



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POSGRADO EN MATEMÁTICAS

Robustez de la distribución del precio de un activo con volatilidad Ornstein–Uhlenbeck

TESIS

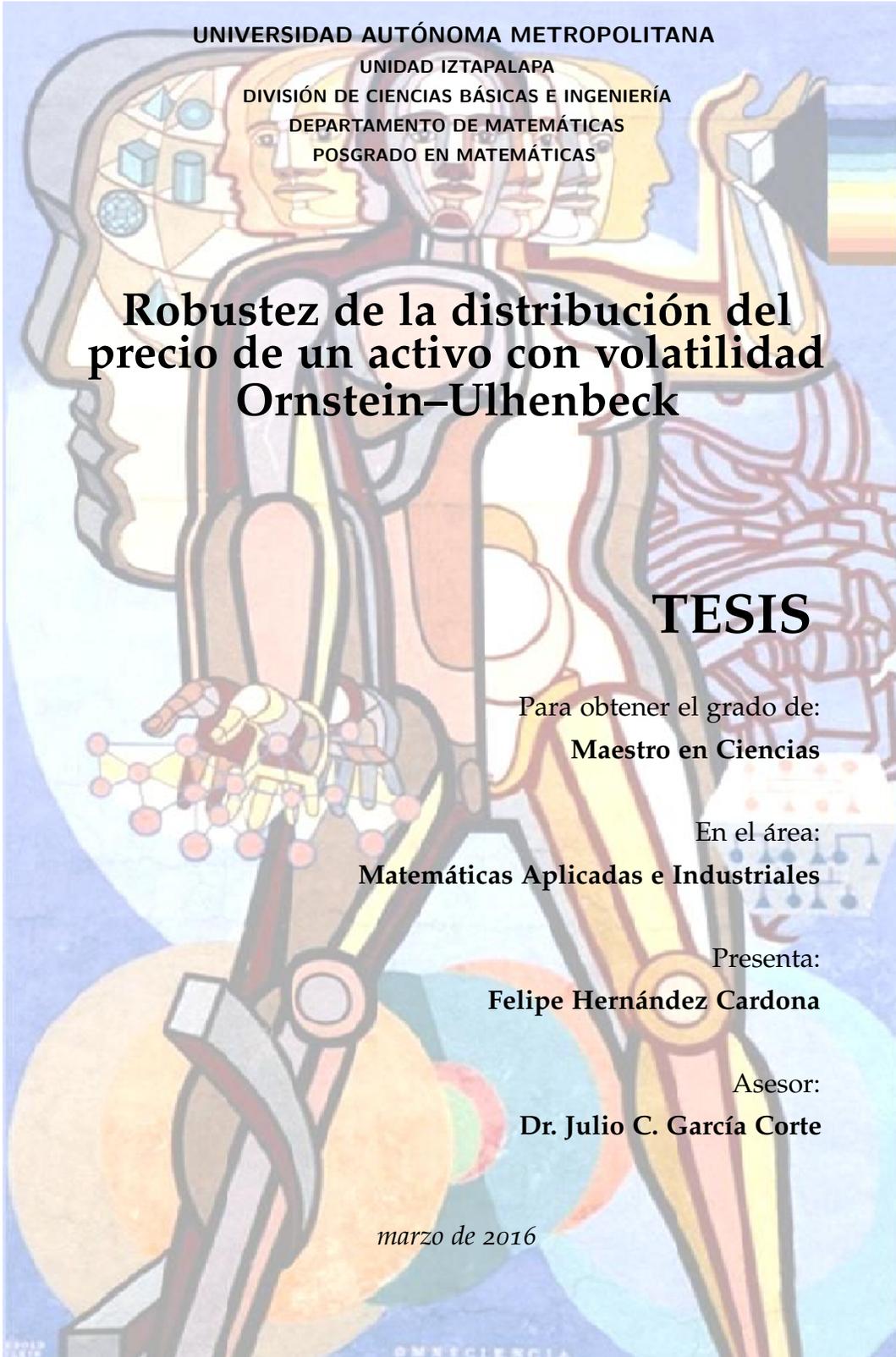
Para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

En el área:
Matemáticas Aplicadas e Industriales

Presenta:
Felipe Hernández Cardona

Asesor:
Dr. Julio C. García Corte

marzo de 2016



*Dedicado a
mi familia*

RESUMEN

Suponiendo que la volatilidad de un activo financiero es estocástica, prácticamente son nulas las posibilidades de exhibir una representación explícita y determinista de la distribución del precio del activo, lo que encamina a tratar la situación de manera aproximada mediante simulación numérica. No obstante, cuando la volatilidad obedece a un proceso de Ornstein–Uhlenbeck se puede obtener, de forma cerrada, la distribución del precio. En este caso, se tiene un modelo robusto, al no depender de casos restrictivos acerca de los parámetros que definen tanto al proceso del precio como al de la volatilidad.

ABSTRACT

Assuming that the volatility of a financial asset is stochastic, are virtually nil chances of displaying a representation explicit and deterministic of the distribution of the asset price, to track the situation, is necessary approximation by numerical simulation. However, when volatility is obeying to a process of Ornstein–Uhlenbeck can be obtained, so closed, the distribution of the price. In this case, we have a robust model does not depend on restrictive cases about the parameters that define both the price process and the volatility.

ÍNDICE GENERAL

Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XV
INTRODUCCIÓN	1
1. ANTECEDENTES	7
1.1. Valuación de opciones	7
1.1.1. Medida neutral al riesgo	7
1.1.2. Teoría clásica de valuación de opciones	9
1.1.3. Fórmula de Black–Scholes–Merton	14
2. DISTRIBUCIÓN DEL PRECIO CON VOLATILIDAD ORNSTEIN–ULHENBECK	21
2.1. Modelos de precio con volatilidad estocástica	21
2.2. Distribución del precio de un activo	25
3. ROBUSTEZ DEL MODELO DE DENSIDAD	37
3.1. Robustez del modelo de densidad	37
CONCLUSIONES	45
A. CONCEPTOS BÁSICOS: DEFINICIONES Y TEOREMAS	47
A.1. Espacios y funciones medibles	47
A.2. Medidas y espacios de probabilidad	48
A.3. Variables aleatorias	49
A.4. Procesos estocásticos	51
A.5. Martingalas, Submartingalas y Supermartingalas	52
A.6. Movimiento Browniano	53
A.7. Funciones de transición	54

ÍNDICE GENERAL

A.8. Procesos de Itô	55
B. LA DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL	57
B.1. La distribución Lognormal	57
C. EL PROCESO DE ORNSTEIN–UHLENBECK	59
C.1. Proceso de Ornstein–Uhlenbeck	59
D. FÓRMULA DE ITÔ	61
D.1. Fórmula de Itô	62
E. MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES	63
E.1. Separación de variables para EDE	63
F. LA TRANSFORMADA DE FOURIER	65
F.1. La transformada de Fourier	65
G. LA FUNCIÓN $I(\lambda)$	67
G.1. Forma explícita de $I(\lambda)$	67
BIBLIOGRAFÍA	81

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.1.	Gráfica de la densidad del movimiento browniano geométrico con parámetros $r = 1$ y $\sigma = 1$	15
1.1.2.	Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial de Black–Scholes con parámetros $T = 10$, $K = 0.5$, $r = 1$ y $\sigma = 1$	19
1.1.3.	Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial de Black–Scholes en su estado no estacionario, con parámetros $T = 10$, $K = 0.5$, $r = 1$ y $\sigma = 1$	19
2.1.1.	Gráfica de la densidad de la volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando ésta sigue un proceso O–U para tiempos $t \in [0, 10]$ con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$	23
2.1.2.	Gráfica de 100 trayectorias del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O–U para tiempos $t \in [0, 1]$, con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$	24
2.1.3.	Comparación entre el histograma y la distribución teórica del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O–U al tiempo $t = 1$, con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$	24
2.2.1.	Histograma de frecuencias relativas de una muestra de tamaño 1000 del proceso del precio al tiempo $t = 1$ con $\mu = 1$ y parámetros de la volatilidad O–U, $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$	32
2.2.2.	Histograma de frecuencias relativas de una muestra de tamaño 5000 del proceso del precio al tiempo $t = 1$ con $\mu = 1$ y parámetros de la volatilidad O–U, $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$	32

ÍNDICE DE FIGURAS

2.2.3.	Gráfica de 500 trayectorias del proceso de precios P en $t \in [0, 1]$, con $\mu = 1$ y parámetros de la volatilidad O-U, $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$	33
2.2.4.	Acercamiento de la gráfica de la Figura 2.2.3 en el rango de precios $[0, 10]$	33
2.2.5.	Gráfica de 5000 trayectorias del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O-U para tiempos $t \in [0, 1]$, con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$	34
2.2.6.	Comparación entre el histograma y la distribución teórica del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O-U al tiempo $t = 1$, con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$	34
2.2.7.	Gráfica de 5000 trayectorias del proceso de precios P en $t \in [0, 1]$, con $\mu = 1$ y parámetros de la volatilidad O-U, $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$	35
2.2.8.	Acercamiento de la gráfica de la Figura 2.2.7 en el rango de precios $[0, 10]$	35
3.1.1.	Gráfica de L con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\lambda = 1$ y $k = 1$. . .	38
3.1.2.	Gráfica de M con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\lambda = 1$ y $k = 1$. . .	40
3.1.3.	Gráfica de N con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\lambda = 1$ y $k = 1$. . .	43
3.1.4.	Familia de gráficas de $u(x)$ para tiempos $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\lambda = 1$ y $k = 1$	43
3.1.5.	Familia de gráficas de la función $u(\lambda)$ manteniendo constante la variable espacial en $\sigma_0 = 1$, con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1$ y tiempos $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	44
B.1.1.	Gráfica de la densidad Lognormal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$	58
G.1.1.	Familia de gráficas de $u(x)$ para tiempos $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$	69

G.1.2. Familia de gráficas de la función $u(\tilde{\lambda})$ para tiempos $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, y $k = 1$, manteniendo constante la variable espacial en $x = 1$ 70

G.1.3. Gráfica de la solución de la ecuación de Ricatti (G.1.18) con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$ 73

G.1.4. Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial (G.1.19) con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$ 75

G.1.5. Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial (G.1.20) con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$ 77

G.1.6. Familia de gráficas de $I(\lambda)$ para tiempos $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\sigma_0 = 1$ y $k = 1$ 80

G.1.7. Familia de gráficas de la función $I(\sigma_0)$ para tiempos $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\lambda = 1$ y $k = 1$. . . 80

ÍNDICE DE TABLAS

0.0.1.	Algunos activos negociados en los mercados de derivados . . .	4
2.1.1.	Algunos modelos de volatilidad estocástica	23
D.1.1.	Tabla de Itô	62
G.1.1.	N^s vs. N^c	79

INTRODUCCIÓN

Desde hace varios años, el mundo de las finanzas se modela mediante la representación matemática de activos financieros a partir de variables aleatorias explicadas y de ecuaciones diferenciales estocásticas.

En contabilidad, un activo es un bien tangible o intangible que posee una empresa o persona natural. Activo es un sistema construido con bienes y servicios, con capacidades funcionales y operativas que se mantienen durante el desarrollo de cada actividad socioeconómica específica. Por extensión, se denomina también activo al haber de una empresa, el activo forma parte de las cuentas reales o de balance. Activos de una empresa se refiere al conjunto de bienes económicos, derechos a cobrar que posee un comerciante o una empresa y aquellas erogaciones que serán aprovechadas en ejercicios futuros.

Ejemplos de activos: Caja, Valores a depositar, Rodados, Marcas Registradas, Mercaderías, Deudores por Venta.

El concepto de activo en contabilidad ha evolucionado desde una consideración jurídica, que requería la propiedad de los bienes o derechos, hasta la actual, que requiere únicamente el control del bien o derecho. Actualmente se considera activo a aquellos bienes o derechos que tienen un beneficio económico a futuro. Eso no tiene por qué significar que sea necesaria la propiedad ni la tenencia ni el dinero. Los activos son un recurso o bien económico con el cual se obtienen beneficios. Los activos de las empresas varían de acuerdo con la naturaleza de la actividad desarrollada.

El Marco Conceptual para la Información Financiera del IASB (International Accounting Standards Board (Junta de Normas Internacionales de Contabilidad)), emitido el 1 de enero de 2012, establece que un activo es un recurso controlado por la entidad como resultado de sucesos pasados, del que la entidad espera obtener, en el futuro, beneficios económicos.

INTRODUCCIÓN

En los registros contables cuando se produce una variación de un elemento de activo, ésta puede ser de dos tipos:

- a) Aumento del activo, se carga o debita anotándose en el debe
- b) Disminución del activo, se abona o acredita, esto es, se realiza una anotación en el haber

y su saldo al finalizar el ejercicio contable es siempre deudor o cero.

TIPOS DE ACTIVO

Activo corriente

El activo corriente, también denominado activo circulante, es aquel activo líquido a la fecha de cierre del ejercicio, o convertible en dinero dentro de doce meses. Además, se consideran corrientes a aquellos activos aplicados para la cancelación de un pasivo corriente, o que evitan erogaciones durante el ejercicio. Son componentes del activo corriente las existencias, los deudores comerciales y otras cuentas a cobrar, las inversiones financieras a corto plazo y la tesorería.

Activo no corriente o Activo fijo

Los activos no corrientes son los activos que corresponden a bienes y derechos que no son convertidos en efectivo por una empresa en el año, y permanecen en ella durante más de un ejercicio. Conocidos también como activos fijos, son aquellos que no varían durante el ciclo de explotación de la empresa (o el año fiscal). Por ejemplo, el edificio donde una fábrica monta sus productos es un activo no corriente porque permanece en la empresa durante todo el proceso de fabricación y venta de los productos. Una característica importante de los activos no corrientes es que son poco líquidos, dado que se tardaría mucho en venderlos para conseguir dinero.

Contraejemplo: en una inmobiliaria, los edificios que la inmobiliaria compra para vender varían durante el ciclo de explotación y por tanto forma parte del activo cir-

culante. Al mismo tiempo, las oficinas de la inmobiliaria son parte de su activo no corriente.

Activo financiero

Un activo financiero es un activo intangible materializado en un título o simplemente en una anotación contable, por el que el comprador del título adquiere el derecho a recibir un ingreso futuro de parte del vendedor. Los activos financieros son emitidos por las unidades económicas de gasto y constituyen un medio de mantener riqueza para quienes los poseen y un pasivo para quienes lo generan. A diferencia de los activos reales, no contribuyen a incrementar la riqueza general de un país, ya que no se contabilizan en el Producto interno bruto de un país, pero sí contribuyen y facilitan la movilización de los recursos reales de la economía, contribuyendo al crecimiento real de la riqueza. Entre las principales categorías de activos financieros se encuentran los préstamos, las acciones, los bonos y los depósitos bancarios.

Ejemplo: El préstamo que realiza un prestamista a una empresa es un activo financiero, en este caso la empresa es la vendedora del activo y el ahorrador, el comprador que espera recibir una corriente de ingresos en el futuro.

Activo subyacente

Es un activo que, en los mercados de productos derivados, está sujeto a un contrato normalizado y es el objeto de negociación en el mercado. Es decir, es aquel activo sobre el que se efectúa la negociación de un activo derivado. Uno de los criterios por lo que se pueden clasificar los diferentes derivados, por tipo de activo subyacente es:

- a) Si se trata de mercaderías, productos agrícolas o metales, pertenece al grupo de opciones y futuros, derivados en general, sobre activos reales o commodities.
- b) Si son divisas, tipos de interés o índices bursátiles, pertenecerá al grupo de opciones y futuros sobre instrumentos financieros.

INTRODUCCIÓN

A modo de ejemplo, en la tabla 0.0.1 se pueden observar algunos de los activos que se negocian como subyacentes en los mercados de derivados.

Tabla 0.0.1: Algunos activos negociados en los mercados de derivados

Tipo de activo	Producto	Activo
Commodities	Agrícolas	Soja, trigo, cebada, algodón, etc.
	Ganaderos	Cerdo, cordero, pollo, etc.
	Metales no preciosos	Aluminio, cobre, plomo, zinc, etc.
	Metales preciosos	Oro, plata, platino, paladio, etc.
	Energía	Gas, crudo, gasolina, electricidad, etc.
Financieros	Índices	Meteorológico, seguros, etc.
	Tipos de cambio	USD/JPY, USD/DEM, etc.
	Tipos de interés	EURIBOR, LIBOR, US T-Bond, etc.
	Acciones	Telefónica, Repsol, IBM, GM, ATT, etc.
	Índices bursátiles	IBEX, DAX, S& P, CAC, NIKKEI, etc.

ESTOCASTICIDAD EN EL MUNDO FINANCIERO

En los mercados financieros, adicionalmente a la compra y venta de activos existe un tipo de transacción denominado venta en corto. Vender en corto es la práctica de vender activos financieros, generalmente acciones, que han sido prestados de un tercero con la intención de devolverle el mismo activo en especie y, adicionalmente pagarle cierta tasa de rendimiento previamente pactada.

Adicionalmente a los activos *per sé*, también se hace compraventa de derivados. Actualmente, el concepto de derivado no se limita a activos financieros sino también tiene subyacentes tales como granos, bienes industriales, electricidad, gas natural, clima, seguros de crédito y seguros en general, también conocidos como *commodities*. Dentro de los mercados financieros y de commodities existen derivados que se negocian tanto en mercados organizados como entre particulares llamados over the counter (OTC).

Algunos de los principales instrumentos derivados *plain vanilla* son los contratos forwards, futuros y opciones. Los primeros se negocian en los mercados OTC, usualmente entre particulares. Como alternativa a éstos, se encuentran los futuros, que son contratos estandarizados y regulados por una cámara de compensación que generalmente se negocian de manera diaria y obligan al poseedor a comprar o vender el subyacente en cuestión. Por otro lado, una opción es un derecho y no una obligación de comprar o vender un subyacente y se negocia tanto en mercados organizados como en OTC.

Existen dos tipos de opciones, las *call* y las *put*, es decir, opciones de compra y de venta respectivamente. Dentro de ambas existen Americanas, Europeas y Exóticas. En el caso de las Europeas, éstas pueden ser ejercidas únicamente al vencimiento y para calcular el precio de ellas, tradicionalmente se ha hecho usando Black–Scholes–Merton. Sin embargo, dado que uno de los supuestos que se deben cumplir es que el precio del activo siga un movimiento browniano geométrico, entonces tanto la tasa de rendimiento como la volatilidad, deben de ser constantes en el tiempo lo cual generalmente no es el caso. El precio de un activo puede tener una tendencia mucho más complicada al suponer que al menos la volatilidad es estocástica.

Suponiendo que la volatilidad es estocástica, prácticamente son nulas las posibilidades de exhibir una representación explícita y determinista de la distribución del precio, lo que encamina a tratar la situación de manera aproximada mediante simulación numérica. No obstante, hay al menos una situación en la que la volatilidad, a pesar de ser estocástica, tiene un comportamiento que permite obtener una solución de forma cerrada de la distribución del precio y esto es cuando ella obedece a un proceso de Ornstein–Uhlenbeck. En este caso, se tiene un modelo robusto al no depender de casos restrictivos acerca de los parámetros que definen tanto al proceso del precio como al de la volatilidad.

ANTECEDENTES

1.1 VALUACIÓN DE OPCIONES

1.1.1 *Medida neutral al riesgo*

En modelos financieros, primero se define un espacio muestral Ω , el cual puede interpretarse como el conjunto de los posibles escenarios a ocurrir en un tiempo futuro. Los escenarios tienen cierta medida de probabilidad P .

Cambio de medida

Para modelar activos contenidos en mercados financieros, es necesario cambiar de la medida actual de probabilidad P a la medida neutral al riesgo \tilde{P} . Al estar presente \tilde{P} , el espacio de escenarios Ω se convierte en un espacio infinito contable y $P = \tilde{P} = 0$ para cada $\omega \in \Omega$, es decir, para una VA Z en Ω ,

$$Z(\omega)P(\omega) = \tilde{P}(\omega)$$

A continuación se presentan las condiciones sobre la VA Z para que \tilde{P} sea una medida de probabilidad.

Teorema 1.1.1. Medida de probabilidad \tilde{P}

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y Z una VA positiva tal que, $\mathbb{E}[Z] = 1$.

Si $A \in \mathcal{F}$ y,

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega)$$

entonces, \tilde{P} es una medida de probabilidad.

Sean $\tilde{\mathbb{E}}$ asociada a \tilde{P} y X una VA no negativa entonces,

$$\tilde{\mathbb{E}}[X] = \mathbb{E}[XZ]$$

Más aún, si Z es estrictamente positiva, casi seguramente y, Y es una VA positiva entonces,

$$\mathbb{E}[Y] = \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{Y}{Z} \right]$$

Demostración: Véase [Shreve II, Capítulo 1, pp.33]. ■

Definición 1.1.1. Medidas equivalentes

Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible. Se dice que dos medidas de probabilidad, P y \tilde{P} , son equivalentes en (Ω, \mathcal{F}) si, tienen los mismos conjuntos de probabilidad cero, es decir, si para cada $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0$ sí, y sólo si, $\tilde{P}(A) = 0$.

Definición 1.1.2. Medida neutral al riesgo

Se dice que una medida de probabilidad \tilde{P} es neutral al riesgo si, las dos siguientes condiciones se cumplen,

- a) P y \tilde{P} son equivalentes
- b) Bajo la medida de probabilidad \tilde{P} , el precio descontado de la acción, $D_t S_t^i$, es una martingala, para toda $i = 1, \dots, m$ donde, $D_t = \exp\{-r t\}$ es el factor de descuento y S_t^i el i -ésimo activo del portafolio

Para el propósito de valuación de derivados, se utilizará una medida neutral al riesgo \tilde{P} . En el caso particular de los modelos en tiempo continuo, teniendo P y \tilde{P} , se puede determinar precios de derivados que permitan establecer coberturas que funcionen con probabilidad \tilde{P} uno, las cuales también funcionarán con probabilidad P uno.

Es común referirse a los cálculos hechos mediante una medida actual como el cómputo hecho en el mundo real y aquellos realizados mediante una medida neutral al riesgo como el cómputo hecho en el mundo riesgo neutral. Ahora bien, se podría cuestionar por qué existen dos diferentes mundos dentro de las finanzas y, cuál de las dos medidas resulta más adecuada para el mundo real. En la representación matemática de activos financieros que se desarrolla a partir de variables aleatorias explicadas

y de ecuaciones diferenciales estocásticas existe solo un mundo. Para entender mejor esta idea hay que recordar que existe tanto un único espacio muestral Ω que representa todos los posibles estados futuros del mercado, como un solo conjunto de precios observados de los activos financieros disponibles en el mercado. A menudo se trabaja en un mundo donde se asume que las probabilidades están dadas por una medida actual de probabilidad empíricamente estimada y a veces asumiendo que está dada por una medida de riesgo neutral, sin embargo, no se modifica el panorama de las posibilidades. Debido a que la equivalencia entre medidas de probabilidad concuerda en qué eventos tienen probabilidad de uno, es posible que cierta cobertura funcione tanto bajo la medida actual de probabilidad como en la medida neutral al riesgo.

Teorema 1.1.2. Girsanov

Para $t \in [0, T]$, sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y, W_t un MB y X_t un PE adaptados a la filtración \mathcal{F}_t . Se definen,

$$Z_t = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t X_s^2 ds - \int_0^t X_s dW_s \right\}$$

y,

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t X_s ds$$

Asumiendo además que,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X_s^2 Z_s^2 ds \right] < \infty$$

si $Z = Z_T$ entonces, $\mathbb{E}[Z] = 1$. Y bajo la medida de probabilidad \tilde{P} , \tilde{W}_t es un MB.

Demostración: Véase [Shreve II, Capítulo 5, pp.212]. ■

1.1.2 Teoría clásica de valuación de opciones

Los mercados financieros son un vehículo de intercambio de activos de interés entre sus participantes. Adicionalmente a la compra y venta de activos financieros, existe un tercer tipo de transacción denominado venta en corto. En finanzas, vender en corto es la práctica de vender activos financieros, generalmente acciones, que han sido prestados de un tercero con la intención de devolverle el mismo activo en especie y, adicionalmente pagarle cierta tasa de rendimiento previamente pactada.

Broker es un intermediario experto en la materia, responsable de conjuntar las partes y su objetivo es acercar a los clientes al sector financiero.

Lo que se busca con esta práctica es que el precio de los activos que se vendieron en corto caiga por lo que, objetivamente, a la fecha de la compra se pagará una cantidad menor a la cual se logró vender el activo originalmente. El tercero, que usualmente es un *broker*, espera que se le pague cierta tasa de rendimiento proporcional al tiempo que dure la venta en corto.

Adicionalmente a los activos financieros *per sé*, también se hace compraventa de derivados de activos financieros. Un derivado es un instrumento financiero tal que su valor depende o está derivado de otros valores, comunmente un activo subyacente. En su definición moderna, el concepto de derivado no se limita a activos financieros sino también tiene subyacentes tales como granos, bienes industriales, electricidad, gas natural, clima, seguros de crédito y seguros en general, también conocidos como *commodities*.

A continuación se desarrollarán algunos conceptos de suma importancia de la teoría clásica de valuación de opciones que hoy en día siguen siendo el estandar para la valuación.

Bolsas de derivados y mercados OTC

Dentro de los mercados financieros y de *commodities* existen derivados dentro de mercados organizados y aquellos que se negocian entre particulares *over the counter* o simplemente llamados OTC. A continuación se desarrollará una breve explicación entre ambos mercados y sus diferencias.[†]

Definición 1.1.3. Mercado o bolsa de derivados

Un mercado o bolsa de derivados es un sistema organizado donde sus participantes negocian contratos tipificados que han sido previamente definidos mediante la estandarización contractual de las operaciones.

Por el concepto de “previamente definidos” nos referimos a que las cantidades y el tipo de entregas se encuentran estandarizados, entre los más importantes están el Chicago Board of Trade y el Chicago Mercantile Exchange que hoy en día se encuentran fusionados como CME Group. Al igual que las bolsas de valores, las bolsas

[†] Véase [Hull J, Capítulo 1] para mayor información sobre mercados de derivados.

de derivados se encuentran completamente automatizadas y la interacción entre sus participantes se desarrolla electrónicamente.

No todo intercambio de activos ocurre en mercados organizados, existen también mercados no organizados.

Definición 1.1.4. Mercados OTC

Los mercados no organizados (*over the counter*), OTC por sus siglas en inglés, son una importante alternativa de las bolsas de derivados, que en tamaño son mucho mayores que los mercados organizados.

La característica principal de los mercados OTC es que no existe una cámara de compensación que regule las operaciones.

Contratos derivados

En esta sección se expondrá una breve explicación de los principales instrumentos derivados *plain vanilla*, forwards, futuros y opciones.

Una de las formas más sencillas de contratos derivados es un contrato forward.

Definición 1.1.5. Contrato forward

Un contrato forward es un acuerdo para comprar o vender cierto activo subyacente en el tiempo futuro a cierto precio.

Un contrato forward se negocia en los mercados OTC, usualmente entre particulares y/o instituciones financieras. Una de las partes asume la posición larga, con lo que se compromete a comprar el subyacente en cierta fecha futura y a cierto precio previamente pactado. Por otro lado, la posición corta se compromete a vender el subyacente en la misma fecha futura al precio pactado.

Como alternativa a los contratos forward se encuentran aquellos contratos estandarizados denominados futuros, los cuales se negocian generalmente de manera diaria.

Definición 1.1.6. Contrato futuro

Un contrato futuro es aquel que obliga al poseedor a comprar o vender cierto subyacente a un precio determinado en cierto tiempo futuro también determinado.

A diferencia de los contratos forward, los contratos futuros tienen la peculiaridad de ser contratos estandarizados que se negocian en una bolsa de valores y por esto último existe una cámara de compensación que actúa como intermediario para garantizar el pago y la entrega del subyacente por las partes involucradas.

En términos más estrictos y siguiendo a [Shreve II], el precio futuro P_f de un activo tal que su valor al tiempo T es S_T está dado por,

$$P_f(t, S_T) = \mathbb{E}[S_T | \mathcal{F}_t]$$

donde, $t \in [0, T]$ es el tiempo actual (tiempo de valuación), T el tiempo de vencimiento y \mathcal{F}_t la filtración asociada.

Una posición larga en los contratos futuros es un acuerdo de recibir como flujo de efectivo los cambios en el precio del futuro tales que, podrían incluso ser negativos durante el tiempo que se sostiene la posición. Por otro lado, la posición corta recibe el flujo de efectivo opuesto del contrato futuro.

Los contratos futuros tienen la peculiaridad de ser contratos suma cero al final del día, es decir, la diferencia entre la posición larga y la corta debe de ser liquidada a través de la cámara de compensación, lo cual permite que se garantice el pago entre las partes y, posibilita el cálculo de las diferencias en el flujo de efectivo de manera diaria.

A diferencia de los contratos forward y los futuros, una opción proporciona al poseedor el derecho, y no la obligación, de adquirir cierto subyacente a un precio pactado.

Definición 1.1.7. Opciones

Una opción es un derecho, y no una obligación, de comprar o vender cierto activo subyacente a un precio pactado en un tiempo determinado.

Las opciones se negocian tanto en mercados organizados, es decir, en bolsas de valores, como en mercados OTC.

Existen dos tipos de opciones, las opciones *call* y las *put*. Las opciones *call* proporcionan al poseedor la opción de vender cierto subyacente a un precio determinado

en un tiempo determinado. Las opciones *put*, por el contrario a las *call*, proporcionan al poseedor el derecho de vender cierto subyacente a un precio determinado en un tiempo determinado.

El precio pactado para la compra en una opción *call* y para la venta en una *put*, se denomina precio de ejercicio o *strike price*. La fecha en el contrato es comúnmente llamada fecha de expiración o fecha de maduración. Dentro de las opciones *call* y *put* existen opciones Americanas, Europeas y exóticas; entre estas últimas destacan las Asiáticas. Las opciones Americanas tienen la peculiaridad de poder ser ejercidas por el poseedor en cualquier momento de la vida del contrato. En el caso de las opciones Europeas, éstas pueden ser ejercidas únicamente en el vencimiento. Las opciones Asiáticas a diferencia de las Americanas y las Europeas tienen la peculiaridad de que el esquema de pagos depende del promedio de precios del subyacente durante un periodo específico de tiempo.

Posición y esquema de pagos en las opciones

En cada contrato de opciones existen dos esquemas de pagos; de un lado se encuentra aquel inversionista que ha adquirido la posición larga y del otro lado el que asume la posición corta. La diferencia yace en que el primero adquiere el contrato mientras que el otro le vende el contrato a la posición larga. La posición corta vende el contrato en un inicio, sin embargo, es posible que adquiera responsabilidades en un futuro. La utilidad del emisor es el inverso de la utilidad del comprador. Existen cuatro tipos diferentes de posiciones en los contratos de opciones:

- a) La posición larga en una opción *call*
- b) La posición corta en una opción *call*
- c) La posición larga en una opción *put*
- d) La posición corta en una opción *put*

Las opciones Europeas se representan usualmente en términos del esquema de pagos para el comprador del título (posición larga). El precio inicial pagado por ad-

quirir el contrato, es decir, la prima que se paga para adquirir la opción no se incluye como parte del cálculo.

Definición 1.1.8. Esquemas de pagos de opciones europeas

Sean S_T el precio al tiempo final T y K el precio de ejercicio de la opción (*strike price*) entonces,

- a) El esquema de pagos de la posición larga de una opción *call* europea es

$$\max(S_T - K, 0) = (S_T - K, 0)^+$$

(La opción se ejercerá sí, y sólo si, $S_T > K$)

- b) El esquema de pagos de la posición corta de una opción *call* europea es

$$-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0) = (K - S_T, 0)^-$$

(La opción se ejercerá sí, y sólo si, $S_T \leq K$)

- c) El esquema de pagos de la posición larga de una opción *put* europea es

$$\max(K - S_T, 0) = (K - S_T, 0)^+$$

- d) El esquema de pagos de la posición corta de una opción *put* europea es

$$-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0) = (S_T - K, 0)^-$$

1.1.3 Fórmula de Black–Scholes–Merton

Para obtener el precio de una opción *call* Europea con Black–Scholes–Merton (BSM), se asumirá que la volatilidad σ y la tasa de interés r son constantes y, se tomará el esquema de pagos del derivado como $V_T = (S_T - K)^+$.

De acuerdo con [Shreve II], para deducir la fórmula BSM deben de cumplirse las siguientes condiciones,

- a) El precio de la acción sigue un MB geométrico

- b) Se permite la venta en corto de activos financieros con el uso completo de las utilidades generadas
- c) La opción puede ser replicada por un portafolio autofinanciable compuesto por uninstrumento libre de riesgo y por el subyacente de la acción
- d) No existen costos de transacción o impuestos. Todos los activos son preferentemente divisibles
- e) No existen dividendos, es decir, el instrumento subyacente no paga dividendos durante la vida del derivado
- f) No existen oportunidades de arbitraje
- g) La negociación de activos financieros en el mercado es continua
- h) La tasa libre de riesgo es constante a través del tiempo

Se dice que un portafolio es autofinanciable si el cambio en su valor solo depende de los cambios en los precios de sus componentes y no del de sus cantidades.

Ejemplo 1.1.1. En la Figura 1.1.1 se muestra la gráfica de las densidades unidimensionales del movimiento browniano geométrico para instantes $t \in [0, 5]$.

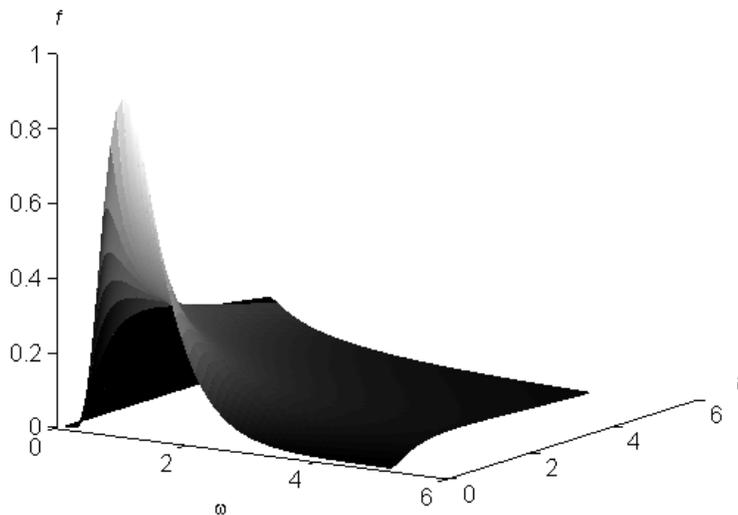


Fig. 1.1.1: Gráfica de la densidad del movimiento browniano geométrico con parámetros $r = 1$ y $\sigma = 1$.

Teorema 1.1.3. Fórmula de Black–Scholes–Merton

Sean S_t un MB geométrico con tasa promedio de rendimiento r , volatilidad $\sigma > 0$ y precio inicial del activo financiero $S_0 > 0$. Para una constante $K > 0$, existe una función $c : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua que es solución de la EDP

$$r c(t, x) = D_0^1 c(t, x) + r x D_1^1 c(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 D_1^2 c(t, x)$$

para todo $t \in [0, T)$ y toda $x \geq 0$, llamada ecuación diferencial parcial de Black–Scholes–Merton sujeta a la condición inicial,

$$c(T, x) = (x - K)^+$$

más aún,

$$\begin{aligned} c(t, S_t) &= \mathbb{E} \left[\exp \{-r T\} (S_{T-t} - K)^+ \right] \\ &= S_0 \Phi(d_+(T-t, S_0)) - K \exp \{-r(T-t)\} \Phi(d_-(T-t, S_0)) \end{aligned}$$

donde,

Φ es la función de distribución $\mathcal{N}(0, 1)$ y,

$$\begin{aligned} d_{\pm}(T-t, S_0) &= d_+(T-t, S_0) \\ &= d_-(T-t, S_0) + \sigma \sqrt{T-t} \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \left[\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r \pm \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right]. \end{aligned}$$

K es el precio ejercido del instrumento derivado (*strike price*) y, puede interpretarse como el precio pactado para comprar o vender el subyacente a la fecha de ejercicio.

T representa la fecha de expiración del contrato.

Demostración:

Sea S_t un MB geométrico, es decir, para $\mu, \sigma > 0$ constantes,

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \sigma \tilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\}$$



Fischer S. Black
(1938-1995)

Economista norteamericano. En su paso por la física las matemáticas, llegó a las computadoras y la inteligencia artificial. Comparte el crédito con Scholes por sus trabajos para calcular el precio de las opciones financieras.

de donde,

$$\begin{aligned} S_T &= S_t \exp \left\{ \sigma \left(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t \right) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau \right\} \\ &= S_t \exp \left\{ -\sigma \sqrt{\tau} Y + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau \right\} \end{aligned}$$

donde, $\tau = T - t$, es decir, el tiempo que falta para la expiración, \tilde{W}_t es un MB en el sentido del teorema de Girsanov bajo la medida neutral al riesgo \tilde{P} y Y es una VA $N(0, 1)$ definida por,

$$Y = \frac{\tilde{W}_T - \tilde{W}_t}{\sqrt{T - t}}$$

Nótese que S_T es el producto de la VA S_t , la cual es \mathcal{F}_t -medible, y la variable,

$$\exp \left\{ -\sigma \sqrt{\tau} Y + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau \right\}$$

la cual es independiente de \mathcal{F}_t . Entonces,

$$\begin{aligned} c(t, x) &= \tilde{\mathbb{E}} \left[\exp \{-r \tau\} \left(x \exp \left\{ -\sigma \sqrt{\tau} Y + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau \right\} - K \right)^+ \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp \{-r \tau\} \left(x \exp \left\{ -\sigma \sqrt{\tau} y + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau \right\} - K \right)^+ dy \end{aligned}$$

donde, $\tilde{\mathbb{E}}$ es la esperanza bajo la medida neutral al riesgo y, el integrando,

$$\left(x \exp \left\{ -\sigma \sqrt{\tau} y + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau \right\} - K \right)^+$$

es positivo sí, y sólo si,

$$y < d_-(\tau, x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \left[\ln \left(\frac{x}{K} \right) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau \right]$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau, x)} \exp \{-r \tau\} \left(x \exp \left\{ -\sigma \sqrt{\tau} y + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau \right\} - K \right) \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^2 \right\} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau, x)} x \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^2 - \sigma \sqrt{\tau} y - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau \right\} dy \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau, x)} \exp \{-r \tau\} K \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^2 \right\} dy \end{aligned}$$



Myron S. Scholes
(1941-)

Matemático, economista y abogado canadiense. Recibió el Premio Nobel de Economía en 1997, compartido con Robert C. Merton, por sus trabajos para calcular el precio de las opciones financieras.

$$\begin{aligned}
&= x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y + \sigma \sqrt{\tau})^2 \right\} dy - \exp \{-r \tau\} K N(d_-(\tau, x)) \\
&= x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x) + \sigma \sqrt{\tau}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^2 \right\} dz - \exp \{-r \tau\} K N(d_-(\tau, x)) \\
&= x N(d_+(\tau, x)) - \exp \{-r \tau\} K N(d_-(\tau, x))
\end{aligned}$$

Si denotamos,

$$BSM(\tau, x, K, r, \sigma) = \tilde{\mathbb{E}} \left[\exp \{-r \tau\} \left(x \exp \left\{ -\sigma \sqrt{\tau} Y + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \tau \right\} - K \right)^+ \right]$$

entonces,

$$BSM(\tau, x, K, r, \sigma) = x N(d_+(\tau, x)) - \exp \{-r \tau\} K N(d_-(\tau, x))$$

es la fórmula BSM con parámetros τ, x, K, r y σ . ■

Ejemplo 1.1.2. En la Figura 1.1.2 se muestra la gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial de Black–Scholes con parámetros $T = 10, K = 0.5, r = 1$ y $\sigma = 1$. Si bien no es posible apreciarlo con claridad, en este caso el estado no estacionario sucede en una vecindad de $[t, \sigma_0]$ cercana a $[0, 1] \times [0, 1]$. Esta situación resulta de interés ya que proporciona la idea de cómo se comporta el sistema en períodos cortos, lo cual es de vital importancia en la materia que ocupa, el mundo financiero. Antedicho es una motivación a pretender visualizar más cercanamente el fenómeno, por lo que en la Figura 1.1.3 se presenta un acercamiento de la 1.1.2 en el dominio propuesto con anterioridad. En dicho acercamiento puede observarse la tendencia fluctuante, tal vez caótica, en la evolución temprana del sistema.

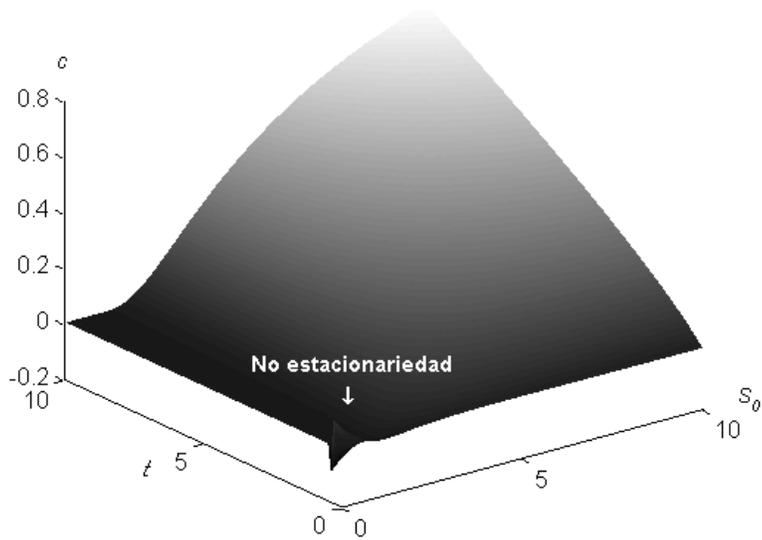


Fig. 1.1.2: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes con parámetros $T = 10, K = 0.5, r = 1$ y $\sigma = 1$.

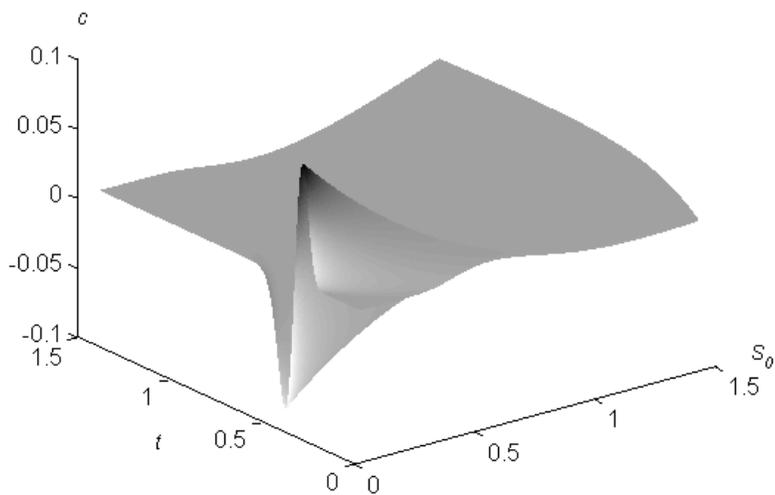


Fig. 1.1.3: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en su estado no estacionario, con parámetros $T = 10, K = 0.5, r = 1$ y $\sigma = 1$.

DISTRIBUCIÓN DEL PRECIO DE UN ACTIVO
CON PARÁMETRO DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICO

2.1 MODELOS DE PRECIO CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

El precio de un activo es un proceso $\{P_t\}_{t \geq 0}$ que satisface la ecuación diferencial estocástica,

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma_t P_t dW_t^1 \quad (2.1.1)$$

donde μ es una constante, W_t^1 es un proceso de Wiener y σ_t es la volatilidad.

La volatilidad σ_t puede ser una función determinista, constante, o bien, un proceso estocástico $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$. Cuando es un proceso estocástico, puede ser sólo un proceso de saltos o una difusión de Itô, cuyo caso será el de nuestro interés en adelante.

Puesto que la EDE que gobierna al precio es lineal, su solución tiene la forma,

$$P_t = P_0 \exp \left\{ \int_0^t \mu - \frac{1}{2} \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^1 \right\} \quad (2.1.2)$$

donde P_0 es la condición inicial.

Generalmente, se supone que la volatilidad es de la forma $\sigma_t = f(Y_t)$, donde f es una función positiva e $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ un proceso que usualmente es la solución de una ecuación diferencial estocástica de la forma,

$$dY_t = \delta (\theta - Y_t) dt + k \rho dW_t^1 + k \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \quad (2.1.3)$$

de donde, se dice que es un proceso de reversión a la media. Donde δ , θ y k son constantes que denotan la tasa de reversión a la media, el nivel medio a largo plazo y

la volatilidad de la volatilidad, respectivamente. El término de deriva de la EDE que gobierna a la volatilidad implica que el proceso solución Y_t tenga una distribución límite (cuando $t \rightarrow \infty$) cuyo valor esperado es θ , es decir, el comportamiento asintótico del proceso O–U. $\{W_t^2\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Wiener correlacionado con $\{W_t^1\}_{t \geq 0}$.

A priori, la correlación entre los dos procesos de Wiener puede depender del tiempo, pero aquí se supondrá constante, será denotado por $\rho \in [-1, 1]$ e interpretado como el coeficiente de correlación instantáneo definido por la variación cruzada de W_1 y W_2 , $(W^1, W^2) = \rho t$.

A continuación se describen tres situaciones comunes en las que el proceso $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ es de interés, aunque por supuesto existen más.

1. Cuando es la solución de una EDE lineal con coeficientes constantes

$$dY_t = c_1 Y_t dt + c_2 Y_t dW_t^2$$

bajo estas condiciones, se dice que $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso lognormal.

2. Cuando $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso O–U,

$$dY_t = \delta (\theta - Y_t) dt + k dW_t^2$$

3. Cuando $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Cox–Ingersoll–Ross (CIR), es decir, la solución de la EDE,

$$dY_t = \delta (\theta - Y_t) dt + k \sqrt{Y_t} dW_t^2$$

Ejemplo 2.1.1. Gráfica de la densidad de la volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando ésta sigue un proceso O–U para tiempos $t \in [0, 10]$ con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

Ejemplo 2.1.2. En la Figura 2.1.2 se muestra la gráfica de 100 trayectorias del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O–U para tiempos $t \in [0, 1]$, con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

Ejemplo 2.1.3. Gráfica comparativa del histograma y la distribución teórica del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O–U al tiempo $t = 1$, con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

Ejemplo 2.1.4. En la Tabla 2.1.1 se enlistan algunos modelos de volatilidad estocástica mencionando entre otras cosas, el valor de la correlación instantánea ρ y la función $f(Y)$.

Tabla 2.1.1: Algunos modelos de volatilidad estocástica

Autor y Referencia	Correlación	Función f	$\{Y_t\}_{t \geq 0}$
[Hull J]	$\rho = 0$	$f(Y) = \sqrt{Y}$	Lognormal
[Scott L O]	$\rho = 0$	$f(Y) = e^Y$	O-U
[Stein E]	$\rho = 0$	$f(Y) = Y$	O-U
[Ball C]	$\rho = 0$	$f(Y) = \sqrt{Y}$	CIR
[Heston S]	$\rho \neq 0$	$f(Y) = \sqrt{Y}$	CIR
[Bormetti]	$\rho \neq 0$	$f(Y) = e^Y$	O-U
	$\rho \neq 0$	$f(Y) = Y $	O-U

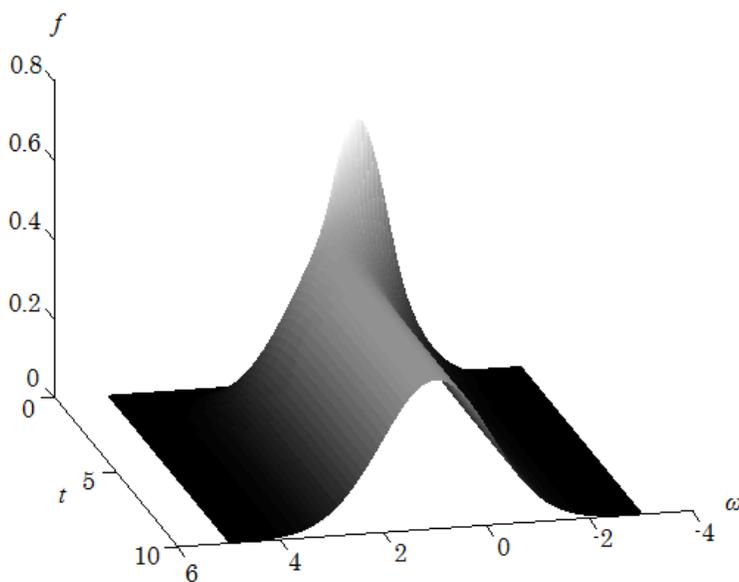


Fig. 2.1.1: Gráfica de la densidad de la volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando ésta sigue un proceso O-U para tiempos $t \in [0, 10]$ con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

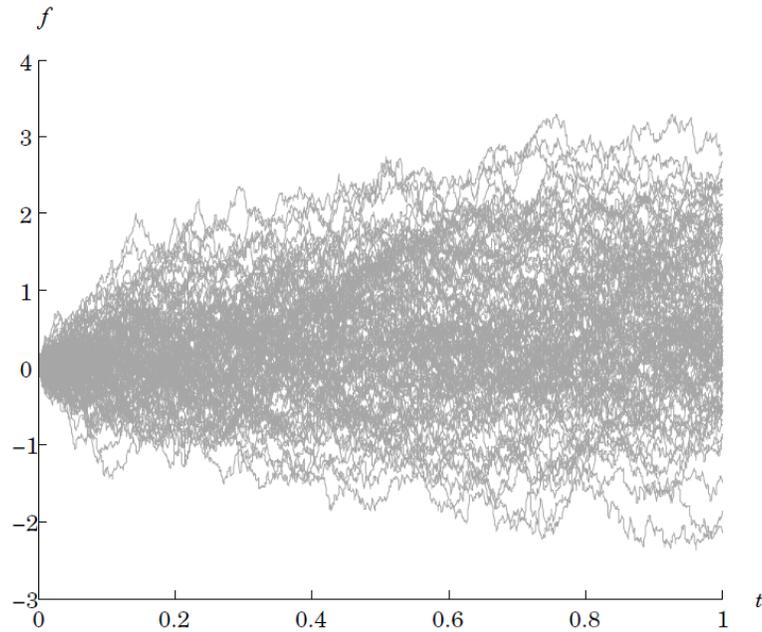


Fig. 2.1.2: Gráfica de 100 trayectorias del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O-U para tiempos $t \in [0, 1]$, con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

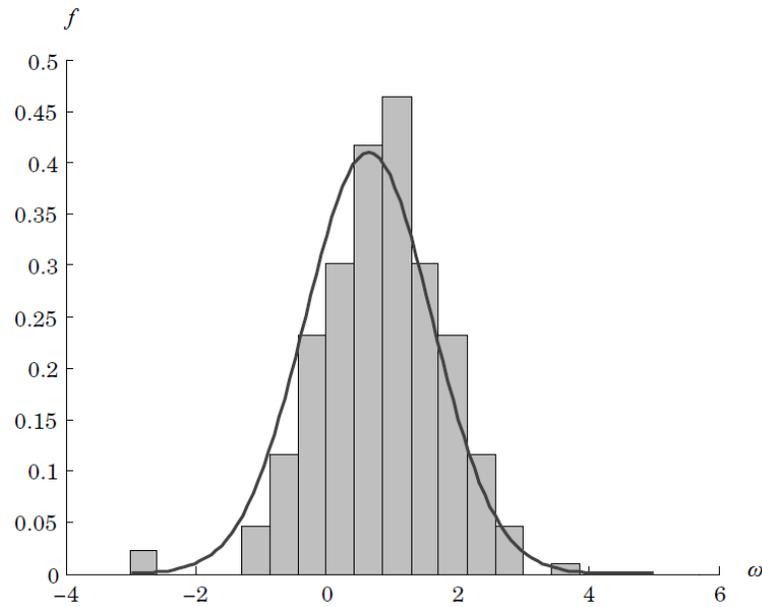


Fig. 2.1.3: Comparación entre el histograma y la distribución teórica del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O-U al tiempo $t = 1$, con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

2.2 DISTRIBUCIÓN DEL PRECIO DE UN ACTIVO

Siguiendo a [Stein E], la distribución del precio de un activo cuando este sigue un proceso de Itô con parámetro de volatilidad estocástico de la forma O-U es descrita por las dos siguientes EDE,

$$dP_t(\mu, \sigma_t) = \mu P_t(\mu, \sigma_t) dt + \sigma_t P_t(\mu, \sigma_t) dW_t^1 \quad (2.2.1)$$

$$d\sigma_t(\delta, \theta, k) = \delta (\theta - \sigma_t) dt + k dW_t^2 \quad (2.2.2)$$

donde, $P_t(\mu, \sigma_t)$ y $\sigma_t(\delta, \theta, k)$ son los procesos de precio y de volatilidad del activo respectivamente; μ, δ, θ y k constantes y, W_t^1 y W_t^2 procesos de Weiner independientes.

En lo sucesivo se omitirá la dependencia que tiene σ_t de δ, θ y k , salvo cuando sea necesario.

Dado que la EDE que describe a la volatilidad está gobernada por un proceso O-U,[†] σ_t en su forma explícita es,

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \sigma_0 \exp\{-\delta t\} + \theta (1 - \exp\{-\delta t\}) \\ &+ k \int_0^t \exp\{-\delta (t-s)\} dW_s^2 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

mientras que para encontrar la solución de la que describe al precio, se puede recurrir al método de separación de variables.[‡] Es decir, resolver la EDE equivalente,

$$\frac{1}{P_t(\mu, \sigma_t)} dP_t(\mu, \sigma_t) = \mu dt + \sigma_t dW_t^1 \quad (2.2.4)$$

aplicando la fórmula de Itô (Teorema D.1.1) al proceso con la función $f(x) = \ln\{x\}$.

Así, se tiene que,

$$P_t(\mu, \sigma_t) = P_0(\mu, \sigma_0) \exp\left\{\int_0^t \mu - \frac{1}{2} \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^1\right\} \quad (2.2.5)$$

En particular, cuando $\mu = 0$,

$$P_t(0, \sigma_t) = P_0(0, \sigma_0) \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^1\right\} \quad (2.2.6)$$

[†] Véase Apéndice C

[‡] Véase Apéndice E

Si además se define $P_t^H(\sigma_t) = P_t(\mu, \sigma_t)$ para toda t y se supone que $P_0^H(\sigma_0) = 1$ entonces,

$$P_t^0(\sigma_t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^1 \right\} \quad (2.2.7)$$

Observación 2.2.1. Nótese que, $\ln \{P_t^0(\sigma_t)\} = -\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s dW_s^1$.

A continuación se harán algunas deducciones sobre la distribución de $P_t^0(\sigma_t)$ dependiendo del comportamiento de σ_t .

Caso 1. σ_t constante

Si σ_t es constante, en cuyo caso simplemente se denotará como σ entonces,

a) $\ln \{P_t^0(\sigma)\}$ tiene distribución $\mathcal{N} \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 t, \sigma^2 t \right)^\dagger$

b) $P_t^0(\sigma)$ tiene distribución *Lognormal* $\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 t, \sigma^2 t \right)^\ddagger$

c) Para $p > 0$, la densidad de $P_t^0(\sigma)$ es,

$$f_{P_t^0}^*(p, \sigma) = \frac{1}{p \sigma \sqrt{2 \pi t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \{p\} + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}} \right)^2 \right\} \quad (2.2.8)$$

Caso 2. σ_t determinista

Análogamente al caso 1,

a) $\ln \{P_t^0(\sigma_t)\}$ tiene distribución $\mathcal{N} \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds, \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)^\dagger$

b) $P_t^0(\sigma_t)$ tiene distribución

$$\text{Lognormal} \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds, \int_0^t \sigma_s^2 ds \right)^\ddagger$$

† Véase Teorema A.8.1.

‡ Véase Apéndice B

c) Para $p > 0$, la densidad de $P_t^0(\sigma_t)$ es,

$$f_{P_t^0}^{**}(p, \sigma) = \frac{1}{p \sqrt{2 \pi \int_0^t \sigma_s^2 ds}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \{p\} + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds}{\sqrt{\int_0^t \sigma_s^2 ds}} \right)^2 \right\} \quad (2.2.9)$$

Observación 2.2.2. Si se define $\alpha_t = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \sigma_s^2 ds}$ entonces, $f_{P_t^0}^*(p, \alpha_t) = f_{P_t^0}^{**}(p, \sigma)$.

Caso 3. σ_t estocástico (O-U)

Para el caso de que σ_t es estocástico, se debe hacer la siguiente observación importante: σ_t puede mirarse como un proceso autorregresivo de orden 1 (AR1) y por tanto puede escribirse $\sigma_t = \sigma_t(\omega)$, es decir, la ω - *trayectoria* asociada al proceso, para cada $\omega \in \Omega$. En este caso, α_t (como se definió en la observación 2.2.2) es estocástica, es decir $\alpha_t = \alpha_t(\omega)$.

Por lo tanto, análogamente al caso 2, la densidad del precio al tiempo t queda determinada por,

$$f_{P_t^0}(p, \sigma) = \mathbb{E} \left[f_{P_t^0}^*(p, \alpha_t) \right]$$

y será probado en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. Densidad del precio cuando $\mu = 0$

La densidad del precio cuando es un proceso que satisface a las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2) cuando $\mu = 0$ está dada por,

$$f_{P_t^0}(p, \sigma) = \mathbb{E} \left[f_{P_t^0}^*(p, \alpha_t) \right] \quad (2.2.10)$$

donde f^* es como en la ecuación (2.2.8) y α_t como se describe en el caso 3.

Demostración:

Suponiendo que α_t tiene densidad $m_{\alpha_t}(\sigma)$, se tiene que para $a < b$,

$$P(a < \alpha_t < b) = \int_a^b m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma \quad (2.2.11)$$

Esto implica que, para alguna función G ,

$$\mathbb{E}[G \circ \alpha_t] = \int_0^\infty G(\sigma) m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma \quad (2.2.12)$$

y por la ecuación (2.2.10),

$$f_{P_t^0}(p, \sigma) = \int_0^\infty f_{P_t^0}^*(p, \sigma) m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma \quad (2.2.13)$$

La afirmación (2.2.13) dice que la distribución deseada es una mezcla de lognormales, promediada a través de la distribución de mezcla m_{α_t} . La llave a esto es la función generadora de momentos de una variable aleatoria Y

$$M_Y(\tau) = \mathbb{E}[\exp\{\tau Y\}]$$

y si Y tiene densidad ϕ_Y entonces

$$M_Y(\tau) = \mathbb{E}[\exp\{\tau Y\}] = \int_{-\infty}^\infty \exp\{\tau y\} \phi_Y(y) dy$$

notando que

$$\mathcal{L}\{\phi_Y(y)\} = M_Y(-\tau) = \int_{-\infty}^\infty \exp\{-\tau y\} \phi_Y(y) dy$$

es la transformada de Laplace bilateral de ϕ_Y .

Luego, si $Y = \alpha_t^2$ entonces,

$$I(\lambda) = \mathbb{E}[\exp\{-\lambda \alpha_t^2\}] = \int_0^\infty \exp\{-\lambda \sigma^2\} m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma \quad (2.2.14)$$

y recordando que el objetivo es obtener $f_{P_t^0}(p, \sigma)$, se puede hacer uso de que para cada $t \geq 0$, si $X_t = \ln\{P_t^0\}$ entonces las densidades de P_t^0 y X_t están relacionadas por $f_{P_t^0}(p, \sigma) = \frac{1}{p} f_{X_t}(\ln\{p\}, \sigma) = \frac{1}{\exp\{x\}} f_{X_t}(x, \sigma)$. Por lo tanto, es suficiente encontrar $f_{X_t}(x, \sigma)$ para conocer $f_{P_t^0}(p, \sigma)$.

Ahora, con el lema G.1.1 en mano, puede deducirse la fórmula exacta de $f_{P_t^0}(p, \sigma)$ a partir de las ecuaciones (2.2.8) y (2.2.13) haciendo uso de la transformada de Fourier de la función f_{X_t} y de su respectiva transformada inversa.

Bajo el entendido de que $f_{X_t}(x) = f_{X_t}(x, \sigma)$, si g_t denota a la transformada de Fourier de f_{X_t} entonces,

$$g_t(\xi) = \int_{-\infty}^\infty \exp\{i x \xi\} f_{X_t}(x) dx \quad (2.2.15)$$

$$f_{X_t}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp\{-i x \xi\} g_t(\xi) d\xi \quad (2.2.16)$$

Recordando que $f_{X_t}(x) = p f_{p_t^0}(p, \sigma)$, $x = \ln\{p\}$ y usando las ecuaciones (2.2.13) y (2.2.8), se tiene que la ecuación de la transformada inversa de Fourier de f_{X_t} (2.2.16) se puede representar como,

$$\begin{aligned}
 f_{X_t}(x) &= p f_{p_t^0}(p, \sigma) \\
 &= p \int_0^\infty f_{p_t^0}^*(p, \sigma) m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma \\
 &= p \int_0^\infty \frac{1}{p \sigma \sqrt{2 \pi t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\{p\} + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}} \right)^2 \right\} m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma \quad (2.2.17) \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}} \right)^2 \right\} m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma
 \end{aligned}$$

Ahora, aplicando la fórmula de la transformada de Fourier (2.2.15) a f_{X_t} , el teorema de Fubini y reorganizando términos se obtiene,

$$\begin{aligned}
 g_t(\xi) &= \int_0^\infty m_{\alpha_t}(\sigma) \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi t}} \right. \\
 &\quad \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{2x + \sigma^2 t}{2 \sigma \sqrt{2t}} \right)^2 + i x \xi \right\} dx \left. \right\} d\sigma \quad (2.2.18)
 \end{aligned}$$

donde,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi t}} \exp \left\{ -\left(\frac{2x + \sigma^2 t}{2 \sigma \sqrt{2t}} \right)^2 + i x \xi \right\} dx \quad (2.2.19)$$

es la transformada de Fourier de,

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sigma \sqrt{t}} \right)^2 \right\} \quad (2.2.20)$$

y dicha transformada de Fourier (2.2.19) es igual a $\exp \left\{ -\frac{1}{2} (\xi^2 + i \xi) \sigma^2 t \right\}$.[†]

Por lo tanto, la ecuación (2.2.18) puede ser escrita como,

$$g_t(\xi) = \int_0^\infty m_{\alpha_t}(\sigma) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\xi^2 + i \xi) \sigma^2 t \right\} d\sigma \quad (2.2.21)$$

[†] Véase apéndice F.

Ahora, tomando a la ecuación (2.2.14) en su forma,

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \exp\{-\lambda \sigma^2\} m_{\alpha_t}(\sigma) d\sigma$$

puede notarse que ésta implica que la ecuación (2.2.21) puede ser reexpresada como,

$$g_t(\xi) = I\left(\frac{1}{2}(\xi^2 + i\xi)t\right) \quad (2.2.22)$$

Ahora bien, ya que en el lema G.1.1 se exhibe la forma explícita de $I(\lambda)$, entonces ya es posible calcular la transformada inversa de Fourier (2.2.16) para obtener finalmente a f_{X_t} .

Aplicando la fórmula de inversión de Fourier (2.2.16) a $g_t(\xi)$ de la ecuación (2.2.22) se tiene que,

$$f_{X_t}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp\{-i x \xi\} I\left(\frac{1}{2}(\xi^2 + i\xi)t\right) d\xi \quad (2.2.23)$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = \gamma - \frac{i}{2}$, se tiene que $\xi^2 + i\xi = \gamma^2 + \frac{1}{4}$ y que $\exp\{-i x \xi\} = \exp\{-i x \gamma\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} x\right\}$. Al aplicar este hecho a la fórmula de la ecuación (2.2.23) (lo cual implica un cambio de eje en el plano complejo) se tiene que,

$$f_{X_t}(x) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\right\} \int_{-\infty}^\infty \exp\{-i x \gamma\} I\left(\frac{1}{2}\left(\gamma^2 + \frac{1}{4}\right)t\right) d\gamma \quad (2.2.24)$$

Por lo tanto, $f_{P_t^0}(p, \sigma) = \frac{1}{p} f_{X_t}(\ln\{p\})$ es la densidad exacta de P_t^0 , la cual en su forma explícita es,

$$f_{P_t^0}(p, \sigma) = \frac{1}{2\pi p^{3/2}} \int_{-\infty}^\infty \exp\{i \ln\{p\} \gamma\} I\left(\frac{1}{2}\left(\gamma^2 + \frac{1}{4}\right)t\right) d\gamma$$

■

En vista de esta densidad, deducir la densidad exacta de $P_t^\mu(\sigma_t)$ es sólo cuestión de unos pocos pasos más.

Si se realiza el cociente de las EDP (2.2.5) y (2.2.7) se tiene que,

$$\frac{P_t^\mu(\sigma_t)}{P_t^0(\sigma_t)} = \exp\{\mu t\} \quad (2.2.25)$$

por lo que,

$$P_t^\mu(\sigma_t) = \exp\{\mu t\} P_t^0(\sigma_t) \quad (2.2.26)$$

Dado que para cada t , $P_t^\mu(\sigma_t)$ es una *v.a.* y ya que $\exp\{\mu t\} \geq 0$ para toda t , la tan deseada densidad exacta de $P_t^\mu(\sigma_t)$ queda determinada por

$$f_{P_t^\mu}(p, \sigma) = \frac{1}{\exp\{\mu t\}} f_{P_t^0}\left(\frac{p}{\exp\{\mu t\}}, \sigma\right) \quad (2.2.27)$$

O bien, omitiendo pero sin olvidar la dependencia que tiene el precio P_t , de la volatilidad σ_t , su densidad puede expresarse como,

$$f_{P_t^\mu}(p) = \frac{1}{\exp\{\mu t\}} f_{P_t^0}\left(\frac{p}{\exp\{\mu t\}}\right) \quad (2.2.28)$$

Ejemplo 2.2.1. En la Figura 2.2.1 puede observarse el histograma de frecuencias relativas de una muestra de tamaño 500 del proceso del precio al tiempo $t = 1$ con $\mu = 1$ y parámetros de la volatilidad O-U, $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$. Análogamente, en la Figura 2.2.2, el histograma de una muestra de tamaño 5000.

Ejemplo 2.2.2. En la Figura 2.2.3 se presentan 500 trayectorias del proceso de precios en $t \in [0, 1]$, con $\mu = 1$ y parámetros de la volatilidad O-U, $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$. Análogamente, en la Figura 2.2.7, 5000 trayectorias del proceso de precios.

Ejemplo 2.2.3. La Figura 2.2.4 simplemente muestra un acercamiento de la gráfica de la Figura 2.2.3 respecto del rango de las trayectorias de $[0, 120]$ a $[0, 10]$. De igual manera, en la Figura 2.2.8, un acercamiento de la Figura 2.2.7 respecto del rango de las trayectorias de $[0, 500]$ a $[0, 10]$.

Ejemplo 2.2.4. En la Figura 2.2.5 se muestra la gráfica de 5000 trayectorias del proceso de volatilidad O-U que se usó para calcular el proceso de precios. Parámetros: $t \in [0, 1]$, $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

Ejemplo 2.2.5. Gráfica comparativa del histograma de una muestra de tamaño 5000 y la distribución teórica del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ al tiempo $t = 1$, con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

2 DISTRIBUCIÓN DEL PRECIO CON VOLATILIDAD ORNSTEIN–ULHENBECK

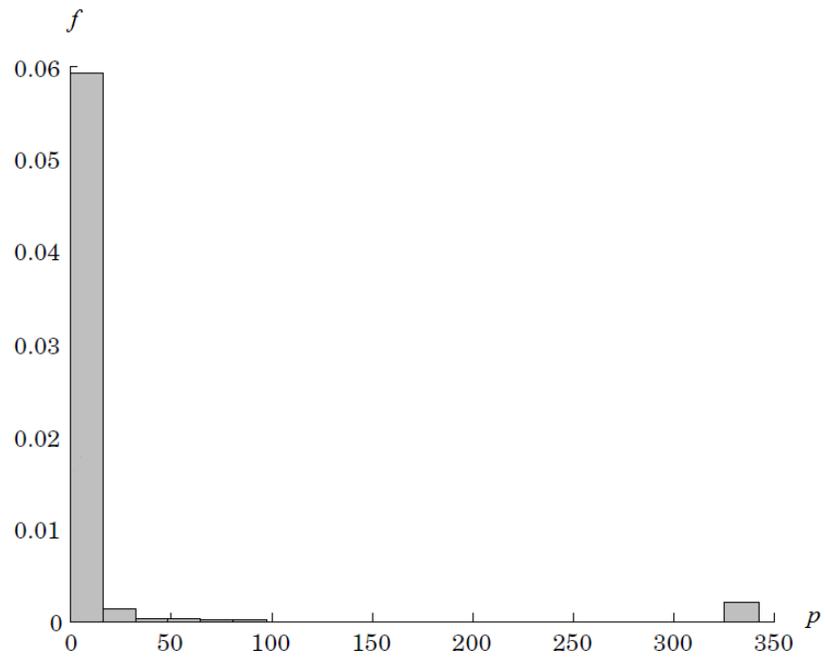


Fig. 2.2.1: Histograma de frecuencias relativas de una muestra de tamaño 1000 del proceso del precio al tiempo $t = 1$ con $\mu = 1$ y parámetros de la volatilidad O–U, $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

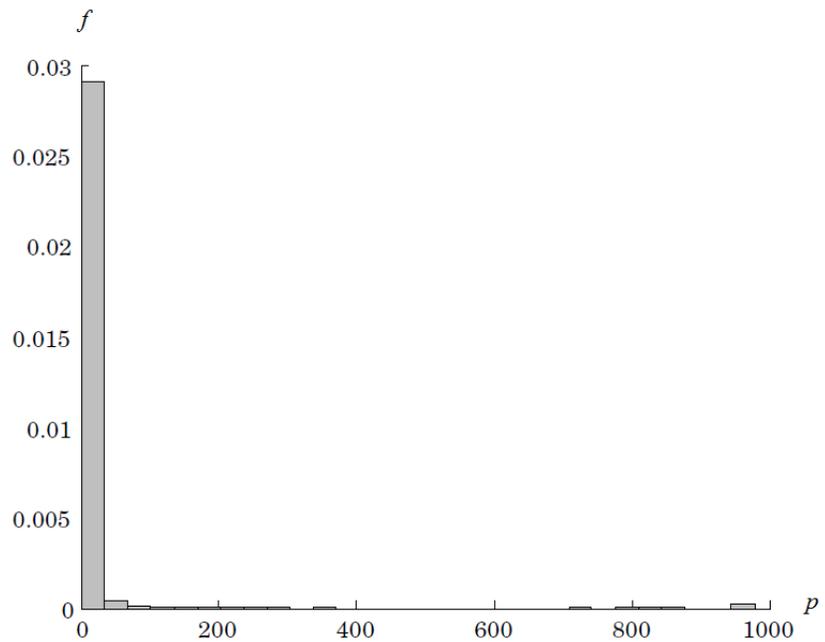


Fig. 2.2.2: Histograma de frecuencias relativas de una muestra de tamaño 5000 del proceso del precio al tiempo $t = 1$ con $\mu = 1$ y parámetros de la volatilidad O–U, $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

2.2 Distribución del precio de un activo

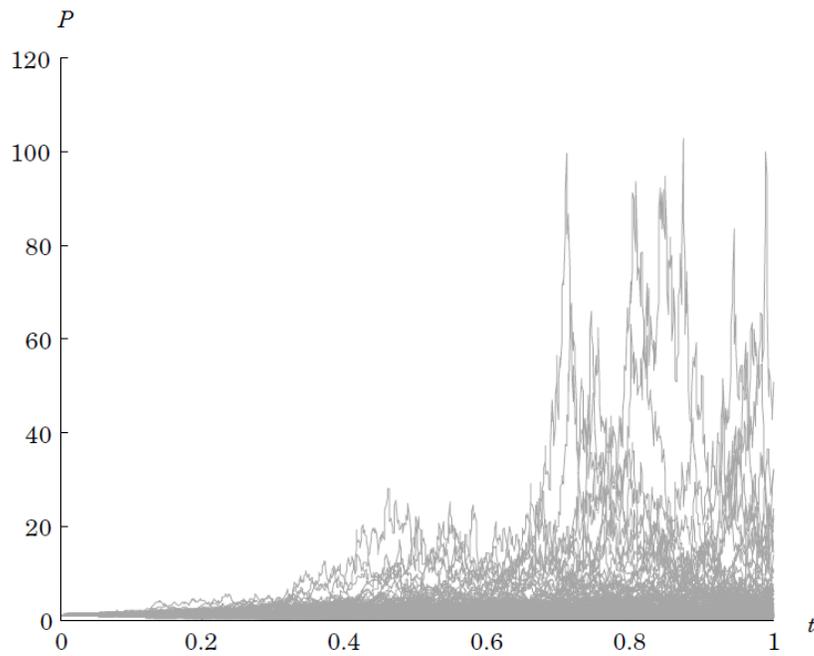


Fig. 2.2.3: Gráfica de 500 trayectorias del proceso de precios P en $t \in [0, 1]$, con $\mu = 1$ y parámetros de la volatilidad O-U, $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

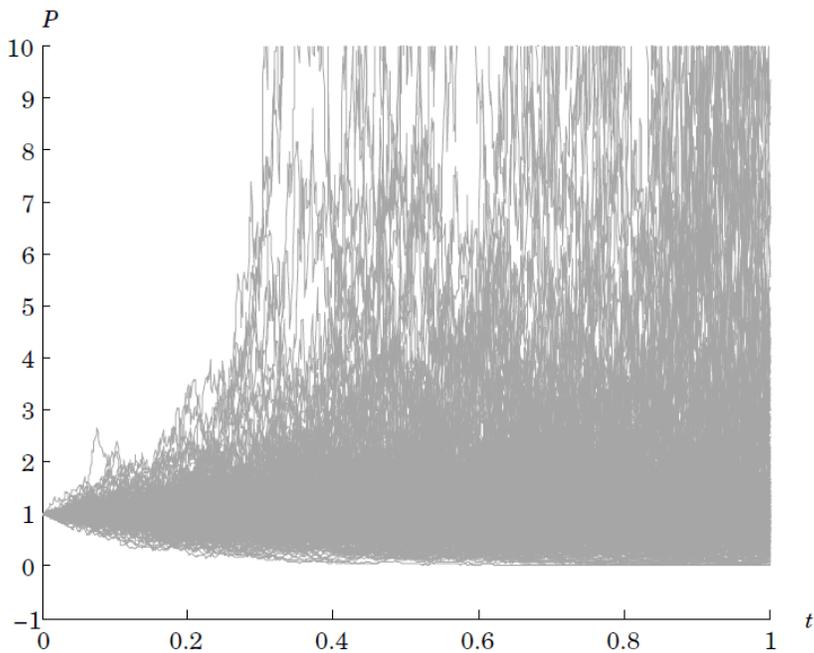


Fig. 2.2.4: Acercamiento de la gráfica de la Figura 2.2.3 en el rango de precios $[0, 10]$.

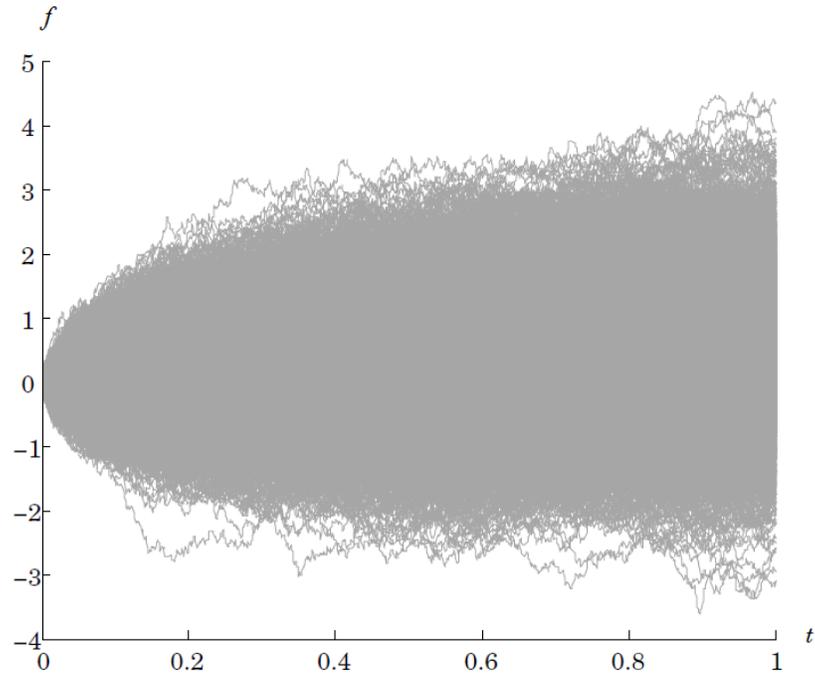


Fig. 2.2.5: Gráfica de 5000 trayectorias del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O-U para tiempos $t \in [0, 1]$, con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

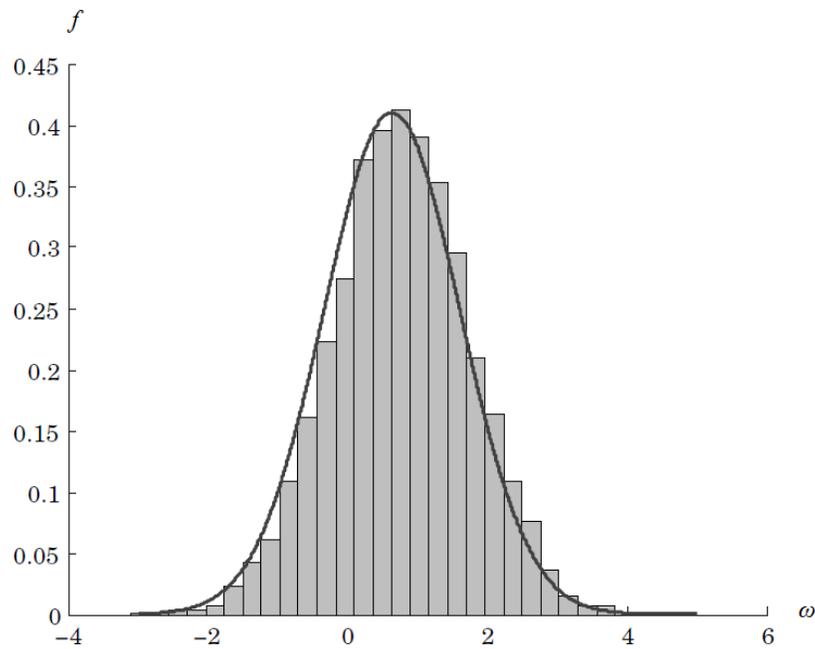


Fig. 2.2.6: Comparación entre el histograma y la distribución teórica del proceso de volatilidad $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ cuando es de O-U al tiempo $t = 1$, con $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

2.2 Distribución del precio de un activo

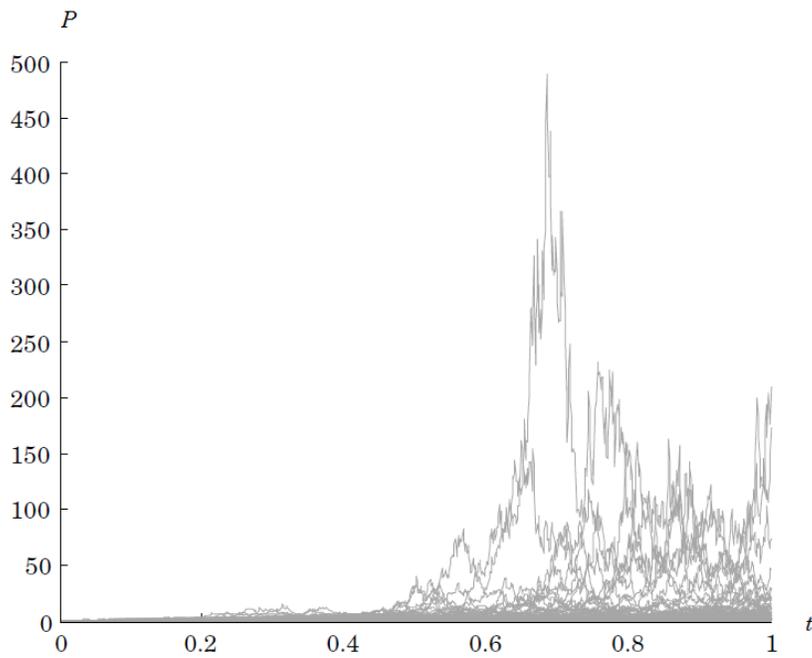


Fig. 2.2.7: Gráfica de 5000 trayectorias del proceso de precios P en $t \in [0,1]$, con $\mu = 1$ y parámetros de la volatilidad O-U, $\delta = 1.0$, $\theta = 1.0$, $k = 1.5$ y $\sigma_0 = 0.0$.

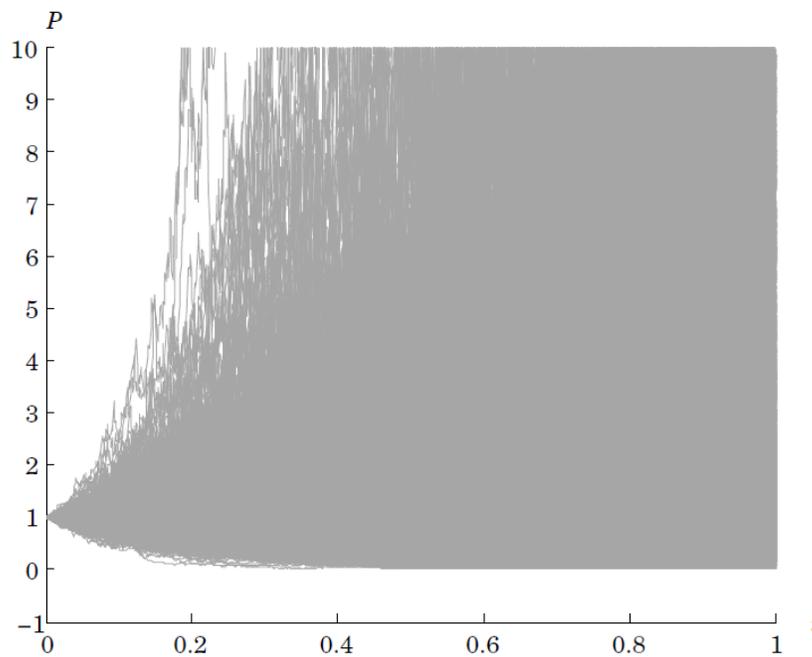


Fig. 2.2.8: Acercaamiento de la gráfica de la Figura 2.2.7 en el rango de precios $[0,10]$.

ROBUSTEZ DEL MODELO DE DENSIDAD

Uno de los resultados más relevantes respecto de la densidad del precio es que es un modelo robusto al no depender de casos restrictivos acerca de los parámetros que definen tanto al proceso del precio como al de la volatilidad. Ésto se debe al comportamiento de la funcional $I(\lambda)$ y será exhibido en la siguiente sección.

3.1 ROBUSTEZ DEL MODELO DE DENSIDAD

Teorema 3.1.1. Comportamiento asintótico de $I(\lambda)$

Para cada $\lambda \geq 0$ y toda $\sigma_0 \geq 0$, la funcional $I(\lambda) = \exp\left\{\frac{1}{2} L \sigma_0^2 + M \sigma_0 + N\right\}$ es decreciente a través del tiempo.

Demostración:

Es suficiente demostrar que $\frac{1}{2} L \sigma_0^2 + M \sigma_0 + N \leq 0$ para toda t y cada λ , para lo cual basta probar que $L, M, N \leq 0$.

1. $L \leq 0$ para toda t y cada λ

a) L es continua

b) $L(0) = 0$

c) $\lim_{t \rightarrow \infty} L \leq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Prueba : } \lim_{t \rightarrow \infty} L &= \lim_{t \rightarrow \infty} -A - a \tanh \{a k^2 t + z_0\} \\
 &= -A - a \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh \{a k^2 t + z_0\} \xrightarrow{1} \\
 &= -A - a \leq 0
 \end{aligned}$$

d) $L' \leq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Prueba : } L' &= \frac{d}{dt} -A - a \tanh \{a k^2 t + z_0\} \\
 &= -a \underbrace{\frac{d}{dt} \tanh \{a k^2 t + z_0\}}_{\geq 0} \leq 0
 \end{aligned}$$

Para cada $\lambda \geq 0$, a) y d) $\Rightarrow L$ es decreciente para toda $t \geq 0$. Luego, b), c) y L decreciente $\Rightarrow L \leq 0$ para toda $t \geq 0$.

Ejemplo 3.1.1. En la Figura 3.1.1 se muestra la trayectoria de L con la definición de parámetros: $\delta = 1, \theta = 1, \lambda = 1$ y $k = 1$.

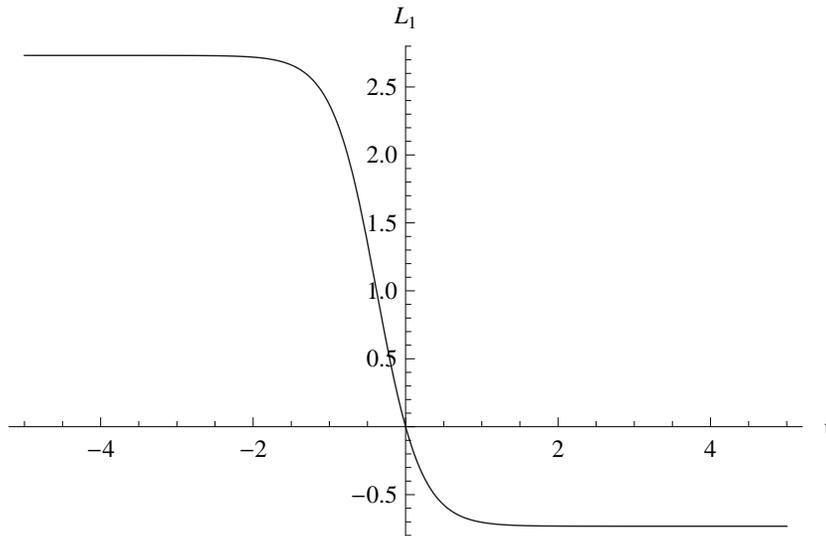


Fig. 3.1.1: Gráfica de L con parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \lambda = 1$ y $k = 1$.

2. $M \leq 0$ para toda t y cada λ

a) M es continua

b) $M(0) = 0$

$$c) \lim_{t \rightarrow \infty} M \leq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Prueba : } \lim_{t \rightarrow \infty} M &= \lim_{t \rightarrow \infty} -B + B b \tanh \{a k^2 t + z_0\} + C_M \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \\ &= -B + B b \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh \{a k^2 t + z_0\} \xrightarrow{1} \\ &\quad + C_M \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \xrightarrow{0} \\ &= B(b-1) \leq 0 \end{aligned}$$

$$d) M' \leq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Prueba : } 0 \geq M' &= \frac{d}{dt} -B + B b \tanh \{a k^2 t + z_0\} + C_M \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \\ &= B b \frac{d}{dt} \tanh \{a k^2 t + z_0\} + C_M \frac{d}{dt} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \\ &= B b a k^2 \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\} \\ &\quad - C_M a k^2 \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \tanh \{a k^2 t + z_0\} \end{aligned}$$

sí, y sólo sí,

$$\begin{aligned} C_M a k^2 \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \tanh \{a k^2 t + z_0\} &\geq B b a k^2 \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\} \\ C_M \tanh \{a k^2 t + z_0\} &\geq B b \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \\ C_M \operatorname{senh} \{a k^2 t + z_0\} &\geq B b \\ B(1-b^2) \cosh \{z_0\} \operatorname{senh} \{a k^2 t + z_0\} &\geq B b \\ \cosh \{z_0\} \operatorname{senh} \{a k^2 t + z_0\} &\geq \frac{b}{1-b^2} \end{aligned}$$

Por supuesto, esta desigualdad debe de ser analizada en $t \in [0, \infty)$. Para ello, supóngase que $\cosh \{z_0\} \operatorname{senh} \{a k^2 t + z_0\} < \frac{b}{1-b^2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Por un lado, } \frac{b}{1-b^2} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \cosh \{z_0\} \operatorname{senh} \{a k^2 t + z_0\} \\ &= \min_{t \in [0, \infty)} \cosh \{z_0\} \operatorname{senh} \{a k^2 t + z_0\} \\ &< \frac{b}{1-b^2} \quad \#C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Por el otro, } +\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} \cosh \{z_0\} \sinh \{a k^2 t + z_0\} \\
 &= \sup_{t \in [0, \infty)} \cosh \{z_0\} \sinh \{a k^2 t + z_0\} \\
 &< \frac{b}{1 - b^2} \#_C
 \end{aligned}$$

Para cada $\lambda \geq 0$, a) y d) $\Rightarrow M$ es decreciente para toda $t \geq 0$. Luego, b), c) y M decreciente $\Rightarrow M \leq 0$ para toda $t \geq 0$.

Ejemplo 3.1.2. En la Figura 3.1.2 se muestra la trayectoria de M con la definición de parámetros: $\delta = 1, \theta = 1, \lambda = 1$ y $k = 1$.

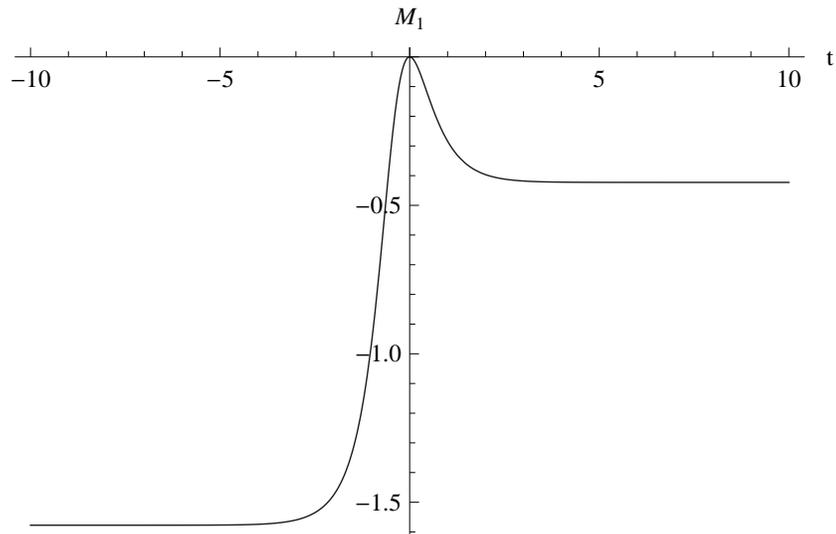


Fig. 3.1.2: Gráfica de M con parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \lambda = 1$ y $k = 1$.

3. $N \leq 0$ para toda t y cada λ

a) N es continua

b) $N(0) = 0$

c) $\lim_{t \rightarrow \infty} N \leq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Prueba : } \lim_{t \rightarrow \infty} N &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B^2 b^2}{2 a} z_0 + k^2 \left(\frac{B_2 (b^2 - 1) + A}{2} \right) t \\
 &+ \left(\frac{c_M^2 - B^2 b^2}{2 a} \right) \tanh \{a k^2 t + z_0\} \\
 &- \frac{B b c_M}{a} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \\
 &- \frac{1}{2} \ln \{ \cosh \{a k^2 t + z_0\} \} - c_N \\
 &= \frac{B^2 b^2}{2 a} z_0 + k^2 \underbrace{\left(\frac{B_2 (b^2 - 1) + A}{2} \right)}_{\leq 0} \lim_{t \rightarrow \infty} t \\
 &+ \left(\frac{c_M^2 - B^2 b^2}{2 a} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh \{a k^2 t + z_0\} \xrightarrow{1} \\
 &- \frac{B b c_M}{a} \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \xrightarrow{0} \\
 &- \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \{ \cosh \{a k^2 t + z_0\} \} - c_N \xrightarrow{\infty} = -\infty
 \end{aligned}$$

d) $N' \leq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Prueba : } 0 \geq N' &= -k^2 \left(\frac{B^2 + A}{2} \right) + \frac{B^2 b^2 k^2}{2} \tanh^2 \{a k^2 t + z_0\} \\
 &+ \frac{c_M^2 k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\} \\
 &- \frac{B b c_M}{a} \frac{d}{dt} \left[\operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \right] \\
 &- \frac{a k^2}{2} \tanh \{a k^2 t + z_0\}
 \end{aligned}$$

sí, y sólo sí,

$$\begin{aligned}
 &k^2 \left(\frac{B^2 + A}{2} \right) + \frac{a k^2}{2} \tanh \{a k^2 t + z_0\} + \frac{B b c_M}{a} \frac{d}{dt} \left[\operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \right] \\
 &\geq \frac{B^2 b^2 k^2}{2} \tanh^2 \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M^2 k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\}
 \end{aligned}$$

sí, y sólo sí,

$$\begin{aligned}
 & k^2 \left(\frac{B^2 + A}{2} \right) + \frac{a k^2}{2} \min_{t \in [0, \infty)} \tanh \{a k^2 t + z_0\} \\
 & \geq \frac{B^2 b^2 k^2}{2} \max_{t \in [0, \infty)} \tanh^2 \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M^2 k^2}{2} \max_{t \in [0, \infty)} \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\} \\
 & \quad + \max_{t \in [0, \infty)} -\frac{B b c_M}{a} \frac{d}{dt} \left[\operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \right]
 \end{aligned}$$

sí, y sólo sí,

$$\begin{aligned}
 k^2 \left(\frac{B^2 + A}{2} \right) + \frac{a k^2}{2} b & \geq \frac{B^2 b^2 k^2}{2} + \frac{c_M^2 k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \{z_0\} + \frac{B b c_M k^2}{2} \\
 B^2 + A + a b & \geq B^2 b^2 + B^2 (1 - b^2)^2 + B^2 b (1 - b^2) \cosh \{z_0\} \\
 B^2 & \geq B^2 b^2 + B^2 (1 - b^2)^2 + B^2 b (1 - b^2) \cosh \{z_0\} \\
 1 & \geq b^2 + (1 - b^2)^2 + b (1 - b^2) \cosh \{z_0\}
 \end{aligned}$$

y se puede verificar la veracidad de esta desigualdad.

Para cada $\lambda \geq 0$, a) y d) $\Rightarrow N$ es decreciente para toda $t \geq 0$. Luego, b), c) y N decreciente $\Rightarrow N \leq 0$ para toda $t \geq 0$.

Por lo tanto, $\frac{1}{2} L \sigma_0^2 + M \sigma_0 + N \leq 0$ para toda t y cada λ .

Ejemplo 3.1.3. En la Figura 3.1.3 se muestra la trayectoria de N con la definición de parámetros: $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\lambda = 1$ y $k = 1$.

Ejemplo 3.1.4. En la Figura 3.1.4 se muestra una familia de gráficas de I como función de σ_0 para instantes $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, manteniendo fija a $\lambda = 1$ y parámetros: $\delta = 1$, $\theta = 1$ y $k = 1$.

Ejemplo 3.1.5. En la Figura 3.1.5 se muestra una familia de gráficas de $I(\lambda)$ para instantes $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, y $k = 1$, manteniendo constante a $\sigma_0 = 1$.

■

3.1 Robustez del modelo de densidad

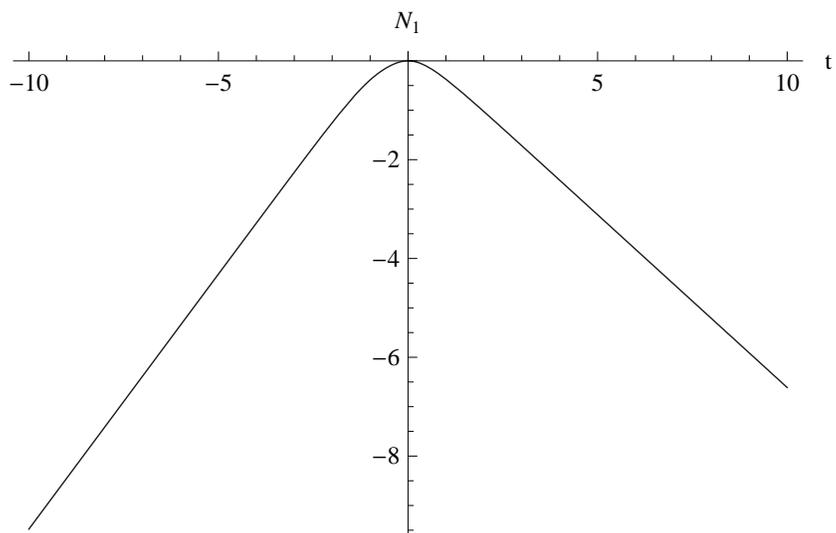


Fig. 3.1.3: Gráfica de N con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\lambda = 1$ y $k = 1$.

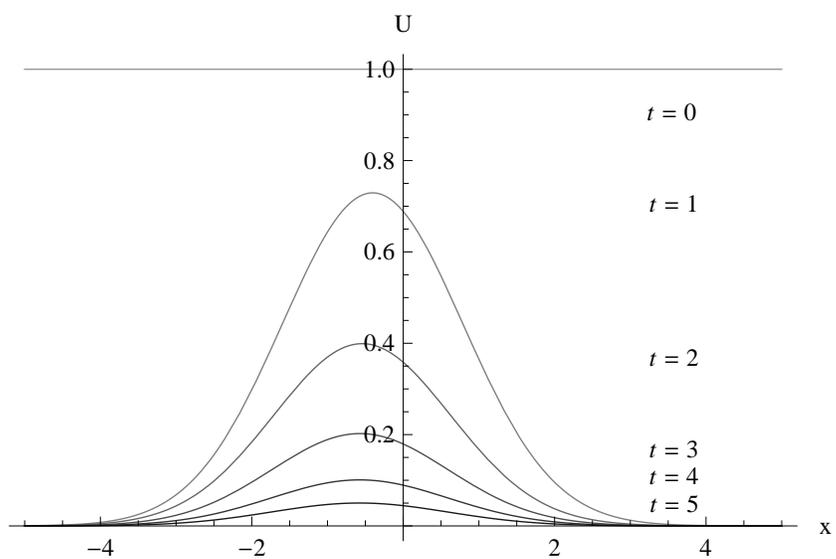


Fig. 3.1.4: Familia de gráficas de $u(x)$ para tiempos $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\lambda = 1$ y $k = 1$.

3 ROBUSTEZ DEL MODELO DE DENSIDAD

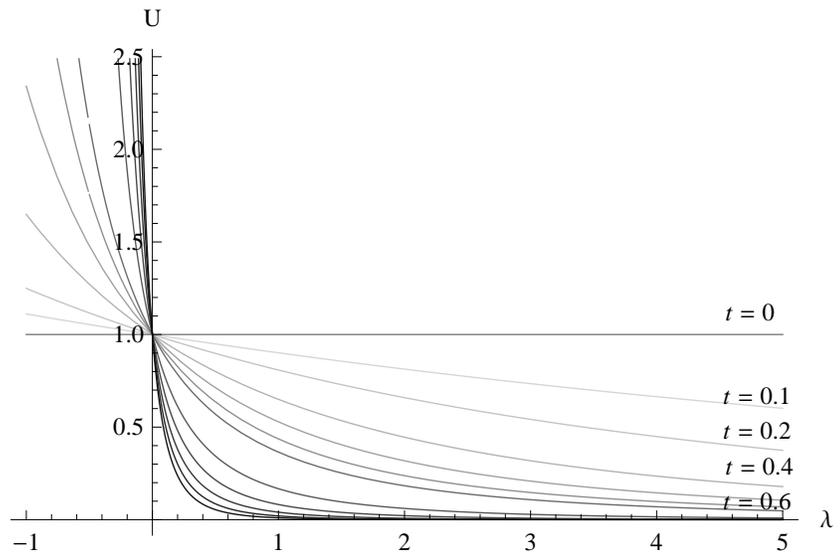


Fig. 3.1.5: Familia de gráficas de la función $u(\lambda)$ manteniendo constante la variable espacial en $\sigma_0 = 1$, con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $k = 1$ y tiempos $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

CONCLUSIONES

Cuando el proceso de precios de un activo financiero sigue un proceso de Itô que depende intrínsecamente de un parámetro de volatilidad estocástico de tipo Ornstein Ulhenbeck, es posible encontrar, de forma cerrada, a la densidad de probabilidad de dicho proceso, tal como se desarrolla en la Sección 2.2 del Capítulo 2. Cabe resaltar que a pesar de que los cálculos para llegar a ella resultan una tarea tediosa, la expresión resultante depende netamente de funcionales que, aunque parecen complicadas, son deterministas.

Un resultado realmente relevante respecto de la densidad del precio es que es un modelo robusto, al no depender de casos restrictivos acerca de los parámetros que definen tanto al proceso del precio como al de la volatilidad, siempre que la condición inicial del proceso de volatilidad Ornstein–Ulhenbeck sea constante y no negativa. Ésto se debe al comportamiento de la funcional $I(\lambda)$, esquema desarrollado en el Capítulo 3.

Por otro lado, las simulaciones numéricas fueron de gran utilidad para adquirir una primera impresión tanto del comportamiento de los procesos estocásticos como de las funciones que, aunque deterministas, es prácticamente imposible pretender predecir su tendencia, dada la complejidad de su naturaleza.

Es imprescindible enfatizar que, a pesar de que encontró una forma explícita de la densidad del precio, ninguno de los software utilizados para el trato numérico de los distintos problemas a los que se debe de enfrentar en el camino para llegar al objetivo de este trabajo, fue capaz de calcular la integral que define a la ya antes mencionada densidad y por supuesto, tampoco de graficar. El primer intento se hizo en la plataforma Mathematica, y la razón es que proporciona gráficos de excelente calidad; su resultado fue: no es posible calcular la expresión de forma explícita. La segunda opción, fue la plataforma Matlab, apelando al gran soporte numérico que proporcio-

CONCLUSIONES

na y sacrificando calidad de los gráficos que muestra, no obstante, el resultado que arrojó fue el mismo. En ambos casos, se abordó el problema de programación de tres maneras diferentes, una fue ejecutando una rutina para discretizar la integral en cuestión; la segunda, pidiendo directamente el cálculo de la integral; la tercer opción, aplicando la rutina interna que las dos paqueterías poseen para calcular transformadas de Fourier. Por tales motivos, la representación gráfica de la tan mencionada densidad simplemente fue aproximada por histogramas de frecuencia relativa.

De manera global, se concluyó satisfactoriamente el objetivo de esta tesis al haber desarrollado la vía para el cálculo de la densidad del precio en el enfoque propuesto por [Stein E]. Más aún, propiamente se desarrollo un exhaustivo análisis sobre las funcionales que componen a la misma, probando la robustez del modelo.



CONCEPTOS BÁSICOS: DEFINICIONES Y TEOREMAS

A.1 ESPACIOS Y FUNCIONES MEDIBLES

Definición A.1.1. σ – álgebra

Sean Ω un conjunto y \mathcal{F} una familia de subconjuntos de Ω .

a) Se dice que \mathcal{F} es una σ – álgebra si,

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii) Dado $A \in \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$ donde, A^c es el complemento de A

iii) $\bigcup A_i \in \mathcal{F}$, siempre que, $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$

b) Se dice que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ es *sub* – σ – álgebra de \mathcal{F} si, por si misma, es una σ – álgebra

Teorema A.1.1. Propiedades de una σ – álgebra \mathcal{F}

a) Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $A \Delta B$ también son elementos de \mathcal{F}

b) Si Ω es un conjunto y \mathcal{F}_i una colección arbitraria de σ – álgebras en Ω entonces, $\bigcap \mathcal{F}_i$ también es una σ – álgebra en Ω

La propiedad b) permite definir la σ – álgebra generada por una familia arbitraria de subconjuntos de Ω .

Demostración: Véase [Shreve II, Capítulo 1].

■

Definición A.1.2. σ – álgebra generada por una familia de conjuntos

Dada \mathcal{P} , una familia arbitraria de subconjuntos de Ω , la σ – álgebra generada por \mathcal{P} , denotada por $\sigma(\mathcal{P})$ es,

$$\sigma(\mathcal{P}) = \bigcap \{ \mathcal{D} : \mathcal{P} \subset \mathcal{D} \text{ y es } \sigma\text{-álgebra} \}$$

dicho de otra manera, $\sigma(\mathcal{P})$ es la intersección de todas las σ – álgebras que contienen a \mathcal{P} , o bien, es la menor σ – álgebra que contiene a \mathcal{P} .

Si $\Omega = \mathbb{R}$ y \mathcal{P} es la familia de todos los intervalos de \mathbb{R} entonces, $\sigma(\mathcal{P})$ es la llamada σ – álgebra de Borel en \mathbb{R} , denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y, sus elementos son llamados conjuntos de Borel en \mathbb{R} .

Definición A.1.3. Tiempos de paro

Sea $\{\mathcal{F}_t\}$ una familia creciente de σ – álgebras en Ω . Una función $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ es llamada un tiempo de paro con respecto de $\{\mathcal{F}_t\}$ si,

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

para todo $t \geq 0$.

Definición A.1.4. Espacio medible

Si \mathcal{F} es una σ – álgebra de subconjuntos de Ω entonces, se dice que (Ω, \mathcal{F}) es un espacio medible.

Definición A.1.5. Medibilidad de una función

Sean (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es medible respecto de \mathcal{F} , o que es \mathcal{F} – medible si, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

A.2 MEDIDAS Y ESPACIOS DE PROBABILIDAD

Definición A.2.1. Medida de probabilidad

Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible. Una medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) es una función $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ tal que,

- a) $P(\emptyset) = 0$
- b) $P(\Omega) = 1$
- c) Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ son mutuamente excluyentes (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) entonces, $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$

Teorema A.2.1. Propiedades de medidas de probabilidad

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces,

- a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si, $A \cap B = \emptyset$
- b) $P(A) \leq P(B)$ y $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ si, $A \subset B$
- c) $P(A^c) = 1 - P(A)$
- d) Sean $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ tales que, $A_i \subset A_j$ siempre que, $i < j$. Si $A = \cup A_i$ entonces, $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$
- e) Sean $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ tales que, $A_i \supset A_j$ siempre que, $i < j$. Si $A = \cap A_i$ entonces, $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

Demostración: Véase [Shreve I, Capítulo 1, pp.1-7] y [Shreve II, Apéndice A, pp.527].

■

Definición A.2.2. Espacio de probabilidad

Un espacio de probabilidad es una terna (Ω, \mathcal{F}, P) con (Ω, \mathcal{F}) espacio medible y P medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) . En este caso, los elementos de (Ω, \mathcal{F}, P) se llaman eventos.

A.3 VARIABLES ALEATORIAS

Definición A.3.1. Variables aleatorias y eventos

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad.

- a) Una variable aleatoria (VA) es una función $X : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ \mathcal{F} -medible donde, \mathcal{E} es llamado espacio de estados

- b) Para cada $E \in \sigma(\mathcal{E})$ se dice que, $\{X \in E\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\}$ es un evento.
 Cuando $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$

Definición A.3.2. σ – álgebra generada por variables aleatorias

Dada $\{X_i\}$, una familia de VA en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , la σ – álgebra generada por $\{X_i\}$ es la intersección de todas las σ – álgebras que hacen medible a X_i , para toda i . La σ – álgebra generada por $\{X_i\}$ se denota por $\sigma(\{X_i\})$.

Definición A.3.3. Independencia respecto de σ – álgebras

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Entonces,

- a) Se dice que $A \subset \mathcal{F}$ y $B \subset \mathcal{F}$ son independientes si,

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

- b) Una colección $A = \{\mathcal{H}_i : \mathcal{H}_i \text{ es sub-}\sigma\text{-álgebra de } \mathcal{F}\}$ es independiente si, para cualquier combinación $H_{i1} \in \mathcal{H}_{i1}, \dots, H_{ik} \in \mathcal{H}_{ik}$ se tiene que,

$$P(H_{i1} \cap \dots \cap H_{ik}) = P(H_{i1}) \dots P(H_{ik})$$

- c) Se dice que $\{X_i\}$, una colección de VA es independiente si, la colección

$$A = \{\mathcal{H}_i : \mathcal{H}_i \text{ es sub-}\sigma\text{-álgebra de } \mathcal{F}\}$$

es independiente, donde $\mathcal{H}_i = \sigma(X_i)$

- d) Una VA X es independiente de una sub- σ – álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ si, \mathcal{G} y $\sigma(X)$ son independientes

- e) Si $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son VA independientes entonces,

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$$

siempre que, $\mathbb{E}[X] < \infty$ y $\mathbb{E}[Y] < \infty$

A.4 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Definición A.4.1. Proceso estocástico

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $X_t : \Omega \rightarrow E$ una VA. Entonces,

- a) Un proceso estocástico (PE) a tiempo discreto es una sucesión $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$
- b) Un PE a tiempo continuo es una familia $\{X_t\}_{t \geq 0}$

Dado $\{X_t\}$, un PE a tiempo continuo o discreto, para cada $\omega \in \Omega$, $\{X_t(\omega)\}$ es llamada la trayectoria del proceso asociada a ω , o bien, la ω – *trayectoria* del proceso.

Definición A.4.2. Filtración

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Entonces,

- a) Una filtración a tiempo discreto es una sucesión $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ tal que,
 - i) Para cada $t \in \mathbb{N}$, \mathcal{F}_t es una σ – álgebra
 - ii) $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1} \subset \mathcal{F}$, para todo $t \in \mathbb{N}$
- b) Una filtración a tiempo continuo es una familia $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ tal que,
 - i) Para cada $t \geq 0$, \mathcal{F}_t es una σ – álgebra
 - ii) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ siempre que, $0 \leq s < t$

Definición A.4.3. Filtración generada por un proceso estocástico

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Entonces,

- a) Dado $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, un PE a tiempo discreto, la filtración generada por el proceso es $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ y se define por $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_0, X_1, \dots, X_t\})$
- b) Dado $\{X_t\}_{t \geq 0}$, un PE a tiempo continuo, la filtración generada por el proceso es $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ y se define por $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s : 0 \leq s < t\})$

Definición A.4.4. Proceso adaptado a una filtración

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, $\{X_t\}$ un PE y $\{\mathcal{F}_t\}$ una filtración. Se dice que, el proceso está adaptado a la filtración si, para cada t , la VA X_t es medible respecto de la σ – álgebra \mathcal{F}_t .

Definición A.4.5. Propiedad de Markov

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un PE adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Se dice que, el proceso cumple la propiedad de Markov, o bien, que el proceso es de Markov si,

para cada $s, t \geq 0$ y para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que,

$$P(X_{t+s} \in B \mid \mathcal{F}_t) = P(X_{t+s} \in B \mid X_t)$$

o bien, si para $0 \leq s \leq t \leq T$ y cualquier función f Borel - medible y no negativa, existe una función g Borel - medible tal que,

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = g(X_s)$$

A.5 MARTINGALAS, SUBMARTINGALAS Y SUPERMARTINGALAS

Definición A.5.1. Martingalas, Submartingalas y Supermartingalas

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y para $0 \leq t \leq T$, una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ y un proceso $\{X_t\}$ adaptado.

- a) $\{X_t\}$ es una martingala si, para todos $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$$

(el proceso no tiene tendencia a crecer ni decrecer)

- b) $\{X_t\}$ es una submartingala si, para todos $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$$

(el proceso tiene tendencia a crecer)

- c) $\{X_t\}$ es una supermartingala si, para todos $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$$

(el proceso tiene tendencia a decrecer)



Andréi A. Márkov
(1903-1979)

Nacido en en Riazán, Rusia, Andréi A. Márkov fue un matemático conocido por sus trabajos en la teoría de números y en la de probabilidad. Su aportación más conocida es su trabajo teórico en el campo de los procesos en los que están involucrados componentes aleatorios (procesos estocásticos) y que daría fruto en un instrumento matemático que actualmente se conoce como cadena de Márkov.

A.6 MOVIMIENTO BROWNIANO

Definición A.6.1. Movimiento Browniano o Proceso de Weiner

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ una filtración y $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ un PE. Se dice que W es un movimiento browniano (MB) o proceso de Weiner respecto de $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si,

- a) Para cada $t \geq 0$, W_t es \mathcal{F}_t -medible
- b) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ siempre que, $0 \leq s < t$
- c) $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s siempre que, $0 \leq s < t$
- d) $W_0 = 0$
- e) Existe $A \in \mathcal{F}$ tal que, $P(A) = 0$ y $W_t(\omega)$ es continua, para toda $\omega \notin A$

Teorema A.6.1. Propiedades del movimiento Browniano

Si W es un MB entonces,

- a) Para cada $t \geq 0$, $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
- b) W tiene incrementos independientes
- c) Para cada k tal que, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$, $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_k}) \sim \mathcal{N}(0, C)$ donde, $C(i, j) = \min\{t_i, t_j\} = t_i \wedge t_j$

Demostración: Véase [Shreve II, Capítulo 3, pp.93-97]. ■

Teorema A.6.2. Propiedad de Markov del movimiento Browniano

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un MB respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función Borel-medible y acotada entonces, existe una función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-medible tal que, para tiempos $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}[g \circ W_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[g \circ W_t \mid W_s] = h \circ W_s$$

donde,

$$h(a) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{(t-s)}\right\}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} dx$$

Demostración: Véase [Shreve II, Capítulo 3, pp.107]. ■



Robert Brown
(1773-1858)

Médico, cirujano y botánico escocés. Observó diminutas partículas con vacuolas en los granos de polen ejecutando un continuo movimiento aleatorio. Luego observó el mismo movimiento en partículas de polvo. Él mismo no pudo dar una explicación de ese movimiento, denominado ms tarde movimiento browniano.

Teorema A.6.3. Propiedad de martingala del movimiento Browniano

El movimiento Browniano es una martingala respecto de la filtración que genera.

Demostración: Véase [Shreve II, Capítulo 3, pp.98]. ■

Definición A.6.2. Movimiento Browniano geométrico

Sean X_t un PE y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un MB respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Para $\mu, \sigma > 0$ constantes, el *movimiento Browniano geométrico* se define como,

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

o bien,

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\}$$

el cual es el modelo de precios de activos usado en la fórmula de *Black–Scholes–Merton* para valuación de opciones.



Norbert Wiener
(1894-1964)

Matemático estadounidense, conocido como el fundador de la cibernética. Trabajó en el movimiento browniano, la integral de Fourier, el problema de Dirichlet, el análisis armónico y en los teoremas tauberianos, entre otros problemas. Ganó el premio Bôcher en 1933.

A.7 FUNCIONES DE TRANSICIÓN

Definición A.7.1. Función de transición

Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y p_t una función, para $t \geq 0$. La función p_t es llamada función de transición de Markov si, se cumplen las siguientes condiciones,

- a) $p_t(x, \cdot)$ es una medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) , para cada $t \geq 0$ y cada $x \in \Omega$
- b) $p_t(\cdot, A)$ es una función \mathcal{F} – medible, para cada $t \geq 0$ y cada $A \in \mathcal{F}$
- c) $p_0(x, A) = 1_A(x)$, para cada $x \in \Omega$ y cada $A \in \mathcal{F}$
- d) Para todas $s, t \geq 0$, cada $x, y \in \Omega$ y cada $A \in \mathcal{F}$,

$$p_{s+t}(x, A) = \int_{\Omega} p_t(x, dy) p_s(y, A)$$

Se debe interpretar a $p_t(x, A)$ como la probabilidad de que un proceso que se encuentra en el estado $x \in \Omega$ al tiempo s , continúe en A al tiempo $s + t$.

La propiedad d) es conocida como *La Ecuación de Chapman–Kolmogorov*, y es justamente la propiedad principal, ya que refleja la *no memoria* del proceso.

A.8 PROCESOS DE ITÔ

Definición A.8.1. Proceso de Itô

Un PE $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un Proceso de Itô o difusión si, existen $\{u_t\}_{t \geq 0}$ y $\{v_t\}_{t \geq 0}$ PE tales que,

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dW_s$$

en su forma integral donde, W_s es un MB, u_s es llamado el término de deriva y v_s el de difusión.

O bien, en su forma diferencial,

$$dX_t = u_t dt + v_t dW_t$$

llamada ecuación diferencial estocástica (EDE), con X_0 la condición inicial.

Teorema A.8.1. Difusiones como procesos gaussianos

Una difusión $\{X_t\}_{t \geq 0}$ con coeficientes de deriva y difusión deterministas, es un PE Gaussiano con funciones de media $\mathbb{E}[X_t]$ y covarianza $Cov(X_s, X_t)$ tales que,

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu_0 + \int_0^t u_r dr \text{ y } Cov(X_s, X_t) = \int_0^{t \wedge s} v_r^2 dr$$

Obsérvese que,

$$X_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, 0), \int_0^t u_r dr \sim \mathcal{N}\left(\int_0^t u_r dr, 0\right) \text{ y } \int_0^t v_r dW_r \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t |v_r|^2 dr\right)$$

Demostración: Véase []

■



*Andréi Kolmogórov
(1903-1987)*

Matemático ruso que hizo progresos importantes en campos de la teoría de probabilidad y de la topología.

B

LA DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

La distribución Lognormal es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria cuyo logaritmo está normalmente distribuido. Es decir, si X es una variable aleatoria con una distribución normal, entonces $\exp\{X\}$ tiene una distribución Lognormal.

La base de una función logarítmica no es importante, ya que $\text{Log}_a\{X\}$ está distribuida normalmente si y sólo si $\text{Log}_b\{X\}$ está distribuida normalmente, sólo se diferencian en un factor constante.

Una variable puede ser modelada como Lognormal si puede ser considerada como un producto multiplicativo de muchos pequeños factores independientes. Un ejemplo típico es un retorno a largo plazo de una inversión: puede considerarse como un producto de muchos retornos diarios.

B.1 LA DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

Definición B.1.1. Distribución Lognormal

Se dice que una VA Y tiene distribución Lognormal si la VA $X = \ln\{Y\}$ tiene distribución Normal.

Si los parámetros de la distribución de X son μ y σ^2 , es decir, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces, $Y \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$.

Ejemplo B.1.1. En la Figura B.1.1 se muestra la densidad Lognormal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

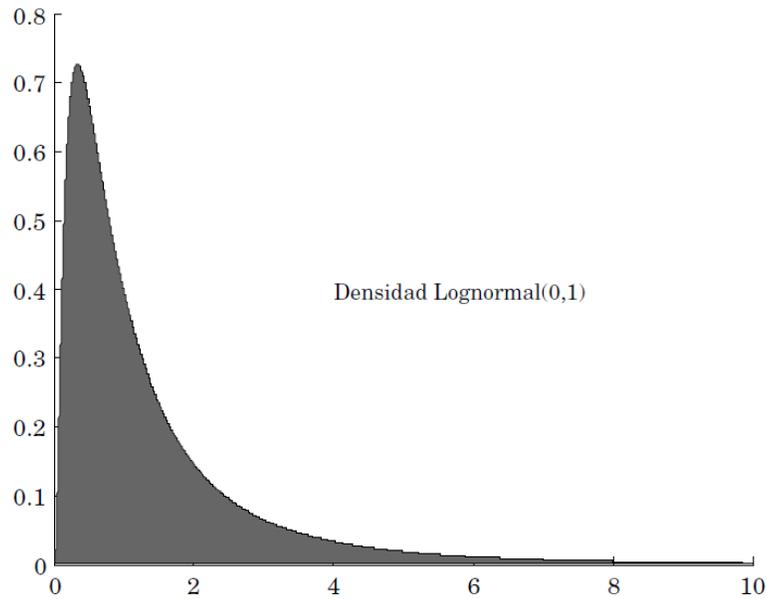


Fig. B.1.1: Gráfica de la densidad Lognormal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$

Teorema B.1.1. Densidad Lognormal

Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ una VA. Si Y es una VA tal que, $X = \ln \{Y\}$ entonces, la densidad de Y es $f_Y \{y\} = \frac{1}{y \sigma \sqrt{2 \pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \{y\} - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$, para toda $y > 0$.

Demostración:

Nótese que basta demostrar que las distribuciones F_X y F_Y son tales que, $F_Y(y) = F_X(\ln \{y\})$.

Se sabe que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, por lo que, su densidad es,

$$f_X \{x\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

Además, si $X = \ln \{Y\}$ entonces, $Y = \exp \{X\}$ y, ya que $\ln \{y\}$ es una función monótona se tiene que, para $y > 0$,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\exp \{X\} \leq y) = P(X \leq \ln \{y\}) = F_X(\ln \{y\})$$

Por lo tanto, para las densidades f_X y f_Y se cumple que,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\ln \{y\}) = \frac{1}{y} f_X(\ln \{y\})$$

■

C

EL PROCESO DE ORNSTEIN–UHLENBECK

Sea $\{X_t\}$ un PE tal que, $dX_t = \delta (m - X_t) dt + \sigma dW_t$ es una EDE con condición inicial $X_0 = a_0$, donde $m, a_0, \delta \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Esta EDE es una de las llamadas ecuaciones de Langevin.

La solución analítica de esta EDE, el PE $\{X_t\}_{t \geq 0}$, que es una difusión, es el llamado proceso de Ornstein–Uhlenbeck (O–U) y se obtiene por medio del Método del Factor Integrante.

C.1 PROCESO DE ORNSTEIN–UHLENBECK

Dada la ecuación de Langevin como se describió anteriormente, se encontrará la solución analítica a esta aplicando, como ya se mencionó, el método del factor integrante, es decir, buscando una función I_t , preferentemente determinista y diferenciable tal que,

$$\begin{aligned} d(I_t X_t) &= I_t dX_t + X_t I_t' dt \\ &= I_t [\delta (m - X_t) dt + \sigma dW_t] + X_t I_t' dt \\ &= \delta m I_t dt - \delta I_t X_t dt + \sigma I_t dW_t + X_t I_t' dt \\ &= \delta m I_t dt + \sigma I_t dW_t \end{aligned} \tag{C.1.1}$$

Se propone a la función determinista y diferenciable

$$I_t = \exp \{ \delta t \} \tag{C.1.2}$$



Leonard Ornstein
(1880-1941)

Físico alemán reconocido entre otras cosas por la teoría de Ornstein–Zernike y el proceso estocástico de Ornstein–Uhlenbeck.

Así, al componer la ecuación C.1.1 con la C.1.2 se tiene que,

$$d(\exp\{\delta t\} X_t) = \delta m \exp\{\delta t\} dt + \sigma \exp\{\delta t\} dW_t \quad (\text{C.1.3})$$

Ahora, integrando C.1.3 de 0 a t se obtiene,

$$\exp\{\delta t\} X_t = X_0 + \delta m \frac{1}{\delta} (\exp\{\delta t\} - 1) + \sigma \int_0^t \exp\{\delta s\} dW_s \quad (\text{C.1.4})$$

Multiplicando C.1.4 por $\frac{1}{\exp\{\delta t\}}$,

$$X_t = a_0 \exp\{-\delta t\} + m \exp\{-\delta t\} (\exp\{\delta t\} - 1) + \sigma \exp\{-\delta t\} \int_0^t \exp\{\delta s\} dW_s \quad (\text{C.1.5})$$

Finalmente, reordenando términos,

$$X_t = a_0 \exp\{-\delta t\} + m (1 - \exp\{-\delta t\}) + \sigma \int_0^t \exp\{-\delta(t-s)\} dW_s \quad (\text{C.1.6})$$

El proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ descrito por la ecuación C.1.6 es conocido como *Proceso de Ornstein–Uhlenbeck*.

Observación C.1.1. En el caso de que $\delta = 1$, la función característica ϕ de X_t es,

$$\begin{aligned} \phi_{X_t}(\alpha) &= \mathbb{E}[\exp\{i \alpha X_t\}] \\ &= \exp\left\{i \alpha [\exp\{-t\} \mathbb{E}[a_0] + m (1 - \exp\{-t\})] - \frac{\alpha^2}{4} \sigma^2 (1 - \exp\{-2t\})\right\} \end{aligned}$$

para toda $\alpha \in \mathbb{R}$.

Y, si $t \rightarrow \infty$ se tiene que,

$$\phi_{X_t}(\alpha) \rightarrow \exp\left\{i \alpha m - \frac{\alpha^2}{4} \sigma^2\right\} = \exp\left\{i \alpha m - \frac{\alpha^2}{2} \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

por lo que, en distribución,

$$X_t \rightarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

es decir, X_t es un proceso de reversión a su media.



Leonard Ornstein
(1900-1988)

Físico teórico neerlandés - estadounidense. Introdujo el concepto de *spin*, que postula que los electrones giran sobre un eje, con Samuel Abraham Goudsmit, por tal motivo fueron galardonados con la Medalla Max Planck en 1964. También fue premiado con la Medalla Lorentz en 1970 y el Premio Wolf en Física en 1979.

D

FÓRMULA DE ITÔ

La fórmula de Itô es una identidad utilizada en el cálculo de Itô para encontrar la diferencial de una función dependiente del tiempo de un proceso estocástico. Además, es el análogo en cálculo estocástico del *Teorema Fundamental del Cálculo*. Típicamente, se memoriza mediante la formación de la expansión en serie de Taylor de la función bajo su segunda derivada y la identificación del cuadrado de un incremento en el proceso de Wiener con un incremento en el tiempo.

La fórmula de Itô, se refiere a veces como teorema de Doebelin–Itô en reconocimiento a la labor recientemente descubierta de Wolfgang Doebelin.

Una prueba formal de esta fórmula se basa en tomar el límite de una sucesión de variables aleatorias, el cual implica una serie de detalles técnicos. En su lugar, se esbozará la manera en que se puede derivar la fórmula de Itô expandiendo en una serie de Taylor y aplicando reglas del cálculo estocástico.

Supóngase que X_t es un proceso de Itô que satisface la EDE,

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Si $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{1,2}$ entonces, su expansión en serie de Taylor es,

$$df(t, x) = D_0^1 f(t, x) dt + D_1^1 f(t, x) dx + \frac{1}{2} D_1^2 f(t, x) (dx)^2 + \dots$$

Haciendo las sustituciones $x = X_t$ y $dx = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ se tiene que,

$$df(t, x) = D_0^1 f(t, x) dt + D_1^1 f(t, x) (\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{2} D_1^2 f(t, x) \sigma^2 dt + \dots$$



Kiyoshi Itô
(1915-2008)

Matemático japonés cuyo trabajo se llama ahora cálculo de Itô. El concepto básico de este cálculo es la integral de Itô, y el más importante de los resultados es la fórmula de Itô (1951).

D FÓRMULA DE ITÔ

Note que, la variación cuadrática del proceso es,

$$(dx)^2 = \mu_t^2 (dt)^2 + 2 \mu_t \sigma_t (dt dW_t) + \sigma_t^2 (dW_t)^2 = \sigma^2 dt$$

ya que en el límite, cuando $dt \rightarrow 0$, $(dt)^2 \rightarrow 0$ y $(dt dW_t) \rightarrow 0$, ambos más rapido que $(dW_t)^2$; enviando $(dt)^2$ y $(dt dW_t)$ a 0 y sustituyendo $(dW_t)^2$ por dt (formalmente, esto es conocido como tabla de Itô, Tabla D.1.1) se tiene que, agrupando términos,

$$df(t, x) = \left(D_0^1 f(t, x) + \mu_t D_1^1 f(t, x) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 D_1^2 f(t, x) \right) dt + \sigma_t D_1^1 f(t, x) dW_t$$



Wolfgang Doeblin
(1915-1940)

Matemático franco – alemán cuyo trabajo adelantado sobre procesos de Markov se reveló en el 2000, mismo que se le reconoció otorgándole el Itô en la fórmula de Doeblin–Itô.

D.1 FÓRMULA DE ITÔ

De modo más general, aunque no el más general, se enuncia la fórmula de Itô en el siguiente teorema.

Teorema D.1.1. Fórmula de Itô

Sean $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ un proceso de Itô n – dimensional y $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de clase $\mathcal{C}^{1,2}$ entonces, $f(t, X)$ es un proceso de Itô cuyas k componentes están dadas por,

$$df_k(t, X) = D_0^1 f_k(t, X) dt + \sum_i D_i^1 f_k(t, X) dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} D_{i,j}^2 f_k(t, X) dX^i dX^j$$

donde, $(dW^i dW^j) = \delta_{ij} dt$, $(dW^i dt) = (dt dW^i) = 0$ y $(dt)^2 = 0$, (Tabla D.1.1).

Demostración: Véase [Øksendal B, Capítulo 4, pp.48-49]. ■

Tabla D.1.1: Tabla de Itô

•	dt	dW^i	dW^j
dt	0	0	0
dW^i	0	dt	0
dW^j	0	0	dt

La fórmula de Itô se emplea extensamente en matemáticas financieras, y una de sus mayores aplicaciones conocidas es en la derivación de la ecuación de BlackScholes para valuación de opciones.[†]

[†] Véase [Itô K]

E

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

El método de separación de variables se refiere a un procedimiento para encontrar una solución completa particular para ciertos problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales como serie cuyos términos son el producto de funciones que tienen las "variables separadas". Es uno de los métodos más productivos de la física matemática para buscar soluciones a problemas físicos descritos mediante ecuaciones diferenciales de derivadas parciales.

El método sirve para encontrar soluciones parciales completas, no soluciones generales, dependientes de un conjunto numerable de constantes arbitrarias, lo cual permite resolver tanto problemas de valor inicial como problemas de frontera e incluso problemas que involucran condiciones de ambos tipos.

El mismo nombre se aplica a la forma de buscar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de cierto tipo que permite resolverlas por cuadraturas de funciones que contienen las variables separadas.

Más aún, el mismo nombre es usado para buscar soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas, solamente que en este caso además se debe hacer uso de la fórmula de Itô (Teorema D.1.1).

E.1 SEPARACIÓN DE VARIABLES PARA EDE

Considérense $\{X_t\}_{t \geq 0}$, e $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ dos PE relacionados por la EDE,

$$dY_t = \mu Y_t dt + X_t Y_t dW_t \quad (\text{E.1.1})$$

donde $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un MB y μ una constante.

Nótese que, suponiendo que $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ sea un proceso positivo, la EDE (E.1.1) puede reescribirse como,

$$\frac{1}{Y_t} dY_t = \mu dt + X_t dW_t \quad (\text{E.1.2})$$

Aplicando la fórmula de Itô a la EDE (E.1.2) con la función de clase $C^{1,2}$, $f(t, y) = f(y) = \ln \{y\}$ se obtiene,

$$\begin{aligned} df(y) &= D_0^1 f(y) dt + D_1^1 f(y) dy + \frac{1}{2} D_1^2 f(y) (dy)^2 \\ &= \frac{1}{y} dy - \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} (dy)^2 \\ &= \frac{1}{y} (\mu y dt + x y dW_t) - \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} x^2 y^2 dt \\ &= \mu dt + x dW_t - \frac{1}{2} x^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} x^2 \right) dt + x dW_t \end{aligned}$$

Entonces,

$$f(y) = f(y_0) + \int_0^t \mu - \frac{1}{2} x^2 ds + \int_0^t x dW_s$$

Así,

$$\ln \{Y_t\} = \ln \{Y_0\} + \int_0^t \mu - \frac{1}{2} X_s^2 ds + \int_0^t X_s dW_s$$

Por lo tanto,

$$Y_t = Y_0 \exp \left\{ \int_0^t \mu - \frac{1}{2} X_s^2 ds + \int_0^t X_s dW_s \right\}$$

es solución de la EDE (E.1.1) con la condición inicial Y_0 .

F

LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier, denominada así por Joseph Fourier, es una transformación matemática empleada para transformar señales entre el dominio temporal o espacial y el dominio de la frecuencia, que tiene muchas aplicaciones en la física y la ingeniería. Es reversible, siendo capaz de transformaciones de cualquiera de los dominios al otro. El propio término se refiere tanto a la operación de transformación como a la función que produce.



J.B. Joseph Fourier
(1768-1830)

Matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas Series de Fourier, método con el que consiguió resolver la ecuación del calor. La transformada de Fourier recibe su nombre en su honor.

F.1 LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Definición F.1.1. La transformada de Fourier

Dada una función $f \in L_1(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier denotada por $\mathcal{F}\{f\}$ es una función g tal que,

$$g(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\{-i\omega t\} dt$$

y la respectiva transformación inversa es,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \exp\{i\omega t\} d\omega$$

Lema F.1.1. Propiedad de desfase

Sea f una función con transformada de Fourier g . Si f tiene un desfase t_0 en su dominio entonces,

$$g(\omega) = \mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \exp\{-i\omega t_0\}$$

Demostración:

Sea $s = t - t_0$ entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \exp\{-i \omega t\} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \exp\{-i \omega (t_0 + s)\} ds \\ &= \mathcal{F}\{f(s)\} \exp\{-i \omega t_0\} \end{aligned}$$

■

Teorema F.1.1. Transformada de Fourier de una gaussiana

Sea $f \sim \mathcal{N}(x_0, \sigma_0)$ entonces, $g(\omega) = \mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma_0^2 \omega^2 - i \omega x_0\right\}$.

Demostración:

Sea $f(s) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{s}{\sigma_0}\right)^2\right\}$ entonces,

$$\mathcal{F}\{f(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \exp\{-i \omega s\} ds = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma_0^2 \omega^2\right\}$$

Luego, por el lema F.1.1,

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = \mathcal{F}\{f(x)\} \exp\{-i \omega x_0\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma_0^2 \omega^2\right\} \exp\{-i \omega x_0\} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sigma_0^2 \omega^2 - i \omega x_0\right\} \end{aligned}$$

■

Corolario F.1.1. Sea $f \sim \mathcal{N}(x_0, \sigma_0)$ donde $x_0 = -\frac{1}{2} \sigma^2 t$ y $\sigma_0 = \sigma \sqrt{t}$ entonces,

$$g(\omega) = \mathcal{F}\{f(x - x_0)\} = \exp\left\{-\frac{1}{2} (\omega^2 + i \omega) \sigma^2 t\right\}$$

Demostración: Se sigue del teorema F.1.1.

■

G

LA FUNCIÓN $I(\lambda)$

G.1 FORMA EXPLÍCITA DE $I(\lambda)$

Considérese $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ un proceso O-U con parámetros constantes δ, θ y k de tal manera que, para todo $t \geq 0$,

$$d\sigma_t = \delta(\theta - \sigma_t) dt + k dW_t \quad (\text{G.1.1})$$

y sean $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ e $I_{\alpha_t^2}(\lambda)$ tales que,

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \sigma_s^2 ds} \quad (\text{G.1.2})$$

$$I_{\alpha_t^2}(\lambda) = \mathbb{E} [\exp \{-\lambda \alpha_t^2\}] \quad (\text{G.1.3})$$

donde, $I_{\alpha_t^2}(\lambda)$ es la transformada de Laplace de α_t^2 . Es posible probar que, para toda $\lambda \geq 0$ y ciertas funciones L, M y N ,

$$I_{\alpha_t^2}(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{2} L \sigma_0^2 + M \sigma_0 + N \right\}$$

y con la idea de mantener simpleza en la notación, de aquí en más se entenderá que $I(\lambda) = I_{\alpha_t^2}(\lambda)$ para proceder ahora a probar este hecho en el siguiente lema.

Lema G.1.1. Forma explícita de $I(\lambda)$

Para toda $\lambda \geq 0$,

$$I(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{2} L \sigma_0^2 + M \sigma_0 + N \right\} \quad (\text{G.1.4})$$

G LA FUNCIÓN $I(\lambda)$

donde,

$$L(t) = -A - a \left(\frac{\sinh \{a k^2 t\} + b \cosh \{a k^2 t\}}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right) \quad (\text{G.1.5})$$

$$M(t) = B \left(\frac{b \sinh \{a k^2 t\} + b^2 \cosh \{a k^2 t\} + 1 - b^2}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} - 1 \right) \quad (\text{G.1.6})$$

$$\begin{aligned} N(t) = & \frac{a - A}{2 a^2} (a^2 - A B^2 - B^2 a) k^2 t + \frac{B^2 (A^2 - a^2)}{2 a^3} \\ & \cdot \left[\frac{(2 A + a) + (2 A - a) \exp \{2 a k^2 t\}}{A + a + (a - A) \exp \{2 a k^2 t\}} \right] \\ & + \frac{2 A B^2 (a^2 - A^2) \exp \{a k^2 t\}}{a^3 (A + a + (a - A) \exp \{2 a k^2 t\})} \\ & - \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{A}{a} + 1 \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A}{a} \right) \exp \{2 a k^2 t\} \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.1.7})$$

los parámetros a y b son tales que,

$$a = \sqrt{A^2 - 2 C} \quad \text{y} \quad b = -\frac{A}{a} \quad (\text{G.1.8})$$

y,

$$A = -\frac{\delta}{k^2}, \quad B = \frac{\theta \delta}{k^2} \quad \text{y} \quad C = -\frac{\lambda}{k^2 t} \quad (\text{G.1.9})$$

Demostración:

De acuerdo a la fórmula de Feynman-Kac desarrollada en [Freidlin M, pp.117–126], para ciertas funciones c , se tiene que,

$$u(t, \sigma_0) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \int_0^t c(\sigma_s) ds \right\} \right] \quad (\text{G.1.10})$$

donde u es la solución de la EDP,

$$\begin{aligned} D_0^1 u(t, x) = & \frac{1}{2} k^2 D_1^2 u(t, x) - \delta(x - \theta) D_1^1 u(t, x) \\ & + c(x) u(t, x) \end{aligned} \quad (\text{G.1.11})$$

con la condición inicial $u(0, x) = 1$.

Eligiendo $c(x) = -\tilde{\lambda} x^2$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
 u(t, \sigma_0) &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\tilde{\lambda} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right\} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\tilde{\lambda} t \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right\} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\tilde{\lambda} t \alpha_t^2 \right\} \right] \\
 &= I(\tilde{\lambda} t)
 \end{aligned} \tag{G.1.12}$$

Definiendo $A_0 = -\delta$, $B_0 = \theta \delta$, $C_0 = -\tilde{\lambda}$, y haciendo uso de la elección de $c(x)$, la EDP (G.1.11) se transforma en

$$\begin{aligned}
 D_0^1 u(t, x) &= \frac{1}{2} k^2 D_1^2 u(t, x) + (A_0 x + B_0) D_1^1 u(t, x) \\
 &\quad + C_0 x^2 u(t, x)
 \end{aligned} \tag{G.1.13}$$

y se demostrará que ésta siempre tiene una solución de la forma

$$u(t, x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} L x^2 + M x + N \right\} \tag{G.1.14}$$

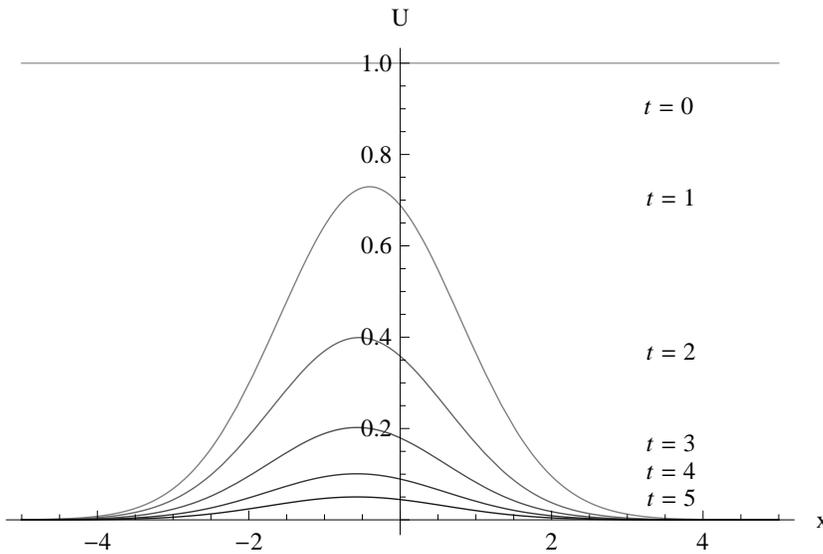


Fig. G.1.1: Familia de gráficas de $u(x)$ para tiempos $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$.

G LA FUNCIÓN $I(\lambda)$

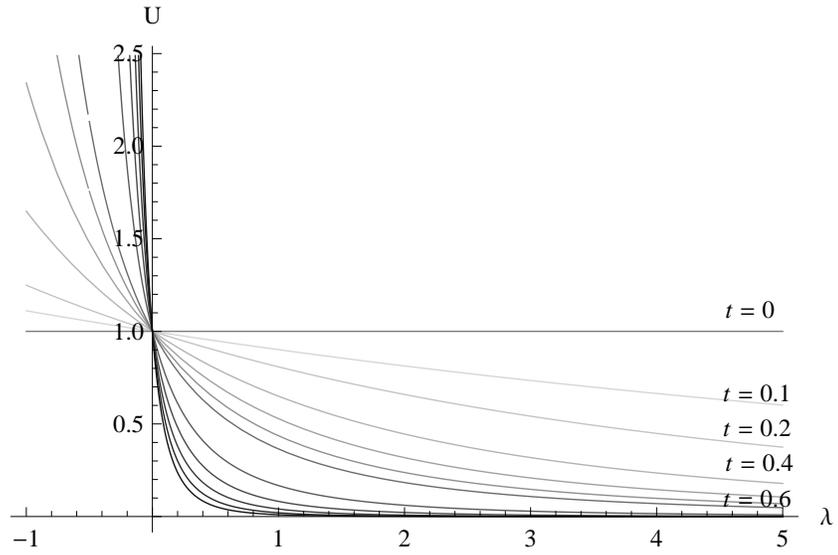


Fig. G.1.2: Familia de gráficas de la función $u(\tilde{\lambda})$ para tiempos $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1, \theta = 1, y k = 1$, manteniendo constante la variable espacial en $x = 1$.

Tomando entonces $u(t, x) = \exp\left\{\frac{1}{2} L x^2 + M x + N\right\}$ se tiene que,

$$\begin{aligned} D_0^1 u(t, x) &= u(t, x) \left(\frac{1}{2} L'(t) x^2 + M'(t) x + N'(t) \right) \\ D_1^1 u(t, x) &= u(t, x) \left(L(t) x + M(t) \right) \\ D_1^2 u(t, x) &= u(t, x) \left(L(t) + \left(L(t) x + M(t) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{G.1.15})$$

Ahora, formando con el conjunto de ecuaciones (G.1.15) a la EDP (G.1.13), esta puede simplificarse obteniéndose,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L'(t) x^2 + M'(t) x + N'(t) &= \frac{1}{2} k^2 \left(L(t) + \left(L(t) x + M(t) \right)^2 \right) \\ &+ (A_0 x + B_0) \left(L(t) x + M(t) \right) \\ &+ C_0 x^2 \end{aligned} \quad (\text{G.1.16})$$

Luego, reagrupando términos, puede verse como la siguiente igualdad de polinomios de segundo grado en x .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L'(t) x^2 + M'(t) x + N'(t) &= \left(\frac{1}{2} k^2 L^2(t) + A_0 L(t) + C_0 \right) x^2 \\ &+ \left(k^2 L(t) M(t) + A_0 M(t) \right. \\ &+ \left. B_0 L(t) \right) x + \frac{1}{2} k^2 M^2(t) + B_0 M(t) \\ &+ \frac{1}{2} k^2 L(t) \end{aligned} \quad (\text{G.1.17})$$

Así, por el teorema fundamental del álgebra, el problema se reduce a resolver el equivalente sistema acoplado de EDO,

$$\frac{1}{2} L'(t) = \frac{1}{2} k^2 L^2(t) + A_0 L(t) + C_0 \quad (\text{G.1.18})$$

$$M'(t) = k^2 L(t) M(t) + A_0 M(t) + B_0 L(t) \quad (\text{G.1.19})$$

$$N'(t) = \frac{1}{2} k^2 M^2(t) + B_0 M(t) + \frac{1}{2} k^2 L(t) \quad (\text{G.1.20})$$

y la condición inicial $u(0, x) = 1$ es equivalente al conjunto de condiciones iniciales $L(0) = 0$, $M(0) = 0$ y $N(0) = 0$.

Nótese que la ecuación (G.1.18) es de Ricatti, aunque no en el sentido más general ya que tiene coeficientes constantes.

Reescribiendo a la ecuación de Ricatti (G.1.18) como

$$L'(t) = k^2 L^2(t) + 2 A_0 L(t) + 2 C_0$$

se tiene una ecuación en variables separables, por lo que,

$$1 = \frac{L'(t)}{2 C_0 + 2 A_0 L(t) + k^2 L^2(t)}$$

entonces,

$$\int 1 dt = \int \frac{dL}{2 C_0 + 2 A_0 L + k^2 L^2}$$

G LA FUNCIÓN $I(\lambda)$

y definiendo $\alpha = 2 C_0$, $\beta = 2 A_0$ y $\gamma = k^2$,

$$\begin{aligned}
 t - c_L &= \int \frac{dL}{\alpha + \beta L_1 + \gamma L_1^2} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{4 \alpha \gamma - \beta^2}} \arctan \left\{ \frac{2 \gamma L + \beta}{\sqrt{4 \alpha \gamma - \beta^2}} \right\} \\
 &= \frac{-2 i}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \arctan \left\{ i \frac{-2 \gamma L - \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \right\} \\
 &= \frac{-2 i^2}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{-2 \gamma L - \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \right\} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{-2 \gamma L - \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \right\}
 \end{aligned}$$

de donde,

$$L = -\frac{\beta}{2 \gamma} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}}{2 \gamma} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}}{2} t - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}}{2} c_L \right\}$$

y usando la condición inicial $L(0) = 0$, la constante de integración c_L es,

$$c_L = -\frac{2}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{-\beta}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \right\}$$

Así, definiendo $A = \frac{A_0}{k^2}$, $C = \frac{C_0}{k^2}$, $a = \sqrt{A^2 - 2 C}$ y $b = -\frac{A}{a}$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
 L &= -\frac{\beta}{2 \gamma} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}}{2 \gamma} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}}{2} t + \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{-\beta}{\sqrt{\beta^2 - 4 \alpha \gamma}} \right\} \right\} \\
 &= -\frac{A_0}{k^2} - \frac{\sqrt{4 A_0^2 - 8 C_0 k^2}}{2 k^2} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{4 A_0^2 - 8 C_0 k^2}}{2} t + \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{-2 A_0}{\sqrt{4 A_0^2 - 8 C_0 k^2}} \right\} \right\} \\
 &= -\frac{A_0}{k^2} - \frac{\sqrt{4 A_0^2 - 8 C_0 k^2}}{2 k^2} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{4 A_0^2 - 8 C_0 k^2}}{2 k^2} k^2 t + \operatorname{arctanh} \left\{ \frac{-2 k^2 A_0}{k^2 \sqrt{4 A_0^2 - 8 C_0 k^2}} \right\} \right\} \\
 &= -A - a \tanh \{ a k^2 t + \operatorname{arctanh} \{ b \} \}
 \end{aligned}$$

Si además se define la constante $z_0 = \operatorname{arctanh}\{b\}$ entonces,

$$\begin{aligned}
 L(t) &= -A - a \tanh\{a k^2 t + z_0\} \\
 &= -A - a \left(\frac{\operatorname{senh}\{a k^2 t + z_0\}}{\operatorname{cosh}\{a k^2 t + z_0\}} \right) \\
 &= -A - a \left(\frac{\operatorname{senh}\{a k^2 t\} \operatorname{cosh}\{z_0\} + \operatorname{cosh}\{a k^2 t\} \operatorname{senh}\{z_0\}}{\operatorname{cosh}\{a k^2 t\} \operatorname{cosh}\{z_0\} + \operatorname{senh}\{a k^2 t\} \operatorname{senh}\{z_0\}} \right) \\
 &= -A - a \left(\frac{\operatorname{senh}\{a k^2 t\} + \operatorname{cosh}\{a k^2 t\} \tanh\{z_0\}}{\operatorname{cosh}\{a k^2 t\} + \operatorname{senh}\{a k^2 t\} \tanh\{z_0\}} \right) \\
 &= -A - a \left(\frac{\operatorname{senh}\{a k^2 t\} + b \operatorname{cosh}\{a k^2 t\}}{\operatorname{cosh}\{a k^2 t\} + b \operatorname{senh}\{a k^2 t\}} \right)
 \end{aligned}$$

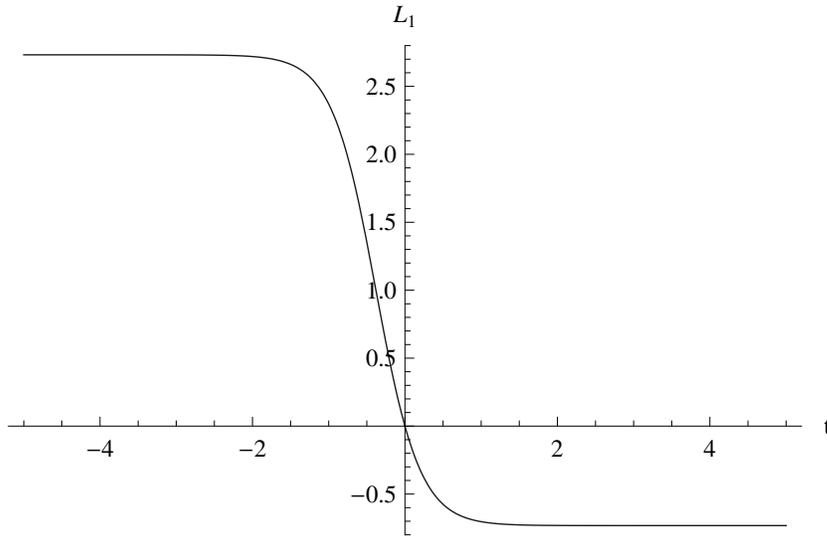


Fig. G.1.3: Gráfica de la solución de la ecuación de Ricatti (G.1.18) con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$.

Una vez conocida L , la ecuación (G.1.19) es lineal, así que su solución puede ser obtenida por el método del factor integrante.

Tomando a $L(t)$ en su forma $L(t) = -A - a \tanh\{a k^2 t + z_0\}$ y reescribiendo a la ecuación (G.1.19) como

$$M'(t) - [k^2 L(t) + A_0] M(t) = B_0 L(t)$$

G LA FUNCIÓN $I(\lambda)$

se tiene que el factor integrante es,

$$\begin{aligned}
 \mu(t) &= \exp\left\{-\int k^2 L(t) + A_0 dt\right\} \\
 &= \exp\left\{\int a k^2 \tanh\{a k^2 t + z_0\} dt\right\} \\
 &= \exp\left\{\ln\left\{\cosh\{a k^2 t + z_0\}\right\}\right\} \\
 &= \cosh\{a k^2 t + z_0\}
 \end{aligned}$$

Luego, definiendo $B = \frac{B_0}{k^2}$,

$$\begin{aligned}
 M(t) &= \frac{\int \mu(t) B_0 L(t) dt + c_M}{\mu(t)} = B_0 \left(\frac{\int \mu(t) L(t) dt + \frac{c_M}{B_0}}{\mu(t)} \right) \\
 &= B_0 \left(\frac{\int \cosh\{a k^2 t + z_0\} [-A - a \tanh\{a k^2 t + z_0\}] dt + \frac{c_M}{B_0}}{\cosh\{a k^2 t + z_0\}} \right) \\
 &= B_0 \left(\frac{-\frac{A}{a k^2} \sinh\{a k^2 t + z_0\} - \frac{a}{a k^2} \cosh\{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M}{B_0}}{\cosh\{a k^2 t + z_0\}} \right) \\
 &= \frac{B_0}{k^2} \left(\frac{b \sinh\{a k^2 t + z_0\} + \frac{k^2 c_M}{B_0} - 1}{\cosh\{a k^2 t + z_0\}} \right) \\
 &= B \left(\frac{b \sinh\{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M}{B} - 1}{\cosh\{a k^2 t + z_0\}} \right)
 \end{aligned}$$

donde c_M es la constante de integración, la cuál usando la condición inicial $M(0) = 0$ es $c_M = B (1 - b^2) \cosh\{z_0\}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 M(t) &= B \left(\frac{b \sinh \{a k^2 t + z_0\} + (1 - b^2) \cosh \{z_0\}}{\cosh \{a k^2 t + z_0\}} - 1 \right) \\
 &= B \left(\frac{b \sinh \{a k^2 t\} \cosh \{z_0\} + b \cosh \{a k^2 t\} \sinh \{z_0\} + (1 - b^2) \cosh \{z_0\}}{\cosh \{a k^2 t\} \cosh \{z_0\} + \sinh \{a k^2 t\} \sinh \{z_0\}} - 1 \right) \\
 &= B \left(\frac{b \sinh \{a k^2 t\} + b \cosh \{a k^2 t\} \tanh \{z_0\} + 1 - b^2}{\cosh \{a k^2 t\} + \sinh \{a k^2 t\} \tanh \{z_0\}} - 1 \right) \\
 &= B \left(\frac{b \sinh \{a k^2 t\} + b^2 \cosh \{a k^2 t\} + 1 - b^2}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

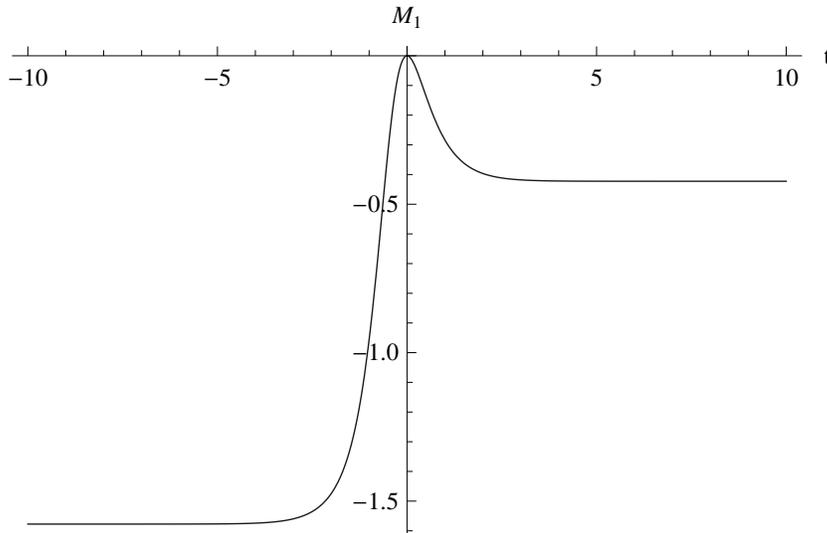


Fig. G.1.4: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial (G.1.19) con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$.

Para resolver la ecuación (G.1.20), no hace falta más que una, aunque simple, engorrosa integración, una vez conocidas L y M . El primer paso será calcular $M^2(t)$ para lo cual se tomará a $M(t)$ en su forma,

$$M(t) = B \left(b \tanh \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M}{B} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} - 1 \right)$$

teniendo entonces que,

$$\begin{aligned}
 M^2(t) &= B^2 \left(b^2 \tanh^2 \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M^2}{B^2} \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\} + 1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2 b c_M}{B} \tanh \{a k^2 t + z_0\} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \right. \\
 &\quad \left. - 2 b \tanh \{a k^2 t + z_0\} - \frac{2 c_M}{B} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \right) \\
 &= B^2 \left(b^2 \tanh^2 \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M^2}{B^2} \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\} + 1 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2 b c_M}{a k^2 B} \frac{d}{dt} [\operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\}] \right. \\
 &\quad \left. - 2 b \tanh \{a k^2 t + z_0\} - \frac{2 c_M}{B} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \right)
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 N'(t) &= \frac{1}{2} k^2 M^2(t) + B_0 M(t) + \frac{1}{2} k^2 L(t) \\
 &= \frac{B^2 b^2 k^2}{2} \tanh^2 \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M^2 k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\} + \frac{B^2 k^2}{2} \\
 &\quad - \frac{B b c_M}{a} \frac{d}{dt} [\operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\}] \\
 &\quad - \cancel{B^2 b k^2 \tanh \{a k^2 t + z_0\}} - \cancel{B k^2 c_M \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\}} \\
 &\quad + \cancel{B B_0 b \tanh \{a k^2 t + z_0\}} + \cancel{B_0 c_M \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\}} - B B_0 \\
 &\quad - \frac{A k^2}{2} - \frac{a k^2}{2} \tanh \{a k^2 t + z_0\} \\
 &= -k^2 \left(\frac{B^2 + A}{2} \right) + \frac{B^2 b^2 k^2}{2} \tanh^2 \{a k^2 t + z_0\} + \frac{c_M^2 k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \{a k^2 t + z_0\} \\
 &\quad - \frac{B b c_M}{a} \frac{d}{dt} [\operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\}] - \frac{a k^2}{2} \tanh \{a k^2 t + z_0\}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 N(t) &= -k^2 \left(\frac{B^2 + A}{2} \right) t + \frac{B^2 b^2}{2 a} \left(a k^2 t + z_0 - \tanh \{a k^2 t + z_0\} \right) \\
 &\quad + \frac{c_M^2}{2 a} \tanh \{a k^2 t + z_0\} - \frac{B b c_M}{a} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \ln \{ \cosh \{a k^2 t + z_0\} \} - c_N \\
 &= \frac{B^2 b^2}{2 a} z_0 + k^2 \left(\frac{B_2 (b^2 - 1) + A}{2} \right) t + \left(\frac{c_M^2 - B^2 b^2}{2 a} \right) \tanh \{a k^2 t + z_0\} \\
 &\quad - \frac{B b c_M}{a} \operatorname{sech} \{a k^2 t + z_0\} - \frac{1}{2} \ln \{ \cosh \{a k^2 t + z_0\} \} - c_N
 \end{aligned}$$

donde, c_N es la constante de integración la cual usando la condición inicial $N(0) = 0$ es,

$$c_N = \frac{B^2 b^2}{2 a} z_0 + \left(\frac{c_M^2 - B^2 b^2}{2 a} \right) \tanh \{z_0\} - \frac{B b c_M}{a} \operatorname{sech} \{z_0\} - \frac{1}{2} \ln \{ \cosh \{z_0\} \}$$

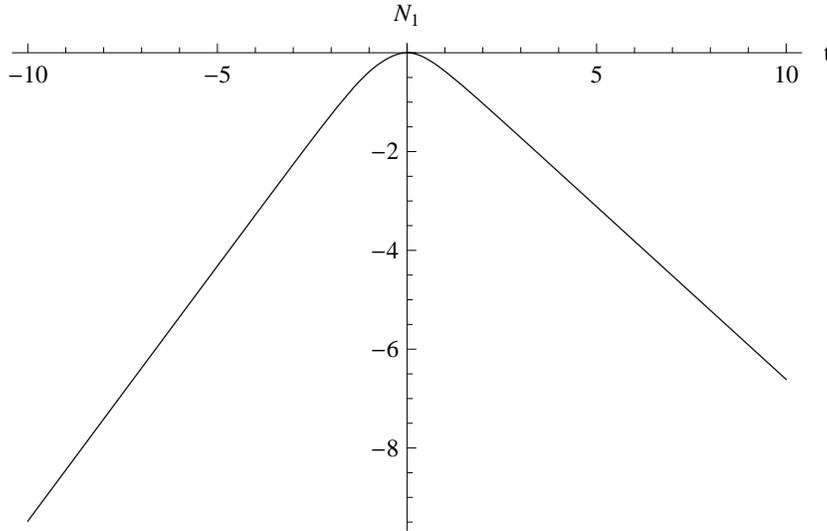


Fig. G.1.5: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial parcial (G.1.20) con parámetros $\delta = 1$, $\theta = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$ y $k = 1$.

Puede observarse que N , la solución de la ecuación (G.1.20) que se calculó mediante integración no tiene el mismo aspecto que la propuesta y aunque es posible llegar a ella, el camino es largo y tedioso, razón por la que no se presentará aquí.

De igual manera, la comprobación de que N , ya sea en su forma propuesta o en la calculada, es solución de la EDP (G.1.20) es exhaustiva, por lo que tampoco será presentada, no obstante, en la tabla G.1.1 se muestra un comparativo entre ambas, donde N^s denota a la solución propuesta y N^c a la calculada y claramente las respuestas que se muestran son satisfactorias al arrojar los mismos valores para los instantes de tiempo $t \in \{-10, -9, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$.

Contrariamente, sí se comprobará que L y M son soluciones de las ecuaciones (G.1.18) y (G.1.19), respectivamente.

Comprobando que L es solución de la ecuación de Ricatti (G.1.18):

$$\begin{aligned}
 L'(t) &= -a \left\{ \frac{(\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}) (a k^2 \cosh \{a k^2 t\} + a k^2 b \sinh \{a k^2 t\})}{(\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\})^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(\sinh \{a k^2 t\} + b \cosh \{a k^2 t\}) (a k^2 \sinh \{a k^2 t\} + a k^2 b \cosh \{a k^2 t\})}{(\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\})^2} \right\} \\
 &= -a \left\{ a k^2 - a k^2 \left(\frac{\sinh \{a k^2 t\} + b \cosh \{a k^2 t\}}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right)^2 \right\} \\
 &= -a \left\{ a k^2 - a k^2 \left(-\frac{L(t) + A}{a} \right)^2 \right\} \\
 &= k^2 L^2(t) + 2 A k^2 L(t) + k^2 (A^2 - a^2)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2} L'(t) = \frac{1}{2} k^2 L^2(t) + A_0 L(t) + C_0$$

Comprobando que M es solución de la ecuación lineal (G.1.19):

$$\begin{aligned}
 M'(t) &= B \left\{ \frac{(\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}) (a k^2 b \cosh (a k^2 t) + a k^2 b^2 \sinh (a k^2 t))}{(\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\})^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b \sinh \{a k^2 t\} + b^2 \cosh \{a k^2 t\} + 1 - b^2}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{a k^2 \sinh (a k^2 t) + a k^2 b \cosh (a k^2 t)}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right\} \\
 &= B \left\{ a k^2 b - \frac{b \sinh \{a k^2 t\} + b^2 \cosh \{a k^2 t\} + 1 - b^2}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right. \\
 &\quad \left. \times a k^2 \frac{\sinh \{a k^2 t\} + b \cosh \{a k^2 t\}}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right\} \\
 &= B \left\{ a k^2 b - \left(\frac{M(t)}{B} + 1 \right) a k^2 \left(-\frac{L(t) + A}{a} \right) \right\} \\
 &= B a k^2 b + k^2 (M(t) L(t) + A M(t) + B L(t) + B A) \\
 &= k^2 M(t) L(t) + k^2 A M(t) + k^2 B L(t) + k^2 B (a b + A) \\
 &= k^2 M(t) L(t) + A_0 M(t) + B_0 L(t)
 \end{aligned}$$

Tabla G.1.1: N^s vs. N^c

t	N^s	N^c	t	N^s	N^c
-10	-9.4793	-9.4793	1	-0.372979	-0.372979
-9	-8.44661	-8.44661	2	-1.02612	-1.02612
-8	-7.41392	-7.41392	3	-1.71805	-1.71805
-7	-6.38123	-6.38123	4	-2.41612	-2.41612
-6	-5.34856	-5.34856	5	-3.11525	-3.11525
-5	-4.31602	-4.31602	6	-3.81457	-3.81457
-4	-3.28418	-3.28418	7	-4.51392	-4.51392
-3	-2.25631	-2.25631	8	-5.21328	-5.21328
-2	-1.25168	-1.25168	9	-5.91264	-5.91264
-1	-0.386767	-0.386767	10	-6.612	-6.612
0	0.0	0.0	-	-	-

Así,

$$L(t) = -A - a \left(\frac{\sinh \{a k^2 t\} + b \cosh \{a k^2 t\}}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} \right)$$

$$M(t) = B \left(\frac{b \sinh \{a k^2 t\} + b^2 \cosh \{a k^2 t\} + 1 - b^2}{\cosh \{a k^2 t\} + b \sinh \{a k^2 t\}} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{a - A}{2 a^2} (a^2 - A B^2 - B^2 a) t + \frac{B^2 (A^2 - a^2)}{2 a^3} \\ &\quad \cdot \left[\frac{(2 A + a) + (2 A - a) \exp \{2 a k^2 t\}}{A + a + (a - A) \exp \{2 a k^2 t\}} \right] \\ &\quad + \frac{2 A B^2 (a^2 - A^2) \exp \{a k^2 t\}}{a^3 (A + a + (a - A) \exp \{2 a k^2 t\})} \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{A}{a} + 1 \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A}{a} \right) \exp \{2 a k^2 t\} \right\} \end{aligned}$$

donde, $A = -\frac{\delta}{k^2}$, $B = \frac{\theta \delta}{k^2}$, $C = -\frac{\tilde{\lambda}}{k^2}$, $a = \sqrt{A^2 - 2 C}$ y $b = -\frac{A}{a}$.

G LA FUNCIÓN $I(\lambda)$

A la luz de la ecuación (G.1.12), basta elegir $x = \sigma_0$ y $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{t}$ para cada $t > 0$ y toda $\lambda \geq 0$ para que $u(t, x) = I(\lambda)$ obteniendo, finalmente que,

$$I(\lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{2} L \sigma_0^2 + M \sigma_0 + N \right\}$$

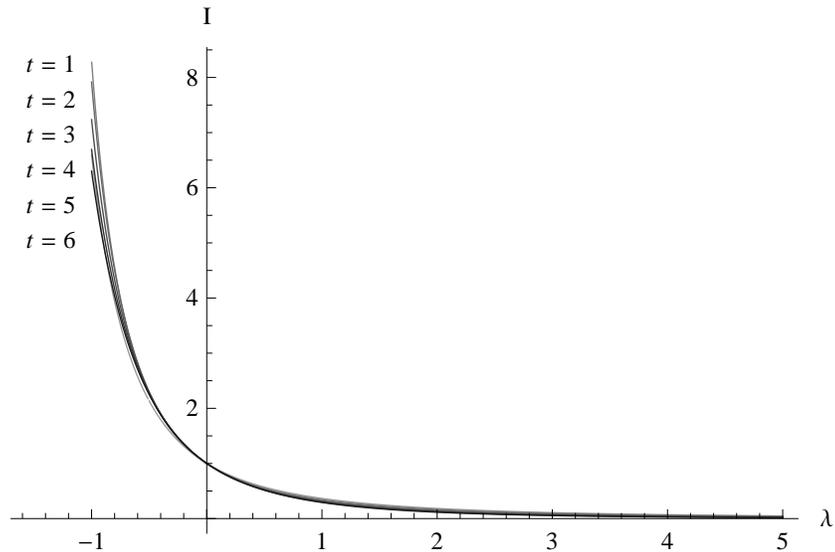


Fig. G.1.6: Familia de gráficas de $I(\lambda)$ para tiempos $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \sigma_0 = 1$ y $k = 1$.

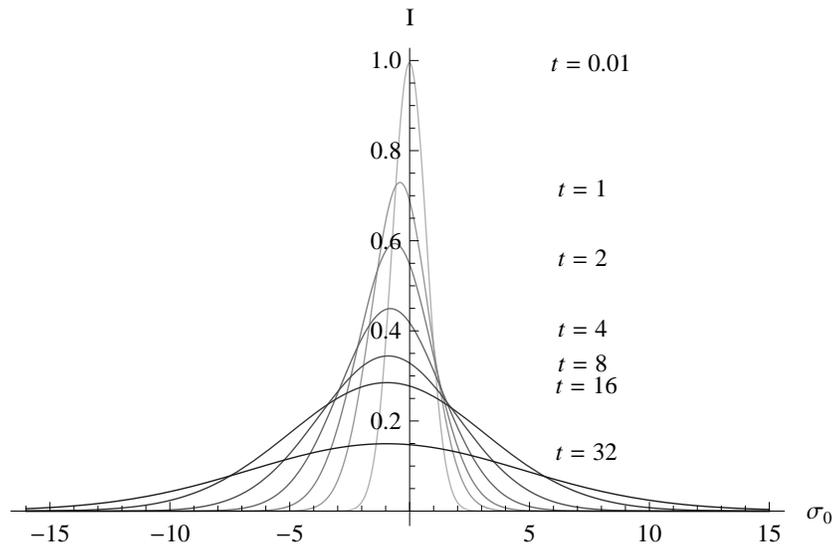


Fig. G.1.7: Familia de gráficas de la función $I(\sigma_0)$ para tiempos $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y parámetros $\delta = 1, \theta = 1, \lambda = 1$ y $k = 1$.

BIBLIOGRAFÍA

- [Ball C] Ball C, Roma A, *Stochastic Volatility Option Pricing*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 29(4):589–607, December 1994.
- [Bormetti] Bormetti G, Cazzola V and Delpini D, *Option Pricing under Ornstein-Uhlenbeck Stochastic Volatility: A Linear Model*. International Journal of Theoretical Applied Finance, 7:1047, 2010.
- [Durrett R] Durrett R, *Stochastic Calculus: A Practical Introduction*. Wadsworth Advanced Books & Software, 1984.
- [Etheridge] Etheridge A, *A Course in Financial Calculus*. Cambridge University, 2002.
- [Freidlin M] Freidlin M, *Functional Integration and Partial Differential Equations*. Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [Ghosh A] Ghosh A P, *Backward and Forward Equations for Diffusion Processes*. Iowa University, 2010.
- [Heston S] Heston S L, *A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*. Review of Financial Studies, 6(2):327–343, 1993.
- [Hull J] Hull J, *Options Futures and other Derivatives*. Pearson Prentice Hall, 2008.
- [Itô K] Itô K, *On Stochastic Differential Equations: Memoirs*. American Mathematical Society, 4: 151, 1951.
- [Lamperti J] Lamperti J, *Stochastic Processes: A Survey of the Mathematical Theory*. Springer, 1997.
- [Øksendal B] Øksendal B, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, 2003.

Bibliografía

- [Fouque J] Papanicolaou G, Fouque J P, Sircar K R, *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. Cambridge University, 2000.
- [Scott L O] Scott L O, *Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and Application*. The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22(4):419–438, December 1987.
- [Sharma S] Sharma S N, Patel H G, *The Fokker-Planck equation, Stochastic Control*. Department of Electrical Engineering, National Institute of Technology, Surat, India, 2010.
- [Shreve I] Shreve S, *Stochastic Calculus for Finance I: Binomial Asset Pricing Model*, volume I of Stochastic Calculus for Finance. Springer, 2008.
- [Shreve II] Shreve S, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, volume II of Stochastic Calculus for Finance. Springer, 2008.
- [Stein E] Stein E M, Stein J C, *Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach*. The Review of Financial Studies, 4: 727-752, 1991.
- [Wiener N] Wiener N, *The Fourier Integral and Certain of its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993.