



I

**Casa abierta al tiempo**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

POSGRADO EN MATEMÁTICAS

TÍTULO DE LA TESIS:

**Estudio simultáneo de conjuntos de sistemas**

PRESENTA:

Genaro Velázquez Avilés

---

Supervisado por:

Dr. Baltazar Aguirre Hernández.- Matemáticas, UAM-Iztapalapa

Dr. Eric Campos Cantón.- Instituto Potosino de Investigación  
Científica y Tecnológica, (IPICyT)

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1. Sistemas y ecuaciones de estado . . . . .	2
1.2. Conceptos básicos de teoría de control . . . . .	4
1.3. Estabilidad . . . . .	5
1.3.1. Estabilidad de Lyapunov . . . . .	5
<b>2. Diagonalización simultánea</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Preliminares matemáticos . . . . .	9
2.3. Matriz de Metzler . . . . .	10
2.4. Matrices Metzler y funciones diagonales de Lyapunov . . . . .	11
2.5. El resultado principal . . . . .	13
<b>3. Sincronización</b>	<b>15</b>
3.1. Introducción . . . . .	15
3.2. Estudio sobre la sincronización . . . . .	16
3.3. Modelo de sincronización de las luciernagas . . . . .	17
3.3.1. Introducción . . . . .	17
3.3.2. Descripción del modelo . . . . .	18
3.3.3. Arreglo lineal . . . . .	18
3.3.4. Arreglo cuadrado . . . . .	21
3.3.5. Gráficas de la simulación numérica . . . . .	24
3.4. Conclusiones . . . . .	26
<b>4. Generación de atractores caóticos</b>	<b>27</b>
4.1. Introducción . . . . .	27
4.2. Teoría de atractores . . . . .	29
4.3. Atractores extraños . . . . .	30
4.4. Control simultáneo de enroscados . . . . .	31
4.5. Caos sincronizado . . . . .	36
4.5.1. Pecora-Carrol . . . . .	37

<b>5. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>A. Programas de Matlab</b>	<b>40</b>
A.1. Sincronización de Luciernagas . . . . .	40
A.1.1. Función del arreglo lineal . . . . .	40
A.1.2. Función del arreglo cuadrado . . . . .	40
A.1.3. Programa principal . . . . .	41
A.2. Generación de enroscados . . . . .	43
A.2.1. Función del sistema 5.8 y 5.13 . . . . .	43
A.2.2. Función del sistema 5.9 y 5.14 . . . . .	44
A.2.3. Función del sistema 5.10 y 5.15 . . . . .	45
A.2.4. Función del sistema 5.16 y 5.18 . . . . .	46
A.2.5. Programa principal sistemas 5.13,5.14,5.15 . . . . .	47
A.2.6. Programa principal sistema 5.16 . . . . .	49

# Introducción

En esta tesis se presenta un estudio de diferentes conjuntos de sistemas dinámicos, este estudio tiene como objetivo el análisis del comportamiento simultáneo debido a que se ha visto existencia de cierta información que no se aprecia a simple vista y sin embargo está presente, también se estudia la posibilidad de poder controlar varios sistemas al mismo tiempo y ver cómo es su evolución. Para esta tesis se hace una pequeña introducción en cada uno de los capítulos, dando un marco teórico necesario para el entendimiento de los razonamientos utilizados y poder profundizar.

En el capítulo 1 se hace un estudio de algunos sistemas de ecuaciones diferenciales con la finalidad de estudiar un criterio para que exista estabilidad simultánea en dos sistemas dinámicos, se estudia un teorema con el cual se asegura la estabilidad simultánea por medio de un conjunto particular de funciones llamadas funciones de Lyapunov. Este estudio cae dentro de una área de la teoría de control encargada del estudio de la estabilidad.

En el capítulo 2 se trabaja estudiando fenómenos que se presentan simultáneamente, se estudia un modelo en particular, el cual es maravilloso para un primer acercamiento al fenómeno llamado sincronización. Debido a que es un tema relativamente nuevo la teoría esta poco formalizada, por lo que se presenta una pequeña introducción al tema de Sincronización.

En el capítulo 3, se trata sobre unos sistemas los cuales tienen un comportamiento denominado caótico, se hizo un estudio para introducirnos en la teoría caótica que es la encargada del estudio de dichos sistemas, para posteriormente hacer una aportación donde se propone un control que logre provocar comportamiento caótico en diferentes sistemas simultáneamente. También se estudia un modelo muy conocido donde se relacionan de alguna manera los capítulos 2 y parte del 3 dando así origen a una nueva área de estudio llamada teoría del caos sincronizado. Donde se estudia un modelo donde a pesar de tener comportamientos caóticos e impredecibles, se puede llegar a presentar cierta sincronización.

Por último se presentan las conclusiones y reflexiones aterrizadas después del desarrollo de esta tesis.

# Capítulo 1

## Preliminares

La teoría de control ha sido considerada como una de las disciplinas mas fuertes de las matemáticas aplicadas por su gran alcance en el ámbito científico, tecnológico y económico. Muchos de los modelos matemáticos actuales son representados por sistemas que van evolucionando según el fenómeno al que esta relacionado, estos sistemas son denominados sistemas dinámicos.

Para poder estudiar los sistemas dinámicos es necesario recordar algunos conceptos y herramientas necesarias que son esenciales para un mejor entendimiento de las ideas desarrolladas posteriormente.

### 1.1. Sistemas y ecuaciones de estado

Consideremos un sistema dinámico para el cual deseamos encontrar controles para conseguir un objetivo en específico, por ejemplo en robótica, el funcionamiento de un brazo mecánico, un aeroplano en aeronáutica, en ingeniería civil controlando la temperatura en una construcción, el nivel del agua en una presa, etc. Representaremos el sistema como un objeto que tiene un estado interno  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  en cada tiempo  $t$ . Se puede modificar el sistema por medio de las entradas  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ . Normalmente es difícil saber el verdadero estado de el sistema, sin embargo, muchas veces se conocen algunas salidas  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  del sistema. El diagrama se muestra en la figura 1.1.

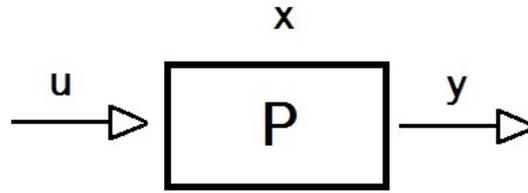


Figura 1.1: Diagrama de un sistema SISO

Nos enfocaremos en los sistemas LTI, (Sistemas invariantes en el tiempo) donde los estados, las entradas y las salidas están relacionadas por las ecuaciones de estado,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Tal sistema está caracterizado por cuatro matrices reales  $(A, B, C, D)$  y se puede escribir como una matriz por bloques

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Un sistema con una entrada y una salida ( $m=p=1$ ) es llamado *SISO* por sus siglas en inglés (una entrada, una salida) de otra manera el sistema es llamado *MIMO* (entradas múltiples, salidas múltiples). Es sencillo construir sistemas más complicados de sistemas más chicos manipulando las ecuaciones de estado, como un pequeño ejemplo consideremos los dos sistemas  $P_1$  y  $P_2$  definido por las matrices

$$P_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

las cuales están ligadas, la figura 1.2 representa el diagrama de estas dos matrices.

El sistema de ecuaciones queda descrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_1x_1(t) + B_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= A_2x_2(t) + B_2w(t) \\ w(t) &= C_1x_1(t) + D_1u(t) \\ y(t) &= C_2x_2(t) + D_2w(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

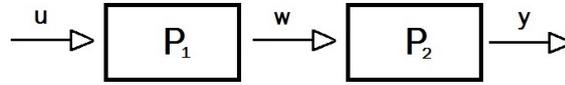


Figura 1.2: Diagrama de dos sistemas SISO en serie

Se puede reducir este sistema de ecuaciones eliminando la tercera línea del sistema, quedando de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ B_2C_1 & A_2 & B_2D_1 \\ D_2C_1 & C_2 & D_2D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Y no sólo para los sistemas en serie sino controles para los sistemas que tengan bucles de autoalimentación, conocidos como sistemas cerrado de bucles.

La figura 1.3 es un diagrama de dichos sistemas.

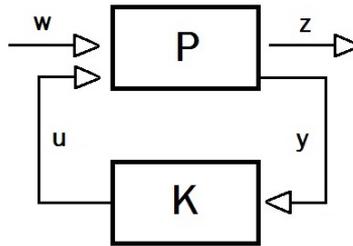


Figura 1.3: Diagrama de un sistema de bucle cerrado

Las ecuaciones de estado quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.6)$$

## 1.2. Conceptos básicos de teoría de control

Sea  $A$  una matriz de tamaño  $n \times n$ , se define la *abscisa espectral* como una función  $\mu(A) : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mu(A) = \max\{Re(\lambda) : \lambda \text{ es un eigenvalor de } A\} \quad (1.7)$$

Esta definición es necesaria ya que la abscisa espectral juega un papel muy importante en la teoría de control, la razón es porque los sistemas dinámicos de tiempo continuo  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  son asintóticamente estables cuando  $\mu(A) < 0$ . Las entradas de la matriz  $A$  dependen de parámetros  $x \in \mathbb{R}^k$ . Uno de los objetivos principales en estabilización es el encontrar los parámetros  $x$  que minimizan a la abscisa espectral de  $A(x)$ :

$$\min_x \mu(A(x)). \quad (1.8)$$

Hay una simple relación entre las matrices de  $n \times n$  y los polinomios mónicos de grado  $n$ , esta relación es precisamente dada por los eigenvalores de la matriz  $A$  y las raíces del polinomio característico de  $A$ . Por lo tanto podemos definir un mapeo de la siguiente manera:  $M^n \rightarrow \mathbb{R}$ , sea  $p$  un polinomio entonces:

$$a(p) = \max\{Re(z) : p(z) = 0\} \quad (1.9)$$

por lo tanto podemos decir que se cumple la igualdad  $\mu(A) = a(\det(\lambda I - A))$ , lo cual es uno de los temas principales para la estabilización.

### 1.3. Estabilidad

Una meta interesante de la teoría de control es la estabilización, porque se desea poder construir sistemas que son flexibles para las condiciones iniciales desconocidas. Nos preocuparemos por la estabilidad interna, la cual esencialmente dice que cada componente de un sistema tendrá salidas acotadas siempre y cuando las entradas sean acotadas. Ésta es una característica importante para los sistemas físicos, las condiciones iniciales y las señales entre sistemas no podrían ser descritas correctamente debido a un error de medición o ruido. Sin estabilidad interna, una señal errónea introducida en un punto del sistema puede llevar a tener señales no acotadas en otras partes del sistema. En el sistema de la figura 1.1 se dice que es *internamente estable* si en la ausencia de una entrada  $u(t)$ , para cualquier condición inicial  $x(0)$ , tenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Sin entrada la ecuación de estado se reduce al sistema de ecuaciones  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  la cual tiene solución  $x(t) = e^{At}x(0)$ . Una vez teniendo  $e^{At}$  usando la forma de Jordan de  $A$  se dice que el sistema es internamente estable si y sólo si todos los eigenvalores de  $A$  viven en la mitad izquierda del plano  $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$ .

#### 1.3.1. Estabilidad de Lyapunov

Alexander Liapunov fue un matemático y físico ruso que hizo importantes aportaciones en las ecuaciones diferenciales y la estabilidad de sistemas, sobre todo en los puntos de equilibrio, dichos trabajos llevaron a que tuviera su propia definición sobre estabilidad, concepto que fue publicado en el año de 1892 en su tesis doctoral titulada: El problema general de la estabilidad

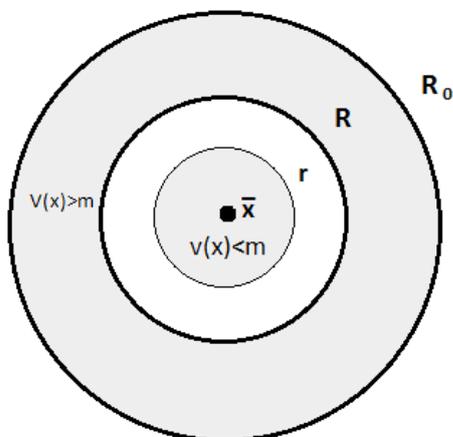


Figura 1.4: Representación geométrica de las regiones usadas en la prueba

del movimiento. Además de que aportó un método indirecto para obtener información sobre la estabilidad del sistema el cual se describe a continuación.

**Definición:** Una función definida en un espacio  $\Omega$  con un punto de equilibrio  $\bar{x}$  se dice que es una función de Lyapunov si cumple las siguientes condiciones

1.  $V$  es continua y sus derivadas parciales también son continuas.
2.  $V(x)$  tiene un único mínimo en  $\bar{x}$  con respecto a todos los puntos de  $\Omega$ .
3. La función  $\dot{V}(x) = \nabla V(x)f(x)$  satisface que  $\dot{V} \leq 0$  para toda  $x$  in  $\Omega$ .

**Teorema (Teorema de Lyapunov)** Si existe una función de Lyapunov  $V(x)$  en una región esférica  $S(\bar{x}, R_0)$  centrada en  $\bar{x}$ , entonces el punto de equilibrio  $\bar{x}$  es estable, además si la función  $\dot{V}$  es estrictamente negativa para todos los puntos (excepto  $\bar{x}$  entonces la estabilidad es asintótica).

**Prueba:** La prueba será guiada con la figura 1.4 que es una representación geométrica del teorema. Supongamos que existe  $V(x)$  en una región esférica  $S(\bar{x}, R_0)$  centrada en  $\bar{x}$ , tomemos un radio  $R$  arbitrario tal que  $0 < R < R_0$ . Ahora sea  $m$  el mínimo valor de  $V(x)$  en la región  $R \leq \|x - \bar{x}\| \leq R_0$ , y como  $V(x)$  es continua, entonces existe este mínimo. También sabemos que como  $\bar{x}$  es el único mínimo de  $V(\bar{x})$  entonces  $m > V(\bar{x})$ . Seleccionemos un  $r$  tal que  $0 < r < R$ , entonces para las  $x$  en  $S(\bar{x}, r)$  se cumple que  $V(x) < m$  ya que como se encuentra en una región cercana a  $\bar{x}$  entonces los valores son muy cercanos a  $V(\bar{x})$ . Por lo tanto como

$\dot{V}(x) > 0$  entonces  $V(x)$  es decreciente, y la trayectoria no podrá salir de  $S(\bar{x}, r)$  y por lo tanto tampoco de  $S(\bar{x}, R)$ , lo que nos da como resultado estabilidad.

Para la estabilidad asintótica vemos que  $V(x)$  es decreciente y converge a un valor límite  $\bar{m}$ . Pero, ¿es posible que  $\bar{m} > V(\bar{x})$ ? de ser así, no habría estabilidad pero para ver que no es posible seguimos el siguiente razonamiento, sabemos que  $\dot{V}(x) > 0$  excepto en  $\bar{x}$ , cuando  $V$  converge entonces  $\|x - \bar{x}\| \rightarrow 0$  lo que quiere decir que  $x$  converge a  $\bar{x}$  y  $V(x) \rightarrow \bar{m}$ . Asegurando que converge a  $\bar{m}$  entonces existe estabilidad asintótica.

Este es un teorema de gran utilidad pues si tenemos una función de Lyapunov podemos saber si un sistema es estable, los siguientes ejemplos servirán para entender mejor el teorema.

**Ejemplo 2.1** Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t)\end{aligned}\tag{1.10}$$

Este sistema tiene un punto de equilibrio  $\bar{x} = 0$ . Definamos la función de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Sabemos que esta función es continua y sus derivadas parciales también son continuas. Además de que tiene un único mínimo en  $\bar{x} = 0$  cumpliendo las primeras dos partes de la definición, para el tercer punto basta con notar que

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1 - x_2) \\ &= 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \\ &= -2x_2^2 \leq 0\end{aligned}$$

Donde se utilizó la información del sistema al sustituir los valores de  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$  del sistema 1.10. Y dado que existe una función de Lyapunov entonces decimos que es estable. No se puede garantizar la estabilidad asintótica ya que aunque es estrictamente decreciente en la componente  $x_2$  no sabemos nada de  $x_1$ .

Otra manera de definir a las funciones de Lyapunov es por medio de la forma cuadrática, es decir que se puede representar a  $V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$  de la siguiente manera

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Entonces podemos representar a  $V(x)$  como  $V(x) = x^T Mx$  con  $M$  simétrica. La derivada de esta forma se define como

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T Mx + x^T M\dot{x} = (Ax)^T Mx + x^T M(Ax) \\ &= x^T A^T Mx + x^T M A x = x^T (A^T M + M A)x\end{aligned}\tag{1.11}$$

Por lo tanto necesitamos encontrar la matriz  $M$  tal que  $A^T M + MA < 0$ . La manera mas adecuada de atacar este problema es usando LA ECUACIÓN DE LYAPUNOV la cual esta dada por

$$A^T M + MA = -N \quad (1.12)$$

donde  $N$  es definida positiva.

Con el siguiente ejemplo veremos algunas propiedades útiles de esta forma.

**Ejemplo 2.2** Consideremos el siguiente sistema  $\dot{x} = Ax$  definido por

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} x(t) \quad (1.13)$$

Tenemos que ver que  $V(\|x\|) < 0$  y que  $\dot{V}(\|x\|) > 0$ , Los eigenvalores de  $A$  son  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$  y proponemos a  $N = I$  y

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

y resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4b & -4c \\ a - 5b & b - 5c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4b & a - 5b \\ -4c & b - 5c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -8b & a - 5b - 4c \\ a - 5b - 4c & 2b - 10c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De donde podemos deducir que  $-8b = -1 \rightarrow b = 1/8$ ,  $2b - 10c = -1 \rightarrow c = (2(1/8) + 1)/10 = 1/8$  y  $a - 5b - 4c = 0 \rightarrow a = 5(1/8) + 4(1/8) = 9/8$ . y formar nuestra matriz

$$M = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos nuestra función cuadrática de Lyapunov de la siguiente manera

$$V(x_1, x_2) = \frac{9}{8}x_1^2 + \frac{1}{8}x_1x_2 + \frac{1}{8}x_2^2$$

Si los eigenvalores de  $M$  son positivos entonces  $V(x)$  es positiva y con esto probamos que el sistema es estable, los eigenvalores de  $M$  son  $\mu_1 = 0.1096$ ,  $\mu_2 = 1.1404$  por lo tanto es estable.

## Capítulo 2

# Diagonalización simultánea

### 2.1. Introducción

Los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI por sus siglas en inglés) históricamente asumen un lugar de gran importancia en la teoría de sistemas y ha sido aplicado en el estudio de sistemas dinámicos. Tenemos los sistemas linealmente positivos (PLS por sus siglas en inglés) que no han sido tan estudiados como los sistemas LTI pero de las propiedades más importantes de estos sistemas es la estabilidad. Se presentará un resultado sobre la estabilidad de los PLS, con el objetivo de estudiar las propiedades generales de estabilidad lo que nos conduce a la existencia de una función cuadrática común diagonal de Lyapunov (CQLF) para un par de sistemas LTI estables.

### 2.2. Preliminares matemáticos

En esta sección se trabaja con dos términos que es necesario definir: linealidad e invarianza en el tiempo. Se dice que un sistema es lineal si cumple con la siguiente propiedad

$$\dot{x} = A(ax + by) = aA(x) + bA(y)$$

es decir, es lineal bajo el operador  $A$ .

Se dice que un sistema es invariante en el tiempo si éste no depende explícitamente del tiempo, es decir

$$\dot{x} = F(x)$$

donde  $F$  solo depende de  $x$  y no depende del tiempo.

Nos restringiremos al espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  de las  $n$ -tuplas de números reales. Denotamos al espacio de las matrices  $\mathbb{R}^{m \times n}$  de  $m \times n$  con entradas reales.

Para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_i$  denota la  $i$ -ésima componente de  $x$ . Para una matriz  $A$  en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $a_{ij}$  denota el elemento en la posición  $(i, j)$  de  $A$ .

La notación  $x > 0$  ( $x \geq 0$ ) significa que  $x_i > 0$  ( $x_i \geq 0$ ) para  $1 \leq i \leq n$ . Similarmente  $A > 0$  ( $A \geq 0$ ) denota que  $a_{ij} > 0$  ( $a_{ij} \geq 0$ ) para  $1 \leq i, j \leq n$ .

La matriz transpuesta se denota por  $A^T$ .

La matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $A > 0$  denota una matriz definida positiva.

Se define a una matriz de permutación  $P$  como aquella que tiene las mismas filas de la matriz identidad, pero no necesariamente en el mismo orden.

Por último recordemos que la abcisa espectral se denota por  $\mu(A)$ . Si  $\mu(A) < 0$  se dice que  $A$  es de *Hurwitz*.

Se dice que una matriz es *reducible* si existe una matriz de permutación  $P$  y una  $k$  con  $1 \leq k \leq n - 1$  para la cual  $PAP^T$  tiene la forma

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

donde  $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ ,  $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$  y  $0 \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$ .

Si una matriz es no reducible entonces se dice que es *irreducible*. El siguiente teorema nos sirve para saber una de las propiedades que nos interesa sobre las matrices irreducibles, llamado el Teorema de Perron-Frobenius.

**Teorema 2.1:** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz irreducible no negativa, entonces:

- (i)  $\rho(A) > 0$  es un eigenvalor de  $A$  con multiplicidad algebraica de 1;
  - (ii) Existe un vector  $x > 0$  en  $\mathbb{R}^n$  el cual cumple que  $Ax = \rho(A)x$ .
- Este teorema nos garantiza que el eigenespacio de  $A$  correspondiente a  $\rho(A)$  es unidimensional. Ver demostración en  $\square$

### 2.3. Matriz de Metzler

Consideremos el sistema LTI siguiente

$$\Sigma_A : \dot{x}(t) = Ax(t),$$

$$x(0) = x_0$$

se dice que este sistema es positivo si para la condición inicial  $x_0 \geq 0$  se tiene que  $x(t) > 0$  para toda  $t \geq 0$ , en otras palabras si el sistema empieza en un cuadrante no negativo de  $\mathbb{R}^n$  este permanece dentro de él todo el tiempo.

Se dice que una matriz es Metzler si los elementos fuera de la diagonal son no negativos.

El sistema  $\Sigma_A$  es positivo si y sólo si  $A$  es Metzler.

Si  $A$  es Metzler podemos escribir  $A = N - \alpha I$  para alguna matriz  $N$  no negativa y un escalar  $\alpha \geq 0$ . Notemos que si  $N$  tiene eigenvalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , entonces los eigenvalores de  $N - \alpha I$  son  $\lambda_1 - \alpha, \dots, \lambda_n - \alpha$ . Por lo tanto si la matriz  $N - \alpha I$  es Metzler, esta matriz es Hurwitz si y sólo si  $\alpha > \rho(N)$ , esta afirmación es fácilmente demostrable debido a que para que sea Hurwitz debe tener eigenvalores negativos y siendo  $\alpha$  mayor que el máximo eigenvalor, nos garantiza que la resta  $\lambda_i - \alpha$  sea siempre negativa.

Algunas propiedades útiles de las matrices Metzler se presentan a continuación en los siguientes teoremas.

**Teorema 2.2:** Sea  $\alpha > 0$  y  $A = N - \alpha I$ , entonces  $A$  es irreducible si y sólo si  $N$  es irreducible.

**Demostración:** Por contraposición, supongamos que  $A$  es reducible, entonces existe  $P$  tal que  $PAP^{-1}$  es irreducible,  $PAP^{-1} = P(N - \alpha I)P^{-1} = PNP^{-1} - P\alpha IP^{-1}$  pero  $N$  es reducible y  $\alpha I$  es irreducible por propiedades de  $I$ . Por lo tanto  $A$  es irreducible. La otra implicación es similar.

**Teorema 2.3:** Sea  $A = N - \alpha I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Metzler e irreducible. Entonces (i)  $\mu(A) = \rho(N) - \alpha$  es un eigenvalor de  $A$  de multiplicidad algebraica (y geométrica) uno.

(ii) Existe un eigenvector  $x > 0$  que cumple con  $Ax = \mu(A)x$ .

**Lema 2.1:** Sea  $A_1, A_2$  matrices Metzler y Hurwitz. Entonces  $A_1 + \gamma A_2$  es Hurwitz para toda  $\gamma > 0$  si y sólo si  $A_1 + \gamma A_2$  es no singular para toda  $\gamma > 0$ .

Se sabe que la existencia de una función de Lyapunov común para dos sistemas es condición suficiente para garantizar estabilidad para patrones arbitrarios. Cuando consideramos sistemas conmutados entre sistemas LTI estables, cada sistema se sabe que tiene una función cuadrática diagonal de Lyapunov, por lo tanto es natural preguntarse cuando un par de sistemas posee una función cuadrática diagonal de Lyapunov en común.

## 2.4. Matrices Metzler y funciones diagonales de Lyapunov

Sea  $\Sigma_{A_i}$  un conjunto de sistemas LTI definido de la siguiente manera:  $\Sigma_{A_i} : \dot{x}(t) = A_i x(t), A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, 1 \leq i \leq k$ , si existe una matriz diagonal  $D > 0$  en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  la cual cumpla con

$$A_i^T D + DA_i < 0 \quad 1 \leq i \leq k, \quad (2.2)$$

entonces decimos que  $V(x) = x^T D x$  es una *función cuadrática diagonal fuerte de Lyapunov* (o CQLF diagonal fuerte) para la familia de sistemas

$\Sigma_{A_i}$ . Para que una familia de sistemas LTI tenga una CQLF diagonal fuerte, cada sistema individualmente debe tener una CQLF diagonal fuerte.

La noción de fuerte (o débil) CQLF se refiere simplemente a que debe ser estrictamente menor a 0 (menor o igual a 0).

**Teorema 2.4:** Sea  $A$  una matriz Hurwitz y  $D > 0$  una matriz diagonal, entonces  $A^T D + DA < 0$  si y sólo si  $A^{-T} D + DA^{-1} < 0$ .

**Prueba:** Como  $A$  es una matriz Hurwitz los eigenvalores  $\lambda_i$  de  $A$  son diferente de 0, por lo tanto existe  $A^{-1}$  y  $A^{-T}$ . Partimos de  $A^T D + DA < 0$  Multiplicamos por la izquierda con  $A^{-T}$  y por la derecha  $A^{-1}$ .

$$\begin{aligned} A^{-T}(A^T D + DA)A^{-1} &< A^{-T}0A^{-1} \\ A^{-T}A^T D A^{-1} + A^{-T}D A A^{-1} &< 0 \\ DA^{-1} + A^{-T}D &< 0 \\ A^{-T}D + DA^{-1} &< 0 \end{aligned}$$

**Lema 2.2:** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz de Metzler y  $D$  una matriz diagonal con entradas no negativas. Entonces  $A^T D + DA$  es también una matriz Metzler.

**Prueba:** Como  $A$  es Metzler entonces los elementos  $a_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$ , esto incluye a los elementos  $a_{ji}$  que son los elementos de  $A^T$  por lo tanto también es Metzler. Si  $d_i \geq 0$  son las entradas de la matriz diagonal  $D$  entonces el producto es  $a_{ij}d_i \geq 0$ , similarmente para  $A^T D$  tenemos  $a_{ji}d_i \geq 0$  por lo tanto  $a_{ij}d_i + a_{ji}d_i \geq 0$  y por lo tanto es Metzler.

**Lema 2.3:** Supongamos que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz Metzler la cual cumple con que  $a_{i,j} \neq 0$  para  $1 \leq i, j \leq n$ . y  $D$  es una matriz diagonal no nula con entradas no negativas. Entonces la matriz  $A^T D + DA$  es irreducible.

**Lema 2.4:** Sea  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  dos sistemas LTI estables y supongamos que tienen una CQLF diagonal fuerte. Entonces para todas las matrices diagonales no singulares  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$   $A_1 + DA_2 D$  y  $A_1^{-1} + DA_2 D$  son Hurwitz y por lo tanto no singulares.

**Prueba:** Dado que tienen una CQLF diagonal fuerte, sea  $V(x) = x^T \bar{D} x$  dicha función para  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  por propiedades de las matrices  $A_1, A_2$  también lo es para los sistemas  $\Sigma_{A_1^{-1}}, \Sigma_{A_2}$ . Además para cualquier matriz diagonal  $D$  no singular, se cumple que

$$(DA_2 D)^T \bar{D} + \bar{D}(DA_2 D) = D(A_2^T \bar{D} + \bar{D}A_2)D < 0 \quad (2.3)$$

Debido a que las matrices diagonales conmutan y  $D^T = D$  se cumple la igualdad, por lo tanto  $V(x)$  también define una CQLF diagonal fuerte para los sistemas  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{DA_2D}$  y por lo tanto una CQLF diagonal fuerte para el sistema  $\Sigma_{A_1+DA_2D}$  y esto implica que la matriz  $A_1 + DA_2D$  es Hurwitz y por lo tanto es no singular. De igual manera, la matriz  $A_1^{-1} + DA_2D$  es también no singular.

**Corolario 2.1:** Sea  $\Sigma_A$  un sistema LTI estable con  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces una condición necesaria para que  $\Sigma_A$  tenga una CQLF diagonal es que  $A + DA^{-1}D$  y  $A + DAD$  sean Hurwitz para todas las matrices diagonales no singulares  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

## 2.5. El resultado principal

En esta sección consideraremos un par de sistemas LTI estables  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ , donde  $A_1, A_2$  son matrices Hurwitz Metzler en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  con entradas no cero. Daremos una condición necesaria y suficiente para que los sistemas  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  tengan una CQLF diagonal fuerte.

El siguiente teorema considera una situación de dos sistemas  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  para la cual no existe una CQLF diagonal fuerte pero que hay una matriz diagonal  $D \geq 0$  que satisface

$$\begin{aligned} A_1^T D + DA_1 &\leq 0, \\ A_2^T D + DA_2 &\leq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Teorema 2.5:** Sea  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  dos sistemas LTI estables positivos donde  $A_1, A_2$  son matrices Metzler Hurwitz con entradas no cero. Asumimos que no existe una CQLF diagonal fuerte para  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ . Además supongamos que existe una matriz diagonal  $D \geq 0$  que satisface 2.4, entonces existe alguna matriz diagonal  $D_0 > 0$  la cual cumple que  $A_1 + D_0 A_2 D_0$  es singular.

Con este teorema, junto con el lema 2.3 se puede derivar el resultado principal de la sección.

**Teorema 2.5:** Sea  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  dos sistemas LTI estables positivos donde  $A_1, A_2$  son matrices Metzler Hurwitz con entradas no cero. Entonces es una condición necesaria y suficiente para que  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$  tenga una CQLF diagonal fuerte es que  $A_1 + DA_2D$  es no singular para toda matriz diagonal  $D > 0$ .

**Prueba:** la condición necesaria esta dada por el lema 2.3. Para la condición

suficiente se demostrará por contrapositiva, supongamos que no existe una CQLF diagonal fuerte para los sistemas  $\Sigma_{A_1}, \Sigma_{A_2}$ . Entonces para una  $\alpha > 0$  suficientemente grande, los sistemas  $\Sigma_{A_1 - \alpha I}, \Sigma_{A_2}$  tiene una CQLF diagonal fuerte. Si definimos  $\alpha_0 = \inf\{\alpha > 0 : \Sigma_{A_1 - \alpha I}, \Sigma_{A_2} \text{ tienen una CQLF diagonal fuerte}\}$ , entonces  $\Sigma_{A_1 - \alpha_0 I}, \Sigma_{A_2}$  cumple las condiciones del teorema 2.4, por lo tanto existe una una matriz diagonal  $D > 0$  la cual cumple que  $A_1 - \alpha_0 I + DA_2 D$  es singular.

De lo anterior se sigue que  $A_1 + DA_2 D$  tiene un eigenvalor real positivo dado que son matrices Metzler Hurwitz y D positiva. Por lo tanto existe una  $\gamma > 0$  tal que  $A_1 + DA_2 D$  por lo tanto si definimos a  $\bar{D} = \sqrt{\gamma} D$ , tenemos que  $A_1 + \bar{D}A_2 D$  es singular. Lo que termina por concluir la prueba.

## Capítulo 3

# Sincronización

Sincronización es una palabra que se utiliza muy a menudo para describir comportamientos similares entre objetos, animales y personas que cotidianamente se encuentran interactuando unos con otros, sin embargo el comportamiento al que le llamamos sincronización es más estricto que solo apreciar similitudes, sino que existe una coordinación muy precisa y armónica que nos lleva a un estudio más preciso, como ejemplo para estar en sintonía y adentrarnos en el fenómeno tomaremos un clásico grupo de aves sobrevolando por la ciudad, cuando se observa el vuelo y movimiento de las aves suele ser muy interesante como de forma natural ellas hacen y realizan formaciones de vuelo, las cuales son cuidadosamente simétricas y además precisas. Una vez planteado dicho ejemplo es natural hacerse las siguientes preguntas. ¿Por qué el comportamiento de las aves es tan preciso?, ¿Qué tipo de información se comparte entre los involucrados? ¿Qué otros objetos, animales o acciones humanas se puede considerar que se sincronizan?

### 3.1. Introducción

La sincronización es uno de los fenómenos más dominantes en la naturaleza, y que puede ser detectado en cada rincón del planeta, ya sea por los cielos con el vuelo de las aves, el comportamiento de un grupo de luciérnagas, así como las profundidades del mar, en la armonía de los bancos de peces que se mueven en conjunto. Además de la sincronización en animales, también se puede apreciar en el comportamiento humano, ser parte de una audiencia en donde los espectadores agradecen al expositor con una serie de aplausos, muchos de estos aplausos se escuchan al unísono sin siquiera ponerse de acuerdo entre ellos.

Por si fuera poco, la medicina ha notado que la sincronización está presente en muchas de las funciones de los sistemas y órganos, empezando por las células del cerebro, las neuronas deben hacer conexiones de manera sincronizada, las células del corazón se deben mover a una misma frecuencia, así

como lo deben de hacer los marcapasos para tener un comportamiento adecuado en el corazón, e incluso los espermatozoides son otro ejemplo de como se mueven todos en grupo sincronizando su ruta hacia el óvulo.

Podríamos pasar el día entero mencionando ejemplos de pequeña y gran escala sobre sincronización buscando la motivación necesaria para resolver las preguntas antes planteadas, pero para poder dar respuesta se necesita saber qué es lo que provoca que exista ese orden. Para esto los científicos han trabajado con modelos matematicos muy sencillos que nos den información sobre el orden y comportamiento. A continuación se presenta un modelo sencillo a gran escala con la intención de poder encontrar información importante sobre su comportamiento.

### 3.2. Estudio sobre la sincronización

En primer lugar tenemos al astrónomo, físico y matemático holandés Christiaan Huygens(1629-1695) como el primer científico en notar el comportamiento sincronizado, relata la historia que en uno de sus tiempos libres hizo un descubrimiento muy afotunado, observó con detenimiento el comportamiento de dos relojes de péndulo, mismos que el inventó en el año 1656, dichos relojes estaban sostenidos sobre una viga colocada en los respaldos de dos sillas y se percató de que tenían una característica peculiar al cual le llamó simpatía, inmediatamente reportó que había un movimiento sincronizado entre los dos pendulos pero en sentidos opuestos, dicho reporte fue presentado a los miembros de la Real Sociedad de Londres.

Sin embargo, en esa época no tuvo mucho seguimiento debido en gran manera a que no existían las herramientas necesarias para poder dar explicaciones a los comportamientos sincronizados,

Actualmente uno de los científicos mas reconocidos sobre el estudio del comportamiento en masa es el biólogo británico Iain Couzin el cual ha dedicado parte de su vida en estudiar y proponer modelos que reflejen el comportamiento, Iain propone una simulación que intenta reflejar el comportamiento de un banco de peces con 4 simples reglas:

1. Cada elemento del conjunto de peces sólo es conciente de lo que pasa con sus vecinos cercanos.
2. Todos los peces tienden a alinearse.
3. Todos los peces tienen una atracción entre ellos, pero conservando una distancia mínima.
4. En la presencia de un depredador, todos huyen en cualquier dirección.

Y estas simples reglas no son exclusivas para los bancos de peces, ya que tambien sirve para modelar parvadas de aves y conjuntos de insectos.

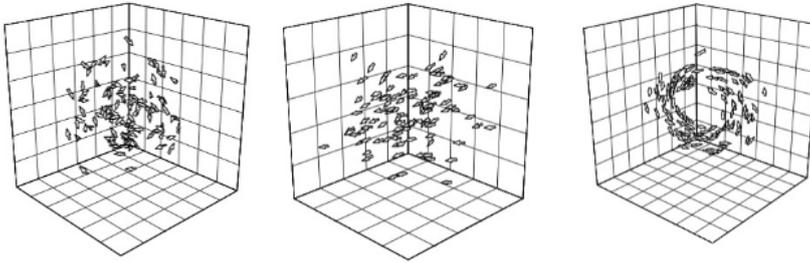


Figura 3.1: Diagrama de la simulación del modelo de Iain Couzin. Imagen tomada del Instituto para la ornitología Max Planck

### 3.3. Modelo de sincronización de las luciérnagas

#### 3.3.1. Introducción

En el estudio del comportamiento de las luciérnagas en Norteamérica se ha visto que la manera en la que se encienden y apagan es muy independiente, prácticamente se ignoran unas a otras, sin embargo en otras regiones del mundo no sucede así, tal es el caso del Sudeste de Asia, donde se ha observado un fenómeno espectacular de cooperación involuntaria de los machos, esto se debe a que las especies en general buscan la manera de reproducirse, en el caso de éstas lo que hacen es mantenerse encendidas para atraer a las hembras, ya que no es posible que permanezcan mucho tiempo así, su oportunidad de aparearse se ve reducida por cada intervalo de tiempo que pasan apagadas, por lo tanto existe una constante competencia para no verse opacadas por sus vecinos, quien diría que esta actitud egoísta daría paso a una sincronización perfecta entre las luciérnagas. Ver [21].

Entre los trabajos que han estudiado la sincronización de luciérnagas podemos citar los trabajos [22],[23],[24],[25],[26]. Una vez marcada la situación a analizar damos paso al siguiente modelo que se basa en la ley de la inversa del cuadrado, la cual se aplica particularmente en fenómenos ondulatorios como lo es la luz y el sonido, para nuestro caso la ley dice: la luminosidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa la superficie iluminada de la fuente. Es decir, que la luminosidad que se produce sobre una superficie por una fuente puntual es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que existe entre la superficie iluminada y la fuente puntual. Para entender mejor este modelo es necesario definir algunos conceptos utilizados en relación a la luminosidad.

Fuente puntual: Es aquella que emite la misma intensidad luminosa en todas las direcciones.

Para el modelo planteado, uno de los principios importantes es que cada luciérnaga será considerada como fuente puntual.

Luminosidad: Se refiere al nivel de iluminación.

Lux: Unidad de medida en el sistema internacional que equivale a un lumen por metro al cuadrado.

Lumen: Unidad de medida en el sistema internacional para medir el flujo luminoso.

### 3.3.2. Descripción del modelo

En lo que sigue reescribiremos un modelo que ha sido estudiado en los trabajos [12],[27],[28]. Imaginemos que estamos parados frente a alguna fuente puntual, cuando nos acercamos a la fuente es obvio que la intensidad será mas fuerte cada vez. Debido a que cada luciérnaga la consideraremos como una fuente puntual, denotaremos la  $i$ -ésima luciérnaga como  $x_i$ . Como se comentó al inicio cada luciérnaga está sujeta a la ley de la inversa al cuadrado, lo cual nos lleva a tener unos coeficientes  $a_{rl}$  con  $1 \leq r, l \leq 4$  donde los coeficientes  $r, l$  indican la influencia que ejerce la luciérnaga  $l$  con la luciérnaga  $r$ .

La base del modelo se basa en la suposición de que cada luciérnaga tiene un comportamiento de encendido y apagado en función a las distancias, lo cual se pretende modelar con un oscilador de Van der Pol.

Por lo tanto el modelo se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= f_1(x_1, \dot{x}_1) + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ \ddot{x}_2 &= f_2(x_2, \dot{x}_2) + a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ \ddot{x}_3 &= f_3(x_3, \dot{x}_3) + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4 \\ \ddot{x}_4 &= f_4(x_4, \dot{x}_4) + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $x_i(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_i \in \mathbb{C}^2$ . y la función que describe el comportamiento de la luciérnaga  $x_i$  esta dada por  $f_i(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i(x_i, \dot{x}_i) = \mu(1 - x_i^2)\dot{x}_i - a_{ii}x_i$

El parámetro  $k = a_{ii}$  es entonces la influencia que experimenta la luciérnaga  $i$  bajo la influencia luminosa de la luciérnaga  $i$ , este parámetro es muy importante pues es el objetivo principal del modelo, ya que este valor nos dirá que tanto se esfuerza la luciérnaga para sincronizarse con las demás, esto dependerá directamente del número de competidoras y la distancia entre ellas. Cabe mencionar que el valor de  $k$  cambiará con respecto al arreglo que tomemos para modelar. Con respecto al parámetro  $\mu$  este es un valor relacionado al oscilador de Van der Pol, lo cual tomaremos como  $\mu = 1$ .

### 3.3.3. Arreglo lineal

El primer arreglo se describe de la siguiente manera, supongamos que tenemos 4 luciérnagas, y cada una está etiquetada con los números 1, 2, 3, 4

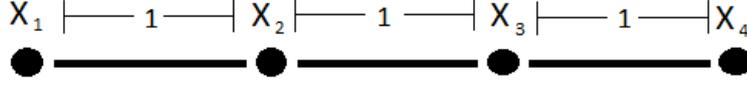


Figura 3.2: Arreglo lineal de luciérnagas

respectivamente. Entonces existen dos casos, el primero es cuando las luciérngas 1 y 4 solo pueden ver a un competidor, y el otro caso es cuando pueden ver dos competidores como lo son las luciérngas 2 y 3, por lo tanto el valor de los coeficientes cuyos subíndices distan de 1 se les asignará el valor de 0, para los demás casos será 1. Siguiendo estas condiciones los valores  $a_{ij}$  queda de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} a_{12} = 1, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = 0, \quad a_{21} = 1, \quad a_{23} = 1, \quad a_{24} = 0, \\ a_{31} = 0, \quad a_{32} = 1, \quad a_{34} = 1, \quad a_{41} = 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

por lo tanto el sistema queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= (1 - x_1^2)\dot{x}_1 - a_{11}x_1 + x_2 \\ \ddot{x}_2 &= (1 - x_2^2)\dot{x}_2 - a_{22}x_2 + x_1 + x_3 \\ \ddot{x}_3 &= (1 - x_3^2)\dot{x}_3 - a_{33}x_3 + x_2 + x_4 \\ \ddot{x}_4 &= (1 - x_4^2)\dot{x}_4 - a_{44}x_4 + x_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Este sistema es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado no lineal por lo tanto para poder trabajar con el vamos a reescribirlo usando el siguiente cambio de variable para obtener un sistema mas "sencillo".

$$\begin{aligned} x_1 = y_1, \quad \dot{y}_1 = y_2, \quad \ddot{y}_1 = \dot{y}_2 \\ x_2 = y_3, \quad \dot{y}_3 = y_4, \quad \ddot{y}_3 = \dot{y}_4 \\ x_3 = y_5, \quad \dot{y}_5 = y_6, \quad \ddot{y}_5 = \dot{y}_6 \\ x_4 = y_7, \quad \dot{y}_7 = y_8, \quad \ddot{y}_7 = \dot{y}_8 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \\ \dot{y}_7 \\ \dot{y}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2(1 - y_1^2) - ky_1 + y_3 \\ y_4 \\ y_4(1 - y_3^2) - ky_3 + y_1 + y_5 \\ y_6 \\ y_6(1 - y_5^2) - ky_5 + y_3 + y_7 \\ y_8 \\ y_8(1 - y_7^2) - ky_7 + y_5 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Hasta este momento no hemos dado un valor en específico para  $k$ , para simplificar tomemos  $k_1 = 1$  y  $k_2 = 2$  y veamos como se comporta la solución del sistema. Para este sistema se obtuvieron las siguientes gráficas.

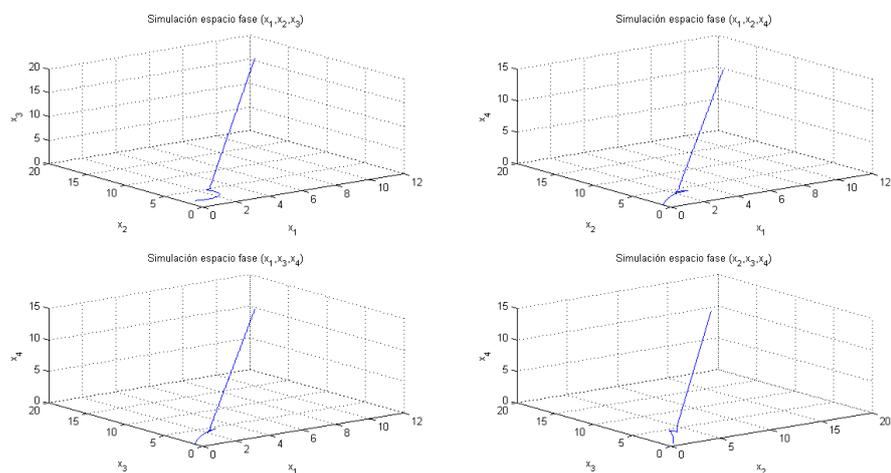


Figura 3.3: Espacio fase del arreglo lineal de luciérnagas para  $k=1$

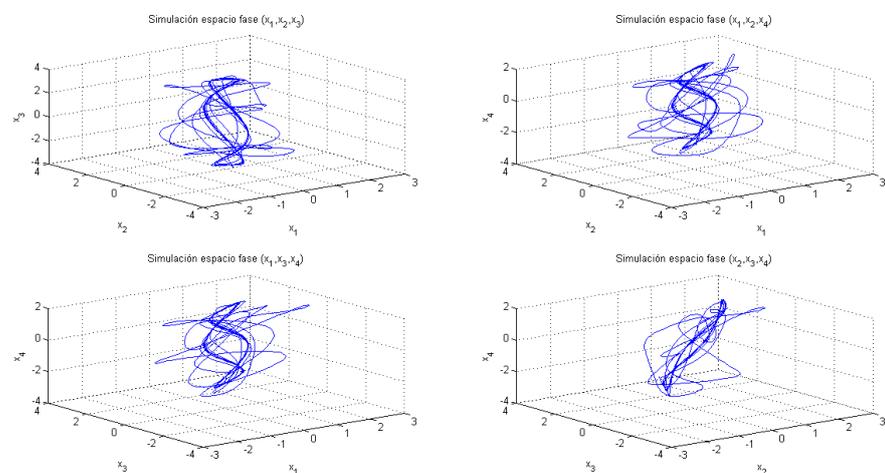


Figura 3.4: Espacio fase del arreglo lineal de luciérnagas para  $k=2$

Vemos que en el caso de  $k_2 = 2$  se obtiene una dinámica parecida a la que nos interesa ya que tiene un comportamiento periódico. Una técnica utilizada para el estudio de estos sistemas es la linealización por la Jacobiana para esto es necesario obtener el punto de equilibrio, este sistema tiene un punto de equilibrio  $x^* = \{\dot{y}(x^*) = 0, 0 \in \mathbb{R}^8\}$ , la matriz Jacobiana se

denota por  $J\dot{y}(x^*)$ . Recordamos que la matriz  $J$  es la matriz generada por las derivadas parciales de las funciones del sistema (3.5).

$$J(y(x^*)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{y}_1(x^*)}{\partial y_1} & \frac{\partial \dot{y}_1(x^*)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \dot{y}_1(x^*)}{\partial y_8} \\ \frac{\partial \dot{y}_2(x^*)}{\partial y_1} & \frac{\partial \dot{y}_2(x^*)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \dot{y}_2(x^*)}{\partial y_8} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \dot{y}_8(x^*)}{\partial y_1} & \frac{\partial \dot{y}_8(x^*)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \dot{y}_8(x^*)}{\partial y_8} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Obteniendo el siguiente arreglo linealizado.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -k & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Debido a que se está utilizando el oscilador de Van der pol el modelo tiene un comportamiento periódico. La utilidad de esta matriz lineal asociada al sistema no lineal nos ayuda a obtener información sobre los valores propios de dicha matriz, ya que es una condición necesaria el tener valores propios complejos para que existan soluciones periódicas. Para la matriz  $M_1$  los valores propios obtenidos son  $\lambda = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\pm 2 \pm \sqrt{5} - 4k + 1})$ , por lo tanto el radicando  $\pm 2 \pm \sqrt{5} - 4k + 1$  debe ser negativo, tomaremos el máximo de los valores propios y depejamos  $k$ , entonces

$$k > \max\left\{\frac{1}{4}(1 \pm 2 \pm 2\sqrt{5})\right\} = \frac{1}{4}(3 + 2\sqrt{5}) \approx 1.8680339 \quad (3.8)$$

Como habíamos descrito anteriormente este valor de  $k$  nos dice que tanto se esfuerza la luciérnaga  $i$  para sincronizarse con las demas luciérnagas.

### 3.3.4. Arreglo cuadrado

Nuestro siguiente paso es, bajo el mismo modelo modificar el arreglo a uno cuadrado el cual consiste en que cada luciérnaga puede ver a las 3 restantes y veremos como cambia el valor de  $k$ .

Para esto tomaremos otros coeficientes que corresponden a el arreglo cuadrado de la siguiente manera considerando que se hizo la aclaracion de que cada luciérnaga esta siendo afectada por la ley del recíproco al cuadrado.

$$\begin{aligned} a_{12} = 1, & \quad a_{13} = 1, & \quad a_{14} = 1/2, & \quad a_{21} = 1, & \quad a_{23} = 1/2, & \quad a_{24} = 1, \\ a_{31} = 1, & \quad a_{32} = 1/2, & \quad a_{34} = 1, & \quad a_{41} = 1/2, & \quad a_{42} = 1, & \quad a_{43} = 1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

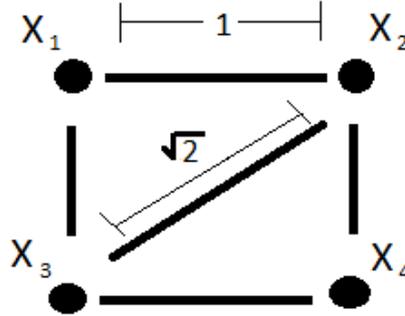


Figura 3.5: Arreglo cuadrado de luciérnagas

el sistema queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= (1 - x_1^2)\dot{x}_1 - a_{11}x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\
 \ddot{x}_2 &= (1 - x_2^2)\dot{x}_2 - a_{22}x_2 + x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 \\
 \ddot{x}_3 &= (1 - x_3^2)\dot{x}_3 - a_{33}x_3 + x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 \\
 \ddot{x}_4 &= (1 - x_4^2)\dot{x}_4 - a_{44}x_4 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Usando el mismo cambio de variable

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \\ \dot{y}_7 \\ \dot{y}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2(1 - y_1^2) - ky_1 + y_3 + y_5 + \frac{1}{2}y_7 \\ y_4 \\ y_4(1 - y_3^2) - ky_3 + y_1 + \frac{1}{2}y_5 + y_7 \\ y_6 \\ y_6(1 - y_5^2) - ky_5 + y_1 + \frac{1}{2}y_3 + y_7 \\ y_8 \\ y_8(1 - y_7^2) - ky_7 + \frac{1}{2}y_1 + y_3 + y_5 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Haremos el mismo análisis de las soluciones del sistema pero como se espera que sea mayor el valor de  $k$  para este arreglo se tomará  $k_1 = 2$  y  $k_2 = 3$ .

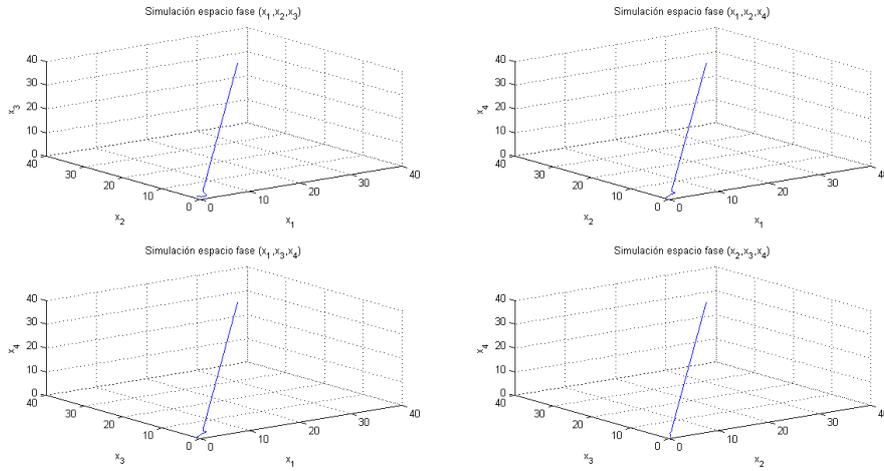


Figura 3.6: Espacio fase del arreglo cuadrado de luciérnagas para  $k=2$

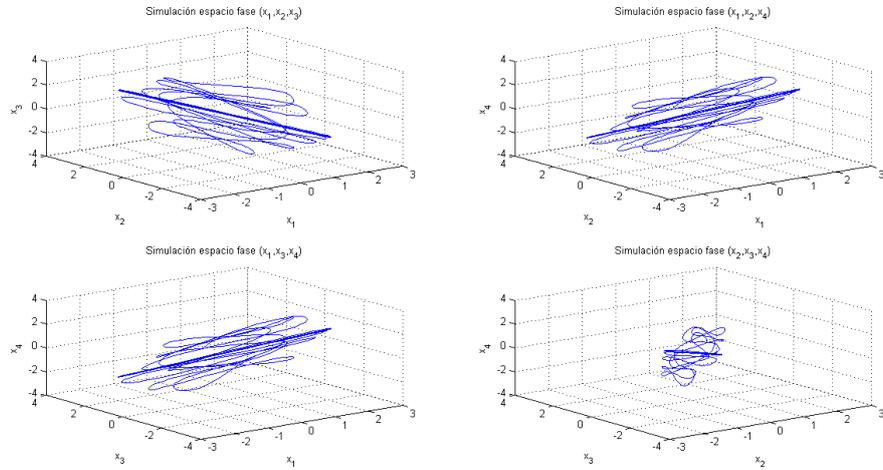


Figura 3.7: Espacio fase del arreglo cuadrado de luciérnagas para  $k=3$

Se ve claramente que se tiene un comportamiento periodico para una  $k$  cercana a 3 entonces se realiza la misma tecnica de linealización para estimar el valor de  $k$ . La linealización del sistema en el punto de equilibrio

$$x^* = 0, 0 \in \mathbb{R}^8$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -k & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Los valores propios de la nueva matriz  $M_2$  son de la forma siguiente  $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-5 - 4k})$ ,  $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{11 - 4k})$ , y  $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-1 - 4k})$  de multiplicidad 2. Por lo tanto despejando  $k$  en cada uno de los radicandos

$$k > \max\left\{\frac{1}{4}(-5), \frac{1}{4}(11), \frac{1}{4}(-1)\right\} = \frac{1}{4}(11) \approx 2.75 \quad (3.13)$$

Como esperabamos el valor de  $k$  aumentó lo cual podemos decir que se debe a que el número de competidores aumentó y entonces las luciérnagas se exigen más a sí mismas para poder lograr una sincronización.

### 3.3.5. Gráficas de la simulación numérica

Al realizar la simulación del modelo (rutinas anexas en el apéndice A) se obtuvieron las siguientes gráficas para cada uno de los arreglos.

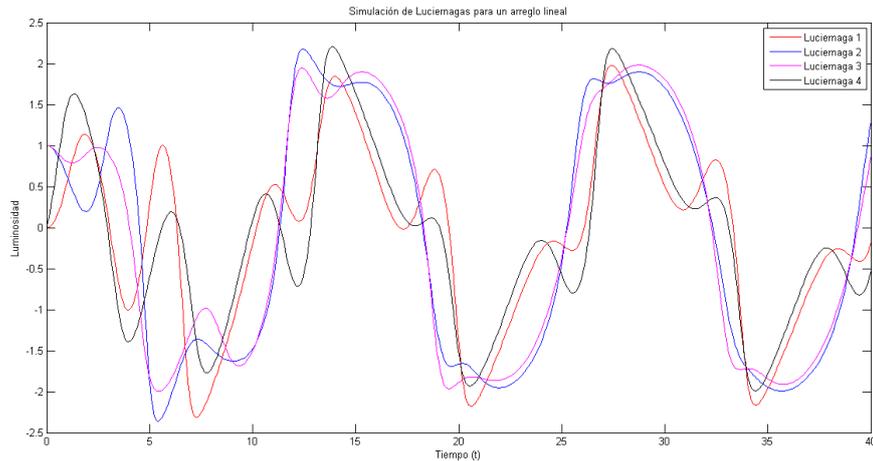


Figura 3.8: Solución numérica para un arreglo lineal de 4 luciérnagas

Ya sabiendo el valor aproximado de  $k$  podemos graficar el espacio fase del sistema.

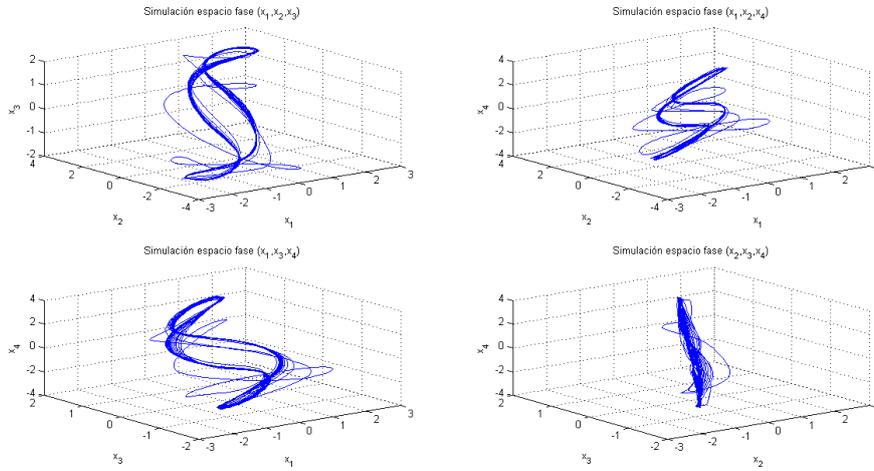


Figura 3.9: Espacio fase del arreglo cuadrado de luciérnagas para  $k=1.8680339$

Y en la siguiente gráfica se observa como la luminosidad se ve afectada por las luciérnagas que están alrededor sin embargo no se llega a una sincronización perfecta.

Lo correspondiente al arreglo cuadrado, usando  $k = 2.75$  se obtiene la gráfica de la solución del sistema.

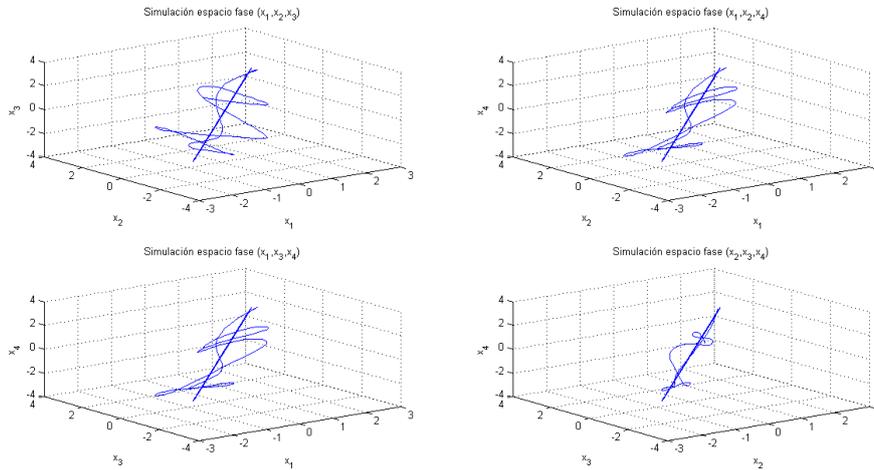


Figura 3.10: Espacio fase del arreglo cuadrado de luciérnagas para  $k=2.75$

Y se puede apreciar la periodicidad del sistema.

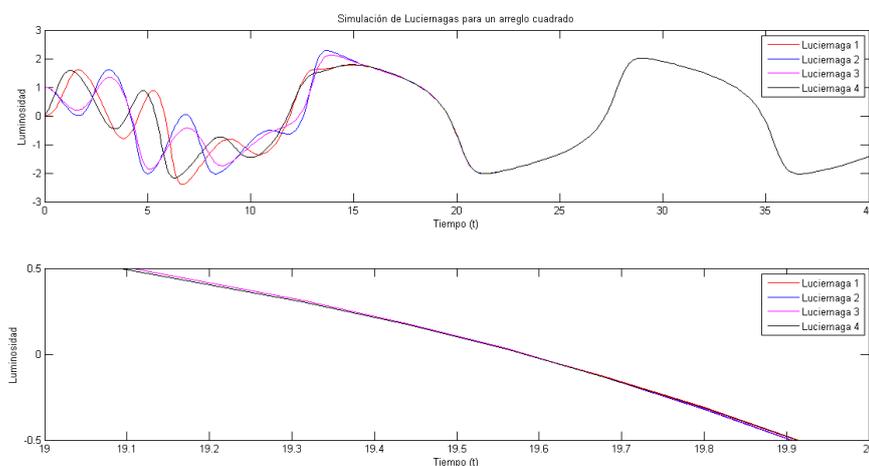


Figura 3.11: Solución numérica para un arreglo cuadrado de 4 luciérnagas

Y lo relacionado a la sincronización en la primer imagen de la figura 3.11 se ve como después de unos segundos la luminosidad de las luciérnagas logran entrar en sincronía. En la segunda imagen se hace un pequeño "zoom" para ver que efectivamente están trazadas las 4 luciérnagas.

### 3.4. Conclusiones

Como se pudo observar, primero se estudió el sistema propuesto para el modelo para algunos valores de  $k$  y después analíticamente se obtuvieron valores aproximados de  $k$ , y posteriormente se obtuvieron las gráficas de las simulaciones numéricas del sistema.

Hay dos cosas importantes que concluir de estos dos ejemplos, la primera es como afecta el número de competidores en el valor de  $k$  (recordando que es  $a_i i$  y nos dice como se esfuerza a si misma la luciérnaga  $i$  para competir con las demás), para el caso donde el arreglo cuadrado permitía la interacción de 3 luciérnagas en el arreglo cuadrado de 4 se obtuvo un esfuerzo mayor que en el modelo donde solo podían ver 1 o 2 luciérnagas. Esto es lo que se esperaba por lo observado por lo entomólogos que han escrito en sus investigaciones. Y la otra cosa importante es como se da la sincronización lo cual es bastante claro a la hora de graficar los dos sistemas con los parámetros, si bien dijimos que en segundo arreglo la  $k$  aumentó, se nota como en la figura 3.11 se alcanza una mejor sincronización.

## Capítulo 4

# Generación de atractores caóticos

### 4.1. Introducción

En nuestra vida cotidiana estamos rodeados por una inmensa cantidad de factores externos que pueden cambiar nuestra rutina, dependiendo la hora y el lugar habrá diferencias significativas cada día, por lo que se vuelve casi imposible poder predecir con exactitud que es lo que pasará al día siguiente. Esto es una realidad que sirve para reflejar la problemática sobre un factor que hace esto posible, la presencia del azar, Ivar Ekerland nos relata en su libro *El Caos* que al visitar en su niñez un museo descubrió una figura en particular que le llamó mucho la atención, era un muñeco colgado de una barra que giraba sin seguir una secuencia fija, cada vez que el lo veía girar descubría un diferente comportamiento, y quedaba maravillado pues sabía que cada rutina sería única y asombrado por el hecho de que no volvería a ver una igual. Este muñeco estaba dominado por el comportamiento de un sistema descrito de la siguiente manera.

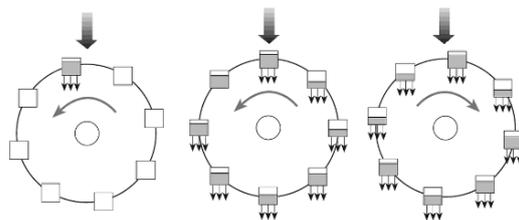


Figura 4.1: Esquema del comportamiento caótico que rige el comportamiento del muñeco. (Imagen tomada de [8])

Se tiene una rueda con diferentes cubiletes con un orificio en la parte in-

ferior, el ciclo comienza cuando se va llenando el primer cubilete que se llena mas rápido de lo que se vacía, cuando el peso es el suficientemente, la rueda comienza a hacer una rotación dando paso a llenar el siguiente cubilete, la velocidad de esta rotación provoca que los cubiletes se llenen cada vez en menor cantidad, logrando que llegue un punto en el cual la rotación se va a invertir, estas dos características combinadas de llenar dependiendo la velocidad de rotación y vaciar a un ritmo constante da lugar a una repartición irregular de los recipientes, provocando un comportamiento desordenado. La figura 4.1 nos ayuda a comprender el comportamiento.

Otro ejemplo muy conocido es el lanzar dados, aunque es tradicionalmente el ejemplo clásico de calcular probabilidades sirve muy bien para describir un comportamiento que depende totalmente de las condiciones iniciales, por mas que uno intente lanzar el dado de la misma manera, no siempre da el mismo resultado ya que un ligero cambio en el ángulo de choque en la superficie cambia totalmente la dinámica, por eso en la práctica de los jugadores expertos en dados, utilizan un cubilete para reducir el control sobre el lanzamiento de los dados y lograr así una menor dependencia del lanzamiento.

Estos y muchos mas ejemplos se pueden apreciar en la naturaleza, en la rutina día a día y que rara vez prestamos la atención necesaria para observarlos. Siguiendo así podemos darnos la idea de que la palabra *Caos* se utiliza para describir comportamientos que no siguen un patrón, es decir, no existe orden.

Pero nuestro interes es saber cómo poder analizar dichos comportamientos matemáticamente, para esto necesitamos retomar al pionero en el estudio del comportamiento caótico. A mediados del siglo XX, en 1963 Edward Lorenz, meteorólogo estadounidense que se dedicaba a estudiar la atmosfera terrestre, en la segunda guerra mundial, sirvió como pronosticador del clima para la fuerza aérea estadounidense, concluida la guerra se dedicó a estudiar la meteorología dando paso a la base de la teoría del caos. Lorenz derivó un sistema tridimensional de un modelo simplificado de los rollos de convección producidos en la atmosfera terrestre, lo que dió paso a las llamadas ecuaciones de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{4.1}$$

Lorenz descubrió en sus experimentos que este sistema determinístico puede tener una dinámica extremadamente inusual, ya que para cierto rango de parámetros las soluciones oscilan irregularmente, no se repiten exactamente pero se mantienen acotadas en una región del plano fase. Cuando Lorenz trazó las trayectorias se llevó una sorpresa al ver que estaba situadas en un conjunto peculiar al cual le dió el nombre de *atractor extraño*, debido a que no se trataba de un punto, ni una curva, ni de una superficie, sino que es un fractal de dimensión fraccional entre 2 y 3.

## 4.2. Teoría de atractores

Así como Lorenz encontró este atractor extraño, en los sistemas dinámicos se tienen diferentes comportamientos en las trayectorias en el plano fase, dichas trayectorias dependen directamente de las singularidades, éstas pueden ser estables en el sentido Lyapunov e inestables.

En el caso de **singularidad estable** podemos tener diferentes tipos de comportamientos, puede ser un sumidero o un atractor, estas se caracterizan porque las trayectorias que inician cerca de ella cuando el tiempo transcurre se aproximan a la singularidad.

La **estabilidad en el sentido de Lyapunov** se ve cuando las trayectorias que inician cercanas se mantienen cercanas todo el tiempo, se dice que es **neutralmente estable** si este no se comporta como un atractor, y en los casos donde las dos estabilidades ocurren se dice que la singularidad es **asintóticamente estable**.

Y en el caso donde la singularidad es **inestable** pasa cuando no es estable ni asintóticamente estable, es el caso de los repulsores y de las fuentes, es decir cuando las trayectorias divergen o se alejan de la singularidad.

Como sabemos existen dos tipos de sistemas, los lineales y los no lineales, para el caso de los sistemas lineales solamente hay puntos fijos, sin embargo para la no linealidad existen puntos fijos, ciclos límites y atractores extraños.

Uno de los teoremas más importantes de los sistemas no lineales es el teorema de Poincaré-Bendixon ya que a grandes rasgos nos dice que las posibilidades de las trayectorias en el plano fase son limitadas, ya que si se tiene una vecindad cerrada y acotada que no tiene puntos fijos, entonces dicha trayectoria se aproxima a una órbita cerrada, es decir a un ciclo límite.

**Teorema 4.2:** Suponga que tiene  $R \in \mathbb{R}^2$  un conjunto cerrado y acotado, sea  $\dot{x} = f(x)$  un campo vectorial continuo y diferenciable sobre un conjunto abierto que contiene a  $R$ , y  $R$  no contiene puntos fijos, además existe una trayectoria  $C$  que permanece en  $R$  para tiempo futuro, entonces

- i) cada trayectoria  $C$  es una órbita cerrada o tiende hacia la órbita en espirales para  $t \leftarrow \infty$
- ii) En cualquier caso  $R$  contiene una órbita cerrada.

Por lo tanto este teorema es un parteaguas ya que esto sólo sucede en sistemas bidimensionales, para los casos en el que tenemos sistemas de mayor dimensión se obtiene comportamiento aperiódico y divergente, lo que da paso al comportamiento caótico.

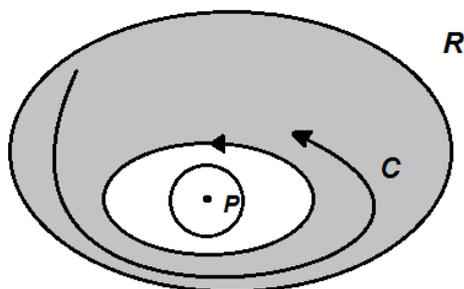


Figura 4.2: Representación de la trayectoria en la región cerrada y acotada

### 4.3. Atractores extraños

Cómo se vió en el atractor de Lorenz el comportamiento caótico tiene dos enroscados donde se desplaza la trayectoria, en esta sección se mostrará otro tipo de dinámica donde se presentan  $n$  enroscados lo cual nos ayudara a comprender un poco mas sobre los atractores. Para esto necesitamos dar ciertos preliminares sobre sistemas disipativos inestables (UDS por sus siglas en ingles).

**Definición 4.1** Se dice que un punto de equilibrio  $x^*$  es un punto silla si es un punto de equilibrio hiperbólico, y además que al menos uno de sus eigenvalores tiene parte real positiva y al menos otro con parte real negativa, pero que ninguno de sus eigenvalores tenga parte real cero.

Esta definición es importante ya que si hay un punto de equilibrio silla, entonces existe una conexión entre los espacios estables  $W^e$  y el espacio inestable  $W^u$  lo cual es de suma importancia para poder generar este tipo de caos que nos interesa.

**Definición 4.2** Considere el sistema  $\dot{x} = Ax$  con  $x \in \mathbb{R}^3$  y  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  con eigenvalores  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$  con la propiedad de  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$ . Entonces

- i) Se dice que el sistema es UDS de tipo 1 (UDS-1) si uno de sus eigenvalores es negativo y los otros dos son complejos conjugados con parte real positiva.
- ii) Se dice que el sistema es UDS de tipo 2 (UDS-2) si uno de sus eigenvalores es positivo y los otros dos son complejos conjugados con parte real negativa.

Con esta definición podemos decir que debido a los eigenvalores de un sistema UDS-1 en la componente de eigenvalor con parte real negativa será

disipativa y oscilatoria y en las otras dos habrá inestabilidad, contrariamente el sistema UDS-2 es disipativo y oscilatorio en dos de sus componentes e inestable en la otra.

Como queremos generar enroscados múltiples en un sistema se necesita de un control que los genere, para esto consideraremos que el sistema a estudiar esta dado por

$$\dot{x} = Ax + Cs(x) \quad (4.2)$$

con  $C \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  y  $s(x)$  una función de saturación que esta definida como sigue

$$s(x) = \begin{cases} s_1 & \text{en } D_{x_1} \\ \vdots & \\ s_j & \text{en } D_{x_j} \\ \vdots & \\ s_r & \text{en } D_{x_r} \end{cases} \quad (4.3)$$

Con  $s_i \in D_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  además se cumple que  $\cap_{i=1}^r D_i = \emptyset$  y  $\cup_{i=1}^r D_i = \mathbb{R}^n$ , en la siguiente sección se presentaran varios ejemplos de como se generan los enroscados multiples a partir de un sistema que no presenta enroscados.

#### 4.4. Control simultáneo de enroscados

Consideremos 3 sistemas descritos como en 4.2, es decir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1x + Cs(x) \\ \dot{x} &= A_2x + Cs(x) \\ \dot{x} &= A_3x + Cs(x) \end{aligned} \quad (4.4)$$

tal que dichos sistemas no presenten enroscados en su retrato fase. El objetivo de esta sección es poder introducir un control al sistema saturado con el cual se pueda generar los enroscados multiples, dicho control se propone de la siguiente forma

$$u(x) = kDx \quad (4.5)$$

donde  $k \in \mathbb{R}$ ,  $D \in \mathbb{R}^n$ , entonces aplicando el control nos da

$$\dot{x} = A_i x + Cs(x) + bu(x) \quad (4.6)$$

para  $i = 1, 2, 3$ , por lo tanto los sistemas controlados

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_1x + kbD)x + Cs(x) \\ \dot{x} &= (A_2x + kbD)x + Cs(x) \\ \dot{x} &= (A_3x + kbD)x + Cs(x) \end{aligned} \quad (4.7)$$

presentarán enroscados en su retrato fase.

El primer ejemplo está definido de la siguiente manera. Consideremos 3 sistemas como en 4.4

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -4 & -9.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} s(x) \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -4 & -9.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} s(x) \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -4 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} s(x) \quad (4.10)$$

con función de saturación

$$s(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0.375 < x_1 \\ 2 & \text{si } 0.225 < x_1 \leq 0.375 \\ 1 & \text{si } 0.075 < x_1 \leq 0.225 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq 0.075 \end{cases} \quad (4.11)$$

los retratos fase de cada uno de los sistemas que se ven en la figura 4.3 muestran un comportamiento donde no hay enroscados.

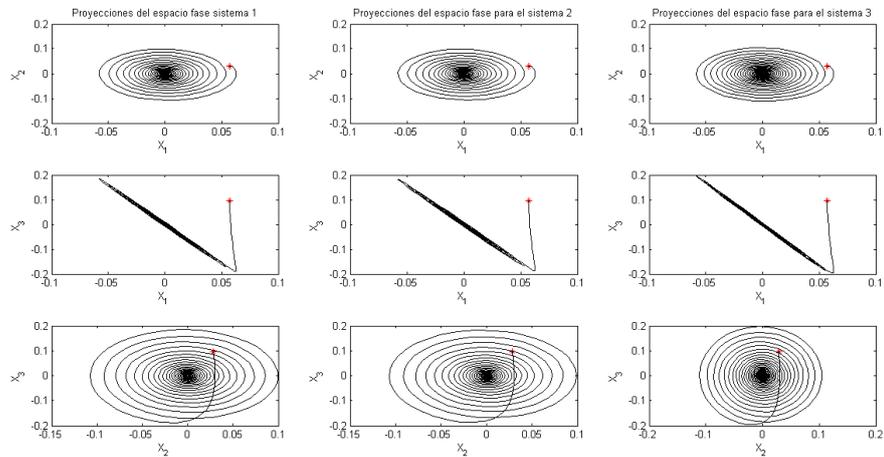


Figura 4.3: Retratos fase de los sistemas que no presentan enroscamientos

Ahora usamos un control  $u(x)$  con  $k = 8$  de la forma

$$u(x) = 8 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

obteniendo los siguientes sistemas controlados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -4 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} s(x) \quad (4.13)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -4 & -1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} s(x) \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} s(x) \quad (4.15)$$

y como deseabamos, a la hora de graficar el retrato fase de cada uno de los sistemas controlados vemos en la figura 4.4 la presencia de enroscamientos.

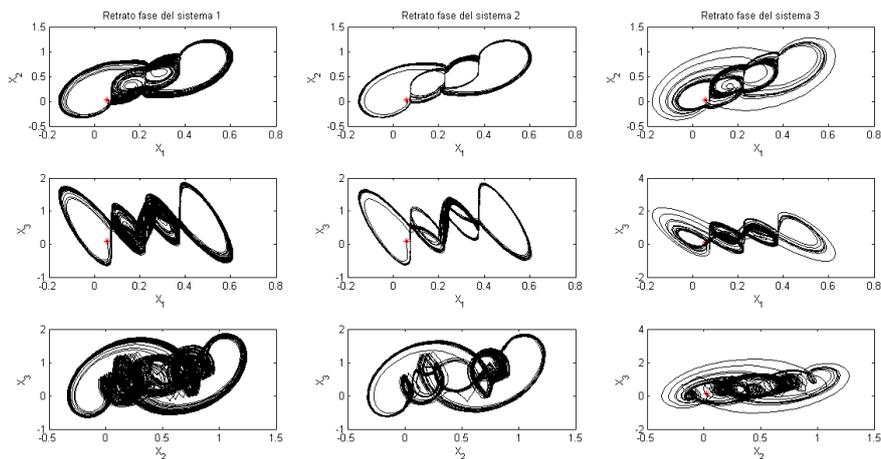


Figura 4.4: Retratos fase de los sistemas controlados con  $k=8$ .

Este ejemplo muestra que es posible generar enroscamientos simultáneamente a partir de 3 sistemas que no presentan dicho comportamiento, se pudiera objetar que los sistemas elegidos son muy parecidos pues solamente hay una pequeña perturbación en la matriz  $A$  en una entrada, por lo tanto esto nos motiva a hacernos dos preguntas:

1. ¿Todas las pequeñas perturbaciones de la matriz  $A$  generan enroscamientos?
2. ¿Existen otros sistemas diferentes a los antes presentados que también generen enroscamientos?

Para responder la primer pregunta basta con presentar un valor para la entrada  $a(3, 3)$  para la cual no existan enroscados en el sistema controlado, para esto si tomamos el valor para  $a(3, 3) = -1.9$  el sistema con el control no presenta enroscados como se puede ver en la siguiente figura

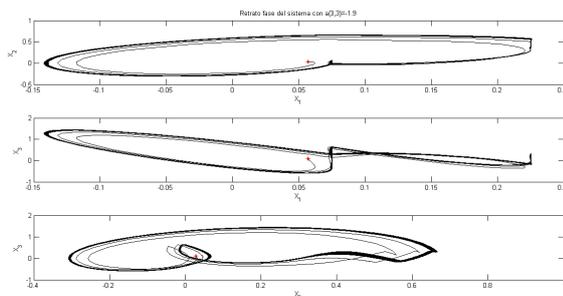


Figura 4.5: Retrato fase del sistema controlado que no presenta enroscamiento.

Y para dar respuesta a la segunda pregunta presentaremos el siguiente ejemplo con otro sistema que no presente enroscados y que sea muy diferente al ejemplo anterior.

Sea el siguiente sistema de la forma 4.2 con su correspondiente función de saturación  $l(x)$  que es totalmente diferente a  $s(x)$  y que no presenta enroscados en su retrato fase al cual posteriormente se le aplicará el control descrito en 4.5 para obtener un nuevo sistema controlado que presente un comportamiento de 4 enroscados.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.7 & -0.7 & -8.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} l(x) \quad (4.16)$$

con la siguiente función de saturación

$$l(x) = \begin{cases} 35 & \text{si } 41 < x_1 \\ 7x_1 - 252 & \text{si } 39 < x_1 \leq 41 \\ 21 & \text{si } 21 < x_1 \leq 39 \\ 7x_1 - 126 & \text{si } 19 < x_1 \leq 21 \\ 7 & \text{si } 1 < x_1 \leq 19 \\ 7x_1 & \text{si } -1 < x_1 \leq 1 \\ -7 & \text{si } x_1 \leq -1 \end{cases} \quad (4.17)$$

y el retrato fase del sistema presentado a continuación nos demuestra que no existen enroscados.

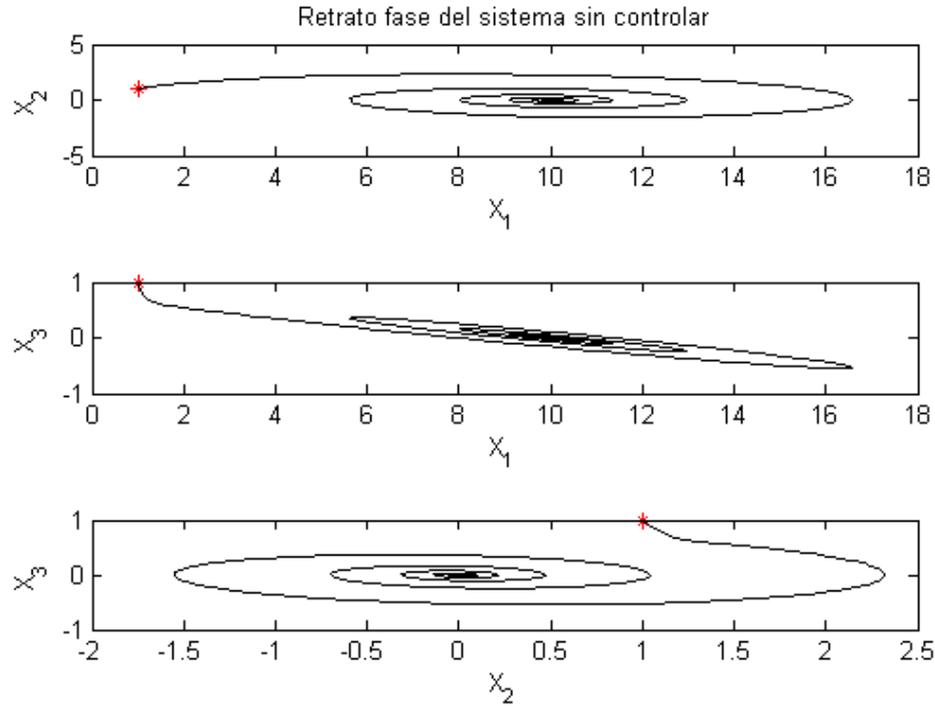


Figura 4.6: Retratos fase del sistema sin controlar.

Entonces al aplicar el mismo control al sistema 4.16 deseamos obtener el comportamiento de enroscados, el sistema con control queda definido entonces de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.7 & -0.7 & -0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} l(x) \quad (4.18)$$

$$l(x) = \begin{cases} 35 & \text{si } 41 < x_1 \\ 7x_1 - 252 & \text{si } 39 < x_1 \leq 41 \\ 21 & \text{si } 21 < x_1 \leq 39 \\ 7x_1 - 126 & \text{si } 19 < x_1 \leq 21 \\ 7 & \text{si } 1 < x_1 \leq 19 \\ 7x_1 & \text{si } -1 < x_1 \leq 1 \\ -7 & \text{si } x_1 \leq -1 \end{cases} \quad (4.19)$$

Y al observar el retrato fase de este sistema en la figura 4.7 se ve claramente la presencia de 4 enroscados.

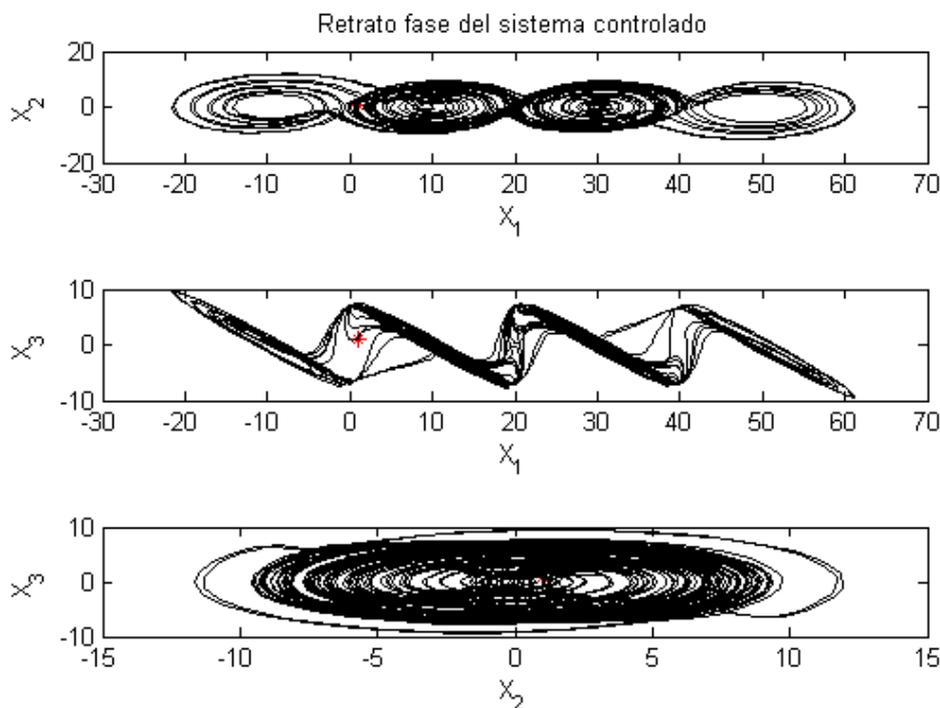


Figura 4.7: Retratos fase del sistema controlado generados los 4 enroscados. 4.18

Para concluir lo que se hizo en esta sección, se tomaron 4 sistemas diferentes (4.8), (4.9), (4.10) y (4.16) los cuales no presentan un comportamiento caótico, 3 de ellos muy parecidos y el cuarto totalmente diferente, se encontró un control que al aplicarlo a los 4 sistemas se pudo obtener un comportamiento de enroscados al mismo tiempo en los 4 sistemas.

## 4.5. Caos sincronizado

Como se explicó en la sección pasada el comportamiento caótico depende fuertemente de las condiciones iniciales y además se vuelve impredecible el comportamiento de las trayectorias caóticas, sin embargo, ¿será posible que exista algún tipo de sincronización que involucre sistemas caóticos?, como sabemos en el ejemplo del atractor de Lorenz si tomamos dos trayectorias diferentes cada una evoluciona de diferente manera dejándonos con la idea de que no hay correlación entre ellas, a pesar de lo que sabemos, ¿existirá la sincronización? y la respuesta a contra de todo pronóstico es sí. La respuesta fue una idea publicada por los científicos Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll quienes en febrero de 1990 publican un método para poder realizar

un tipo de sincronización entre sistemas dinámicos caóticos la cual se denomina como sincronización completa, este fue el primer tipo de sincronización estudiada y se explica a continuación.

#### 4.5.1. Pecora-Carrol

La idea revolucionaria de estos científicos fue definir en subsistemas a partir de un sistema dinámico caótico los cuales al primero se le llama *conductor* y al segundo *respuesta*, el sistema respuesta depende totalmente del sistema conductor, guiando su trayectoria sin que el sistema conductor se vea influenciada. Para ilustrar esto formalicemos la definición de dichos subsistemas. Sea el siguiente sistema

$$\dot{X} = F(X) \quad (4.20)$$

donde:  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces partimos este sistema de tamaño  $n$  en dos subsistemas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{u} &= c(u(t)) && \} \text{ conductor} \\ \dot{v} &= r(v(t), u(t)) && \} \text{ respuesta} \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde:  $u \in \mathbb{R}^k$ ,  $v \in \mathbb{R}^l$  y  $k + l = n$ .

Esta generalización nos dice como el vector  $u(t)$  es la señal que conduce al subsistema respuesta  $v(t)$ .

Para ejemplificar el método descrito se utilizará el ya conocido atractor de Lorenz, primero recordamos el sistema de Lorenz descrito en la sección 4

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

entonces el sistema respuesta está definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{y}_r &= rx - y_r - xz_r \\ \dot{z}_r &= xy_r - bz_r \end{aligned}$$

El cual es un subsistema del sistema de Lorenz, y en este caso la señal conductora estará definida por  $x(t)$ , cabe notar que Pecora y Carrol demostraron que también es posible tomar a  $y(t)$  como el sistema conductor y el subsistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= \sigma(y - x_r) \\ \dot{z}_r &= x_r y - bz_r \end{aligned}$$

Sin embargo no sucede así cuando se toma a  $z(t)$  como conductor y la razón es porque es una condición necesaria que los exponentes de Lyapunov sean todos negativos para poder garantizar la estabilidad asintótica, ver [14],[15].

Recordamos que los exponentes de Lyapunov de un sistema dinámico es una cantidad que caracteriza el grado de separación de dos trayectorias infinitesimalmente cercanas, es decir si tenemos dos trayectorias  $y(t)$  entonces el exponente de Lyapunov  $\lambda$  se define como

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\delta y(t)}{\delta y(t_0)} \right)$$

Pero retomando el primer caso como es que se puede garantizar que realmente con este método existe una sincronización completa, pues basta con ver como es el comportamiento del error entre los dos subsistemas, para demostrar esto seguiremos el siguiente razonamiento

Tomemos el caso en el cual la señal conductora esta dada por  $x_r = x(t)$  entonces sea

$$e_x = x(t) - x_r(t) e_y = y(t) - y_r(t) e_z = z(t) - z_r(t) \quad (4.22)$$

el error de cada una de las componentes con respecto a su señal respuesta, por como se definió  $x_r$  entonces  $e_x \rightarrow 0$ , veamos el comportamiento de  $e_y$  y  $e_z$ .

$$\begin{aligned} \dot{e}_y &= \dot{y} - \dot{y}_r = rx - y - xz - (rx - y_r - xz_r) \\ &= -y - xz - y_r - xz_r \\ &= -(y + y_r) - x(z - z_r) = -e_y - xe_z \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_z &= \dot{z} - \dot{z}_r = xy - bz - (xy_r - bz_r) \\ &= x(y - y_r) - b(z - z_r) \\ &= xe_y - be_z \end{aligned} \quad (4.24)$$

Entonces tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{e}_y &= -e_y - xe_z \\ \dot{e}_z &= xe_y - be_z \end{aligned} \quad (4.25)$$

A continuación calcularemos  $\dot{e}_y e_y + \dot{e}_z e_z$

$$\begin{aligned} \dot{e}_y e_y + \dot{e}_z e_z &= (-e_y - xe_z) e_y + (xe_y - be_z) e_z \\ &= -e_y^2 - xe_z e_y + xe_y e_z - be_z^2 \\ &= -e_y^2 - be_z^2 = -(e_y^2 + be_z^2) \end{aligned} \quad (4.26)$$

y por otro lado sabemos que

$$\dot{e}_y e_y + \dot{e}_z e_z = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} (e_y^2 + e_z^2) \right) \quad (4.27)$$

Si definimos a  $V(e_y, e_z) = \frac{1}{2} (e_y^2 + e_z^2)$  tenemos una función de Lyapunov, que cumple con  $V$  es definida positiva y que  $\dot{V}$  es negativa excepto en  $(0, 0)$  por lo tanto se puede decir que  $V$  es monotona decreciente lo que nos garantiza la estabilidad asintótica y entonces  $e_y \rightarrow 0$  y  $e_z \rightarrow 0$ .

## Capítulo 5

# Conclusiones

Los objetivos planteados para esta tesis son el poder realizar un estudio sobre algunos conjuntos de sistemas diferenciales con diferentes características que cumplen con una propiedad, que estos sistemas suceden a la par, es decir se presentan simultáneamente.

El primer estudio que se hizo fue sobre un criterio para poder asegurar que dos sistemas diferentes, que cumplen con que la matriz asociada a cada uno de los sistemas es Metzler y Hurwitz y sin entradas nulas es condición necesaria y suficiente para poder garantizar la existencia de una función de Lyapunov, la particularidad de esta función de Lyapunov es que funciona para los dos sistemas, que como sabemos nos garantiza estabilidad simultánea.

Siguiendo el objetivo del estudio de sistemas donde la característica principal es que suceden simultáneamente, es de interés estudiar un fenómeno que se manifiesta con un comportamiento simultáneo. Es decir se estudia un modelo de un sistema aplicado a un fenómeno conocido como sincronización, en esta sección se logró ver como existen modelos que ajustan de una manera muy exacta a fenómenos de la vida cotidiana donde existe la sincronía, dichos modelos nos dan una motivación a futuro de que es posible modelar la sincronización y tal vez lograr explicar matemáticamente el flujo de información implícita que existe entre los elementos sincronizados.

Por último se estudió unos sistemas no lineales que en principio son sistemas estables, y que se logró encontrar un control en común que provoca la generación de atractores caóticos llamados enroscados en dichos sistemas simultáneamente, en principio estos sistemas eran muy parecidos y se podía poner a duda si solo se traba de ese sistema, sin embargo se presentó otro sistema totalmente diferente que bajo el mismo control también genera enroscados. Por lo tanto abre una posibilidad a futuros trabajos donde se puedan encontrar más sistemas donde se pueda generar caos.

# Apéndice A

## Programas de Matlab

### A.1. Sincronización de Luciernagas

#### A.1.1. Funcion del arreglo lineal

```
function yprima=luciernagaslineal(t,y);
%definicion de ctes.
%k debe ser mayor que 1/36*(9*mu^2+20+sqrt(2281))
%k=1;
%k=2;
k=1.8682;
%condiciones de los parmetros
a12=1; a13=0; a14=0;
a21=1; a23=1; a24=0;
a31=0; a32=1; a34=1;
a41=0; a42=0; a43=1;
%definicion sistema
yprima=[y(2);
(1-y(1)^2)*y(2)-k*y(1)+a12*y(3)+a13*y(5)+a14*y(7);
y(4);
(1-y(3)^2)*y(4)-k*y(3)+a21*y(1)+a23*y(5)+a24*y(7);
y(6);
(1-y(5)^2)*y(6)-k*y(5)+a31*y(1)+a32*y(3)+a34*y(7);
y(8);
(1-y(7)^2)*y(8)-k*y(7)+a41*y(1)+a42*y(3)+a43*y(5)];
```

#### A.1.2. Función del arreglo cuadrado

```
function yprima=luciernagascuadrado(t,y);
%definicion de ctes.
%k debe ser mayor que 1/36*(9*mu^2+20+sqrt(2281))
%k=2;
```

```

%k=3;
k=2.75;
%condiciones de los parmetros
a12=1; a13=1; a14=1/2;
a21=1; a23=1/2; a24=1;
a31=1; a32=1/2; a34=1;
a41=1/2; a42=1; a43=1;
%definicion sistema
yprima=[y(2);
(1-y(1)^2)*y(2)-k*y(1)+a12*y(3)+a13*y(5)+a14*y(7);
y(4);
(1-y(3)^2)*y(4)-k*y(3)+a21*y(1)+a23*y(5)+a24*y(7);
y(6);
(1-y(5)^2)*y(6)-k*y(5)+a31*y(1)+a32*y(3)+a34*y(7);
y(8);
(1-y(7)^2)*y(8)-k*y(7)+a41*y(1)+a42*y(3)+a43*y(5)];

```

### A.1.3. Programa principal

```

clc
clear all
close all
%Linealizacion y valores propios del modelo lineal
syms k
M1=[0 1 0 0 0 0 0 0;-k 1 1 0 0 0 0 0;0 0 0 1 0 0 0 0;
    1 0 -k 1 1 0 0 0;0 0 0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 -k 1 1 0 ;
    0 0 0 0 0 0 0 1; 0 0 0 0 1 0 -k 1];
mu1=eig(M1)
%Linealizacion y valores propios del arreglo cuadrado
M2=[0 1 0 0 0 0 0 0;-k 1 1 0 1 0 .5 0;0 0 0 1 0 0 0 0;
    1 0 -k 1 .5 0 1 0;0 0 0 0 0 1 0 0;1 0 .5 0 -k 1 1 0 ;
    0 0 0 0 0 0 0 1; .5 0 1 0 1 0 -k 1];
mu2=eig(M2)
%Condicion inicial
y0=[0 0 1 0 1 0 0 1];
%amano de paso
h=[0,1000];
%solucion numerica del modelo lineal
[t1,y1]=ode45(@luciernagaslineal,h,y0);
%solucion numerica del modelo cuadrado
[t2,y2]=ode45(@luciernagascuadrado,h,y0);
%Graficas espacio fase arreglo lineal
figure
subplot(2,2,1)

```

```

plot3(y1(:,1),y1(:,3),y1(:,5))
grid on
title('Simulacin espacio fase (x_1,x_2,x_3)')
xlabel('x_1')
ylabel('x_2')
zlabel('x_3')
subplot(2,2,2)
plot3(y1(:,1),y1(:,3),y1(:,7))
grid on
title('Simulacin espacio fase (x_1,x_2,x_4)')
xlabel('x_1')
ylabel('x_2')
zlabel('x_4')
subplot(2,2,3)
plot3(y1(:,1),y1(:,5),y1(:,7))
grid on
title('Simulacin espacio fase (x_1,x_3,x_4)')
xlabel('x_1')
ylabel('x_3')
zlabel('x_4')
subplot(2,2,4)
plot3(y1(:,3),y1(:,5),y1(:,7))
grid on
title('Simulacin espacio fase (x_2,x_3,x_4)')
xlabel('x_2')
ylabel('x_3')
zlabel('x_4')
%-----
%Graficas espacio fase arreglo cuadrado
figure
subplot(2,2,1)
plot3(y2(:,1),y2(:,3),y2(:,5))
grid on
title('Simulacin espacio fase (x_1,x_2,x_3)')
xlabel('x_1')
ylabel('x_2')
zlabel('x_3')
subplot(2,2,2)
plot3(y2(:,1),y2(:,3),y2(:,7))
grid on
title('Simulacin espacio fase (x_1,x_2,x_4)')
xlabel('x_1')
ylabel('x_2')
zlabel('x_4')

```

```

subplot(2,2,3)
plot3(y2(:,1),y2(:,5),y2(:,7))
grid on
title('Simulacin espacio fase (x_1,x_3,x_4)')
xlabel('x_1')
ylabel('x_3')
zlabel('x_4')
subplot(2,2,4)
plot3(y2(:,3),y2(:,5),y2(:,7))
grid on
title('Simulacin espacio fase (x_2,x_3,x_4)')
xlabel('x_2')
ylabel('x_3')
zlabel('x_4')
%-----
figure
c=450;
plot(t1(1:c),y1(1:c,1),'r',t1(1:c),y1(1:c,3),'b',...
      t1(1:c),y1(1:c,5),'m',t1(1:c),y1(1:c,7),'k')
title('Simulacin de luciernagas para un arreglo lineal')
xlabel('Tiempo (t)')
ylabel('Luminosidad')
legend('Luciernaga 1','Luciernaga 2','Luciernaga 3','Luciernaga 4')
%-----
figure
plot(t2(1:c),y2(1:c,1),'r',t2(1:c),y2(1:c,3),'b',...
      t2(1:c),y2(1:c,5),'m',t2(1:c),y2(1:c,7),'k')
title('Simulacin de luciernagas para un arreglo cuadrado')
xlabel('Tiempo (t)')
ylabel('Luminosidad')
legend('Luciernaga 1','Luciernaga 2','Luciernaga 3','Luciernaga 4')

```

## A.2. Generación de enroscados

### A.2.1. Función del sistema 5.8 y 5.13

```

function M=sist1(t,x);
%Definición de los estados
x1=x(1);
x2=x(2);
x3=x(3);
%Control aplicado
c=-1.5;
%Matriz B

```

```

A=[0 1 0;0 0 1;-30 -4 c];
C=[.15; .3; .4];
B=A*C;
%Intervalos de la funcin de Saturacin
a1=0.375;
a2=0.225;
a3=0.075;
%S=0;
%Funcin de saturacin
if x1>a1
    S=3;
    M=[x2+B(1)*S;x3+B(2)*S;-30*x1-4*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1>=a2 && x1<=a1
    S=2;
    M=[x2+B(1)*S;x3+B(2)*S;-30*x1-4*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1>=a3 && x1<=a2
    S=1;
    M=[x2+B(1)*S;x3+B(2)*S;-30*x1-4*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1<a3
    S=0;
    M=[x2+B(1)*S;x3+B(2)*S;-30*x1-4*x2+c*x3+B(3)*S];
end
end
end
end
end

```

### A.2.2. Función del sistema 5.9 y 5.14

```

function M=sist2(t,x);
%Definicion de los estados
x1=x(1);
x2=x(2);
x3=x(3);
%Control aplicado
c=-1.6;
%Matriz B
A=[0 1 0;0 0 1;-30 -4 c];
C=[.15; .3; .4];
B=A*C;
%Intervalos de la funcin de Saturacin
a1=0.375;
a2=0.225;
a3=0.075;
%Funcin de saturacin

```

```

if x1>a1
    S=3;
    M=[x2+B(1)*S;x3+B(2)*S;-30*x1-4*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1>=a2 && x1<=a1
    S=2;
    M=[x2+B(1)*S;x3+B(2)*S;-30*x1-4*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1>=a3 && x1<=a2
    S=1;
    M=[x2+B(1)*S;x3+B(2)*S;-30*x1-4*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1<a3
    S=0;
    M=[x2+B(1)*S;x3+B(2)*S;-30*x1-4*x2+c*x3+B(3)*S];
end
end
end
end
end

```

### A.2.3. Función del sistema 5.10 y 5.15

```

function M=sist3(t,x);

%Definición de los estados
x1=x(1);
x2=x(2);
x3=x(3);
%Control aplicado
c=-1;
%Matriz B
A=[0 1 0;0 0 1;-30 -4 c];
C=[.15; .3; .4];
B=-A*C;
%Intervalos de la función de saturación
a1=0.375;
a2=0.225;
a3=0.075;
%Función de saturación
%Función de saturación
if x1>a1
    S=3;
    M=[x2+B(1)*S;x3+B(2)*S;-30*x1-4*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1>=a2 && x1<=a1
    S=2;
    M=[x2+B(1)*S;x3+B(2)*S;-30*x1-4*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1>=a3 && x1<=a2

```

```

        S=1;
        M=[x2+B(1)*S; x3+B(2)*S; -30*x1-4*x2+c*x3+B(3)*S];
    else if x1<a3
        S=0;
        M=[x2+B(1)*S; x3+B(2)*S; -30*x1-4*x2+c*x3+B(3)*S];
    end
end
end
end
end

```

#### A.2.4. Función del sistema 5.16 y 5.18

```

function M=sistemaejemplo3(t,x);

%Definición de los estados
x1=x(1);
x2=x(2);
x3=x(3);
%Control aplicado
d=0;
c=-0.7-d;
%Matriz B
A=[0 1 0;0 0 1;-0.7 -0.7 c];
B=[0; 0; 1];
%B=-A*C;
%Intervalos de S
a1=41;
a2=39;
a3=21;
a4=19;
a5=1;
a6=-1;
%función de saturación
if x1>=a1
    S=35;
    M=[x2+B(1)*S; x3+B(2)*S; -0.7*x1-0.7*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1>=a2 && x1<a1
    S=7*x1-252;
    M=[x2+B(1)*S; x3+B(2)*S; -0.7*x1-0.7*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1>=a3 && x1<a2
    S=21;
    M=[x2+B(1)*S; x3+B(2)*S; -0.7*x1-0.7*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1>=a4 && x1<a3
    S=7*x1-126;

```

```

    M=[x2+B(1)*S; x3+B(2)*S; -0.7*x1 -0.7*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1>=a5 && x1<a4
    S=7;
    M=[x2+B(1)*S; x3+B(2)*S; -0.7*x1 -0.7*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1>=a6 && x1<a5
    S=7*x1;
    M=[x2+B(1)*S; x3+B(2)*S; -0.7*x1 -0.7*x2+c*x3+B(3)*S];
else if x1<a6
    S=-7;
    M=[x2+B(1)*S; x3+B(2)*S; -0.7*x1 -0.7*x2+c*x3+B(3)*S];
    end
    end
    %e=eig(A)
    end
    end
    end
    end
end
end

```

### A.2.5. Programa principal sistemas 5.13,5.14,5.15

```

clc
clear all
close all

x0=[0.0569;0.02847;0.09492];
[t1,x1]=ode45(@sist1,[0 300],x0);
[t2,x2]=ode45(@sist2,[0 200],x0);
[t3,x3]=ode45(@sist3,[0 200],x0);
%proyecciones
figure
subplot(3,3,1)
plot(x0(1),x0(2),'r*')
hold on
plot(x1(:,1),x1(:,2),'k')
title('Proyecciones del espacio fase sistema 1')
xlabel('X_1')
ylabel('X_2')
subplot(3,3,4)
plot(x0(1),x0(3),'r*')
hold on
plot(x1(:,1),x1(:,3),'k')
xlabel('X_1')

```

```

ylabel('X_3')
subplot(3,3,7)
plot(x0(2),x0(3),'r*')
hold on
plot(x1(:,2),x1(:,3),'k')
xlabel('X_2')
ylabel('X_3')
%-----
subplot(3,3,2)
plot(x0(1),x0(2),'r*')
hold on
plot(x2(:,1),x2(:,2),'k')
title('Proyecciones del espacio fase sistema 2')
xlabel('X_1')
ylabel('X_2')
subplot(3,3,5)
plot(x0(1),x0(3),'r*')
hold on
plot(x2(:,1),x2(:,3),'k')
xlabel('X_1')
ylabel('X_3')
subplot(3,3,8)
plot(x0(2),x0(3),'r*')
hold on
plot(x2(:,2),x2(:,3),'k')
xlabel('X_2')
ylabel('X_3')
%-----
subplot(3,3,3)
plot(x0(1),x0(2),'r*')
hold on
plot(x3(:,1),x3(:,2),'k')
title('Proyecciones del espacio fase sistema 3')
xlabel('X_1')
ylabel('X_2')
subplot(3,3,6)
plot(x0(1),x0(3),'r*')
hold on
plot(x3(:,1),x3(:,3),'k')
xlabel('X_1')
ylabel('X_3')
subplot(3,3,9)
plot(x0(2),x0(3),'r*')
hold on

```

```

plot(x3(:,2),x3(:,3),'k')
xlabel('X_2')
ylabel('X_3')

```

### A.2.6. Programa principal sistema 5.16

```

clc
clear all
close all
x0=[0.0569;0.02847;0.09492];
[t,x]=ode45(@sistemaejemplo3,[0 600],x0);
figure
plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3),'k')
hold on
plot3(x0(1),x0(2),x0(3),'r*')
grid on
title('Sistema catico con 4 scrolls ')
xlabel('X_1')
ylabel('X_2')
zlabel('X_3')
figure
subplot(3,1,1)
plot(x0(1),x0(2),'r*')
hold on
plot(x(:,1),x(:,2),'k')
title('Retrato fase del sistema controlado')
xlabel('X_1')
ylabel('X_2')
subplot(3,1,2)
plot(x0(1),x0(3),'r*')
hold on
plot(x(:,1),x(:,3),'k')
xlabel('X_1')
ylabel('X_3')
subplot(3,1,3)
plot(x0(2),x0(3),'r*')
hold on
plot(x(:,2),x(:,3),'k')
xlabel('X_2')
ylabel('X_3')

```

# Bibliografía

- [1] BOYCE, W.E. Y R.C. DI PRIMA *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Limusa-Wiley, 2000.
- [2] R.K. NAGLE, E.B. SAFF, A.D. SNIDER *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor de Frontera*, Pearson, 2004.
- [3] STANLEY J. *An Introduction to Differential Equations and their applications*, McGraw-Hill, 1994.
- [4] D. LUENBERGER, *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*, Wiley (1979).
- [5] L. FARINA Y S. RINALDI, *Positive Linear Systems*, Wiley Interscience Series, 2000.
- [6] O. MASON Y R. SHORTEN, *On the simultaneous diagonal stability of a pair of positive linear systems*, *Linear Algebra and its Applications*, 413(2006), pag. 13-23.
- [7] MARTINEZ CORTEZ, VICTOR M *Reducibilidad de matrices finitas no negativas con aplicaciones a economía y control estocástico*, UAM, 2014.
- [8] JONATHAN A. CROSS, *Spectral Abcissa Optimization using Polynomial Stability Conditions* University of Washington, 2010.
- [9] J. KRAAIJEVANGER, *A characterization of Lyapunov diagonal stability using Hadamard products*, *Linear Algebra Appl.*, 151 (1991), pp. 245–254.
- [10] YOSHIRO MORI, TAKEHIRO MORI Y YASUAKI KUROE *A Solution to the Common Lyapunov Function Problem for Continuous-Time Systems*, Conference on Decision and Control (1997), pag. 3530,3531.
- [11] K. S. NARENDRA Y J. BALAKRISHNAN *A Common Lyapunov Function for Stable LTI systems with Commuting A-Matrices*, IEEE Tras. Automat. Contr. (1994), Vol. 39 pp. 2469-2471.

- [12] STROGATZ, STEVEN H., *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry and engineering*, Preseus Books, Cambridge 1994.
- [13] IVAR EKERLAND, *El Caos*, siglo veintiuno editores, 2001.
- [14] PECORA, LOUIS M., CARROLL, THOMAS L., JOHNSON, GREGG A., Y MAR, DOUGLAS J., *Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts and applications*, 2001.
- [15] PECORA, LOUIS M. Y CARROLL, THOMAS L., *Synchronization in Chaotic Systems*, 1990.
- [16] S. BOCCALETTI, J. KURTHS, G. OSIPOV, D.L. VALLADARES, C.S. ZHOU, *The synchronization of chaotic systems*, 2002.
- [17] STROGATZ, STEVEN, *Sync, how order emerges from chaos in the universe, nature, and daily life*, 2003.
- [18] PIMENTEL CABRERA ARTURO, *Sincronización y fenómenos colectivos*, UNAM, 2008.
- [19] STEPHEN LYNCH, *Dynamical Systems with Applications using MATLAB*, Birkhäuser, 2da edición, 2014.
- [20] AGUIRRE HERNANDEZ, BALTAZAR; CAMPOS CANTÓN, ERIC ; LÓPEZ RENTERÍA, JORGE A.; DÍAZ GONZÁLEZ, EDGAR C. *A polynomial approach for generating a monoperametric family of chaotic attractors via switched linear systems*, CHAOS, SOLITONS & FRACTALS, 2015.
- [21] LLOYD, JAMES E. *Fireflies of melanesia: Bioluminescence, mating behavior, and synchronous flashing (coleoptera: Lampyridae)*, Environmental Entomology 2 (1973), no.6, 991–1008(18).
- [22] BOJIC, IVA AND KUSSEK, MARIO *Fireflies Synchronization in Small Overlay Networks*, (2009).
- [23] J. BUCK, *Synchronous rhythmic flashing of fireflies. ii*, Quart. Rev. Biol. 63 (1988), 265–289.
- [24] J. BUCK AND E. BUCK, *Synchronous fireflies*, Scientific American 234 (1976), 74–85.
- [25] HANSON, F. E., *Comparative studies of firefly pacemakers*, Fed. Proc. 37 (1978), 2158–2164.
- [26] STROGATZ, STEVEN *Synchronization of Pulse-Coupled Biological Oscillators*, SIAM. J. Appl. Math. 50 (1990), 1645–1662.

- [27] ERMENTROUT, BARD *An adaptative model for synchrony in the firefly pteroptyx malaccae*, Journal of Mathematical Biology 29 (1991), 571–585.
- [28] ESCALANTE MARTINEZ, J. E. *Fenómenos de sincronización y modelos matemáticos*, 2012.