k_r$  de la ecuación (3.27).  $\square$

**Observaciones:** En la proposición 5, no se asegura la estabilidad de el cuasipolinomio (3.3), de hecho, no asegura que  $h_\sigma$  sea un número positivo.

**Proposición 6.** *Dados  $k_p$  y  $k_i \neq 0$ ,  $s = -\sigma$ ,  $\sigma > 0$ , es una raíz de multiplicidad al menos tres del cuasipolinomio (3.3), si  $h = h_\sigma$  y  $k_r = k_{r,\sigma}$  dados en la proposición 5, y  $\sigma$  es una raíz de la ecuación*

$$\begin{aligned}
f(\sigma) &= (a_5\sigma^5 + a_4\sigma^4 + a_3\sigma^3 + a_2\sigma^2 + a_1\sigma) e^{\theta\sigma} \\
&\quad + (b_2\sigma + b_1) e^{2\theta\sigma} + c\sigma^4
\end{aligned} \tag{3.29}$$

donde

$$\begin{aligned}
a_5 &= \theta^2 T K k_p & a_4 &= -K (k_p + k_i T) \theta^2 - 2 T \theta K k_p \\
a_3 &= 4 T \theta K k_i + \theta^2 K k_i & a_2 &= -4 K k_i T - 2 \theta K k_i \\
a_1 &= 2 e^{\theta\sigma} K k_i & b_0 &= 2 K^2 k_i k_p \\
b_1 &= -K k_i^2 & c &= T^2
\end{aligned}$$

**Demostración:** en la demostración del teorema 5, se asume la existencia de una raíz de multiplicidad al menos dos, si en adición se satisface

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2} q(-\sigma) &= -K ((h^2 k_r + 2 h \theta k_r + \theta^2 k_r) \sigma + 2 k_r (h + \theta)) e^{(\theta+h)\sigma} \\
&\quad + K (-\sigma \theta^2 k_p + \theta^2 k_i - 2 \theta k_p) e^{\sigma\theta} + 2 T,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

de la ecuación (3.27), se tiene que

$$K k_r \sigma e^{(\theta+h)\sigma} = -K \sigma k_p e^{\sigma\theta} - K e^{\sigma\theta} k_i - T \sigma^2 + \sigma$$

al sustituir la expresión anterior en (3.30),

$$\begin{aligned}
&\left( (h^2 + 2 h \theta) k_p K \sigma + ((-h^2 - 2 h \theta) k_i + 2 h k_p) K + \frac{(-2 h - 2 \theta) k_i K}{\sigma} \right) e^{\sigma\theta} \\
&+ (-h^2 - 2 h \theta - \theta^2) T \sigma^2 + ((-2 h - 2 \theta) T + h^2 + 2 h \theta + \theta^2) \sigma + 2 h + 2 \theta + 2 T = 0,
\end{aligned}$$

finalmente al sustituir  $h = h_\sigma$  de la ecuación (3.25) en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{Q} \left( (K T \sigma^5 \theta^2 k_p + (-K T \theta^2 k_i - 2 K T \theta k_p - K \theta^2 k_p) \sigma^4 + (4 K T \theta k_i + K \theta^2 k_i) \sigma^3 \right. \\
&\quad \left. + (-4 K T k_i - 2 K \theta k_i) \sigma^2 + 2 K k_i \sigma) e^{\sigma\theta} + (2 K^2 \sigma k_i k_p - K^2 k_i^2) e^{2\sigma\theta} + T^2 \sigma^4 \right) \\
&= \frac{1}{Q} f(\sigma) = 0
\end{aligned}$$

donde  $Q = \sigma^2 ((K\sigma k_p - Kk_i) e^{\sigma\theta} - T\sigma^2 + \sigma)$  y  $k_i \neq \frac{\sigma (Ke^{\theta\sigma}k_p - T\sigma + 1)}{Ke^{\theta\sigma}}$ , y  $f$  está definida en (3.29).  $\square$

Un resultado inmediato acerca de la función (3.29), es que siempre tendrá al menos una raíz positiva, pues

$$f(0) = b_1 = -Kk_i^2 < 0,$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f(\sigma) = +\infty,$$

lo que implica la existencia de al menos un número real  $\sigma$  tal que  $f(\sigma) = 0$ .

Cabe mencionar que la única raíz de multiplicidad tres de interés es aquella en la que colapsan las regiones de estabilidad (en el caso de existir una región estable).

Sea  $\sigma^*$  la raíz positiva más pequeña de  $f(\sigma)$  en (3.29), si  $k_i \neq 0$  y  $k_p$  son establecidos, se definen

$$h^* = h_{\sigma^*}$$

$$k_r^* = k_{r,\sigma^*}$$

de acuerdo a las ecuaciones (3.25) y (3.26). Estos valores de los parámetros son una primera propuesta de sintonización del controlador PIR. Una de las razones más evidentes de la elección de los parámetros  $h^*$  y  $k_r^*$  como valores para sintonizar un controlador PIR, es que se tiene un buen margen de estabilidad, en el sentido de que al variar un ligeramente estos valores y los de los demás parámetros, los nuevos valores de  $h^*$  y  $k_r^*$  no deben variar drásticamente, por lo que deben permanecer en la zona estable, esto es importante, ya que las computadoras y los equipos de instrumentación tienen errores de redondeo, además de que los métodos numéricos implementados pueden por sí mismos presentar errores de redondeo. En las Figuras 3.5 y 3.6, se tiene que  $T = 10$ ,  $K = 1$ ,  $\theta = 0.1$ ,  $k_i = 2$ ,  $k_p = 1$ , aquí  $h^* = 0.6964$ ,  $k_r^* = 4.5597$  y  $\sigma^* = 0.8812$ .

Sin embargo esta aún existen problemas en cuanto a la sintonización de un controlador PIR por medio de estas ecuaciones. Para empezar, se tiene que la raíz de multiplicidad 3 es candidata a ser la raíz dominante (es decir, que se encuentra más a la izquierda que las demás raíces), pero esto no es cierto en general. Más aún, nada garantiza que el valor de  $h^*$ ,

que corresponde al valor del retardo sea positivo. Desde luego, las variables  $k_p$  y  $k_i$  dadas en un principio determinan el valor de  $\sigma^*$ , pero en un principio la elección de estos valores es arbitraria. Una forma alternativa de sintonizar un controlador PIR se obtiene de acuerdo al resultado siguiente

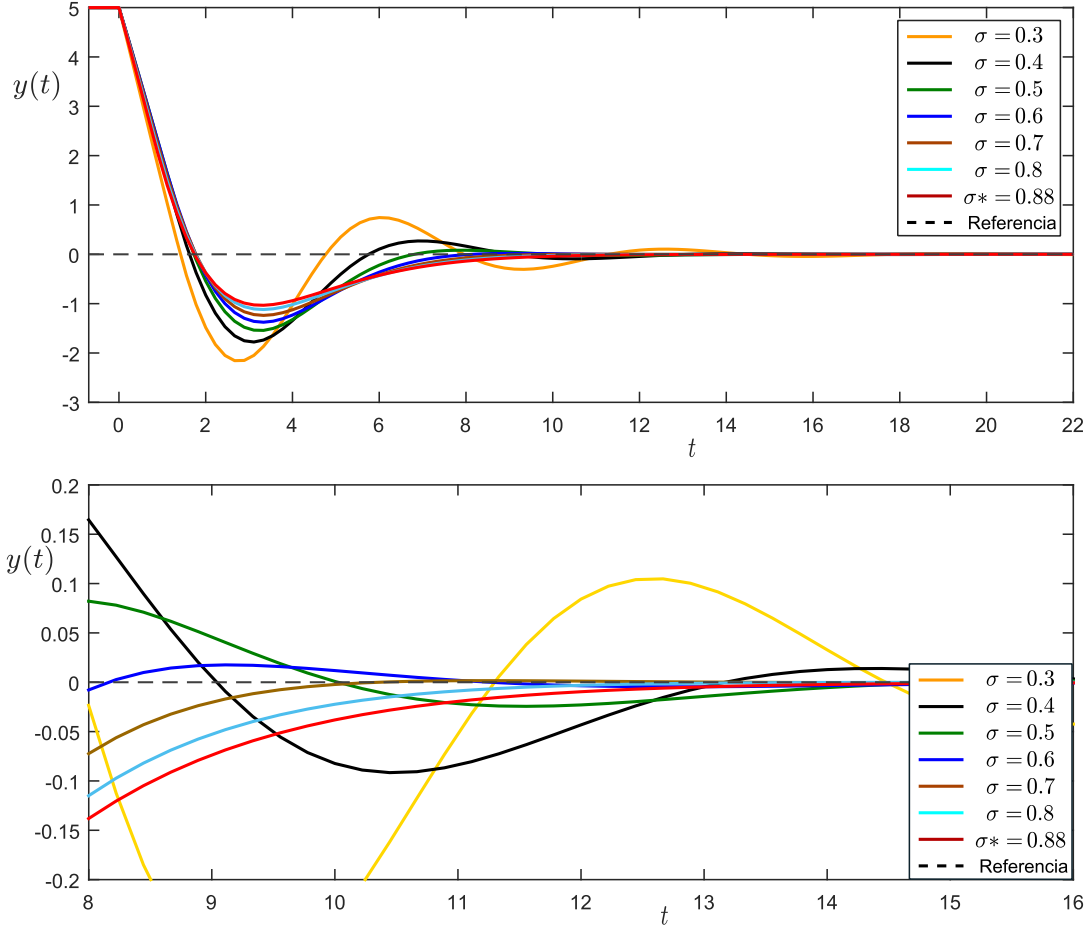


Figura 3.10: Salida del sistema en lazo cerrado para diferentes valores de  $\sigma$ , los valores de  $h$  y  $k_r$  son tomados de acuerdo a la Figura 3.7.

**Proposición 7.** *Suponga que  $T \neq 0$ ,  $\theta \geq 0$  y  $K > 0$ , en el cuasipolinomio (3.3). Sea  $\sigma > 0$  una cota de decaimiento deseada. Entonces el cuasipolinomio (3.3) tiene una raíz de multiplicidad al menos tres dada por  $s = -\sigma$  si*

$$k_i \in (k_{i,inf}, k_{i,sup}), \quad (3.31)$$



donde

$$k_{i,inf} = \min\{R_1, R_2\}, k_{i,sup} = \max\{R_1, R_2\},$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{(-T\sigma\theta + 2T + \theta)\theta\sigma^3}{2Ke^{\sigma\theta}}, \\ R_2 &= \frac{(-T\sigma\theta + T + \theta)\sigma^2}{Ke^{\sigma\theta}}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$k_p = \frac{K^2k_i^2e^{2\sigma\theta} + Kk_i\varsigma e^{\sigma\theta} - T^2\sigma^4}{K\sigma((T\sigma^4\theta^2 + (-2T\theta - \theta^2)\sigma^3)e^{\sigma\theta} + 2Kk_ie^{2\sigma\theta})}, \quad (3.33)$$

donde

$$\varsigma = (T\sigma^4\theta^2 + (-4T\theta - \theta^2)\sigma^3 + (4T + 2\theta)\sigma^2 - 2\sigma),$$

$$h = \frac{\theta^2T\sigma^4 - (\theta^2 + 2T\theta)\sigma^3 + 2e^{\theta\sigma}Kk_i}{-T\theta\sigma^4 + (T + \theta)\sigma^3 - e^{\theta\sigma}Kk_i\sigma}, \quad (3.34)$$

$$k_r = \frac{K(k_i - k_p\sigma)e^{\theta\sigma} + T\sigma^2 - \sigma}{K\sigma e^{(\theta+h\sigma)\sigma}}. \quad (3.35)$$

Además, la pertenencia de  $k_i$  en el intervalo de la ecuación (3.31) garantiza que el valor de  $h$  en la ecuación (3.34), sea mayor a cero.

**Demostración:** Suponga que existe una raíz de multiplicidad tres en  $s = -\sigma$ , entonces por la Proposición 6,  $\sigma$  debe satisfacer la ecuación (3.29), al despejar  $k_p$  de la ecuación (3.29), se obtiene la ecuación (3.33).

Al sustituir  $k_p$  de la ecuación (3.33) en la ecuación (3.25) se tiene la ecuación (3.34). Desde luego, el valor elegido para  $k_i$  debe ser tal que  $h$  en la ecuación (3.25) sea mayor que cero. Note que  $k_i$  es un factor lineal en el numerador y en el denominador de la ecuación (3.34), y para que el denominador en la ecuación (3.34) sea diferente de cero, es necesario que

$$k_i \neq \frac{(-T\theta\sigma + T + \theta)\sigma^2}{Ke^{\theta\sigma}}, \quad (3.36)$$

La expresión de  $h$  es una función racional en  $k_i$ , además, tanto el denominador como el numerador son lineales, para que  $h$  sea mayor a cero el producto del numerador con el denominador debe ser mayor a cero, esto es

$$(\theta^2T\sigma^4 - (\theta^2 + 2T\theta)\sigma^3 + 2e^{\theta\sigma}Kk_i)(-T\theta\sigma^4 + (T + \theta)\sigma^3 - e^{\theta\sigma}Kk_i\sigma) > 0$$

Simplificando la ecuación anterior

$$A k_i^2 + B k_i + C > 0, \quad (3.37)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= -2 e^{2\theta\sigma} K^2 \sigma, \\ B &= -e^{\theta\sigma} \sigma^3 K (\sigma^2 \theta^2 T - \sigma \theta^2 - 2T - 2\theta), \\ C &= -\sigma^6 \theta (T\theta \sigma - \theta - 2T) (T\theta \sigma - T - \theta), \end{aligned}$$

Note que el coeficiente de  $k_i^2$  será siempre menor a cero, lo que asegura que la parábola en función de  $k_i$  está abierta hacia abajo. Desde luego, para que siempre exista el intervalo en el cual  $h(k_i)$  sea positivo, basta con asegurar que la parábola corta al eje  $k_i$  en dos puntos (dos valores reales de  $k_i$ ), es decir, que  $B^2 - 4AC > 0$ .

Un calculo directo muestra que

$$B^2 - 4AC = K^2 e^{2\theta\sigma} \sigma^6 (T\theta^2 \sigma^2 - 4T\theta \sigma - \theta^2 \sigma + 2T + 2\theta)^2,$$

Lo que asegura la existencia de dicho intervalo para el cual  $h_\sigma > 0$ , siempre y cuando

$$\sigma \neq \frac{4T + \theta \pm \sqrt{8T^2 + \theta^2}}{2T\theta},$$

cuando lo anterior se satisface, se tiene que las raíces de la ecuación cuadrática son

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma^2 (-T\theta^2 \sigma^2 + \theta^2 \sigma + 2T + 2\theta - |T\theta^2 \sigma^2 - 4T\theta \sigma - \theta^2 \sigma + 2T + 2\theta|)}{4K e^{\sigma\theta}}, \\ &\frac{\sigma^2 (-T\theta^2 \sigma^2 + \theta^2 \sigma + 2T + 2\theta + |T\theta^2 \sigma^2 - 4T\theta \sigma - \theta^2 \sigma + 2T + 2\theta|)}{4K e^{\sigma\theta}}, \end{aligned}$$

desde luego, es posible que el valor de  $T\theta^2 \sigma^2 - 4T\theta \sigma - \theta^2 \sigma + 2T + 2\theta$ , sea positivo o negativo, en cualquier caso, al simplificar lo anterior quitando el valor absoluto, las raíces están dadas por la ecuación (3.32). Por último, la ecuación (3.35) se obtiene de la ecuación (3.26). □

Note que cuando  $\theta = 0$ , el intervalo (3.31) se reduce al intervalo  $(0, \frac{\sigma^2}{K}T)$ , si  $T$  es positivo, o  $(\frac{\sigma^2}{K}T, 0)$  si  $T$  es negativo.

Por medio del resultado anterior es posible colocar una raíz de multiplicidad tres en  $-\sigma$ , para un valor de  $\sigma$  deseado. Considere de nuevo el sistema con los parámetros  $T = 10$ ,  $K = 1$ ,  $\theta = 0.1$ , con  $k_i = 2$  se tiene  $\sigma^* = 0.881249763805476$ , si se desea ahora que  $\sigma^* = 1$ , entonces de acuerdo a la ecuación (3.31), se debe elegir un valor de  $k_i$  en el intervalo  $(0.864, 8.234)$ , para garantizar que se tiene una raíz de multiplicidad tres en  $s = -1$ . En las Figuras 3.12 y 3.13 se pueden apreciar las gráficas de las ecuaciones (3.33) y (3.34), respectivamente, en función de  $k_i$  para los valores mencionados.

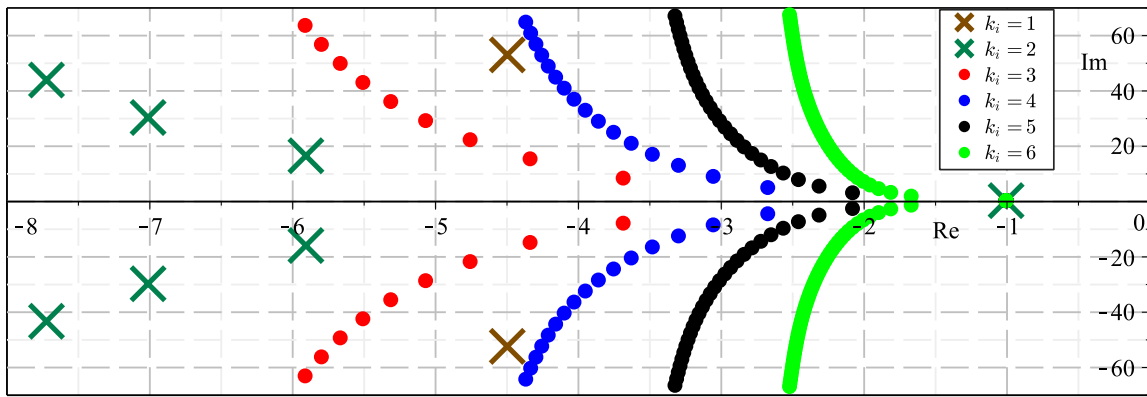


Figura 3.11: Raíces de (3.3), de acuerdo a la Proposición 6, con  $\sigma = 1$ , para distintos valores de  $k_i$ .

La elección de  $k_i$  puede tener efectos notorios en las raíces características del cuasipolinomio (3.3), suponga de nuevo que se desea tener una raíz en  $s = -1$ , como en el ejemplo anterior, cuando el valor de  $k_i$  se varía en el intervalo  $(0.864, 8.234)$ , las raíces del cuasipolinomio de la ecuación (3.3) varían de forma continua. En la Figura 3.11 se muestran las raíces del cuasipolinomio para distintos valores enteros de  $k_i$  3.11, desde  $k_i = 1$  hasta  $k_i = 6$ .

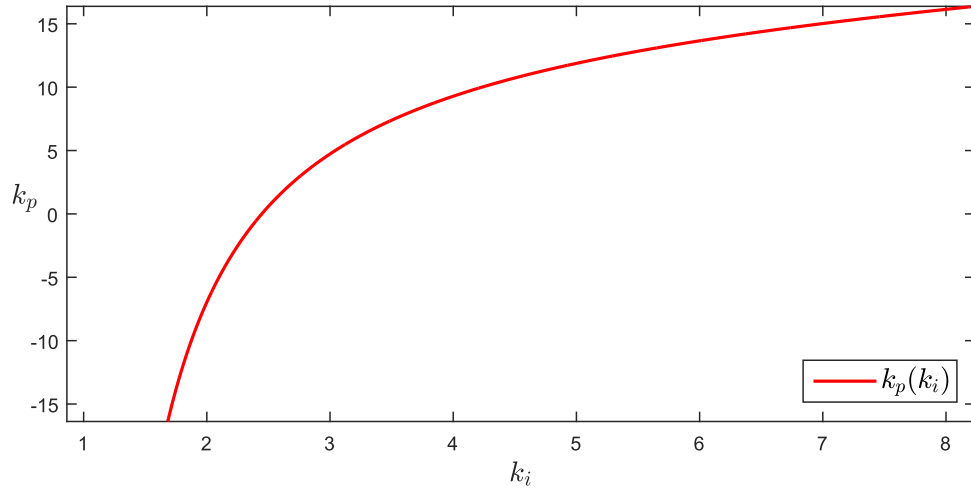


Figura 3.12: Valor de  $k_p$  en el intervalo  $(k_{i,inf}, k_{i,sup})$ , en la proposición 6.

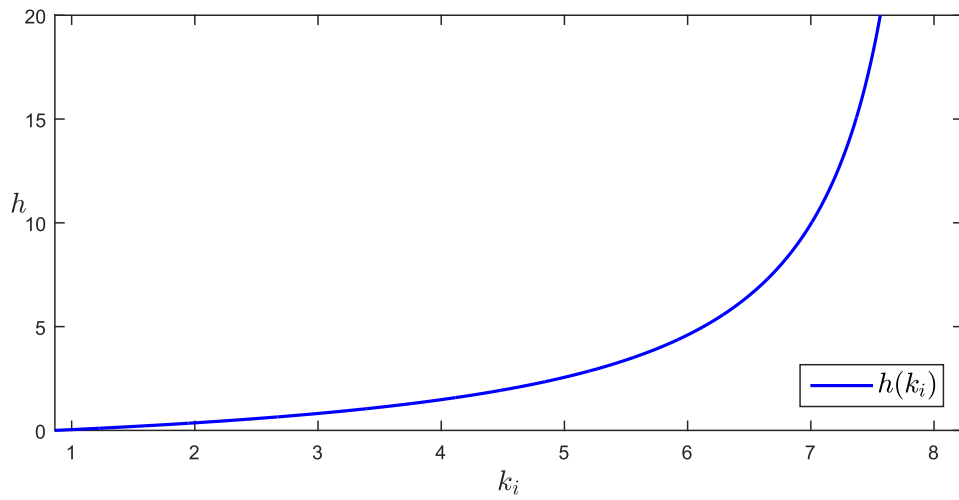


Figura 3.13: Valor de  $h$  en el intervalo  $(k_{i,inf}, k_{i,sup})$ , en la proposición 6.

## 3.2. Sistemas de Segundo Orden

En esta sección se generalizan los resultados de la sección anterior para plantas de segundo orden con retardo. Los resultados obtenidos son similares al caso anterior, aunque existen algunas diferencias notables.

Considere de nuevo una planta de segundo orden con retardo y un controlador con las respectivas funciones de transferencia siguientes

$$G(s) = \frac{b e^{-\theta s}}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.38)$$

donde  $a_1, a_0, b, \theta > 0$ .

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_r e^{-h s} \quad (3.39)$$

donde  $k_p, k_i$  y  $k_r$  son las ganancias proporcional, integral y retardada respectivamente, y  $h$  es el retardo de la acción retardada. La Figura 3.14 muestra un esquema del sistema en lazo cerrado.

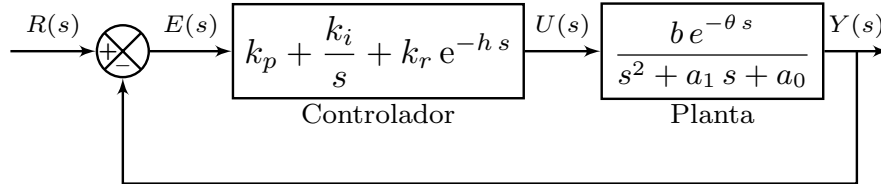


Figura 3.14: Diagrama de una planta de segundo orden con retardo y un controlador PIR en lazo cerrado.

A continuación se sigue el mismo procedimiento para el análisis de  $\sigma$ -estabilidad y  $\sigma$ -estabilización del sistema en lazo cerrado (3.38)-(3.39).

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es

$$q(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_0 s + b(k_p s + k_i) e^{-\theta s} + b k_r s e^{-(\theta+h)s} = 0. \quad (3.40)$$

**Observaciones:** El sistema en lazo cerrado que se considera en esta sección no incluye el

caso de la sección anterior.

El conjunto estabilizador del cuasipolinomio (3.40) es el subconjunto de  $\mathbb{R}^4$  definido como

$$S = \{(k_p, k_i, k_r, h) \in \mathbb{R}^4 : \text{el cuasipolinomio } q(s) \text{ es } \sigma\text{-estable}\}.$$

Al igual que en el caso anterior, se aplica el método de  $D$ -particiones, considerando a  $k_p$  y  $k_i$  fijos y para construir las regiones de estabilidad en el plano  $h$ - $k_r$ . La proposición siguiente es análoga a la proposición 3.

**Proposición 8.** *Dado el cuasipolinomio (3.40), con  $k_i \neq 0$ , el conjunto frontera de estabilidad está dado por las ecuaciones paramétricas siguientes*

$$h(\omega) = \left( \arctan \left( \frac{-a_1 \omega^2 + b(k_p \omega \sin(\theta \omega) + k_i \cos(\theta \omega))}{-\omega^3 + a_0 \omega + b(k_p \omega \cos(\theta \omega) - k_i \sin(\theta \omega))} \right) + n\pi \right) / \omega - \theta, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.41)$$

y

$$k_r(h(\omega), \omega) = \frac{-\omega^3 + a_0 \omega + b(k_p \omega \cos(\theta \omega) - k_i \sin(\theta \omega))}{-b \omega \cos((\theta + h)\omega)} \quad (3.42)$$

**Demostración:** como en el caso anterior,  $s = 0$  solo puede ser raíz de (3.40) si y solo si

$$q(0) = b(k_i) = 0, \quad (3.43)$$

por lo tanto, si  $k_i \neq 0$ ,  $s=0$  no puede ser una raíz característica para ningún punto del plano  $h$ - $k_r$ . Ahora suponga que  $s = \omega i$ , en la ecuación (3.40), con  $\omega > 0$ , se sigue que

$$\operatorname{Re}(q(\omega i)) = -a_1 \omega^2 + b(k_i \cos(\theta \omega) + \omega k_p \sin(\theta \omega)) + b k_r \omega \sin((\theta + h)\omega) = 0$$

$$\operatorname{Im}(q(\omega i)) = -\omega^3 + a_0 \omega + b(-k_i \sin(\theta \omega) + \omega k_p \cos(\theta \omega)) + b k_r \omega \cos((\theta + h)\omega) = 0,$$

lo que implica

$$-b k_r \omega \sin((\theta + h)\omega) = -a_1 \omega^2 + b(k_i \cos(\theta \omega) + \omega k_p \sin(\theta \omega)) \quad (3.44)$$

$$-b k_r \omega \cos((\theta + h)\omega) = -\omega^3 + a_0 \omega + b(-k_i \sin(\theta \omega) + \omega k_p \cos(\theta \omega)) \quad (3.45)$$

por lo tanto, al dividir la ecuación (3.44) entre la ecuación (3.45)

$$\tan((\theta + h)\omega) = \frac{-a_1\omega^2 + b(k_i \cos(\theta\omega) + \omega k_p \sin(\theta\omega))}{-\omega^3 + a_0\omega + b(-k_i \sin(\theta\omega) + \omega k_p \cos(\theta\omega))}, \quad (3.46)$$

el resultado se sigue al despegar  $h$  en la ecuación (3.46), para obtener la ecuación (3.41), mientras que la ecuación (3.42) se sigue de la ecuación (3.45) al despejar  $k_r$ .

□

Las curvas paramétricas de la propocisión 8 se muestran en la Figura 3.15, donde  $a_1 = 5$ ,  $a_0 = 2$ ,  $b = 2$ ,  $\theta = 0.1$ ,  $k_p = 22.9$  y  $k_i = 7.5$ .

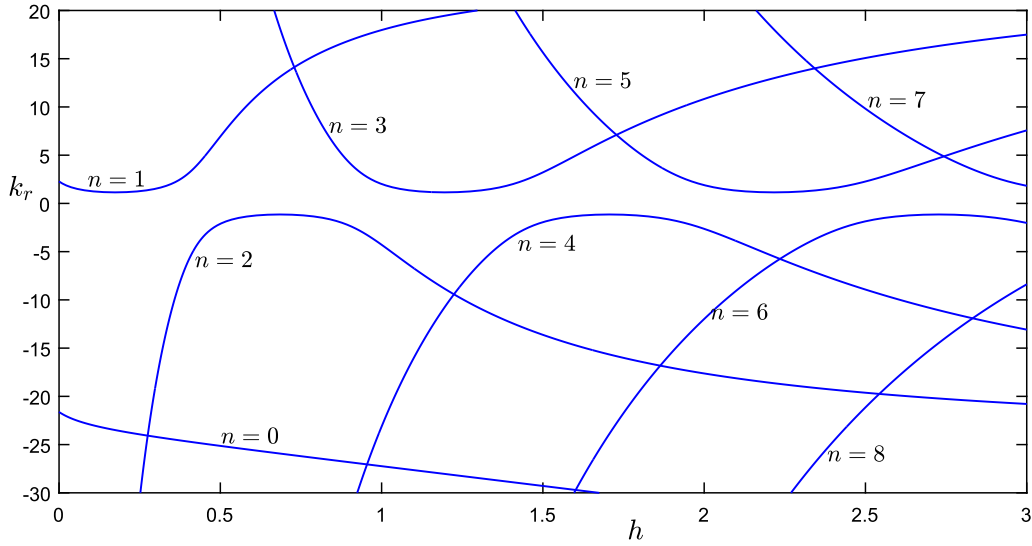


Figura 3.15: Conjunto frontera de estabilidad de (3.40) en el plano  $h$ - $k_r$ .

Para el análisis de  $\sigma$ -estabilidad, considere el cuasipolinomio siguiente

$$q_\sigma(s) := q(s - \sigma) = (s - \sigma)^3 + a_1 (s - \sigma)^2 + a_0 (s - \sigma) + b(k_p (s - \sigma) + k_i) e^{-\theta(s-\sigma)} + bk_r (s - \sigma) e^{-(\theta+h)(s-\sigma)} \quad (3.47)$$

donde  $q(s)$  es el cuasipolinomio de la ecuación (3.40). La estabilidad de este cuasipolinomio implica la  $\sigma$  estabilidad del cuasipolinomio de la ecuación (3.40).

**Proposición 9.** *La frontera de estabilidad del cuasiopolinomio (3.47) está dado por las ecuaciones siguientes*

$$k_r(h) = \frac{b(k_i - k_p\sigma) e^{\theta\sigma} - \sigma^3 + a_1 \sigma^2 - a_0 \sigma}{b \sigma e^{(\theta+h)\sigma}} \quad (3.48)$$

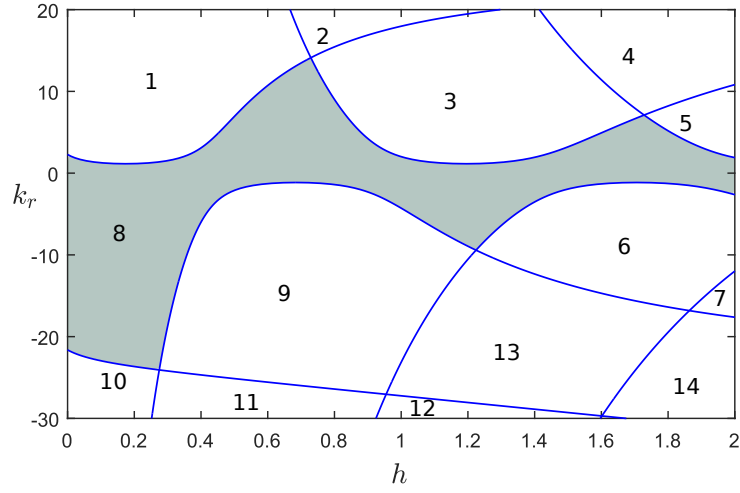


Figura 3.16: Región estable de (3.3).

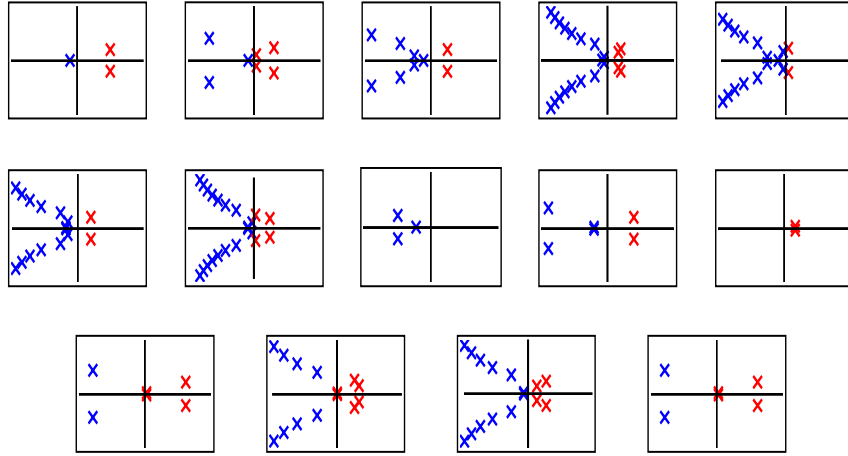


Figura 3.17: Raíces de (3.40), en las regiones indicadas en la Figura 3.16.

para una raíz de la forma  $s = 0$ , y las siguientes ecuaciones paramétricas

$$h(\omega) = \left( \arctan \left( \frac{\omega M + \sigma N}{\omega N - \sigma M} \right) + n\pi \right) / \omega - \theta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.49)$$

$$k_r(\omega, h(\omega)) = \frac{-\alpha - \phi_1 \sin(\theta\omega) - \phi_2 \cos(\theta\omega)}{b e^{(\theta+h)\sigma} (\omega \sin((\theta+h)\omega) - \sigma \cos((\theta+h)\omega))}, \quad (3.50)$$

para raíces de la forma  $s = \omega i$ , donde

$$M := \alpha + \phi_1 \sin(\theta\omega) + \phi_2 \cos(\theta\omega)$$

$$N := \beta + \phi_1 \cos(\theta\omega) - \phi_2 \sin(\theta\omega),$$



y

$$\begin{aligned}\alpha &= -\sigma^3 + a_1 \sigma^2 + (3\omega^2 - a_0) \sigma - a_1 \omega^2, & \beta &= 3\omega\sigma^2 - 2a_1 \omega \sigma + a_0 \omega - \omega^3, \\ \phi_1 &= b e^{\theta\sigma} k_p \omega, & \phi_2 &= b e^{\theta\sigma} (k_i - k_p \sigma),\end{aligned}\tag{3.51}$$

**Demostración:** La demostración es muy similar a la demostración de la sección anterior. Suponga que  $s = 0$  en la ecuación (3.47), entonces

$$q_\sigma(0) = -\sigma^3 + a_1 \sigma^2 - a_0 \sigma + b (k_i - k_p \sigma) e^{\theta\sigma} - b k_r \sigma e^{(\theta+h)\sigma} = 0,$$

al despejar  $k_r$  de esta ecuación, se obtiene la ecuación (3.50). Ahora suponga que  $s = \omega i$ , en la ecuación (3.47), con  $\omega > 0$ , se sigue que

$$\begin{aligned}q_\sigma(\omega) &= (\omega i - \sigma)^3 + a_1 (\omega i - \sigma)^2 + a_0 (\omega i - \sigma) + \\ & b (k_p (\omega i - \sigma) + k_i) e^{-\theta(\omega i - \sigma)} + b k_r (\omega i - \sigma) e^{-(\theta+h)(\omega i - \sigma)} = 0,\end{aligned}$$

al expandir lo anterior, y agrupando los términos de acuerdo a la ecuación 3.51, se tiene que

$$\begin{aligned}q_\sigma(\omega) &= \alpha + \beta i \\ & + \phi_1 \text{sen}(\theta\omega) + \phi_2 \text{cos}(\theta\omega) + [\phi_1 \text{cos}(\theta\omega) - \phi_2 \text{sen}(\theta\omega)] i \\ & + b k_r e^{(\theta+h)\sigma} [\omega \text{sen}((\theta+h)\omega) - \sigma \text{cos}((\theta+h)\omega)] \\ & + b k_r e^{(\theta+h)\sigma} [\omega \text{cos}((\theta+h)\omega) + \sigma \text{sen}((\theta+h)\omega)] i = 0,\end{aligned}$$

se sigue de lo anterior que

$$\begin{aligned}\text{Re}(q_\sigma(i\omega)) &= \alpha + \phi_1 \text{sen}(\theta\omega) + \phi_2 \text{cos}(\theta\omega) \\ & + b k_r e^{(\theta+h)\sigma} (\omega \text{sen}((\theta+h)\omega) - \sigma \text{cos}((\theta+h)\omega)) = 0,\end{aligned}\tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}\text{Im}(q_\sigma(i\omega)) &= \beta + \phi_1 \text{cos}(\theta\omega) - \phi_2 \text{sen}(\theta\omega) \\ & + b k_r e^{(\theta+h)\sigma} (\omega \text{cos}((\theta+h)\omega) + \sigma \text{sen}((\theta+h)\omega)) = 0,\end{aligned}\tag{3.53}$$

empleando de nuevo la identidad trigonométrica de la sección anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\omega \text{sen}((\theta+h)\omega) - \sigma \text{cos}((\theta+h)\omega) &= \sqrt{\omega^2 + \sigma^2} \text{sen}\left((\theta+h)\omega - \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)\right), \\ \omega \text{cos}((\theta+h)\omega) + \sigma \text{sen}((\theta+h)\omega) &= \sqrt{\omega^2 + \sigma^2} \text{cos}\left((\theta+h)\omega - \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)\right),\end{aligned}$$

al sustituir en (3.52) y (3.53),

$$b k_r e^{(\theta+h)\sigma} \sqrt{\omega^2 + \sigma^2} \sin\left((\theta + h)\omega - \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)\right) = -\alpha - \phi_1 \sin(\theta\omega) - \phi_2 \cos(\theta\omega) \quad (3.54)$$

$$b k_r e^{(\theta+h)\sigma} \sqrt{\omega^2 + \sigma^2} \cos\left((\theta + h)\omega - \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)\right) = -\beta - \phi_1 \cos(\theta\omega) + \phi_2 \sin(\theta\omega) \quad (3.55)$$

combinando estas dos ecuaciones

$$\tan\left((\theta + h)\omega + \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)\right) = \frac{\alpha + \phi_1 \sin(\theta\omega) + \phi_2 \cos(\theta\omega)}{\beta + \phi_1 \cos(\theta\omega) - \phi_2 \sin(\theta\omega)},$$

donde es posible despejar a  $h$ ,

$$h = \left( \arctan\left(\frac{\alpha + \phi_1 \sin(\theta\omega) + \phi_2 \cos(\theta\omega)}{\beta + \phi_1 \cos(\theta\omega) - \phi_2 \sin(\theta\omega)}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + n\pi \right) / \omega - \theta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

finalmente, la ecuación (3.49) obtiene al considerar el cambio de variable de la misma forma que en el teorema de la sección anterior, mientras que la ecuación (3.50) se obtiene al despejar  $k_r$  de la ecuación (3.52).  $\square$

Estas ecuaciones describen las curvas paramétricas que se muestran en la Figura 3.18.

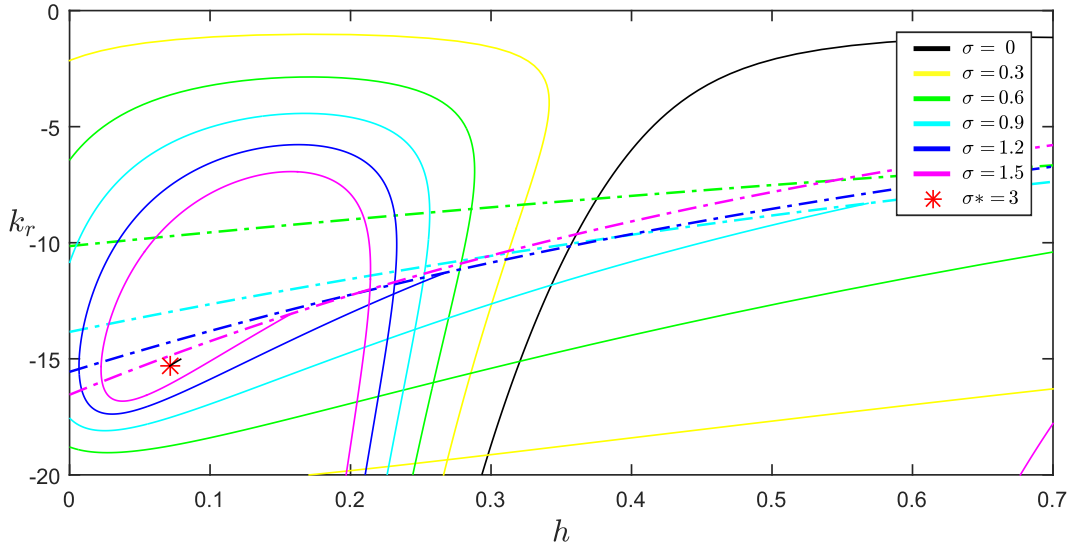


Figura 3.18: Curvas de la frontera de  $\sigma$ -estabilidad del cuasipolinomio (3.40).

En las Figuras 3.19 y 3.20 se grafican las regiones de  $\sigma$ -estabilidad, donde  $a_1 = 5$ ,  $a_0 = 2$ ,  $b = 2$ ,  $\theta = 0.1$ ,  $k_p = 22.9$  y  $k_i = 7.5$ .

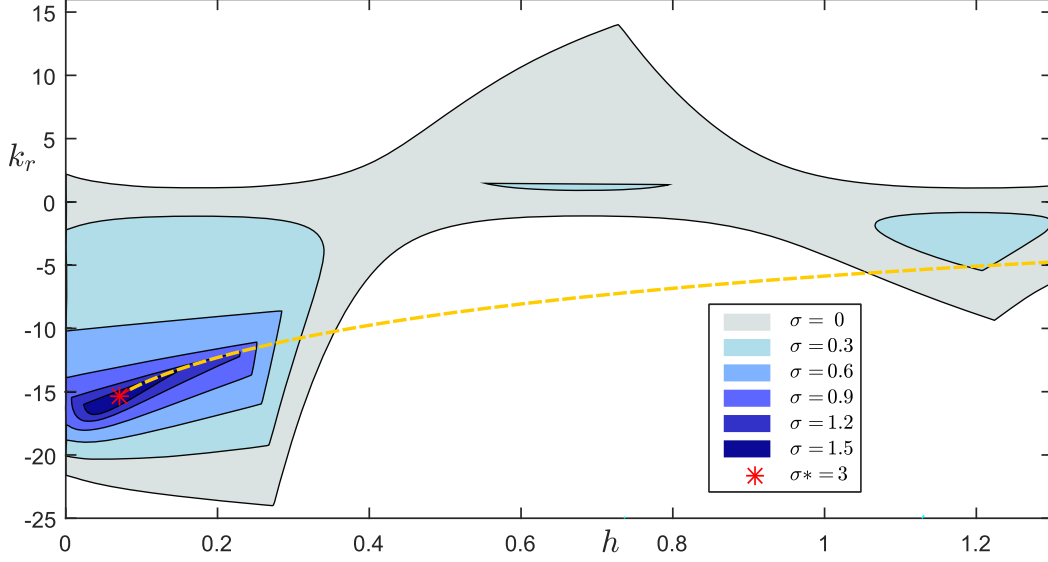


Figura 3.19: Regiones de  $\sigma$ -estabilidad de (3.40).

**Proposición 10.** Para el cuasipolinomio de la ecuación (3.40),  $s = -\sigma$  es una raíz de multiplicidad al menos dos, si y sólo si  $h$  y  $k_r$  están dados por las fórmulas siguientes

$$h_\sigma = \frac{-\sigma^4\theta + (\theta a_1 + 2)\sigma^3 - (\theta a_0 + a_1)\sigma^2 + e^{\theta\sigma}bk_i}{\sigma(\sigma^3 - a_1\sigma^2 + (bk_p e^{\theta\sigma} + a_0)\sigma - e^{\theta\sigma}bk_i)} \quad (3.56)$$

$$k_{r,\sigma} = \frac{b(-\sigma k_p + k_i)e^{\theta\sigma} - \sigma^3 + a_1\sigma^2 - a_0\sigma}{b\sigma e^{(\theta+h)\sigma}} \quad (3.57)$$

**Demostración:** Al sustituir  $s = -\sigma$ , e igualar a cero, en el cuasipolinomio (3.40), y en su primera derivada

$$q(-\sigma) = -\sigma^3 + a_1\sigma^2 - a_0\sigma + b(-\sigma k_p + k_i)e^{\theta\sigma} - bk_r\sigma e^{(\theta+h)\sigma} = 0, \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}q(-\sigma) &= (bh\sigma k_r + b\sigma\theta k_r + bk_r)e^{(\theta+h)\sigma} + e^{\theta\sigma}b\sigma\theta k_p \\ &\quad - e^{\theta\sigma}b\theta k_i + bk_p e^{\theta\sigma} + 3\sigma^2 - 2a_1\sigma + a_0 = 0, \end{aligned} \quad (3.59)$$

al despejar  $k_r$  de la ecuación (3.59)

$$k_r = -\frac{e^{\theta\sigma}b\sigma\theta k_p - e^{\theta\sigma}b\theta k_i + bk_p e^{\theta\sigma} + 3\sigma^2 - 2a_1\sigma + a_0}{e^{(\theta+h)\sigma}b(h\sigma + \theta\sigma + 1)}$$

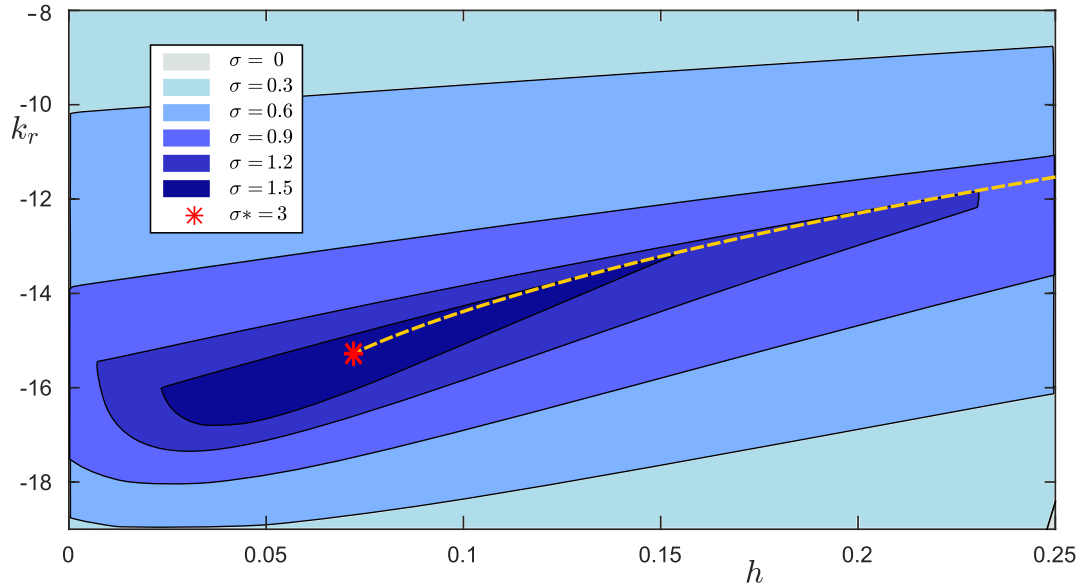


Figura 3.20: Detalle de las regiones de  $\sigma$ -estabilidad de (3.40).

sustituyendo esta expresión en (3.58)

$$-\sigma^3 + a_1\sigma^2 - a_0\sigma - b(\sigma k_p - k_i)e^{\theta\sigma} + \frac{(e^{\theta\sigma}b\sigma\theta k_p - e^{\theta\sigma}b\theta k_i + bk_p e^{\theta\sigma} + 3\sigma^2 - 2a_1\sigma + a_0)\sigma}{h\sigma + \theta\sigma + 1} = 0,$$

la ecuación (3.56) se sigue de esta última expresión al despejar  $h$ , mientras que la ecuación (3.57) se obtiene de (3.58) al despejar  $k_r$ .

□

### 3.2.1. Máxima Cota de Decaimiento Exponencial

Al igual que en las regiones de  $\sigma$  estabilidad del caso de primer orden, la dinámica de las raíces características muestra que el punto de colapso de las regiones de estabilidad está dado en un punto del plano  $h$ - $k_r$  donde el cuasipolinomio (3.40) tiene una raíz real de multiplicidad al menos tres en  $s = -\sigma$ .

**Proposición 11.** *Dados  $k_p$  y  $k_i \neq 0$ ,  $s = -\sigma$ ,  $\sigma > 0$ , es una raíz de multiplicidad al menos 3 del cuasipolinomio (3.40), si  $h = h_\sigma$  y  $k_r = k_{r,\sigma}$  dados en la proposición 10, y  $\sigma$  es una raíz de la ecuación*

$$\begin{aligned}
f(\sigma) &= (p_6\sigma^6 + p_5\sigma^5 + p_4\sigma^4 + p_3\sigma^3 + p_2\sigma^2 + p_0\sigma) e^{\theta\sigma} \\
&\quad + (-k_i^2 + 2k_i k_p) b^2 e^{2\theta\sigma} + 2\sigma^6 - 2a_1\sigma^5 + (a_1^2 - 2a_0)\sigma^4
\end{aligned} \tag{3.60}$$

donde

$$\begin{aligned}
p_0 &= 2ba_0k_i & p_2 &= (-2\theta a_0k_i - 4a_1k_i) b \\
p_3 &= (e^{\theta\sigma} b\theta^2 a_0k_i + 4e^{\theta\sigma} b\theta a_1k_i + 8e^{\theta\sigma} bk_i) b & p_4 &= (-\theta^2 a_0k_p - \theta^2 a_1k_i - 2\theta a_1k_p - 6\theta k_i - 2k_p) b \\
p_5 &= (\theta^2 a_1k_p + \theta^2 k_i + 4\theta k_p) b & p_6 &= -b\theta^2 k_p
\end{aligned}$$

**Demostración:** En la demostración de la proposición 10, se tiene la existencia de una raíz de multiplicidad al menos dos, suponga ahora que  $s = -\sigma$  es al menos de multiplicidad tres, igualando a cero la derivada del cuasipolinomio (3.40), con  $s = -\sigma$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2} q(-\sigma) &= (-bh^2\sigma k_r - 2bh\sigma\theta k_r - b\sigma\theta^2 k_r - 2bhk_r - 2b\theta k_r) e^{(\theta+h)\sigma} \\
&\quad - e^{\theta\sigma} b\sigma\theta^2 k_p + e^{\theta\sigma} b\theta^2 k_i - 2bk_p\theta e^{\theta\sigma} - 6\sigma + 2a_1 = 0,
\end{aligned} \tag{3.61}$$

de la ecuación (3.58)

$$e^{(\theta+h)\sigma} = -\frac{e^{\theta\sigma} b\sigma k_p - e^{\theta\sigma} bk_i + \sigma^3 - a_1\sigma^2 + a_0\sigma}{bk_r\sigma}$$

al sustituir en (3.61) y simplificar, se obtiene el resultado. □

La proposición siguiente caracteriza la existencia de esta raíz y es análoga a la proposición (6).

**Proposición 12.** *Suponga que  $\theta \geq 0$  y  $b > 0$ , en el cuasipolinomio (3.40). Sea  $\sigma > 0$  una cota de decaimiento deseada. Entoces el cuasipolinomio (3.40) tiene una raíz de multiplicidad al menos tres, dada por  $s = -\sigma$ , si y sólo si*

$$k_i \in (k_{i,inf}, k_{i,sup}), \tag{3.62}$$

donde

$$k_{i,inf} = \min\{R_1, R_2\}, k_{i,sup} = \max\{R_1, R_2\},$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{(\sigma^2\theta - \theta\sigma a_1 + \theta a_0 - 2\sigma + a_1)\sigma^2}{be^{\theta\sigma}} \\
R_2 &= \frac{\sigma^3(\sigma^2\theta^2 - \sigma\theta^2 a_1 + \theta^2 a_0 - 4\theta\sigma + 2\theta a_1 + 2)}{2be^{\theta\sigma}}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$k_p = \frac{(e^{2\theta\sigma} b^2 k_i^2 + \varsigma e^{\theta\sigma} k_i - 2\sigma^6 + 2\sigma^5 a_1 + (-a_1^2 + 2a_0)\sigma^4) e^{-\theta\sigma}}{b\sigma (2e^{\theta\sigma} b k_i - \sigma^5 \theta^2 + (\theta^2 a_1 + 4\theta)\sigma^4 + (-\theta^2 a_0 - 2\theta a_1 - 2)\sigma^3)} \tag{3.64}$$

donde

$$\begin{aligned}
\varsigma &= -b\theta^2\sigma^5 + (\theta^2 a_1 + 6\theta)b\sigma^4 + (-\theta^2 a_0 - 4\theta a_1 - 8)b\sigma^3 \\
&\quad + (2\theta a_0 + 4a_1)b\sigma^2 - 2ba_0\sigma,
\end{aligned}$$

$$h = \frac{-\sigma^4\theta + 2\sigma^4\theta ba_0 k_i - \sigma^2\theta a_0 + e^{\theta\sigma} b k_i + 2\sigma^3 - 2ba_0 k_i \sigma^3}{\sigma (b\sigma k_p e^{\theta\sigma} - e^{\theta\sigma} b k_i + \sigma^3 - 2ba_0 k_i \sigma^3 + a_0\sigma)} \tag{3.65}$$

$$k_r = -\frac{b\sigma k_p e^{\theta\sigma} - e^{\theta\sigma} b k_i + \sigma^3 - 2ba_0 k_i \sigma^3 + a_0\sigma}{b\sigma e^{(\theta+h)\sigma}}. \tag{3.66}$$

Además, la pertenencia de  $k_i$  en el intervalo de la ecuación (3.62) garantiza que el valor de  $h$  en la ecuación (3.65), sea mayor a cero.

**Demostración:** Suponga que existe una raíz de multiplicidad al menos tres, entonces de acuerdo a la Proposición 11, esto es cierto si y sólo sí,  $\sigma$  satisface la ecuación (3.60), al despejar  $k_p$  de esta ecuación se obtiene la ecuación (3.33). La ecuación (3.65) se obtiene al sustituir la ecuación (3.64) en la ecuación (3.56) y simplificar.

Para garantizar que  $h > 0$ , el producto del numerador con el denominador en la ecuación (3.65) debe ser positivo; observe que únicamente se tienen expresiones lineales en  $k_i$ , por lo que al hacer el producto se obtiene el polinomio de grado dos

$$Ak_i^2 + Bk_i + C$$

donde

$$A = -2e^{2\theta\sigma}b^2\sigma,$$

$$B = (b\sigma^6\theta^2 + (-\theta^2a_1 - 2\theta)b\sigma^5 + (\theta^2a_0 - 2)b\sigma^4 + (2\theta a_0 + 2a_1)b\sigma^3)e^{\theta\sigma},$$

$$C = -\sigma^{10}\theta^3 + (2\theta^3a_1 + 6\theta^2)\sigma^9 + (-\theta^3a_1^2 - 2\theta^3a_0 - 9\theta^2a_1 - 10\theta)\sigma^8 \\ + (2\theta^3a_0a_1 + 3\theta^2a_1^2 + 6\theta^2a_0 + 10\theta a_1 + 4)\sigma^7 \\ + (-\theta^3a_0^2 - 3\theta^2a_0a_1 - 2\theta a_1^2 - 2\theta a_0 - 2a_1)\sigma^6.$$

Un calculo directo muestra que  $B^2 - 4AC$  es

$$b^2\sigma^6e^{2\theta\sigma}((\sigma\theta^2 - 2\theta)a_0 + (-\sigma^2\theta^2 + 4\theta\sigma - 2)a_1 + \sigma^3\theta^2 - 6\sigma^2\theta + 6\sigma)^2$$

y las raíces del polinomio de grado dos en  $k_i$  son

$$R_1 = \frac{(\sigma^3\theta^2 - (\theta^2a_1 + 2\theta)\sigma^2 + (\theta^2a_0 - 2)\sigma + 2(\theta a_0 + a_1) - |\vartheta|)\sigma^2}{4be^{\theta\sigma}}$$

$$R_2 = \frac{(\sigma^3\theta^2 - (\theta^2a_1 + 2\theta)\sigma^2 + (\theta^2a_0 - 2)\sigma + 2(\theta a_0 + a_1) + |\vartheta|)\sigma^2}{4be^{\theta\sigma}}$$

donde

$$\vartheta = \sigma^3\theta^2 + (-\theta^2a_1 - 6\theta)\sigma^2 + (\theta^2a_0 + 4\theta a_1 + 6)\sigma - 2\theta a_0 - 2a_1,$$

El valor de  $\vartheta$  puede ser positivo o negativo, en cualquier caso se tiene que las raíces están dadas por la ecuación (3.63).  $\square$

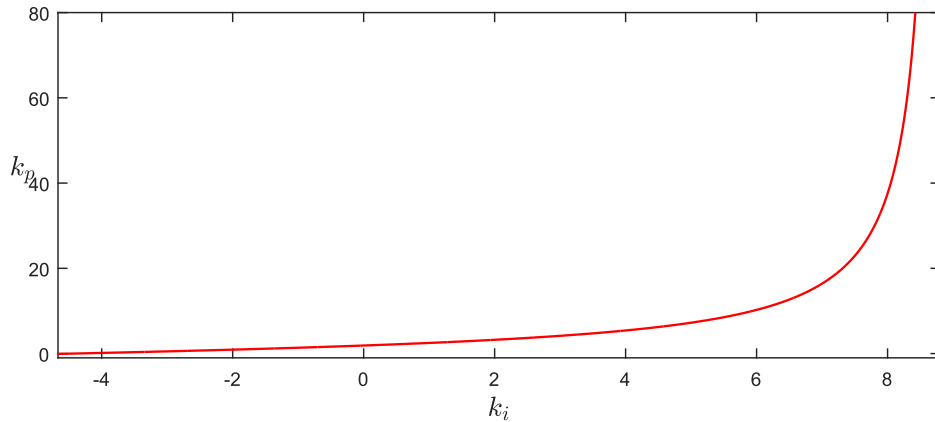


Figura 3.21: Valor de  $k_p$  en el intervalo  $(k_{i,inf}, k_{i,sup})$ , en la proposición 12.

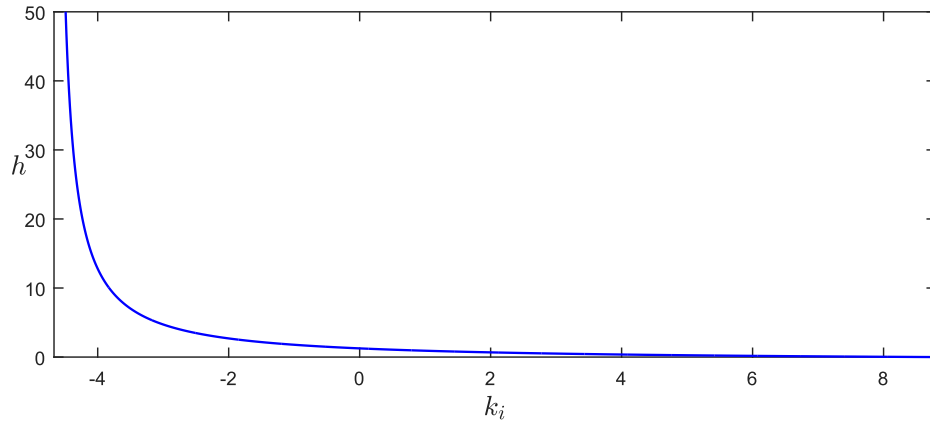


Figura 3.22: Valor de  $h$  en el intervalo  $(k_{i,inf}, k_{i,sup})$ , en la proposición 12.

□

**Observación:** En la Proposición 12, cuando  $\theta$  es cero, el intervalo en el que  $h$  es positivo está dado determinado por  $\sigma^3/b$  y  $-\sigma^2(2\sigma - a_1)/b$ .

La Proposición 12, puede ser empleada para obtener la tasa de decaimiento exponencial deseada. Por ejemplo, si se desea que la cota de decaimiento sea  $\sigma = 3$ , se elige  $k_i$  en el intervalo  $(-4.6672, 8.8009)$ , desde luego, si se elige  $k_i = 0$  se tendrá necesariamente una raíz de (3.40), en  $s = 0$ . Los figuras 3.21 y 3.22 muestran el valor de  $k_p$  y de  $h$  de acuerdo a las ecuaciones (3.64) y (3.65), respectivamente, en el intervalo antes mencionado. Para las figuras de esta sección se ha elegido  $k_i = 7.5$ , y los demás parámetros del controlador PIR de acuerdo a la propocisión 12.



### 3.3. Conclusiones del Capítulo

En ambas secciones de este capítulo se mostró la factibilidad de  $\sigma$ -estabilizar plantas con retardo empleando un controlador PIR. Por medio del método de  $D$ -particiones y la dinámica de las raíces características es posible caracterizar al punto de mayor  $\sigma$ -estabilidad, y de esta forma calcular las coordenadas de este punto en el plano  $h$ - $k_r$ , en términos de los demás parámetros.

La sintonización de un controlador PIR puede llevarse a cabo de acuerdo a éstos valores obtenidos.

En resumen, si se desea sintonizar un controlador PIR, se siguen los siguientes pasos

- Se propone una cota de decaimiento exponencial deseada  $\sigma > 0$ .
- Se elige un valor de  $k_i$  diferente de cero, que se encuentre en el intervalo determinado por (3.31) o por (3.62).
- Se verifica la estabilidad del cuasipolinomio característico correspondiente.
- Se determinan  $k_p$  y  $h$  y  $k_r$  a partir de las ecuaciones dadas por las Proposiciones 6 y 12.

## Capítulo 4

---

# Implementación de Resultados

---

En este capítulo se presenta la implementación de una ley de control PIR en una plataforma experimental, con el objetivo de verificar la factibilidad del uso de controladores PIR para estabilizar plantas de primer orden con retardo. Previo a la implementación se realizaron simulaciones de la ley de control sintonizada con las reglas dadas en el capítulo anterior. Adicionalmente se presenta una comparación con una ley de control clásica de tipo PID.

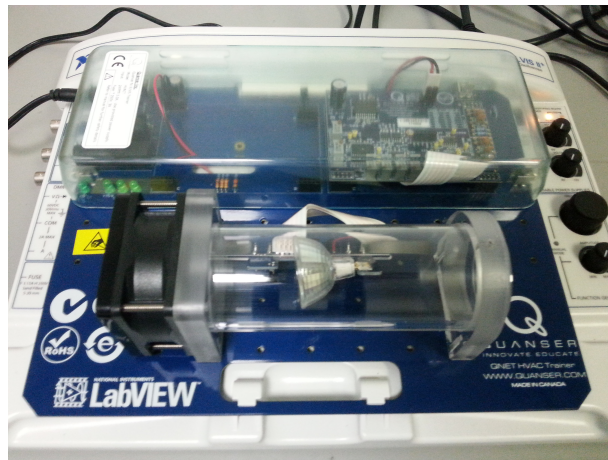


Figura 4.1: Plataforma experimental Quanser HVAC.

La plataforma experimental empleada es la plataforma QNET-HVAC<sup>®</sup> que se muestra en la Figura 4.1. Esta plataforma, fabricada por Quanser, ha sido diseñada para trabajar en conjunto con la plataforma NI-ELVIS<sup>®</sup>, fabricada por National Instruments. En términos específicos, la plataforma consiste en un sistema de calefacción y ventilación formado por una cámara equipada con un sensor electrónico de temperatura, una lámpara de halógeno de 12V con intensidad variable y un ventilador. Esta plataforma resulta ser ideal para implementar una ley de control que regule la temperatura en la cámara.

En la Figura 4.2 se muestra un esquema sencillo de un sistema de calefacción y ventilación. La presencia de un retardo en la respuesta de la planta es muy evidente, debido a que el aumento de la temperatura de la cámara no es captada por el sensor hasta que haya transcurrido cierto tiempo.

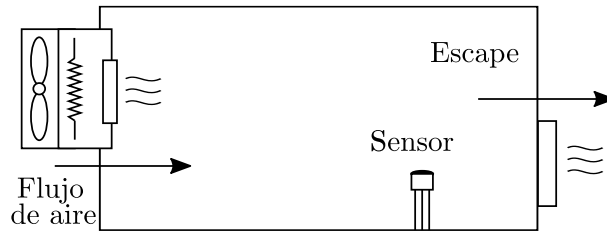


Figura 4.2: Esquema de un sistema de ventilación y calefacción.

Para el diseño y sintonización de una ley de control que estabilice la temperatura en la cámara, es conveniente modelar este sistema como una planta de primer orden, debido a que la dinámica de los sistemas térmicos corresponden en su mayoría a este tipo de plantas [35]. El sistema en lazo cerrado para esta planta con un controlador PIR se ilustra en la Figura 4.3, el cuál fue tratado en la Sección 1 del Capítulo 3.

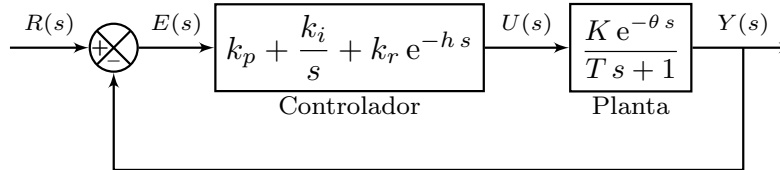


Figura 4.3: Sistema en lazo cerrado, con un controlador PIR.

## 4.1. Simulaciones

Los parámetros de esta planta son:  $T = 36$ ,  $K = 0.9$  y  $\theta = 1$ . Las regiones de  $\sigma$ -estabilidad de esta planta con un controlador PIR en lazo cerrado se muestran en la Figura 4.5. La sintonización del controlador PIR se llevó a cabo de acuerdo a la Proposición 7. En primer lugar se elige una tasa de decaimiento exponencial deseada, en este caso,  $\sigma = 0.25$ . El intervalo obtenido para la elección del parámetro  $k_i$  es  $(0.43267, 1.5143)$ . Eligiendo  $k_i = 0.62$ , se determinan los demás parámetros, obteniendo  $k_p = 0.8635$ ,  $k_r = 5.6166$  y  $h = 1.6757$ .

De igual forma, se implementó una ley de control PID para estabilizar el sistema térmico, en este caso la estructura del sistema en lazo cerrado se muestra en la Figura 4.4.

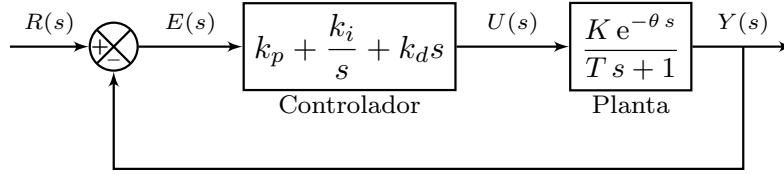


Figura 4.4: Sistema en lazo, con un controlador PID.

Se realizaron simulaciones del sistema en lazo cerrado, con los controladores PIR y PID, empleando el software Matlab y su herramienta de simulación Simulink. Se realizaron dos tipos de simulación, una simulación sin ruido (condiciones ideales) y otra en la que se añade una componente de ruido Gaussiano.

Para la sintonización del controlador PID se utilizaron dos técnicas diferentes. El primer controlador PID es sintonizado ubicando una raíz de multiplicidad tres en  $s = -\sigma$ , en la ecuación característica. Para tal propósito se consideran las siguientes reglas que fueron obtenidas fácilmente con manipulaciones algebraicas del quasipolinomio característico correspondiente, y de su primera y segunda derivada, evaluadas en  $s = -\sigma$ ,

$$\begin{aligned}
 k_p &= -\frac{T\sigma^3\theta^2 - 3T\sigma^2\theta - \sigma^2\theta^2 + \theta\sigma + 1}{Ke^{\theta\sigma}}, \\
 k_i &= \frac{\sigma(-T\sigma^2\theta + Ke^{\theta\sigma}k_p + \theta\sigma + 1)}{2Ke^{\theta\sigma}}, \\
 k_d &= \frac{Ke^{\theta\sigma}\sigma k_p - Ke^{\theta\sigma}k_i - T\sigma^2 + \sigma}{K\sigma^2e^{\theta\sigma}}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Aquí se tiene  $k_p = 4.3267$ ,  $k_i = 0.4327$ ,  $k_d = -17.3067$ . Además para estos valores la raíz de multiplicidad 3 es la raíz dominante, lo que implica que esta ley de control  $\sigma$ -estabiliza el sistema en lazo cerrado. Para hacer referencia a la ley de control PID con estos parámetros, se empleará como etiqueta PID- $\sigma$ -est.

Debido a que la ganancia derivativa tiene valor absoluto muy grande, se espera que el ruido presente en la medición sea amplificado por la acción derivativa, por lo que se propone una

segunda sintonización del controlador PID, en la se emplean las reglas siguientes: [46]

$$k_p = \frac{2T + \theta}{2K(\theta + \lambda)}, k_i = \frac{1}{K(\theta + \lambda)}, k_d = \frac{T\theta}{2K(\theta + \lambda)}, \quad (4.2)$$

donde  $\lambda = 0.2T + \theta$ . En este caso,  $k_p = 4.4082$ ,  $k_i = 0.1208$ ,  $k_d = 2.1739$ . Para hacer referencia a la ley de control PID con estos parámetros, se empleará como etiqueta PID-Silva.

En las Figuras 4.6, 4.7 y 4.8 se muestran las gráficas de la temperatura, el control y el error de seguimiento para las distintas leyes de control propuestas, con condiciones ideales por la ausencia de ruido. En las Figuras 4.9, 4.10 y 4.11 se muestra lo mismo que en el caso anterior, pero incluyendo un ruido Gaussiano con media 0 y varianza  $5 \times 10^6$ , en la señal de temperatura. En ambos casos se considera una temperatura inicial de  $22^\circ\text{C}$  y una referencia de  $24^\circ\text{C}$ .

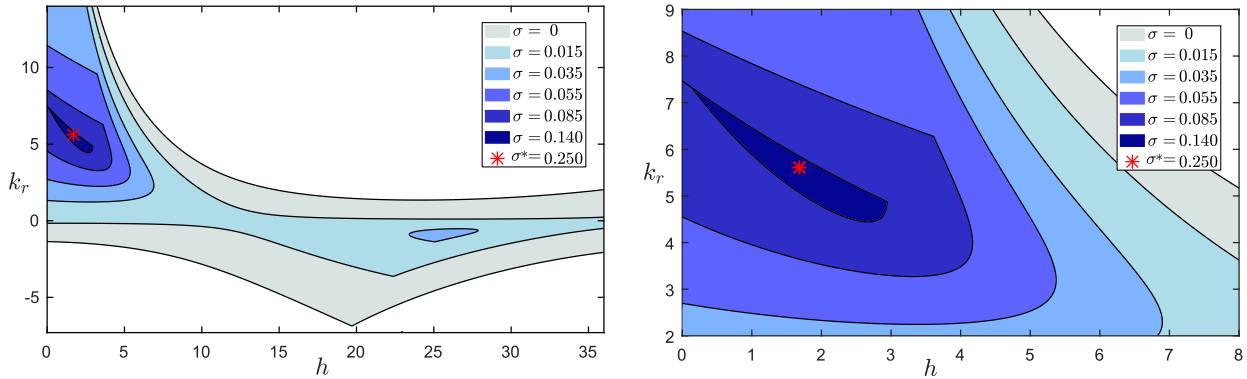


Figura 4.5: Regiones de estabilidad para la plataforma experimental.

En las Figuras 4.6, 4.7 y 4.8 puede apreciarse que el controlador PIR y el controlador PID tienen comportamientos muy similares cuando ambos sistemas en lazo cerrado son  $\sigma$ -estables. Sin embargo en presencia de ruido Gaussiano puede apreciarse que el controlador PID amplifica demasiado las grandes frecuencias en ruido, tal como se ilustra en las Figuras 4.9, 4.10 y 4.11. Cabe mencionar que tanto en simulación como en experimentación se emplea una técnica para evitar el sobreimpulso de la señal de salida, que consiste en definir el estado inicial de la integral en forma conveniente (diferente para cada controlador), para que el control en el tiempo inicial no sea de gran magnitud.

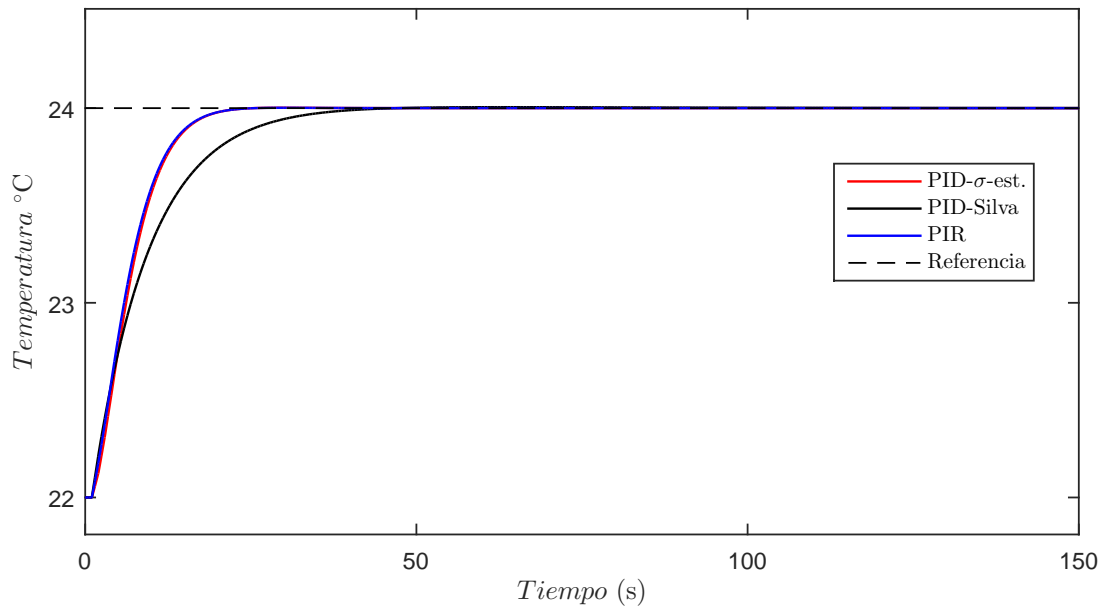


Figura 4.6: Temperatura de la planta en simulación (sin ruido).

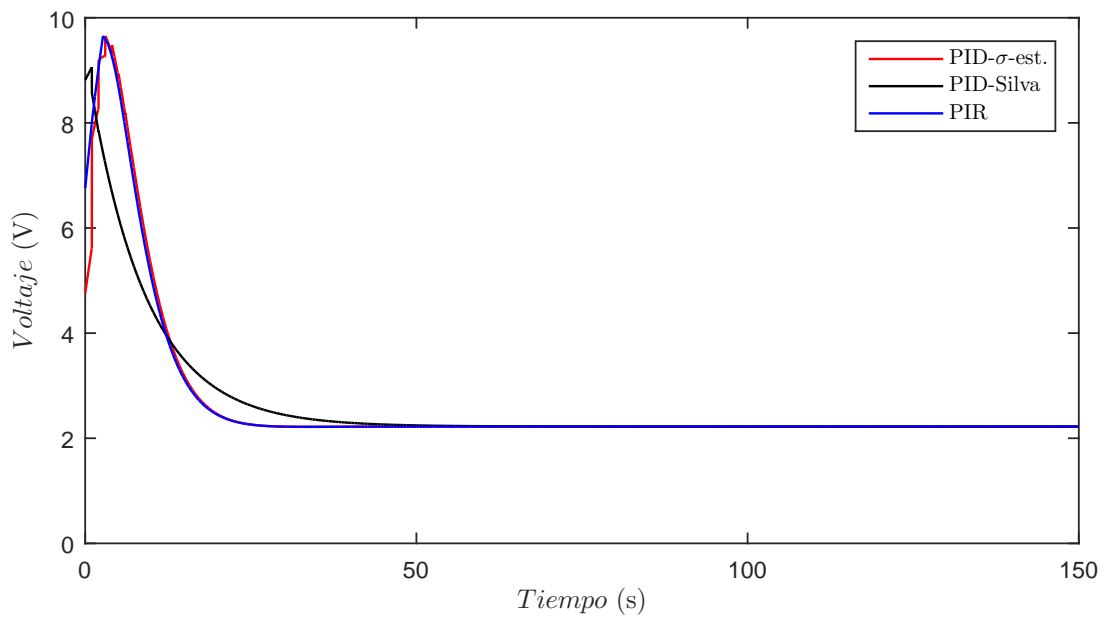


Figura 4.7: Señal de control en simulación (sin ruido).

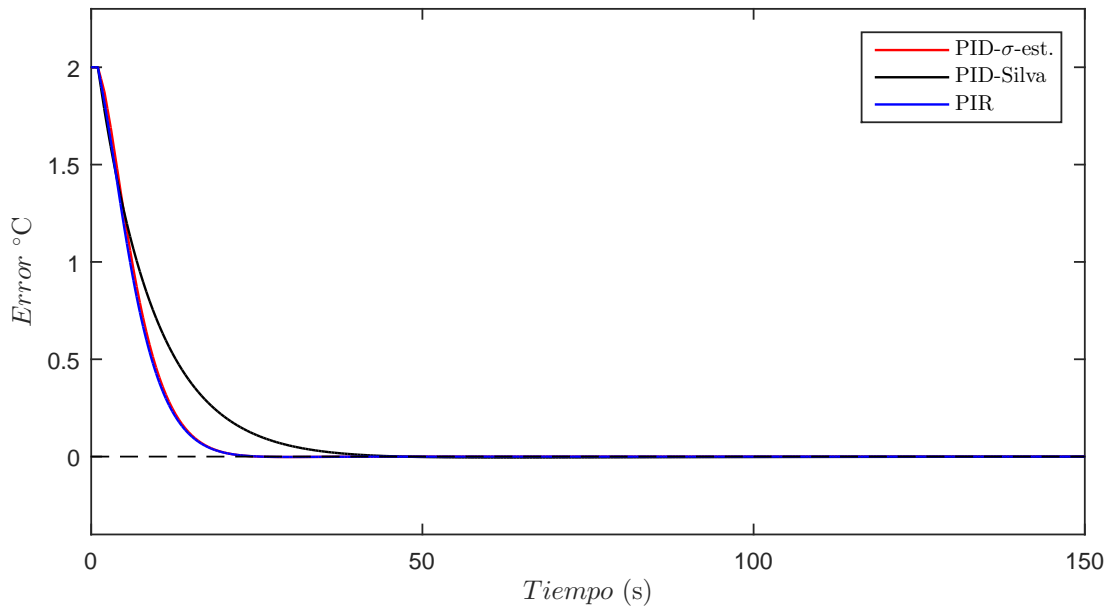


Figura 4.8: Error de seguimiento en simulación (sin ruido).

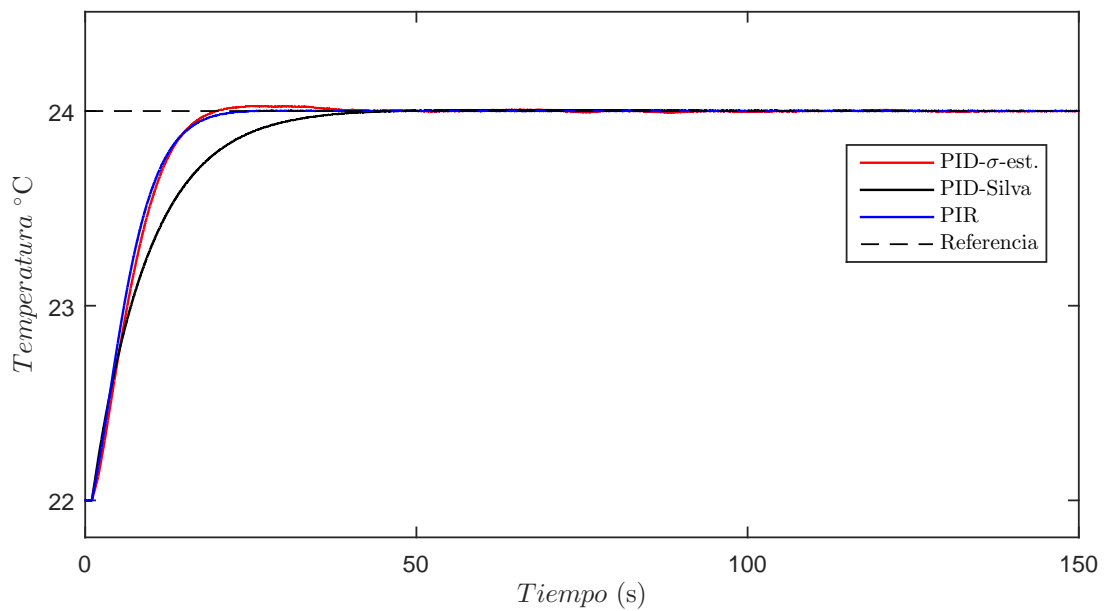


Figura 4.9: Temperatura de la planta en simulación (con ruido).

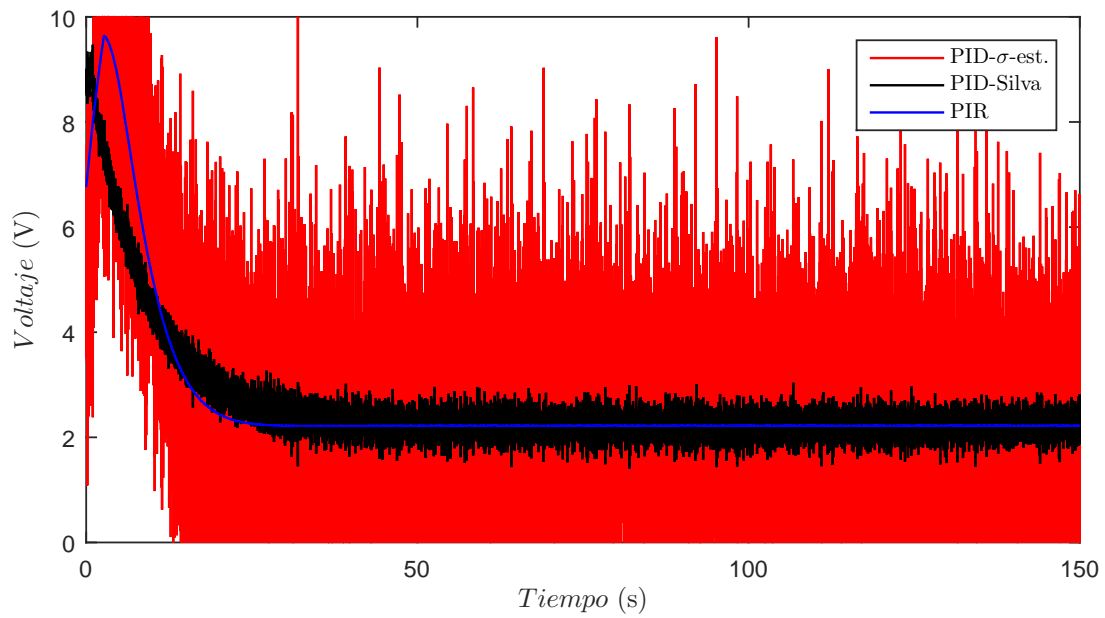


Figura 4.10: Señal de control en simulación (con ruido).

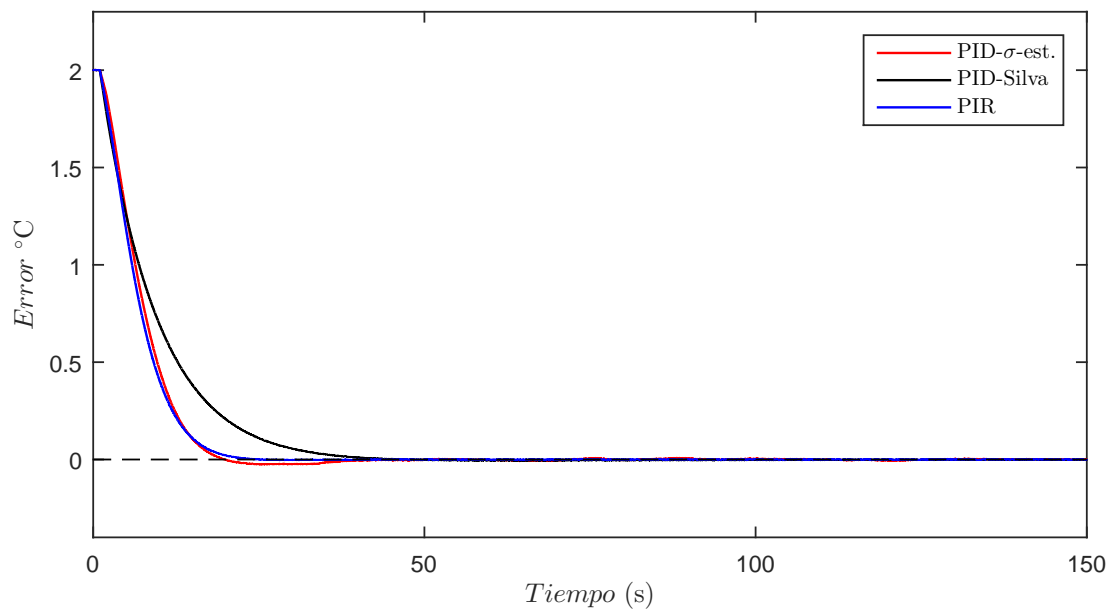


Figura 4.11: Error de seguimiento en simulación (con ruido).



## 4.2. Experimentos

De acuerdo a los resultados obtenidos en simulación, el controlador PIR puede tener un desempeño semejante al de un controlador PIR, sin embargo, el controlador PID sintonizado con tasa de decaimiento  $\sigma = 0.25$  presenta un aumento de ruido excesivo, debido a que la magnitud de la ganancia derivativa. En los experimentos se ha optado por no implementar el controlador PID con dicha sintonización, debido a que es posible causar un daño permanente al equipo. La temperatura inicial en ambos experimentos es aproximadamente  $22.3^{\circ}\text{C}$ , aquí la referencia se elige como la temperatura inicial más un aumento de  $2^{\circ}\text{C}$ .

Las Figuras 4.12, 4.13 y 4.14, se muestran una comparación del controlador PIR con el controlador PID, con las ganancias dadas en (4.2), en ambos casos se tiene un comportamiento muy similar en la salida del sistema, sin embargo a diferencia del control PID, el controlador PIR, no presenta tanto ruido en la señal de control.

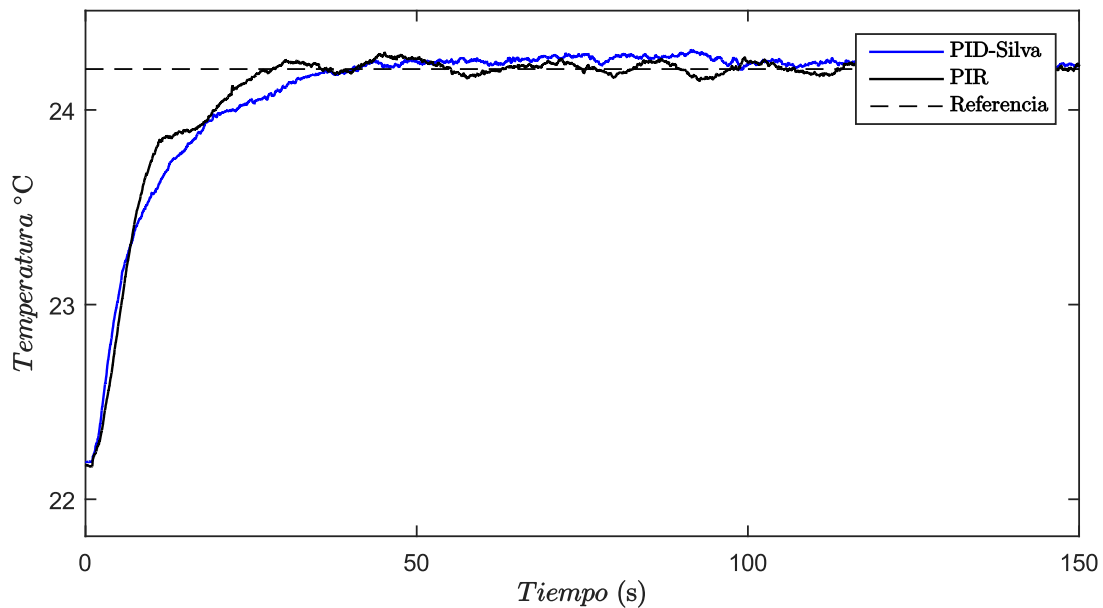


Figura 4.12: Temperatura de la planta en los experimentos.

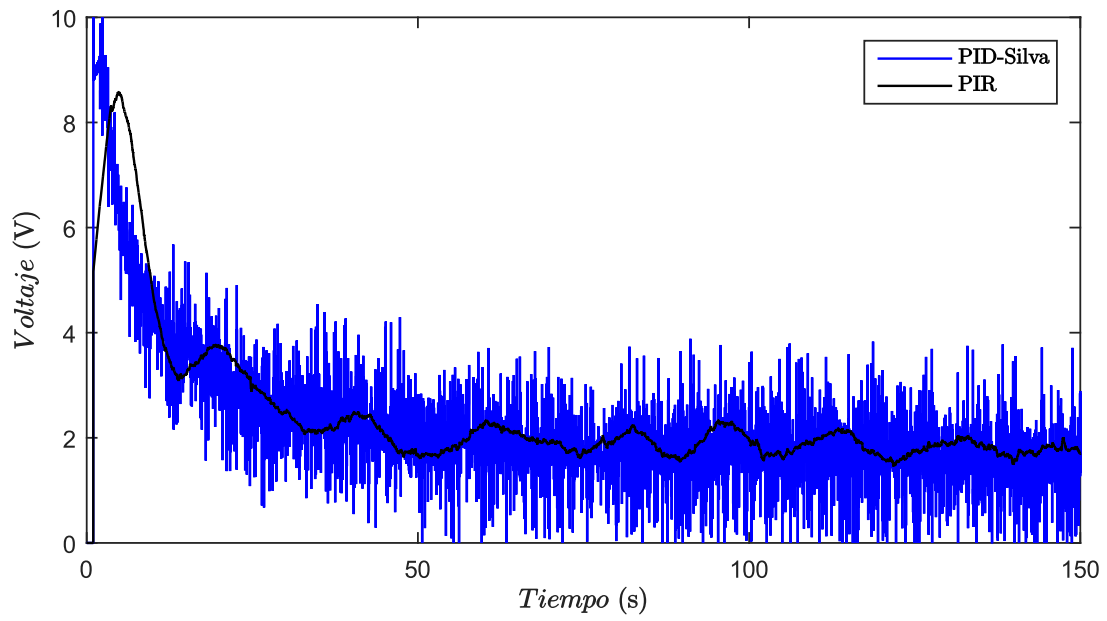


Figura 4.13: Señal de control en los experimentos.

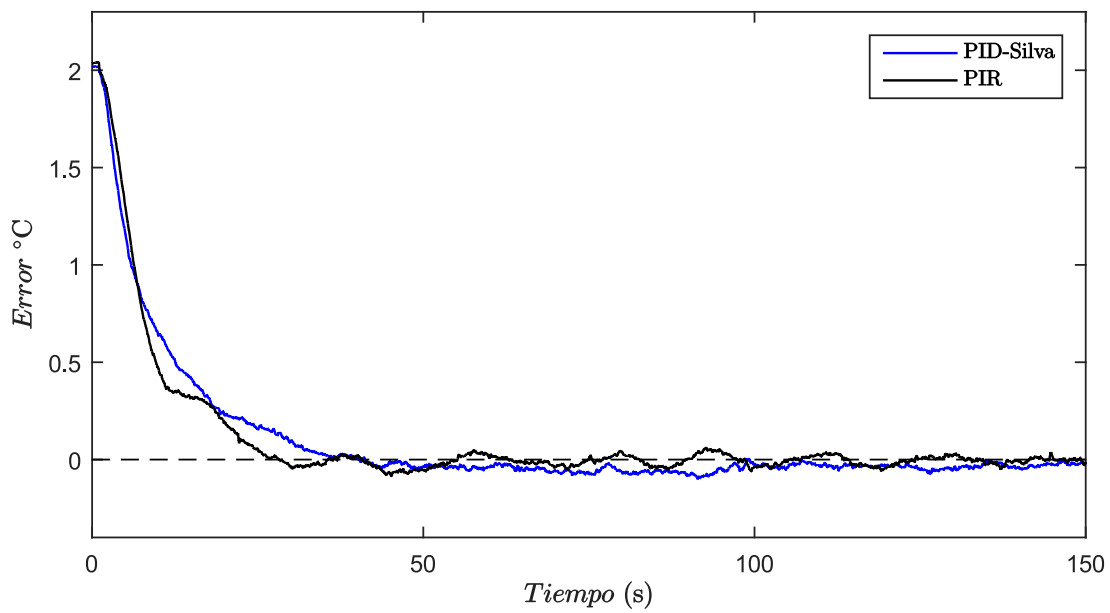


Figura 4.14: Error de seguimiento en los experimentos.

### 4.3. Conclusiones del Capítulo

En este capítulo se ha mostrado que un controlador PIR puede ser capaz de estabilizar una planta de primer orden con retardo, con un desempeño similar al de un controlador PID. Aunque idealmente, como se muestra en las simulaciones, las señales de control son similares, en la práctica se puede apreciar claramente la amplificación del ruido en el caso de un controlador PID, mientras que no está presente en gran medida en el caso de un controlador PIR.

## Capítulo 5

---

### Conclusiones y Trabajos Futuros

---

En el diseño de controladores en la industria, los requerimientos de desempeño incluyen muchos factores, en la mayoría de los casos, es deseable que una ley de control garantice la estabilidad de un sistema en lazo cerrado, evite excesos en el consumo de energía, tenga poca sensibilidad ante la presencia de ruido y rápida convergencia. De esta forma se pretende evitar que la señal de entrada cause daños a la planta. Además de lo anterior, es conveniente que una ley de control sea fácil de implementar y de sintonizar.

Aunque en teoría un controlador PID puede  $\sigma$ -estabilizar una planta, en la práctica la implementación presenta el problema de la amplificación del ruido por el término derivativo, lo cual puede ocasionar daños en los equipo. Un controlador PIR puede tener el mismo desempeño sin el problema de amplificación de ruido. La principal aportación de este trabajo son las condiciones necesarias para que un controlador PIR pueda estabilizar y  $\sigma$ -estabilizar plantas de primer y segundo orden con retardo. Las reglas de sintonización obtenidas pueden emplearse para una gran cantidad de plantas en la práctica y no requieren conocer a fondo el controlador PIR. Algunos de los trabajos futuros relacionados a este trabajo son

- Implementar los resultados en plataformas diferentes, ya sea con plantas de primer o segundo orden.
- Generalizar los resultados en plantas de mayor orden.
- Emplear un controlador más sofisticado que combine técnicas de inteligencia artificial, como redes neuronales y lógica difusa.
- Incluir más de un retardo en la ley de control para estabilizar un sistema, esto implicaría el análisis de estabilidad de sistemas con tres retardos.
- Encontrar condiciones de  $\sigma$ -estabilidad para sistemas con dos retardos en general.

---

## Bibliografía

---

- [1] C. Abdallah, P. Dorato, J. Benites-Read, y R. Byrne. Delayed Positive Feedback Can Stabilize Oscillatory Systems. *American Control Conference*, 1993.
- [2] K. J. Åström y Hägglund. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. Research Triangle Park, NC: Instrument Society of America, 1995.
- [3] K. J. Åström y Hägglund. *Control PID Avanzado*. Pearson, 2009.
- [4] J. Bak y D. J. Newman. *Complex Analysis*. Springer, tercera edición, 2010.
- [5] R. E. Bellman y K. L. Cooke. *Differential-Difference Equations*. Rand Corporation, 1963.
- [6] S. P. Bhattacharyya, D. Aniruddha, y L. H. Keel. *Linear Control Theory, Structure, Robustness and Optimization*. CRC Press Taylor & Francis Group, 2009.
- [7] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, y L. H. Keel. *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice Hall, 1995.
- [8] D. Breda, S. Maset, y R. Vermiglio. *Stability of Linear Delay Differential Equations - A Numerical Approach with MATLAB*. Springer, 2015.
- [9] J. Chiasson y J. J. Loiseau. *Applications of Time Delay Systems*. Springer, 2007.
- [10] G. Cohen y G. Coon. Theoretical Consideration of Retarded Control. *Transactions of ASME*, 1953.
- [11] J. Duda. Lyapunov Functional for a Linear System with Two Delays. *Control and Cybernetics*, 2010.
- [12] R. Farkh, K. Laabidi, y M. Ksouri. Computation of All Stability PID Gain for Second-Order Delay System. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009.
- [13] R. Farkh, K. Laabidi, y M. Ksouri. PI Control for Second Order Delay System with Tuning Parameter Optimization. *International Journal of Electrical and Electronics Engineering*, 2009.
- [14] R. Farkh, K. Laabidi, y M. Ksouri. Stabilizing Sets of PI/PID Controllers for Unstable Second Order Delay Systems. *International Journal of Automation and Computing*, 2014.
- [15] V. Finca, R. Zglimbea, E. Greaban, y C. Marin. Methods for Parameters Identification of a HVAC Installation. *WSEAS Transactions on Systems and Control*, 2009.
- [16] E. Fridman. *Introduction to Time-Delay Systems, Analysis and Control*. Birkhäuser, 2014.

- [17] E. N. Gryazina y B. T. Polyak. Stability Regions in the Parameter Space: D-decomposition Revisited. *Automatica - Elsevier*, 2005.
- [18] K. GU, J. Chen, y V. L. Kharitonov. *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhäuser, 2003.
- [19] K. GU, S.-I. Niculescu, y J. Chen. On Stability Crossing Curves for General Systems with Two Delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005.
- [20] M. T. Ho, A. Datta, y S. P. Bhattacharyya. Generalizations of the Hermite-Biehler Theorem. *Linear Algebra and its applications*, 1999.
- [21] C. Hwang y J.-H. Hwang. Stabilization of First-Order Plus Dead-Time Unstable Processes Using PID Controllers. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 2004.
- [22] E. F. Jacob y M. Chidambaram. Design of Controllers for Unstable First-Order Plus Time Delay Systems. *Computers & Chemical Engineering - Elsevier*, 1996.
- [23] R. Kelly, R. Ortega, A. Ailon, y A. Loria. Global regulation of flexible joint robots using approximate differentiation. *Automatic Control, IEEE Transactions*, 39(6):1222–1224, 1994.
- [24] V. L. Kharitonov. Robust Stability of Time-Delay Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994.
- [25] V. L. Kharitonov. *Time Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*. Birkhäuser Boston, 2013.
- [26] D. T. Korsane, V. Yadav, y K. H. Raut. PID Tuning Rules for First Order plus Time Delay System. *International Journal Of Innovative Research In Electrical, Electronics, Instrumentation And Control Engineering*, 2014.
- [27] X. Lin y H. Wang. Stability Analysis of Delay Differential Equations with Two Discrete Delays. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 2012.
- [28] S. Majhi y D. P. Atherton. Modified Smith Predictor and Controller for Processes with time delay. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 1999.
- [29] W. Michiels y S.-I. Niculescu. *Stability and Stabilization of Time Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach*. Society for Industrial and Applied Mathematics., 2007.
- [30] S. Mondie, R. Villafuerte, y R. Garrido. Tuning and Noise Attenuation of a Second Order System Using Proportional Retarded Control. *18th IFAC World Congress*, 2011.
- [31] J. I. Neimark. D-decomposition of Spaces of Quasi-polynomials. *American Mathematical Society Translations*, 1973.
- [32] S.-I. Niculescu. *Delay Effects on Stability - A Robust Control Approach*. Springer, 2001.
- [33] A. O'Dwyer. Tuning Rules for PI an PID control of Time Delay Processes: Some Recent Developments. *Proceedings of the Irish Signals and Systems Conference*, 2004.
- [34] A. O'Dwyer. *Handbook Of PI And PID Controller Tuning Rules*. Imperial College Press, tercera edition, 2009.

- [35] K. Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Pearson, 2010.
- [36] V. A. Oliveira, L. V. Cossi, A. M. F. Silva, y C. M. M. Teixeira. PID Stabilization of a Class of Time Delay Systems. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, 2005.
- [37] V. A. Oliveira, L. V. Cossi, M. C. M. Teixeira, y A. M. F. Silva. Synthesis of PID Controllers for a Class of Time Delay Systems. *Automatica - Elsevier*, 2009.
- [38] V. A. Oliveira, M. C. M. Teixeira, y L. Cossi. Stabilizing a Class of Time Delay Systems Using the Hermite-Biehler Theorem. *Linear Algebra and its applications*, 2003.
- [39] J. Osuský y V. Veselý. Modification of Neimark D-partition Method for Desired Phase Margin. *International Conference Cybernetics and Informatics*, 2010.
- [40] A. Ramírez, S. Mondie, y R. Garrido. Proportional Integral Retarded Control of Second Order Linear Systems. *IEEE 52nd Annual Conference on Decision and Control*, 2013.
- [41] A. Ramírez, S. Mondie, R. Garrido, y R. Sipahi. Design of Proportional-Integral-Retarded (PIR) Controllers for Second-Order LTI Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015.
- [42] A. Roy y K. Iqbal. PID Controller Tuning for the first-order-plus-dead-time process model via Hermite-Biehler theorem. *ISA Transactions*, 2005.
- [43] S. Ruan y J. Wei. On the Zeros of Transcendental Functions with Applications to Stability of Delay Differential Equations with Two Delays. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 2003.
- [44] K. Saadaoui, S. Testouri, y M. Benrejeb. Robust Stabilizing First-Order Controllers for a Class of Time Delay Systems. *ISA Transactions - Elsevier*, 2010.
- [45] G. J. Silva, D. Aniruddha, y S. P. Bhattacharyya. PI Stabilization of First-Order Systems with Time Delay. *Automatica - Elsevier*, 2001.
- [46] G. J. Silva, A. Datta, y S. P. Bhattacharyya. *PID Controllers for Time-Delay Systems*. Birkhäuser Basel, 2005.
- [47] R. Sipahi, S.-I. Niculescu, C. T. Abdallah, W. Michiels, y K. Gu. Stability and Stabilization of Systems with Time Delay: Limitations and Opportunities. *IEE Control Systems Magazine*, 2011.
- [48] R. Sipahi, T. Vyhlídal, S.-I. Niculescu, y P. Pepe. *Time Delay System: Methods, Applications and New Trends*. Springer, 2012.
- [49] H. Smith. *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. Springer, 2010.
- [50] O. J. M. Smith. A Controller To Overcome Dead Time. *ISA Transactions*, 1959.
- [51] J. F. Smuts. *Process Control for Practitioners*. OptiControls Inc, 2011.

- [52] R. P. Sree, M. N. Srinivas, y M. Chidambaram. A simple Method of Tuning PID Controllers for a Stable and Unstable FOPTD systems. *Computers & Chemical Engineering*, 2004.
- [53] G. Stépán. *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*. Longman Scientific & Technical, 1989.
- [54] I. Suh y Z. Bien. Proportional Minus Delay Controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979.
- [55] I. Suh y Z. Bien. Use of Time-Delay Actions in the Controller Design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1980.
- [56] G. M. Swisher y S. Tenqchen. Design of Proportional-Minus-Delay Action Feedback Controllers for Second and Third-Order Systems. *American Control Conference*, 1988.
- [57] R. Villafuerte, S. Mondie, y R. Garrido. Tuning of Proportional Retarded Controllers: Theory and Experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013.
- [58] A. Visioli. *Practical PID Control*. Springer, 2006.
- [59] D.-J. Wang. Synthesis of PID Controllers for High-Order Plants with Time-Delay. *Journal of Process Control*, 2009.
- [60] H. Wang, J. Liu, F. Yang, y Y. Zhang. Proportional-Integral Controller for Stabilization of Second-Order Delay Processes. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2014.
- [61] S. Yi, P. W. Nelson, y U. A. Galip. PI Control of First Order Time-Delay Systems via Eigenvalue Assignment. *American Control Conference*, 2011.
- [62] J. Zabczyk. *Mathematical Control Theory - An Introduction*. Birkhäuser Boston, 1995.
- [63] Q.-C. Zhong. *Robust Control of Time-delay Systems*. Springer, 2006.
- [64] J. Ziegler, N. Nichols, y N. Rochester. Optimum Settings for Automatic Controllers. *Transactions of the ASME*, 1942.
- [65] P. Zítek, J. Fiser, y T. Vyhlídal. Dimensional Analysis Approach to Dominant Three-Pole Placement in DDelayed PID Control Loops. *Journal of Process Control*, 2013.