

Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa
Posgrado en Matemáticas

Tesis para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales

Estrategias óptimas de liquidación en mercados ilíquidos bajo aversión al riesgo

José Alberto Miranda Campos

México D.F. Enero 2017



ASESORES DE TESIS:

Director	Dr. Erick Treviño Aguilar	UGto.
Co-Director	Dr. Julio César García Corte	UAM-I

Director

Dr. Erick Treviño Aguilar, UGto

Co-Director

Dr. Julio César García Corte, UAM-I

Sinodales

Dr. Fernando Baltazar Larios, FC UNAM

Dra. Patricia Saavedra Barrera, UAM-I

Dr. Erick Treviño Aguilar, UGto.

«Quote»

Índice general

Introducción	1
1. Aversión al riesgo	5
1.1. Toma de decisiones	5
1.1.1. Acciones, resultados y preferencias	6
1.1.2. Elección en ambientes riesgosos	7
1.2. Utilidad esperada	8
1.2.1. Representación numérica de relaciones de preferencia	9
1.2.2. Teoremas de caracterización para representaciones del tipo von Neumann-Morgenstern	11
1.2.3. Actitudes frente al riesgo	12
1.3. Medidas de aversión al riesgo de Arrow-Pratt	16
1.3.1. Funciones de utilidad estándar	19
2. Ilquidez de los mercados financieros	21
2.1. ¿Qué es la liquidez?	21
2.2. Modelo de mercado	23
2.3. Algunos resultados sobre el problema de liquidación óptima	24
2.4. Dos problemas en horizonte infinito	28
2.4.1. Liquidación óptima	28
2.4.2. Maximización del valor asintótico del portafolio	29
2.4.3. Solución de los problemas	30
3. Liquidación e inversión óptimas I: Solución	33
3.1. Existencia y caracterización de una solución suave de la ecuación HJB	33
3.2. Argumento de verificación	43
4. Liquidación e inversión óptimas II: Caracterización	49
4.1. Propiedades cualitativas de la estrategia óptima adaptativa	49
4.2. Demostraciones	55
A. Modelo Almgren-Chriss	59
B. Implementación computacional	65
Bibliografía	73

Introducción

En los modelos clásicos de Finanzas Matemáticas se asume que es posible transaccionar posiciones arbitrariamente grandes de los activos al precio de mercado actual sin afectar este precio. Esto no refleja la realidad de las transacciones en gran escala: Primero, una prima debe de ser pagada para poder transaccionar; segundo, las transacciones grandes tienen un impacto de larga duración en los precios futuros.

Las transacciones a gran escala, a diferencia de las transacciones pequeñas (retail), resultan ser una tarea muy compleja en la que no es posible ignorar la naturaleza **ilíquida** del mercado; usualmente una ejecución inmediata afectaría el precio del(los) activo(s) de forma desfavorable, causando que los costos asociados sean muy altos. Una observación fundamental es que estos costos pueden ser reducidos significativamente dividiendo la orden en una secuencia de órdenes más pequeñas, conocidas a veces como **órdenes hijas**, y distribuyéndolas a lo largo de un cierto intervalo de tiempo.

En la actualidad, muchas bolsas han introducido sistemas electrónicos en los que se organizan las órdenes de cada activo que cotiza; por tanto, ha habido una fuerte tendencia hacia la aplicación de algoritmos computacionales para el cálculo y ejecución de las órdenes. A esta nueva tendencia se le conoce como **Algorithmic Trading**. Gracias a esta evolución tecnológica, ahora es posible definir algoritmos para el cálculo del tamaño y programación de horario de órdenes hijas de una transacción a gran escala. La cuestión es entonces encontrar el «mejor» o los «mejores» algoritmos.

Esta tesis tiene como propósito estudiar el problema de **ejecución óptima** en un mercado ilíquido. Consideraremos un inversionista o agente¹ que opera grandes cantidades de cierto activo financiero, y desea mover su portafolio desde la composición inicial dada hasta una posición final específica en un período de tiempo determinado. Típicamente nos concentraremos en el problema de liquidación, ya que, como veremos, cualquier problema de ejecución puede reformularse como uno de liquidación. El agente enfrenta un dilema: Por una parte, una ejecución rápida (pocas órdenes hijas) produce un fuerte impacto adverso en el precio de mercado del activo, causando una reducción en las ganancias transaccionales. Por otra parte, una ejecución

¹Utilizaremos los términos «inversionista» y «agente» indistintamente.

lenta (muchas órdenes hijas) incrementa el riesgo, ya que el precio de mercado podría moverse significativamente durante el período de ejecución debido a eventos económicos exógenos. El objetivo será determinar el *balance óptimo* en este dilema.

Nuestro trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el [Capítulo 1](#) presentamos la formalización matemática del concepto de *aversión al riesgo*. Un componente importante dentro del planteamiento de nuestro problema de ejecución óptima será la forma en que el inversionista afronta al riesgo. Intuitivamente, se esperaría que un agente con mayor aversión al riesgo tienda a ejecutar más rápido, por miedo a los movimientos exógenos adversos que pudiera tener el activo, que un agente con un nivel de aversión menor, pues éste último no presentará tanta urgencia por ejecutar sus transacciones. En este capítulo entenderemos por qué las preferencias de los agentes financieros pueden ser representadas mediante las llamadas *funciones de utilidad*, y cómo la concavidad de estas funciones sirve para describir sus niveles de aversión al riesgo. Presentaremos una medida de concavidad para las funciones de utilidad, el *coeficiente de aversión al riesgo de Arrow-Pratt*. Este coeficiente será un parámetro clave en la determinación de las estrategias de ejecución óptimas.

En el [Capítulo 2](#), introducimos el modelo sobre el cual construiremos nuestro problema: El *modelo de iliquidez a tiempo continuo de Almgren* [[Alm03](#)] (véase el [Apéndice A](#) para un precursor en tiempo discreto). Éste, además de capturar la aleatoriedad exógena, abandona el supuesto clásico de liquidez y describe el impacto que sufre el precio de un activo cuando se ejecutan transacciones grandes sobre él. Después, como motivación y antecedente, revisaremos brevemente varias formulaciones del problema de liquidación óptima en horizonte finito. Veremos que cuando este problema se plantea bajo aversión al riesgo, se obtiene un problema de *control óptimo estocástico* bastante complicado, cuya solución explícita se puede encontrar únicamente para una clase muy particular de funciones de utilidad. Sin embargo, una simplificación importante puede hacerse si permite transaccionar en un período *infinito*. Esto nos posicionará en el problema de *liquidación óptima en horizonte infinito bajo aversión al riesgo*. En este ambiente más flexible plantearemos un segundo problema, donde el objetivo principal deja de ser la liquidación y lo más importante es maximizar las ganancias transaccionales: *inversión óptima en horizonte infinito bajo aversión al riesgo*. Aunque el objetivo de ambos problemas es diferente, descubriremos que sus correspondientes funciones de valor debieran resolver la *misma* ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), y por tanto tendrían la misma solución.

El [Capítulo 3](#) es el de naturaleza más técnica. Demostraremos que los problemas de liquidación e inversión óptimas efectivamente tienen solución. El enfoque tradicional para resolver problemas de control óptimo estocástico² es primero obtener una solución (clásica) de la ecuación de HJB en cuestión y después definir al control óptimo a

²Mediante ecuaciones diferenciales parciales.

través del correspondiente maximizador o minimizador. Sin embargo, resultará que la ecuación de HJB asociada a nuestros problemas es no-lineal en *todas* sus derivadas; por lo que en lugar de aplicar el método de solución tradicional, seguiremos la estrategia propuesta por Schied y Schöneborn [SS09]. La idea es *revertir* los pasos: Primero determinar el optimizador y después resolver la ecuación HJB. Entonces, suponiendo que existe una solución a nuestra ecuación HJB, podremos caracterizar al minimizador de la ecuación a través de una ecuación diferencial parcial *alternativa* del tipo parabólico. Luego, con ayuda de un teorema auxiliar de la Teoría de Ecuaciones Parabólicas, resolveremos esta ecuación alternativa y determinaremos dicho minimizador. De esta forma podremos regresar al problema original y concluir que efectivamente la ecuación HJB tiene solución. Por último, mediante un argumento de verificación identificaremos a dicha solución como la función de valor, y por consiguiente al minimizador como la función retroalimentativa que define a la estrategia óptima.

Finalmente, para culminar nuestro estudio, en el [Capítulo 4](#) presentamos un conjunto de propiedades cualitativas que caracterizan a la estrategia de ejecución óptima. Analizaremos el comportamiento de ésta cuando varios parámetros del modelo se mueven.

1. Aversión al riesgo

La palabra **riesgo** es común y ampliamente usada en el mundo financiero. Básicamente se refiere a incertidumbre que podría resultar en ganancias o pérdidas monetarias. Un supuesto común en la Teoría Financiera es que los agentes son **aversos al riesgo**; esto es, en situaciones de incertidumbre los agentes guiarán su comportamiento con el objetivo de reducir tal incertidumbre. Por ejemplo, un agente averso al riesgo podría escoger colocar su dinero en un bono gubernamental con una tasa de interés baja pero garantizada, en lugar de colocarlo en una acción bursátil que podría tener mayores rendimientos, pero que también involucra la posibilidad de pérdidas.

El objetivo de este capítulo es presentar un modelo matemático que representa el proceso de la toma de decisiones de agentes aversos al riesgo en situaciones de incertidumbre. Como primer paso presentaremos un modelo que ha sido reconocido por su utilidad y aplicabilidad: *el paradigma de utilidad esperada*; el cual se remonta a Bernoulli [Ber54] y fue introducido por primera vez en su forma axiomática por John von Neumann y Oskar Morgenstern en [VNM44]. Una vez expresado matemáticamente el concepto de aversión al riesgo, será de interés contar con una medida del «grado» de aversión de los agentes. Para esto definiremos el *coeficiente de aversión al riesgo de Arrow-Pratt* propuesto por Arrow [AK65] y Pratt [Pra64].

La bibliografía del paradigma de utilidad esperada es muy extensa. Tres excelentes exposiciones pueden ser consultadas en Tadelis [Tad13], para un tratamiento básico; Prigent [Pri07], para un nivel intermedio; y Föllmer y Schied [FS11], para un tratamiento avanzado con toda generalidad.

1.1. Toma de decisiones

Todos los días nos enfrentamos a la toma de decisiones, algunas muy simples como escoger nuestro atuendo del día o el desayuno, y algunas otras que demandan un análisis más profundo de las posibles consecuencias que pudiera traer tal o cuál decisión; en qué acciones invertir o la incursión en un nuevo negocio.

En el contexto financiero la toma de decisiones juega un papel determinante, ya que una mala decisión puede ser la causa de pérdidas monetarias importantes. De aquí

que resulte la necesidad de contar con una teoría que permita hablar con todo rigor sobre la toma de decisiones de los agentes financieros.

1.1.1. Acciones, resultados y preferencias

Los ejemplos descritos antes donde un sujeto escoge la ropa que usará en el día o tiene que decidir entre Cheerios o Zucaritas, forman parte de una clase muy particular de problemas de decisión. Éstos comparten una estructura similar: un sujeto o agente se enfrenta a una situación en la que tiene que elegir una de varias alternativas, cada elección traerá consigo un resultado *inmediato*, y las consecuencias de ese resultado impactarán de alguna forma al agente (y en ocasiones a otros agentes también). A este tipo de problemas se les denomina **deterministas**.

Para que el agente tome una decisión inteligente deberá estar consciente de tres características fundamentales del problema: ¿Cuáles son sus posibles elecciones? ¿Cuál es el resultado de cada una de éstas? ¿Cómo puede afectar cada resultado su bienestar? Entre mayor sea el entendimiento de estos tres aspectos, mejores acciones escogerá. Entonces, cualquier problema de decisión determinista estará constituido por tres partes:

1. Un conjunto de **acciones** A , que representa todas las alternativas que un agente puede escoger.
2. Un conjunto de **resultados** \mathcal{O} , que son las posibles consecuencias que pueden resultar de cualquiera de las acciones.
3. Una **relación de preferencia** \succeq en \mathcal{O} , que describe la forma en que el agente ordena el conjunto de posibles resultados, del más deseado al menos deseado. La notación $x \succeq y$ significa “ x es al menos tan bueno como y ”, donde $x, y \in \mathcal{O}$.

Así pues en el problema del desayuno, el conjunto de acciones podría ser $A = \{\text{Ch}, \text{CF}, \text{Z}\}$, donde Ch= Cheerios, CF=Corn Flakes y Z=Zucaritas. El resultado de escoger un cereal $a \in A$ es justamente comer ese cereal, por lo que se puede hacer una identificación 1 a 1 entre el conjunto de resultados y el de acciones; es decir, $\mathcal{O} = A$. Una posible relación de preferencia podría ser: $\text{Ch} \succeq \text{CF}$, $\text{Ch} \succeq \text{Z}$, $\text{CF} \succeq \text{Z}$.

Notemos que en el ejemplo anterior la relación de preferencia satisface dos propiedades fundamentales:

- A1.** La relación \succeq es **completa**: $\forall x, y \in \mathcal{O}$ se tiene $x \succeq y$ o $y \succeq x$.
- A2.** La relación \succeq es **transitiva**: $\forall x, y, z \in \mathcal{O}$, si $x \succeq y$ y $y \succeq z$ entonces $x \succeq z$.

La completez asegura que el agente es capaz de ordenar cualquier par de resultados, no le permite estar indeciso entre dos resultados. La transitividad garantiza que no habrá contradicciones en el ordenamiento. Por ejemplo, si se reemplazara la relación por: $Ch \succeq CF$, $Z \succeq Ch$, $CF \succeq Z$; el problema se vuelve insoluble, ya que para cualquier cereal que el agente escoja siempre habrá otro mejor y nunca será capaz de tomar una decisión. De aquí el interés por relaciones completas y transitivas. A partir de ahora asumiremos que la relación \succeq cumple **A1** y **A2**.

Definición 1.1. Una relación de preferencia \succeq completa y transitiva induce la relación de *preferencia estricta* definida por

$$x \succ y : \iff y \not\succeq x,$$

y la relación de *indiferencia* \sim dada por

$$x \sim y : \iff x \succeq y \quad y \quad y \succeq x.$$

Observación 1.1. Se verifica fácilmente que la completez y transitividad de \succeq son equivalentes a las siguientes propiedades de \succ :

1. **Asimetría:** Si $x \succ y$ entonces $y \not\succeq x$.
2. **Transitividad negativa:** Si $x \succ y$ y $y z \in \mathcal{O}$, entonces $x \succ z$ o $z \succ y$.

Observación 1.2. La relación de indiferencia \sim es una relación de equivalencia; i.e., es reflexiva, simétrica y transitiva.

1.1.2. Elección en ambientes riesgosos

Ahora que tenemos un lenguaje coherente y preciso para describir problemas de decisión nos moveremos a una situación más compleja. En general nuestras elecciones no se traducen en un resultado particular, no siempre se tiene certeza sobre las consecuencias de nuestras acciones; situación típica en Finanzas.

Imaginemos un inversionista que quiere invertir su capital en un instrumento financiero, aquel que le otorgue el mayor rendimiento. Supongamos que en el mercado existen dos acciones bursátiles: a con un precio de \$90 y b con precio \$100. De acuerdo con ciertos análisis especializados, el inversionista determina que dentro de un año la acción a tendrá 60% de probabilidad de incrementar su valor a \$99 y un 40% de probabilidad de bajar su precio a \$81, mientras que los posibles escenarios de b serán \$110 o \$90 ambos con la misma probabilidad de ocurrencia. La pregunta es, ¿en qué acción invertir? Aquí $A = \{a, b\}$, ambas acciones tienen como posibles rendimientos 10% y -10%, así que $\mathcal{O} = \{0.1, -0.1\}$ y la relación queda determinada

por $0.1 \succeq -0.1$. Notemos que en este caso la terna $(A, \mathcal{O}, \succeq)$ no describe completamente el problema. No hay una identificación directa entre A y \mathcal{O} , en su lugar existe incertidumbre sobre el resultado que ocurrirá. La incertidumbre está ligada a la elección hecha por el inversionista y queda cuantificada por probabilidades; en otras palabras, cada elección en A induce una medida de probabilidad sobre \mathcal{O} :

$$\begin{aligned} a &\rightarrow (0.6, 0.4) \\ b &\rightarrow (0.5, 0.5) \end{aligned}$$

Un ambiente como este, donde la incertidumbre puede ser descrita mediante distribuciones de probabilidad perfectamente determinadas, se le conoce como **ambiente riesgoso**.¹

Para analizar problemas de este tipo, la relación de preferencia necesita ser extendida al conjunto de **escenarios de riesgo** $\mathcal{P} := \{\text{medidas de probabilidad inducidas en } \mathcal{O}\}$. Se asumirá que siempre es posible realizar dicha extensión, pues, al menos de forma intuitiva, es natural suponer que el agente ordenará las medidas de acuerdo a aquellas que asignen probabilidades más altas a los resultados más deseados. De aquí en adelante \succeq representará una relación de preferencia en \mathcal{P} .²

Asociada al conjunto \mathcal{P} , obviamente existe cierta σ - álgebra inducida sobre la cual están definidos todos los escenarios de riesgo, denotaremos por \mathbb{O} a esta σ - álgebra.

Definición 1.2. A la cuaterna $(A, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \succeq)$ se le conoce como *problema de decisión estocástico* o *problema de decisión bajo riesgo*.

Observación 1.3. Los problemas de decisión estocásticos son generalizaciones directas de los problemas deterministas. En un problema determinista se tiene que $\mathcal{P} = \{\delta_x : x \in \mathcal{O}\}$, donde δ_x es la medida degenerada que asigna probabilidad 1 al resultado x .

1.2. Utilidad esperada

John von Neumann y Oskar Morgenstern (1944), los dos padres fundadores de la Teoría de Juegos, desarrollaron una metodología que permite evaluar de manera precisa cuan valioso es un escenario de riesgo para un agente, cómo se comparan

¹El economista Frank Knight, en su trabajo *Risk, Uncertainty, and Profit* (1921), estableció la diferencia entre lo que se debe entender por un ambiente riesgoso y un ambiente de **incertidumbre «puro»**. En el primero las distribuciones de probabilidad son conocidas, mientras que en el segundo no hay distribuciones dadas a priori.

²En el contexto microeconómico a los elementos de \mathcal{P} se les conoce como **loterías**.

diferentes escenarios de riesgo entre sí y cómo éstos se comparan con eventos seguros (escenarios degenerados). La idea intuitiva es acerca de promedios. Nuestras acciones pueden ponernos en situaciones ventajosas o en algunas otras ocasiones traer resultados desfavorables; pero si *en promedio* las cosas resultan del lado positivo, entonces se puede pensar que dichas acciones son «buenas», porque las ganancias tienen tal relevancia que compensan las pérdidas. Tomaremos esta idea y la usaremos para atacar los problemas de decisión estocásticos.

1.2.1. Representación numérica de relaciones de preferencia

La relación mayor o igual sobre los número reales \geq es una relación de preferencia familiar. El conjunto ordenado (\mathcal{P}, \succeq) puede resultar tan abstracto que sería mucho más conveniente trabajar en (\mathbb{R}, \geq) . Una forma de conseguirlo es representando los escenarios de riesgo por número reales, y las preferencias del agente por la relación \geq . A dicha representación se le conoce como representación numérica, y se define como sigue.

Definición 1.3. Una *representación numérica* de la relación de preferencia \succeq es una función $U : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall \mu, \nu \in \mathcal{P}$

$$\mu \succeq \nu \iff U(\mu) \geq U(\nu),$$

equivalentemente

$$\mu \succ \nu \iff U(\mu) > U(\nu).$$

En otras palabras, una representación numérica U es una función que asocia cada escenario de riesgo μ con el número real $U(\mu)$ de tal manera que entre más preferido sea dicho escenario, mayor será el número real asociado.

Notemos que la representación U no es única: Si f es cualquier función creciente, entonces $V(\mu) := f(U(\mu))$ es de nuevo una representación numérica.

Con fines técnicos asumiremos que el conjunto \mathcal{P} es convexo; esto es, $\forall \mu, \nu \in \mathcal{P}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$ la **distribución compuesta** $\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu$ también pertenece a \mathcal{P} .³

³Las distribuciones compuestas representan situaciones que se desarrollan en dos pasos. Primero se decide algún escenario de riesgo, μ o ν con probabilidades α y $1 - \alpha$, respectivamente. Después, el escenario resultante en el primer paso es realizado.

Definición 1.4. A una representación numérica U se le llama *representación de von Neumann-Morgenstern* si es de la forma

$$U(\mu) = \int u d\mu,$$

donde u es alguna función real en \mathcal{O} .

Así, cuando existe una representación de von Neumann-Morgenstern, toda la información sobre las preferencias descritas por \succeq quedan resumidas en la función u .

Cualquier representación de von Neumann-Morgenstern U es **lineal en probabilidades**, en el sentido

$$U(\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu) = \alpha U(\mu) + (1 - \alpha)U(\nu).$$

Este tipo de linealidad es deseable y resulta conveniente. Notemos que la existencia de una representación U lineal, implica las siguientes dos propiedades de \succeq :

A3. La relación \succeq satisface la propiedad o **axioma de independencia**:

$$\mu \succ \nu \implies \alpha\mu + (1 - \alpha)\lambda \succ \alpha\nu + (1 - \alpha)\lambda, \quad \forall \lambda \in \mathcal{P}, \forall \alpha \in (0, 1].$$

A4. La relación \succeq satisface la propiedad o **axioma Arquimediano**: Si $\mu \succ \lambda \succ \nu$ entonces existen $\alpha, \beta \in (0, 1)$ tal que

$$\alpha\mu + (1 - \alpha)\nu \succ \lambda \succ \beta\mu + (1 - \beta)\nu.$$

El axioma de independencia establece que si el escenario μ es preferido sobre ν , entonces en una elección entre dos situaciones aleatorias que son idénticas excepto que μ ocurrirá con probabilidad α en una y ν con probabilidad $1 - \alpha$ en la otra, la situación que involucra a μ será preferida. Por otra parte, el axioma Arquimediano dice, a grandes rasgos, que no existe escenario infinitamente deseado o infinitamente indeseado. Si por ejemplo, ν fuera considerado infinitamente indeseado, entonces probablemente no existiría $\delta := 1 - \alpha$ lo suficientemente pequeña para la cual uno correría el riesgo de obtener ν (con probabilidad δ) en un intento por conseguir μ en lugar de λ (i.e., para el cual $(1 - \delta)\mu + \delta\nu \succ \lambda$).

Definición 1.5. Una relación de preferencia \succeq se dice que es *racional* si cumple los axiomas **A1-A4**. Un agente se dirá que es *racional* si: 1) su relación de preferencia lo es y 2) escoge acciones que maximizan su bienestar.

De manera recíproca, las propiedades de independencia y continuidad implican la existencia de una representación numérica lineal.

Teorema 1.1. Supóngase que \succeq es una relación de preferencia racional en \mathcal{P} , entonces existe una representación numérica lineal U de \succeq . Aún más, U es única salvo transformaciones afines; i.e. cualquier otra representación \tilde{U} con estas propiedades se puede escribir $\tilde{U} = aU + b$, para algunos $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$.

Demostración. Véase el Teorema 2.21 (pág. 58) en Föllmer y Schied [FS11]. \square

1.2.2. Teoremas de caracterización para representaciones del tipo von Neumann-Morgenstern

La linealidad de una representación numérica no implica necesariamente que sea del tipo von Neumann-Morgenstern.⁴ Sin embargo, en dos casos importantes dicha representación lineal ya estará en la forma von Neumann-Morgenstern. Este es el contenido de los siguientes dos teoremas. Para el primero, recordemos que una **distribución de probabilidad simple** sobre \mathcal{O} , es una medida de probabilidad μ en \mathcal{O} que puede ser escrita como una combinación convexa finita de medidas degeneradas; i.e., existen $x_1, \dots, x_N \in \mathcal{O}$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in (0, 1]$ con $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ tales que

$$\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{x_i}.$$

Teorema 1.2. Supongamos que \mathcal{P} es el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad simples sobre \mathcal{O} y que \succeq es una relación de preferencia racional en \mathcal{P} . Entonces existe una representación von Neumann-Morgenstern U . Aún más, U y u son únicas salvo transformaciones afines.

Demostración. Del Teorema 1.1 sabemos que existe una representación numérica lineal U . Definimos $u(x) = U(\delta_x)$, $x \in \mathcal{O}$. Si $\mu \in \mathcal{P}$ es de la forma $\mu = \alpha_1 \delta_{x_1} + \dots + \alpha_N \delta_{x_N}$, entonces

$$U(\mu) = \sum_{i=1}^N \alpha_i U(\delta_{x_i}) = \int u(x) \mu(dx).$$

La cual es la representación de von Neumann-Morgenstern deseada. \square

⁴Véase el Ejemplo 2.26 (pág. 63) en Föllmer y Schied [FS11]

Sobre un conjunto de resultados finito cualquier medida de probabilidad es simple. Así, obtenemos el siguiente teorema como un caso especial.

Teorema 1.3. Supongamos que \mathcal{P} es el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad sobre un conjunto finito \mathcal{O} y que \succeq es una relación de preferencia racional en \mathcal{P} . Entonces existe una representación von Neumann-Morgenstern U . Aún más, U y u son únicas salvo transformaciones afines.

La situación se vuelve más compleja cuando consideramos la existencia de una representación de von Neumann-Morgenstern en un conjunto de resultados infinito; de hecho, podría no existir.⁵ Para este propósito, el axioma Arquimedeano tiene que ser suplementado, asumiendo propiedades adicionales de continuidad de \succeq .

A4'. La relación \succeq satisface la propiedad o **axioma de continuidad**: Si para todo $\mu \in \mathcal{P}$ los conjuntos

$$\overline{B}(\mu) := \{\nu \in \mathcal{P} \mid \nu > \mu\} \quad \text{y} \quad \underline{B}(\mu) := \{\nu \in \mathcal{P} \mid \mu > \nu\}$$

son elementos de la topología débil del conjunto \mathcal{P} .⁶

Teorema 1.4. Supongamos que \mathcal{P} es el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad sobre un espacio métrico separable \mathcal{O} , definidas en la σ -álgebra \mathbb{O} de conjuntos borelianos, y que \succeq es una relación de preferencia que cumple los axiomas **A1**, **A2**, **A3** y **A4'**. Entonces existe una representación von Neumann-Morgenstern

$$U(\mu) = \int u d\mu,$$

para la cual la función $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada y continua. Aún más, U y u son únicas salvo transformaciones afines.

Demostración. Véase el Teorema 2.27 (pág. 63) de Föllmer y Schied [FS11]. □

1.2.3. Actitudes frente al riesgo

Supongamos que los escenarios de riesgo corresponden a las distribuciones de ciertos instrumentos financieros de interés. Dichas distribuciones pueden ser vistas como medidas de probabilidad con resultados monetarios en algún intervalo de la recta real. Entonces tomaremos a \mathcal{P} como un conjunto fijo de medidas de probabilidad borelianas en un intervalo fijo $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$. Adicionalmente, supondremos que \mathcal{P} es

⁵Véase el Ejemplo 2.26 (pág. 63) en Föllmer y Schied [FS11].

⁶Temas referentes a Análisis Funcional como topologías débiles pueden ser consultados en Rudin [Rud91].

convexo, que contiene a todas las distribuciones degeneradas δ_x para $x \in \mathcal{O}$ y que cada $\mu \in \mathcal{P}$ tiene esperanza bien definida

$$m(\mu) := \int x\mu(dx) \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

Observación 1.4. Para un activo financiero cuyo payoff (descontado) tiene distribución conocida μ , el valor esperado $m(\mu)$ se le conoce comúnmente como el **precio justo** del activo.

Definición 1.6. Una relación de preferencia se dice que es

1. *monótona* si

$$x > y \Rightarrow \delta_x \succ \delta_y.$$

2. *aversa al riesgo* si para cada $\mu \in \mathcal{P}$

$$\delta_{m(\mu)} \succ \mu \quad \text{a menos} \quad \mu = \delta_{m(\mu)}.$$

3. *neutral al riesgo* si para cada $\mu \in \mathcal{P}$

$$\delta_{m(\mu)} \sim \mu.$$

4. *amante al riesgo* si para cada $\mu \in \mathcal{P}$

$$\delta_{m(\mu)} \prec \mu \quad \text{a menos} \quad \mu = \delta_{m(\mu)}.$$

Es fácil caracterizar estas propiedades para aquellas relaciones que admiten una representación de von Neumann-Morgenstern.

Proposición 1.1. Supóngase que la relación \succeq tiene una representación de von Neumann-Morgenstern

$$U(\mu) = \int u d\mu.$$

Entonces

- a) \succeq es monótona si y sólo si u es estrictamente creciente.
- b) \succeq es aversa al riesgo si y sólo si u es estrictamente cóncava.
- c) \succeq es neutral al riesgo si y sólo si u es lineal.
- d) \succeq es amante al riesgo si y sólo si u es estrictamente convexa.

Demostración. a): La monotonía de \succeq es equivalente a

$$u(x) = U(\delta_x) > U(\delta_y) = u(y), \quad \text{para } x > y.$$

b): Si \succeq es aversa al riesgo, entonces

$$\delta_{\alpha x + (1-\alpha)y} \succ \alpha \delta_x + (1-\alpha) \delta_y,$$

para $x \neq y$ y $\alpha \in (0, 1)$. De esta forma,

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y).$$

Recíprocamente, si u estrictamente cóncava, entonces la desigualdad de Jensen implica aversión al riesgo:

$$U(\delta_{m(\mu)}) = u\left(\int x \mu(dx)\right) \geq \int u(x) \mu(dx) = U(\mu),$$

con igualdad si y sólo si $\mu = \delta_{m(\mu)}$.

Los casos c) y d) son análogos. □

La Proposición 1.1 establece una interpretación geométrica de la aversión al riesgo cuando existe una representación de von Neumann-Morgenstern. Hay una relación íntima entre el nivel de aversión y la forma de la función u ; entre más averso es el agente, «más cóncava» es u . Únicamente resta precisar qué significa que una función sea «más cóncava» que otra. En la [sec. 1.3](#) definiremos el coeficiente de Arrow-Pratt, y veremos que éste constituye una medida de concavidad.

Debido a la interpretación monetaria del conjunto de resultados \mathcal{O} , es natural suponer que la relación \succeq es *monótona*. Cualquier agente financiero preferirá recibir más dinero que recibir menos.

Definición 1.7. Una función $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ se le llamará *función de utilidad* si es estrictamente creciente y continua. A una representación de von Neumann-Morgenstern

$$U(\mu) = \int u d\mu$$

en términos de una función de utilidad u se le conoce como *representación de utilidad esperada*.

Observación 1.5. Típicamente, en las aplicaciones no se trabaja de manera directa con los escenarios de riesgo; se suele trabajar con las variables aleatorias asociadas. De esta forma, si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ es un espacio de probabilidad, tal que cada escenario $\mu \in \mathcal{P}$ corresponde con la distribución de cierta variable aleatoria X definida en él, entonces la representación de utilidad esperada puede ser escrita como

$$\mathbf{E}(u(X)) = \int u d\mu.$$

De aquí en adelante consideraremos una relación \succeq en \mathcal{P} que admite una representación de utilidad esperada. Así pues, aplicando el teorema de valor medio para la integral de Lebesgue, para cualquier $\mu \in \mathcal{P}$ existe un único número real $c(\mu)$ tal que

$$u(c(\mu)) = U(\mu) = \int u d\mu. \quad (1.2)$$

Se sigue que

$$\delta_{c(\mu)} \sim \mu;$$

i.e., hay indiferencia entre el escenario μ y el escenario donde se recibe de manera segura la cantidad $c(\mu)$.

Definición 1.8. El *equivalente cierto* del escenario $\mu \in \mathcal{P}$ con respecto a u está definido como el número $c(\mu)$ de (1.2), y a la diferencia

$$\pi(\mu) := m(\mu) - c(\mu)$$

se le conoce como *prima de riesgo* de μ .

Cuando u es una función de utilidad de aversión al riesgo se tiene

$$u(c(\mu)) = U(\mu) < U(\delta_{m(\mu)}) = u(m(\mu)),$$

para cualquier escenario $\mu \neq \delta_{m(\mu)}$. La monotonía de u conduce a

$$c(\mu) < m(\mu) \quad \text{para } \mu \neq \delta_{m(\mu)}.$$

Como consecuencia la prima de riesgo $\pi(\mu)$ asociada con esta función de utilidad resulta siempre no negativa, y positiva tan pronto como la distribución μ conlleve algún riesgo.

Procediendo de manera análoga, se demuestra:

Proposición 1.2. La relación \succeq es

- a) aversa al riesgo si y sólo si $\pi(\mu) \geq 0$ para todo escenario μ .
- b) neutral al riesgo si y sólo si $\pi(\mu) = 0$ para todo escenario μ .
- c) amante al riesgo si y sólo si $\pi(\mu) \leq 0$ para todo escenario μ .

Observación 1.6. El equivalente cierto $c(\mu)$ puede ser visto como una cota superior para cualquier precio de μ que sería aceptable para un agente financiero con función de utilidad u . Así, el precio justo $m(\mu)$ debe ser reducido en por lo menos el valor de la prima de riesgo si uno quiere que el agente compre el activo con distribución μ . Alternativamente, supongamos que el agente posee el activo con distribución μ , entonces la prima de riesgo puede ser vista como la cantidad que el agente estaría dispuesto a pagar con el fin de reemplazar al activo por su valor esperado $m(\mu)$.

Gracias a la Proposición 1.2 ahora resulta natural definir:

Definición 1.9. Sean u y \tilde{u} dos funciones de utilidad que representan preferencias sobre resultados monetarios. La preferencia u tiene más aversión al riesgo que \tilde{u} , si las correspondientes primas de riesgo satisfacen

$$\pi(\mu) \geq \tilde{\pi}(\mu) \text{ para todo escenario } \mu.$$

1.3. Medidas de aversión al riesgo de Arrow-Pratt

Consideremos la prima de riesgo de $\pi(\mu)$ de un escenario μ . Usando una aproximación de Taylor en $c(\mu)$ al rededor de $m := m(\mu)$ tenemos,

$$u(c(\mu)) \approx u(m) + u'(m)(c(\mu) - m) = u(m) + u'(m)\pi(\mu). \quad (1.3)$$

Por otra parte, suponiendo que μ tiene varianza finita $\text{var}(\mu)$,

$$\begin{aligned} u(c(\mu)) &= \int u(x) \mu(dx) \\ &= \int \left[u(m) + u'(m)(x - m) + \frac{1}{2}u''(m)(x - m)^2 + r(x) \right] \mu(dx) \\ &\approx u(m) + \frac{1}{2}u''(m)\text{var}(\mu), \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde $r(x)$ denota el término residual en la expansión de Taylor de u . Combinando (1.3) y (1.4):

$$\pi(\mu) \approx -\frac{u''(m(\mu))}{2u'(m(\mu))} \text{var}(\mu) =: \frac{1}{2}A(m(\mu)) \text{var}(\mu).$$

Así, $A(m(\mu))$ es el factor por el cual un agente con preferencias representadas por una función de utilidad u pondera el riesgo, medido por $\frac{1}{2}\text{var}(\mu)$, con el fin de determinar la prima de riesgo que está dispuesto a pagar.

Definición 1.10. Supóngase que u es una función de utilidad dos veces continuamente diferenciable. Al cociente

$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

se le llama el *coeficiente de aversión al riesgo absoluta de Arrow-Pratt*.

Observación 1.7. La Proposición 1.1 implica que el coeficiente de Arrow-Pratt $A(x)$ es: positivo para agentes aversos al riesgo, cero para agentes neutrales al riesgo y negativo para agentes amantes al riesgo.

El siguiente Teorema justifica la utilización del coeficiente de Arrow-Pratt como medida de aversión al riesgo, o equivalentemente, como medida de concavidad de la función de utilidad.

Teorema 1.5. Supóngase que u y \tilde{u} son funciones de utilidad dos veces continuamente diferenciables. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) $A(x) \geq \tilde{A}(x)$ para todo $x \in \mathcal{O}$.
- b) Existe una función cóncava estrictamente creciente F tal que $u = F \circ \tilde{u}$.
- c) u representa más aversión al riesgo que \tilde{u} .

Demostración. a) \implies b): Como \tilde{u} es estrictamente creciente, podemos definir su función inversa, w . Entonces $F(t) := u(w(t))$ es estrictamente creciente, dos veces diferenciable y satisface $u = F \circ \tilde{u}$. Para verificar que F es cóncava calculamos las dos primeras derivadas de w :

$$w' = \frac{1}{\tilde{u}'(w)}, \quad w'' = \tilde{A}(w) \cdot \frac{1}{\tilde{u}'(w)^2}.$$

Ahora calculamos las derivadas de F :

$$F' = u'(w) \cdot w' = \frac{u'(w)}{\tilde{u}'(w)} > 0,$$

y

$$\begin{aligned} F'' &= u''(w) \cdot (w')^2 + u'(w) \cdot w'' \\ &= \frac{u''(w)}{\tilde{u}'(w)^2} [\tilde{A}(x) - A(x)] \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Lo que demuestra que F es cóncava.

b) \implies c): Para cada $\mu \in \mathcal{P}$, los respectivos equivalentes ciertos $c(\mu)$ y $\tilde{c}(\mu)$ satisfacen vía la desigualdad de Jensen

$$\begin{aligned} u(c(\mu)) &= \int u d\mu = \int F \circ \tilde{u} d\mu \\ &\leq F\left(\int \tilde{u} d\mu\right) = F(\tilde{u}(\tilde{c}(\mu))) = u(\tilde{c}(\mu)). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Concluyendo así que $\pi(\mu) \geq \tilde{\pi}(\mu)$.

c) \implies a): Si la condición a) es falsa, entonces existe un intervalo abierto $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}$ tal que $A(x) < \tilde{A}(x)$ para todo $x \in \mathcal{V}$. Sea $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{u}(\mathcal{V})$ y denotemos de nuevo por w a la inversa de \tilde{u} . Entonces la función $F(t) := u(w(t))$ será estrictamente cóncava en el intervalo abierto $\tilde{\mathcal{V}}$ debido a (1.5). De esta manera, si μ es una medida con soporte en \mathcal{V} , entonces se cumplirá la desigualdad contraria en (1.6) y de hecho será estricta, a menos que μ sea una medida degenerada. Por lo tanto $\pi(\mu) < \tilde{\pi}(\mu)$. \square

La Fig. 1.1 muestra un ejemplo de dos funciones de utilidad correspondientes a diferentes coeficientes de Arrow-Pratt. Observamos gráficamente la equivalencia a) \iff b) del Teorema 1.5.

Con el coeficiente de Arrow-Pratt podemos caracterizar completamente las preferencias de los agentes. Dada una función de aversión al riesgo $A(x)$ continua, es posible recuperar la función de utilidad original, resolviendo la ecuación diferencial ordinaria

$$u''(x) + u'(x) A(x) = 0.$$

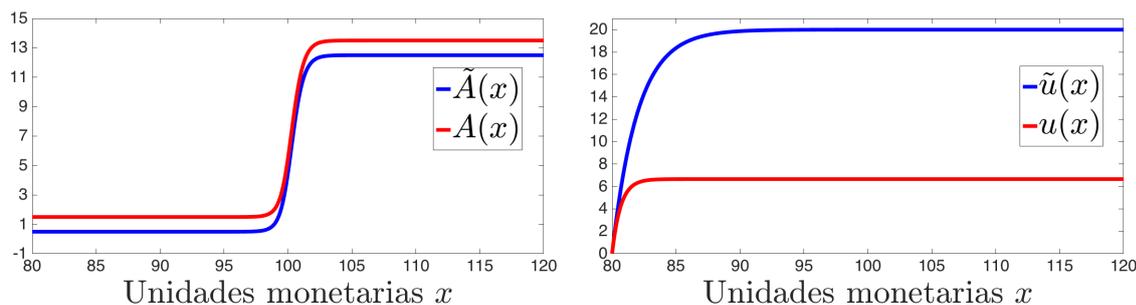


Figura 1.1.: Funciones de utilidad asociadas a dos diferentes niveles de aversión al riesgo. El primer nivel es $\tilde{A}(x) = 2(1.5 + \tanh(x - 100))^2$ y el segundo $A(x) = 1 + 2(1.5 + \tanh(x - 100))^2$. Las condiciones iniciales son $\tilde{u}(80) = u(80) = 0$ y $\tilde{u}'(80) = u'(80) = 10$.

Existe una infinidad de funciones de utilidad asociadas a la función de aversión al riesgo A ; una por cada par de condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(x_0) &= a_0, \\ u'(x_0) &= b_0. \end{aligned}$$

Sin embargo, todas estas soluciones son transformaciones afines unas de otras, y por tanto representan a la misma relación de preferencia \succeq . Con esto concluimos que, *lo más importante de una función de utilidad es su concavidad*; los niveles a_0 y b_0 son irrelevantes.

1.3.1. Funciones de utilidad estándar

Las siguientes clases de funciones de utilidad u y sus correspondientes coeficientes de aversión al riesgo son ejemplos estándar en la literatura.

- **Aversión al riesgo absoluta constante (CARA⁷):** $A(x)$ es igual a alguna constante A en $\mathcal{O} = \mathbb{R}$. Como $A(x) = -(\log u')'(x)$, se sigue que

$$u(x) = \begin{cases} a + b \cdot e^{-Ax} & \text{para } A \neq 0, \\ a + b \cdot x & \text{para } A = 0. \end{cases}$$

Usando una transformación afín, u puede ser normalizada a

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{A} - \frac{1}{A} \cdot e^{-Ax} & \text{para } A \neq 0, \\ x & \text{para } A = 0. \end{cases}$$

⁷Del inglés **Constant Absolut Risk Aversion**.

- **Aversión al riesgo absoluta hiperbólica (HARA⁸):** $A(x) = (1 - \gamma) / x$ en $\mathcal{O} = (0, \infty)$ para alguna constante $\gamma \neq 1$. Salvo transformaciones afines, tenemos

$$u(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{para } \gamma = 0, \\ \frac{1}{\gamma} x^\gamma & \text{para } \gamma \neq 0. \end{cases}$$

Por supuesto, estas funciones pueden ser trasladadas a cualquier intervalo $\mathcal{O} = (a, \infty)$. A veces, a esta clase también se le conoce como **CRRA**, porque su «aversión al riesgo relativa» $R(x) := xA(x)$ es constante. Este tipo de funciones de utilidad presentan **aversión al riesgo absoluta decreciente (DARA⁹)** para $\gamma < 1$ y **aversión al riesgo absoluta creciente (IARA¹⁰)** para $\gamma > 1$.

⁸Del inglés **Hyperbolic Absolute Risk Aversion**.

⁹Del inglés **Decreasing Absolute Risk Aversion**.

¹⁰Del inglés **Increasing Absolute Risk Aversion**.

2. Ilquidez de los mercados financieros

En este capítulo se presenta el modelo matemático en el que se fundamentan los subsecuentes desarrollos de esta tesis; la versión continua del modelo de Almgren y Chriss. Este modelo captura el impacto que sufre el precio de un activo cuando se ejecutan transacciones grandes sobre él.

Empezaremos por dar un panorama global sobre la *liquidez*; una propiedad importante que afecta a todos en los mercados financieros. Siendo un término tan común en el argot financiero, se esperaría estuviera bien definido y fuera entendido universalmente. Sin embargo, liquidez significa diferentes cosas para diferentes personas. La confusión se debe al hecho que la liquidez está compuesta por diferentes dimensiones. Por tanto revisaremos las dimensiones que la componen.

Después, introduciremos los ingredientes que componen al modelo de mercado ilíquido y presentaremos un resumen de resultados existentes en la literatura asociados a éste.

Finalmente, plantearemos dos problemas en nuestro modelo de mercado ilíquido cuando se permite un horizonte infinito, y que serán objeto de estudio en los capítulos subsecuentes.

2.1. ¿Qué es la liquidez?

La liquidez del mercado es el grado en que un mercado permite comprar y vender activos a precios estables. Es un concepto que involucra una variedad de propiedades transaccionales de los mercados financieros. Éstas incluyen: la **estrechez**¹, que se refiere a la competitividad intensa entre los participantes del mercado que conduce a diferenciales entre precios de compra y venta (bid-ask spreads) pequeños; la **profundidad**, la habilidad del mercado para soportar órdenes de gran tamaño sin impactar los precios; y la **resiliencia**, la capacidad o velocidad con la que los precios

¹Del inglés **tightness**.

se recuperan de un choque aleatorio. Estas propiedades son las llamadas **dimensiones de liquidez** y se le atribuyen a Kyle [Ky185]. Así, cuando se hable de la **ilquidez del mercado**, se estará refiriendo al grado en que el mercado carece de alguna de estas dimensiones.

Un ejemplo de un mercado ideal pero irrealista es el mercado Black-Scholes [BS73]. Con el propósito de obtener una fórmula cerrada para el precio de una opción, el modelo asume que el mercado es infinitamente estrecho, no hay bid-ask spread, y que es infinitamente profundo, se puede trasaccionar cualquier cantidad de los activos involucrados sin afectar sus precios. Bajo esta importante simplificación, se obtiene que el precio de la opción depende únicamente del precio actual del activo, el plazo y variables que son conocidas y constantes.

Asumir cierto grado de liquidez en el mercado ha demostrado ser un supuesto conveniente, que permite desarrollar en muchas direcciones y aspectos la Teoría Matemática contenida en las Finanzas. Sin embargo, este no es el caso de las transacciones a gran escala. Los participantes del mercado ajustan sus ofertas de acuerdo al volumen que se está operando de los activos; las órdenes grandes de compra impactan los precios hacia arriba, y las de venta hacia abajo. Así, con el fin de representar de mejor manera la realidad del mercado, en los últimos años se han desarrollado modelos estocásticos para los precios de los activos que *sí* toman en cuenta los efectos retroalimentativos que tienen las órdenes. A éstos se les conoce como **modelos de impacto de mercado**.

Una de las primeras clases de modelos de impacto de mercado que han sido propuestas hasta el momento, y que ha sido ampliamente usada en la industria financiera, está basada en los modelos a tiempo discreto de Bertsimas-Lo [BL98] y Almgren-Chris [AC99, AC01], y en su versión a tiempo continuo por Almgren [Alm03]. Estos modelos distinguen entre dos componentes de impacto. El primer componente es *temporal* y sólo afecta a la orden individual que se ha ejecutado. El segundo componente es *permanente* y afecta a todas las órdenes actuales y futuras por igual.

El **impacto temporal** representa el costo de la urgencia. Es la prima que los compradores deben proveer al mercado para atraer vendedores adicionales y así poder completar su operación. Simétricamente, es el descuento que los vendedores necesitan proveer al mercado para atraer compradores adicionales. Este costo puede ser manejado eficientemente durante la implementación de una estrategia de transacciones.

El **impacto permanente** representa el costo del componente informacional. El contenido informacional, real o percibido, causa que los participantes del mercado ajusten sus precios a un nuevo valor justo percibido. La lógica detrás de esto es que los agentes informados típicamente compran activos subvaluados y venden activos sobrevaluados. Conforme los participantes observan órdenes de compra, su percepción, al menos hasta cierto grado, es que el activo está subvaluado y ajustarán sus

ofertas de venta hacia arriba. Conforme los participantes observan órdenes de venta, su percepción, al menos hasta cierto grado, es que el activo está sobrevaluado y ajustarán sus ofertas de compra hacia abajo. Es un costo inevitable.

Mientras que las ventajas y desventajas de los modelos mencionados antes siguen siendo tema de investigación actual, en esta tesis se aplicará el modelo de Almgren [Alm03]. Pues es lo suficientemente complejo para capturar la iliquidez del mercado y lo suficientemente simple para permitir un análisis matemático detallado.

2.2. Modelo de mercado

Consideremos un agente que opera grandes cantidades de cierto activo riesgoso. Éste escoge una **estrategia de transacciones**, la cual describiremos por el número X_t de unidades de activo en su posesión al tiempo t . Asumiremos que el mapeo $t \rightarrow X_t$ es absolutamente continuo con derivada \dot{X}_t ; i.e.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \dot{X}_s ds.$$

Debido a la naturaleza ilíquida del mercado, la **tasa de transacciones** \dot{X}_t mueve el precio de mercado. Siguiendo el modelo de impacto de mercado lineal de Almgren [Alm03] (véase el [Apéndice A](#) para un precursor en tiempo discreto), asumiremos que un incremento en la orden de $\dot{X}_t dt$ unidades induce un impacto temporal $\eta \dot{X}_t$, el cual desaparece instantáneamente y sólo afecta la orden actual, y un impacto permanente de $\gamma \dot{X}_t dt$, el cual se acumula en el tiempo. Adicionalmente, supondremos que el **proceso de precios inafectado** $\{\tilde{S}_t\}_{t \geq 0}$, aquel que refleja las acciones de otros agentes así como los eventos externos económicos y que hubiera ocurrido en ausencia de ordenes tan grandes, será conducido por un movimiento Browniano estándar con volatilidad σ . De esta forma, la dinámica resultante para el **proceso de precios de mercado** $\{S_t\}_{t \geq 0}$, respecto a la estrategia X , estará dada por

$$S_t = \tilde{S}_t + \gamma (X_t - X_0) + \eta \dot{X}_t, \quad (2.1)$$

$$\tilde{S}_t = S_0 + \sigma W_t, \quad (2.2)$$

donde $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar definido en cierto espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$; y S_0 (precio al tiempo cero), σ (parámetro de volatilidad), γ (parámetro de impacto permanente) y η (parámetro de impacto temporal) son constantes positivas.

A primera vista, parece que un defecto del modelo (2.1)-(2.2) es que permite precios del activo negativos; sin embargo, en la práctica ocurre que incluso que hasta las

posiciones más grandes son liquidadas típicamente en cuestión de pocos días e incluso horas (véase por ejemplo [ATHL05]); por lo que la posibilidad de precios negativos ocurre con una probabilidad despreciable. En esta escala, el proceso de precios puede ser aproximado de mejor manera por un movimiento Browniano aritmético en lugar de, por ejemplo, uno geométrico.

2.3. Algunos resultados sobre el problema de liquidación óptima

Supongamos que el agente necesita liquidar una posición inicial de $x_0 > 0$ antes del tiempo $T > 0$. Por tanto, su estrategia de mercado $X = \{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ estará sujeta a las condiciones de frontera

$$X_0 = x_0, \quad (2.3)$$

$$X_T = 0. \quad (2.4)$$

En dicha estrategia, $-\dot{X}_t dt$ unidades de activo son vendidas al precio S_t en cada instante t . Así, las **ganancias** generadas por seguir la estrategia X son

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X) &:= \int_0^T (-\dot{X}_t) S_t dt \\ &= - \int_0^T \tilde{S}_t \dot{X}_t dt - \eta \int_0^T (\dot{X}_t)^2 dt - \gamma \int_0^T X_t \dot{X}_t dt - \gamma x_0^2 \\ &= x_0 S_0 - \frac{\gamma}{2} x_0^2 - \eta \int_0^T (\dot{X}_t)^2 dt + \int_0^T X_t d\tilde{S}_t \end{aligned} \quad (2.5)$$

Todos los términos que componen a $\mathcal{R}(X)$ pueden ser interpretados económicamente. El término $x_0 S_0$ corresponde al valor nominal de la posición inicial. El término $\frac{\gamma}{2} x_0^2$ representa los costos de liquidación resultantes del impacto permanente inducidos por ejecutar la estrategia X . Debido a la linealidad del impacto permanente, los costos de liquidación son independientes de la estrategia de liquidación. La integral $\eta \int_0^T (\dot{X}_t)^2 dt$ corresponde a los costos de transacción resultantes del impacto temporal. La integral estocástica corresponde al riesgo de volatilidad acumulado por vender en el intervalo $[0, T]$ en vez de liquidar el portafolio instantáneamente.

El **problema de liquidación óptima** consiste en maximizar cierta función objetivo, la cual podría involucrar las ganancias y/o términos que tengan que ver con el riesgo incurrido en el proceso de liquidación, sobre la clase de estrategias admisibles con las condiciones (2.3)-(2.4).

Observación 2.1. El problema de ejecución $X_0 = x_0$ y $X_T = y < x_0$, vender $(x_0 - y)$ unidades de activo antes del tiempo T , puede ser planteado equivalentemente como: $X_0 = x_0 - y$ y $X_T = 0$. El problema de liquidación es lo bastante general como para concentrar la mayor parte de nuestros esfuerzos en él.

El caso más sencillo del problema de liquidación, el cual primeramente fue considerado por Bertsimas y Lo [BL98] en tiempo discreto, corresponde a la maximización de las ganancias esperadas:

$$\mathbf{E}(\mathcal{R}(X)) = x_0 S_0 - \frac{\gamma}{2} x_0^2 - \eta \mathbf{E} \left(\int_0^T (\dot{X}_t)^2 dt \right)$$

En este caso la desigualdad de Jensen conduce a que la estrategia óptima X^* es única y se caracteriza por tener una tasa de transacciones constante:²

$$\dot{X}_t^* = -\frac{x_0}{T}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Nótese que la varianza asociada a dicha estrategia es

$$\mathbf{V}(\mathcal{R}(X^*)) = \sigma^2 \int_0^T (X_t^*)^2 dt = \frac{1}{3} \sigma^2 x_0^2 T,$$

la cual puede ser muy grande si el período T lo es.

Almgren y Chriss [AC99, AC01] fueron los primeros en señalar que no se debe de ignorar la volatilidad que inducen las estrategias. Propusieron maximizar un funcional de media-varianza de la forma

$$\mathbf{E}(\mathcal{R}(X)) - \frac{\alpha}{2} \mathbf{V}(\mathcal{R}(X)), \tag{2.6}$$

donde α es un parámetro de aversión al riesgo. Para estrategias *deterministas* X , la funcional (2.6) se convierte en

$$x_0 S_0 - \frac{\gamma}{2} x_0^2 - \int_0^T \left(\frac{\alpha}{2} \sigma^2 X_t^2 + \eta \dot{X}_t^2 \right) dt.$$

De esta forma, la maximización de media-varianza sobre estrategias deterministas es equivalente a minimizar $\int_0^T L(X_t, \dot{X}_t) dt$ donde el Lagrangiano L está dado por $L(x, p) = \frac{\alpha}{2} \sigma^2 x^2 + \eta p^2$. Técnicas estándar de cálculo de variaciones conducen a que

²Este resultado sigue siendo válido sin importar la elección para el proceso de precios inafectado \tilde{S}_t , mientras éste sea una martíngala.

$$X_t^* = x_0 \frac{\sinh \kappa (T - t)}{\sinh \kappa T}, \quad \text{donde } \kappa = \sqrt{\frac{\alpha \sigma^2}{2\eta}}, \quad (2.7)$$

es el único minimizador bajo las condiciones (2.3)-(2.4).

Las estrategias deterministas son conocidas también como **estáticas**, pues no reaccionan a los cambios en el precio del activo. Desde el inicio del proceso de liquidación, dichas estrategias están completamente determinadas; son ejecutadas independientemente del tamaño y dirección de los movimientos del precio del activo, como es el caso de (2.7). Tales estrategias deterministas no satisfacen las necesidades del mundo real; la mayoría de los inversionistas preferirán estrategias que sí utilicen la información proporcionada por los movimientos del activo. A estas estrategias se les llama **adaptativas** o **dinámicas**. Sin embargo, cuando las estrategias no se suponen deterministas, la optimización de media-varianza se vuelve mucho más complicada. La mayor dificultad deriva del hecho de que la funcional de media-varianza no es consistente en el tiempo, de tal forma que las técnicas de control óptimo estocástico no pueden ser aplicadas directamente. Debido a estas complicaciones, vale la pena considerar criterios alternativos de maximización.

Desde un punto de vista económico resulta natural considerar la maximización de utilidad esperada $\mathbf{E}(u(\mathcal{R}(X)))$, donde $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de utilidad cóncava (véase el Capítulo 1). Esta formulación del problema tiene la ventaja de poder ser abordada con técnicas de control óptimo estocástico. Para ver esto, parametricemos nuestras estrategias con $\xi_t := -\dot{X}_t$, de modo que

$$X_t = x_0 - \int_0^t \xi_s ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

con un proceso progresivamente medible tal que $\int_0^T \xi_s^2 ds < \infty$ y $\int_0^T \xi_s ds = x_0$. Supondremos que nuestras estrategias son **admisibles** en el sentido de que la posición resultante en el activo, $X_t(\omega)$, está acotada uniformemente en t y ω con cotas inferior y superior que podrían depender de la elección de ξ . Económicamente, no hay pérdida de generalidad en suponerlo ya que el número de unidades disponibles en el mercado de cualquier activo es siempre acotado. Denotaremos por $\mathcal{X}(x_0, T)$ al conjunto de estrategias $\{\xi_t\}_{0 \leq t \leq T}$ admisibles.

Definamos la difusión controlada

$$R_t^\xi := r_0 - \eta \int_0^t (\xi_s)^2 ds + \sigma \int_0^t X_s^\xi dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

El problema de maximizar la utilidad esperada de las ganancias es matemáticamente equivalente a maximizar $\mathbf{E}(u(R_T^\xi))$ sobre $\xi \in \mathcal{X}(x_0, T)$. Notemos que este no es

enteramente un problema estándar de control porque la clase $\mathcal{X}(x_0, T)$ de controles admisibles depende de la variable de estado x_0 . Problemas de este tipo habitualmente son llamados **problemas de control de combustible finito** (véase Benes, Shepp y Witsenhausen [BSW80]).

Para derivar heurísticamente la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) asociada a este problema, introducimos la función de valor

$$v(T, x_0, r_0) := \sup_{\xi \in \mathcal{X}(x_0, T)} \mathbf{E} \left(u \left(R_T^\xi \right) \right).$$

Esperaríamos que para cada $\xi \in \mathcal{X}(x_0, T)$ el proceso

$$V_t^\xi := v \left(T - t, X_t^\xi, R_t^\xi \right)$$

sea una supermartingala, y que resulte una martingala para una estrategia óptima ξ . De la fórmula de Itô se sigue que

$$dV_t^\xi = \sigma v_r X_t^\xi dW_t - \left(v_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \left(X_t^\xi \right)^2 v_{rr} + \eta \xi_t^2 v_r + \xi_t v_x \right) dt.$$

En consecuencia, v debería ser solución de la ecuación diferencial parcial (EDP):

$$v_t = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 v_{rr} - \inf_{c \in \mathbb{R}} \left(\eta c^2 v_r + c v_x \right). \quad (2.8)$$

Esta ecuación, sin embargo, no toma en cuenta la restricción de «combustible» de las estrategias. La condición entra al problema a través de la condición inicial satisfecha por la función de valor:

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} v(T, x_0, r_0) = \begin{cases} u(r_0) & \text{si } x_0 = 0 \\ -\infty & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (2.9)$$

La intuición de esta condición inicial es: cuando se ha terminado el plazo para liquidar ($T = 0$) una posición no nula ($x_0 \neq 0$), entonces no se ha cumplido el objetivo, y en este caso se ha de recibir una penalización.

Schied, Schöneborn y Tehranchi [SST10] demostraron que para agentes con coeficiente de aversión al riesgo absoluta constante (CARA), $u(r) = -e^{-\alpha r}$, se tiene:

La función de valor es

$$v(T, x_0, r_0) = -\exp \left(-\alpha r_0 + x_0^2 \eta \alpha \kappa \cdot \coth(\kappa T) \right),$$

y el único control maximizador ξ^* está dado por la función determinista

$$\xi_t^* = x_0 \kappa \frac{\cosh(\kappa(T-t))}{\sinh(\kappa T)}, \quad \text{donde } \kappa = \sqrt{\frac{\alpha \sigma^2}{2\eta}}. \quad (2.10)$$

Notemos que la estrategia óptima adaptativa X^{ξ^*} coincide con la estrategia óptima de media-varianza (2.7). Esto se vuelve claro tan pronto que uno sabe que la estrategia óptima es determinista, porque para una estrategia determinista las ganancias tienen distribución gaussiana y en consecuencia la utilidad esperada exponencial se convierte en la exponencial del funcional de media-varianza (2.6).

Para funciones de utilidad más generales, la existencia de soluciones clásicas al problema singular (2.8)-(2.9) sigue abierto. Pero el problema puede ser simplificado si se considera un horizonte infinito; i.e. $T = \infty$.

2.4. Dos problemas en horizonte infinito

En esta sección definiremos dos problemas que surgen en nuestro modelo de mercado ilíquido cuando se permite un horizonte infinito y las preferencias del agente quedan descritas por una función de utilidad cóncava u .

Consideremos entonces al conjunto \mathcal{X} de procesos $\{\xi_t\}_{t \geq 0}$ progresivamente medibles tales que $\int_0^t \xi_s^2 ds < \infty$ para todo $t > 0$ y que $X_t^\xi(\omega)$ está acotado uniformemente en t y ω con cotas que podrían depender de ξ .

2.4.1. Liquidación óptima

Como es usual, supondremos un agente que necesita liquidar una posición de tamaño $x_0 > 0$ del activo riesgoso. Al inicio de la liquidación, éste cuenta con \mathcal{R}_0 unidades de dinero en efectivo. Cuando el agente sigue una estrategia $\xi \in \mathcal{X}$, su posición en efectivo al tiempo $t \geq 0$ estará dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t(\xi) &= \mathcal{R}_0 + \int_0^t \xi_s S_s ds \\ &= \mathcal{R}_0 + x_0 S_0 - \frac{\gamma}{2} x_0^2 - \eta \int_0^t \xi_s^2 ds + \underbrace{\sigma \int_0^t X_s^\xi dW_s}_{\Phi_t} \\ &\quad - \underbrace{X_t^\xi S_0 - \frac{\gamma}{2} \left((X_t^\xi)^2 - 2x_0 X_t^\xi \right) - \sigma X_t^\xi W_t}_{\Psi_t}. \end{aligned}$$

Contrariamente al horizonte finito, véase (2.5), existe un término extra asociado al horizonte infinito, Ψ_t . Como el agente pretende vender su posición en el activo, esperaríamos que las ganancias generadas de esto converjan \mathbf{P} -c.s. a algún límite

(posiblemente infinito) cuando $t \rightarrow \infty$. La convergencia de Φ_t , vía el teorema de convergencia de Doob, se sigue si

$$\mathbf{E} \left(\int_0^\infty (X_s^\xi)^2 ds \right) < \infty, \quad (2.11)$$

mientras que la convergencia de Ψ_t , vía la ley de logaritmo iterado, queda garantizada si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (X_t^\xi)^2 t \log(\log(t)) = 0, \quad \mathbf{P} - \text{c.s.} \quad (2.12)$$

Notemos que las condiciones (2.11)-(2.12) implican que Ψ_t y X_t^ξ convergen a cero; pero no excluyen la posibilidad de compras intermedias (ξ_t negativo) o ventas en corto (X_t^ξ negativo). Una estrategia será **admisibles para el problema de liquidación óptima en horizonte infinito** si satisfacen las dos condiciones anteriores; denotaremos al conjunto de tales estrategias por $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}$. Así, para cada $\xi \in \mathcal{X}_1$, tenemos

$$\begin{aligned} R_\infty^\xi &:= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{R}_t(\xi) \\ &= \underbrace{\mathcal{R}_0 + x_0 S_0 - \frac{\gamma}{2} x_0^2}_{r_0} - \eta \int_0^\infty \xi_s^2 ds + \sigma \int_0^\infty X_s^\xi dW_s. \end{aligned}$$

Asumiremos que el agente quiere maximizar la utilidad esperada de su posición en efectivo después de la liquidación:

$$v_1(x_0, r_0) := \sup_{\xi \in \mathcal{X}_1} \mathbf{E} \left(u \left(R_\infty^\xi \right) \right). \quad (2.13)$$

2.4.2. Maximización del valor asintótico del portafolio

Consideremos ahora un agente que al tiempo t posee un portafolio con α unidades de activo riesgoso y β unidades de dinero en efectivo. Si el mercado fuera completamente líquido, el valor de este portafolio sería simplemente $\alpha S_t + \beta = \alpha \tilde{S}_t + \beta$. Pero si el mercado es ilíquido, no existe un valor canónico del portafolio. El efecto del impacto temporal depende de la estrategia de liquidación; puede ser muy pequeño para agentes con poca aversión al riesgo que liquidan su posición a una tasa muy lenta. El impacto permanente por otro lado no puede ser evitado, y su efecto en el proceso de liquidación es independiente de la estrategia. Por esta razón, Schied y Schöneborn [SS09] proponen como valor de portafolio:

$$\alpha \left(\hat{S}_t - \frac{\gamma}{2} \alpha \right) + \beta,$$

donde

$$\hat{S}_t := \tilde{S}_t + \gamma (X_t - X_0)$$

es el precio de mercado del activo riesgoso al tiempo t que refleja el impacto permanente pero no el temporal.³ Podemos pensar al valor del portafolio como el valor de liquidación esperado cuando la posición α es vendida infinitamente lento.

Cuando el agente sigue una estrategia de mercado ξ , el valor de su portafolio en el sentido de arriba evoluciona a través del tiempo como

$$\begin{aligned} R_t^\xi &:= X_t^\xi \left(\hat{S}_t - \frac{\gamma}{2} X_t^\xi \right) + \mathcal{R}_t(\xi) \\ &= r_0 - \eta \int_0^t \xi_s^2 ds + \sigma \int_0^t X_s^\xi dW_s. \end{aligned}$$

Asumiremos que el agente opera en el activo riesgoso con el fin de maximizar asintóticamente la utilidad esperada del valor de su portafolio:

$$v_2(x_0, r_0) := \sup_{\xi \in \mathcal{X}} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(u \left(R_t^\xi \right) \right). \quad (2.14)$$

La existencia del límite (posiblemente infinito) en (2.14) será establecida más adelante en el Lema 3.2. Notemos que los supuestos de las estrategias admisibles para la maximización del valor asintótico del portafolio son más débiles que para la liquidación óptima (el supremo en (2.14) se toma sobre el conjunto más grande $\mathcal{X} \supset \mathcal{X}_1$). En particular, no se necesita que R_t^ξ o X_t^ξ converjan.

2.4.3. Solución de los problemas

En ambos casos (2.13) y (2.14), la correspondiente función de valor debería ser homogénea en el tiempo y se esperaría que resolviera la EDP

$$0 = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 v_{rr} - \inf_{c \in \mathbb{R}} \left(\eta c^2 v_r + c v_x \right), \quad (2.15)$$

con condición inicial

$$v(0, r) = u(r). \quad (2.16)$$

En efecto, esto de hecho ocurre:

³En la práctica, \hat{S}_t puede ser observado siempre y cuando el agente que opera en grandes cantidades no transaccione.

Teorema 2.1 (Solución a los problemas en horizonte infinito).

Supóngase que $u \in C^6$, con coeficiente de aversión al riesgo $A(r) = -u_{rr}(r)/u_r(r)$ acotado:

$$0 < \inf_{R \in \mathbb{R}} A(R) =: A_{min} \leq \sup_{R \in \mathbb{R}} A(R) =: A_{max} < \infty. \quad (2.17)$$

Las funciones de valor v_1 para liquidación óptima y v_2 para maximización del valor asintótico del portafolio son iguales y son soluciones clásicas de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 v_{rr} + \eta c^2 v_r + c v_x \right) = 0$$

con condición inicial

$$v(0, r) = u(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

El único control óptimo (c.s.) ξ_t^* es Markoviano y está dado en forma retroalimentativa por

$$\xi_t^* = c \left(X_t^{\xi^*}, R_t^{\xi^*} \right) = -\frac{v_x}{2\eta v_r} \left(X_t^{\xi^*}, R_t^{\xi^*} \right).$$

Para las funciones de valor se tiene convergencia:

$$v(x_0, r_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(u \left(R_t^{\xi^*} \right) \right) = \mathbf{E} \left(u \left(R_\infty^{\xi^*} \right) \right)$$

El Teorema anterior proporciona la solución a los problemas de liquidación e inversión óptimas. Afirma que ambos problemas en esencia son lo mismo y que se puede hablar de una *única* estrategia óptima.

De aquí en adelante, usaremos el término «control óptimo» para referirnos a la estrategia óptima ξ^* o la función óptima retroalimentativa c del Teorema 2.1, dependiendo de las circunstancias.

Notemos que la ecuación de HJB del Teorema 2.1 es no-lineal en *todas* las derivadas parciales de v . Esto se puede observar mejor en la correspondiente forma reducida

$$v_x^2 = -2\eta\sigma^2 x^2 v_r v_{rr}.$$

Esto vuelve muy complejo al problema. Como veremos en el siguiente Capítulo, la existencia de una solución a la ecuación de HJB del Teorema 2.1 será derivada a partir de la existencia de una solución suave a cierta EDP parabólica no-lineal satisfecha por el **control óptimo transformado**

$$\tilde{c}(y, r) := c(\sqrt{y}, r) / \sqrt{y}.$$

Teorema 2.2. El control óptimo transformado $\tilde{c}(y, r) := c(\sqrt{y}, r) / \sqrt{y}$ es una solución clásica de la EDP parabólica no-lineal

$$\tilde{c}_y = \frac{\sigma^2}{4\tilde{c}} \tilde{c}_{rr} - \frac{3}{2} \eta \tilde{c} \cdot \tilde{c}_r,$$

con condición inicial

$$\tilde{c}(0, r) = \sqrt{\frac{\sigma^2 A(r)}{2\eta}}.$$

Las cotas de la aversión al riesgo dan cotas para la solución vía:

$$\begin{aligned} \inf_{(y,r) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}} \tilde{c}(y, r) &= \inf_{r \in \mathbb{R}} \tilde{c}(0, r) =: \tilde{c}_{min} = \sqrt{\frac{\sigma^2 A_{min}}{2\eta}}, \\ \sup_{(y,r) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}} \tilde{c}(y, r) &= \sup_{r \in \mathbb{R}} \tilde{c}(0, r) =: \tilde{c}_{max} = \sqrt{\frac{\sigma^2 A_{max}}{2\eta}}. \end{aligned}$$

De los Teoremas 2.1 y 2.2 rápidamente se deduce la forma y el comportamiento que adopta la estrategia óptima.

Corolario 2.1. La posición en el activo $X_t^{\xi^*}$ al tiempo t bajo el control óptimo ξ^* está dada por

$$X_t^{\xi^*} = X_0 \exp \left(- \int_0^t \tilde{c} \left((X_s^{\xi^*})^2, R_s^{\xi^*} \right) ds \right),$$

y está acotada por

$$X_0 \exp(-\tilde{c}_{max} t) \leq X_t^{\xi^*} \leq X_0 \exp(-\tilde{c}_{min} t).$$

Aunque a priori no se excluyeron órdenes de compra o ventas en corto intermedias, el Teorema y Corolario anteriores demuestran que éstas nunca son óptimas. Para agentes con aversión al riesgo constante $A = A_{min} = A_{max}$, el Corolario 2.1 conduce a la siguiente fórmula explícita para la estrategia óptima; la cual es el límite de estrategias óptimas para horizontes de tiempo finitos, véase ec. 2.10.

Corolario 2.2. Supóngase que el agente tiene una función de utilidad con aversión al riesgo constante $A(r) \equiv A$. Entonces su estrategia óptima de liquidación es estática y está dada por

$$X_t^{\xi^*} = X_0 \exp \left(-t \sqrt{\frac{\sigma^2 A}{2\eta}} \right).$$

3. Liquidación e inversión óptimas I: Solución

El contenido de este capítulo estará dedicado a la demostración del Teorema 2.1. El primer reto será demostrar que la ecuación de HJB:

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 v_{rr} + \eta c^2 v_r + c v_x \right) = 0, \quad (3.1)$$

con condición inicial

$$v(0, r) = u(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

admite una solución en el sentido clásico. Como ya vimos, la dificultad radica en el hecho de que esta ecuación es completamente no-lineal:

$$v_x^2 = -2\eta\sigma^2 x^2 v_r v_{rr}. \quad (3.3)$$

Nos enfrentamos a resolver una ecuación para la cual no hay teoría alguna desarrollada. Habrá entonces que encontrar una manera de «darle la vuelta al problema».

El enfoque estándar que se utiliza en los problemas de control óptimo es primero resolver la ecuación de HJB asociada y después identificar el control óptimo como el correspondiente maximizador o minimizador. En su lugar, la estrategia propuesta por Schied y Schöneborn [SS09] es *revertir* estos pasos. Primero, asumiremos por un momento que la función de valor v es conocida, esto permitirá caracterizar al minimizador c vía una EDP parabólica (independiente de v) satisfecha por cierta transformación \tilde{c} . Después, mostraremos que la solución de una ecuación de transporte de primer orden con coeficiente \tilde{c} conduce a una solución suave de la ecuación de HJB (3.1). Finalmente un teorema de verificación identificará a dicha solución como la función de valor deseada.

3.1. Existencia y caracterización de una solución suave de la ecuación HJB

Consideremos el control transformado

$$\tilde{c}(y, r) := c(\sqrt{y}, r) / \sqrt{y}, \quad (y, r) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}.$$

Esta transformación nos permite caracterizar el control óptimo vía una EDP parabólica no-lineal.

Proposición 3.1. Si v es una solución a la ecuación de HJB (3.1) entonces \tilde{c} satisface la EDP:

$$\tilde{c}_y = \frac{\sigma^2}{4\tilde{c}}\tilde{c}_{rr} - \frac{3}{2}\eta\tilde{c} \cdot \tilde{c}_r. \quad (3.4)$$

Demostración. Sea v una solución clásica a la ecuación de HJB y hagamos $\tilde{v}(y, r) := v(\sqrt{y}, r)$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \tilde{v}_y(y, r) &= \frac{v_x(\sqrt{y}, r)}{2\sqrt{y}}, \\ \tilde{v}_r(y, r) &= v_r(\sqrt{y}, r); \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\tilde{c} = -\frac{\tilde{v}_y}{\eta\tilde{v}_r}. \quad (3.5)$$

La ecuación (3.3) se transforma en

$$\tilde{v}_y^2 = -\frac{1}{2}\eta\sigma^2\tilde{v}_r\tilde{v}_{rr}; \quad (3.6)$$

por lo que

$$\tilde{c}^2 = -\frac{\sigma^2}{2\eta}\frac{\tilde{v}_{rr}}{\tilde{v}_r}. \quad (3.7)$$

Derivamos (3.5) con respecto a r :

$$\tilde{c}_r = \frac{\tilde{v}_y\tilde{v}_{rr} - \tilde{v}_{yr}\tilde{v}_r}{\eta\tilde{v}_r^2}.$$

Nuevamente derivamos con respecto a r para obtener:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{rr} &= \frac{\tilde{v}_r^2(\tilde{v}_y\tilde{v}_{rrr} - \tilde{v}_{yrr}\tilde{v}_r) - 2\tilde{v}_r\tilde{v}_{rr}(\tilde{v}_y\tilde{v}_{rr} - \tilde{v}_{yr}\tilde{v}_r)}{\eta\tilde{v}_r^4} \\ &= \frac{\tilde{v}_r\tilde{v}_y\tilde{v}_{rrr} - \tilde{v}_y\tilde{v}_{rr}^2}{\eta\tilde{v}_r^3} + \frac{\tilde{v}_{rr}\tilde{v}_{yr} - \tilde{v}_{yrr}\tilde{v}_r}{\eta\tilde{v}_r^2} + \frac{\tilde{v}_{rr}\tilde{v}_{yr}\tilde{v}_r - \tilde{v}_y\tilde{v}_{rr}^2}{\eta\tilde{v}_r^3} \\ &= \frac{\tilde{v}_y}{\eta\tilde{v}_r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{v}_{rr}}{\tilde{v}_r} \right) - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{v}_{rr}}{\tilde{v}_r} \right) + \frac{\tilde{v}_{rr}}{\eta\tilde{v}_r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{v}_y}{\tilde{v}_r} \right). \end{aligned}$$

De las ecuaciones (3.5) y (3.7) concluimos

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{rr} &= -\tilde{c} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{2\eta}{\sigma^2} \tilde{c}^2 \right) - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{2\eta}{\sigma^2} \tilde{c}^2 \right) - \frac{2}{\sigma^2} \tilde{c}^2 \frac{\partial}{\partial r} (-\eta \tilde{c}) \\
 &= \frac{4\eta}{\sigma^2} \tilde{c}^2 \tilde{c}_r + \frac{4}{\sigma^2} \tilde{c} \tilde{c}_y + \frac{2\eta}{\sigma^2} \tilde{c}^2 \tilde{c}_r \\
 &= \frac{6\eta}{\sigma^2} \tilde{c}^2 \tilde{c}_r + \frac{4}{\sigma^2} \tilde{c} \tilde{c}_y.
 \end{aligned}$$

□

Ahora bien, intuitivamente \tilde{v} debería ser decreciente en y : $\tilde{v}_y \leq 0$. Así

$$\tilde{v}_y = -\sqrt{-\frac{1}{2}\eta\sigma^2\tilde{v}_r\tilde{v}_{rr}},$$

debido a la ecuación (3.6). Lo que implica

$$\tilde{c} = \frac{\sqrt{-\frac{1}{2}\eta\sigma^2\tilde{v}_r\tilde{v}_{rr}}}{\eta\tilde{v}_r} = \sqrt{-\frac{\sigma^2\tilde{v}_{rr}}{2\eta\tilde{v}_r}}.$$

Por lo tanto, la ecuación (3.2) conduce a

$$\tilde{c}(0, r) = \sqrt{\frac{\sigma^2 A(r)}{2\eta}}.$$

Esta condición determina completamente el problema de valor inicial que será clave en la caracterización de la solución de la ecuación de HJB (3.1).

En lo que sigue supondremos que la función de utilidad u es suficientemente suave (C^6) y que su función de aversión al riesgo está acotada $A_{min} \leq A(r) \leq A_{max}$ por dos constantes $0 < A_{min} \leq A_{max} < \infty$.

Observemos que como consecuencia del acotamiento de $A(r)$, se tiene para todo $r \in \mathbb{R}$:

$$u(0) + \frac{u_r(0)}{A_{max}} [1 - e^{-A_{max}r}] \leq u(r) \leq u(0) + \frac{u_r(0)}{A_{min}} [1 - e^{-A_{min}r}]. \quad (3.8)$$

De aquí se deduce que $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) < \infty$. Entonces sin pérdida de generalidad supondremos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0. \quad (3.9)$$

Proposición 3.2. Existe una solución suave $(C^{2,4})$ $\tilde{c} : (y, r) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \mapsto \tilde{c}(y, r) \in \mathbb{R}$ al problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \tilde{c}_y = \frac{\sigma^2}{4\tilde{c}} \tilde{c}_{rr} - \frac{3}{2} \eta \tilde{c} \cdot \tilde{c}_r \\ \tilde{c}(0, r) = \sqrt{\frac{\sigma^2 A(r)}{2\eta}} \end{cases} \quad (3.10)$$

La solución satisface

$$\tilde{c}_{min} := \inf_{r \in \mathbb{R}} \sqrt{\frac{\sigma^2 A(r)}{2\eta}} \leq \tilde{c}(y, r) \leq \sup_{r \in \mathbb{R}} \sqrt{\frac{\sigma^2 A(r)}{2\eta}} =: \tilde{c}_{max}. \quad (3.11)$$

La notación $C^{2,4}$ significa que la función \tilde{c} tiene derivadas continuas $\frac{\partial^{i+j}}{\partial y^i \partial r^j} \tilde{c}(y, r)$ si $2i + j \leq 4$. En particular, \tilde{c}_{yrr} y \tilde{c}_{rrr} existen y son continuas.

El resultado se sigue del siguiente teorema auxiliar de la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales Parabólicas. No se establece la unicidad de \tilde{c} directamente en el teorema anterior; sin embargo, se concluye a partir de la Proposición 3.5.

Teorema 3.1 (Teorema auxiliar: Solución al problema de Cauchy.). Existe una solución suave $(C^{2,4})$

$$f : (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$$

para la EDP parabólica

$$f_t - \frac{\partial}{\partial x} a(x, t, f, f_x) + b(x, t, f, f_x) = 0 \quad (3.12)$$

con condición inicial

$$f(0, x) = \psi_0(x),$$

si se cumplen las siguientes condiciones:

- ψ_0 es suave (C^4) y acotada.
- a y b son suaves $(C^3$ y C^2 respectivamente).

- Existen constantes δ_1 y $\delta_2 \geq 0$ tales que para cada x y q ,

$$\left(b(x, t, q, 0) - \frac{\partial}{\partial x} a(x, t, q, 0) \right) q \geq -\delta_1 q^2 - \delta_2.$$

- Para todo $M > 0$, existen constantes $\Delta_M \geq \delta_M > 0$ tales que para todos x, t, q y p que están acotados en módulo por M se tiene:

$$\delta_M \leq \frac{\partial}{\partial p} a(x, t, q, p) \leq \Delta_M$$

y

$$\left(|a| + \left| \frac{\partial a}{\partial q} \right| \right) (1 + |p|) + \left| \frac{\partial a}{\partial x} \right| + |b| \leq \Delta_M (1 + |p|)^2.$$

Demostración. El teorema es una consecuencia directa del Teorema 8.1, Cap. V (pág. 495) de Ladyzhenskaya, Solonnikov y Ural'ceva [LSU88]. En seguida esbozaremos únicamente el último paso de la demostración, ya que lo usaremos para la prueba de resultados posteriores.

Las condiciones del teorema garantizan la existencia de soluciones f_N de (3.12) en la banda $\mathbb{R}_0^+ \times [-N, N]$ con condiciones de frontera

$$f_N(0, x) = \psi_0(x), \quad \forall x \in [-N, N]$$

y

$$f_N(t, \pm N) = \psi_0(\pm N), \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Estas soluciones convergen suavemente conforme N tiende a infinito; i.e., $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N = f$. \square

Demostración de la Proposición 3.2. Queremos aplicar el Teorema 3.1, para esto hagamos

$$\begin{aligned} a(x, t, q, p) &= h_1(q) p \\ b(x, t, q, p) &= h_1'(q) p^2 + \frac{3}{2} \eta h_2(q) p, \\ \psi_0(x) &= \sqrt{\frac{\sigma^2 A(r)}{2\eta}}, \end{aligned}$$

con $h_1(q) = \frac{\sigma^2}{4q}$ y $h_2(q) = q$. La ecuación (3.12) se convierte en (3.4) renombrando las coordenadas t por y y x por r . Todas las condiciones del Teorema 3.1 se satisfacen, excepto por la última condición de acotamiento. Con el fin de satisfacerla, tomamos

h_1 y h_2 dos funciones suaves no negativas y acotadas tales que $h_1(q) = \frac{\sigma^2}{4q}$ y $h_2(q) = q$ para $\tilde{c}_{min} \leq q \leq \tilde{c}_{max}$. Ahora todas las condiciones del Teorema 3.1 se satisfacen y entonces existe una solución suave a

$$f_t = -\frac{3}{2}\eta h_2(f) f_x + h_1(f) f_{xx}.$$

Mostraremos ahora que dicha solución f también satisface

$$f_t = -\frac{3}{2}\eta f f_x + \frac{\sigma^2}{4f} f_{xx}.$$

mediante el principio del máximo para mostrar que $\tilde{c}_{min} \leq f \leq \tilde{c}_{max}$. Supongamos primero que existe un punto (t_0, x_0) tal que $f(t_0, x_0) > \tilde{c}_{max}$. Entonces existen $N > 0$ y $\beta > 0$ tales que $\tilde{f}_N(t_0, x_0) := e^{-\beta t_0} f_N(t_0, x_0) > \tilde{c}_{max}$ con f_N la solución construida en la prueba del Teorema 3.1. Entonces $\max_{(t,x) \in [0,t_0] \times [-N,N]} \tilde{f}_N(t,x)$ se alcanza en un punto interior (t_1, x_1) ; i.e., $0 < t_1 \leq t_0$ y $-N < x_1 < N$. Por lo que, de acuerdo a las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker y las condiciones de segundo orden, tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{N,t}(t_1, x_1) &\geq 0, \\ \tilde{f}_{N,x}(t_1, x_1) &= 0, \\ \tilde{f}_{N,xx}(t_1, x_1) &\leq 0. \end{aligned}$$

Por otra parte se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{N,t} &= e^{-\beta t} f_{N,t} - \beta e^{-\beta t} f_N \\ &= -\frac{3}{2} e^{-\beta t} \eta h_2(f_N) f_{N,x} + e^{-\beta t} h_1(f_N) f_{N,xx} - \beta e^{-\beta t} f_N \\ &= -\frac{3}{2} \eta h_2(f_N) \tilde{f}_{N,x} + h_1(f_N) \tilde{f}_{N,xx} - \beta \tilde{f}_N, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\tilde{f}_N(t_1, x_1) \leq 0.$$

Esto contradice el hecho $\tilde{f}_N(t_1, x_1) \geq \tilde{f}_N(t_0, x_0) > \tilde{c}_{max} > 0$. Concluyendo así que $f \leq \tilde{c}_{max}$.

Con un argumento similar, podemos demostrar que si existe un punto (t_0, x_0) con $f(t_0, x_0) < \tilde{c}_{min}$, entonces el mínimo interior (t_1, x_1) de una función elegida adecuadamente $\tilde{f}_N := f_N - \tilde{c}_{max}$ satisface $\tilde{f}_N(t_1, x_1) > 0$, lo cual es contradictorio y por lo tanto $f \geq \tilde{c}_{min}$. \square

Proposición 3.3. Existe una solución $C^{2,4}$ $\tilde{w} : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la ecuación de transporte

$$\tilde{w}_y + \eta \tilde{c} \tilde{w}_r = 0 \quad (3.13)$$

con condición inicial

$$\tilde{w}(0, r) = u(r).$$

La solución satisface

$$u(r - \eta \tilde{c}_{max} y) \leq \tilde{w}(y, r) \leq 0,$$

y resulta estrictamente creciente en r y estrictamente decreciente en y .

Demostración. La demostración se hará utilizando el método de curvas características. Para cada $s \in \mathbb{R}$, las curvas características de la ecuación de transporte quedan determinadas por la ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$\frac{dr}{dy} = \eta \tilde{c}(y, r)$$

con condición inicial $r(0) = s$. Como \tilde{c} es suave y acotada entonces, por el teorema de existencia y unicidad de EDOs, existe una única solución al problema anterior; la cual denotaremos por $P(y, s)$. Esta familia de soluciones nunca se cruza:

$$P(y, s_1) < P(y, s_2), \quad \forall s_1 < s_2. \quad (3.14)$$

Aún más, de la positividad de \tilde{c} se obtiene:

$$P(y_1, s) < P(y_2, s), \quad \forall y_1 < y_2. \quad (3.15)$$

Además, para cada y , $P(y, \cdot)$ es un difeomorfismo de \mathbb{R} en \mathbb{R} que tiene la misma suavidad de \tilde{c} ; i.e. $C^{2,4}$.

Con lo anterior en mente, definimos

$$\tilde{w}(y, r) = u(s) \quad \text{si} \quad r = P(y, s), \text{ p.a. } s \in \mathbb{R}.$$

De esta manera \tilde{w} es una función $C^{2,4}$ que satisface la condición inicial. Nótese que, por definición,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y} \tilde{w}(y, P(y, s)) \\ &= \tilde{w}_y(y, P(y, s)) + \tilde{w}_r(y, P(y, s)) P_y(y, s) \\ &= \tilde{w}_y(y, P(y, s)) + \tilde{w}_r(y, P(y, s)) \eta \tilde{c}(y, P(y, s)). \end{aligned}$$

Por lo tanto \tilde{w} satisface (3.13).

Ahora, como $\tilde{c} \leq \tilde{c}_{max}$, tenemos $P_y \leq \eta\tilde{c}_{max}$ y por consiguiente $P(y, s) \leq s + \eta\tilde{c}_{max}y$; concluyendo así $\tilde{w}(y, r) \geq u(r - \eta\tilde{c}_{max}y)$.

La monotonía de $\tilde{w}(y, \cdot)$ y $\tilde{w}(\cdot, r)$ se obtiene de las propiedades (3.14)-(3.15). \square

Proposición 3.4. La función $w(x, r) := \tilde{w}(x^2, r)$ resuelve la ecuación de HJB (3.1). El mínimo es único y se alcanza en

$$c(x, r) := \tilde{c}(x^2, r) x \quad (3.16)$$

Demostración. Supongamos por el momento que

$$\tilde{c}^2 \equiv -\frac{\sigma^2 \tilde{w}_{rr}}{2\eta \tilde{w}_r}. \quad (3.17)$$

Entonces con $y = x^2$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\eta x^2 \tilde{w}_r \cdot \left(\tilde{c}^2 + \frac{\sigma^2 \tilde{w}_{rr}}{2\eta \tilde{w}_r} \right) \\ &= -\eta x^2 \tilde{w}_r \cdot \left(\frac{\tilde{w}_y^2}{\eta^2 \tilde{w}_r^2} + \frac{\sigma^2 \tilde{w}_{rr}}{2\eta \tilde{w}_r} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 w_{rr} - \frac{w_x^2}{4\eta w_r} \\ &= \min_c \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 w_{rr} + \eta c^2 w_r + c w_x \right). \end{aligned}$$

Donde el único mínimo se alcanza en $\frac{-w_x}{2\eta w_r}$.

Mostremos ahora que (3.17) se satisface para todo $(y, r) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$. Primero, observemos que dicha ecuación es válida para $y = 0$. Para y general consideremos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{c}^2 &= -3\eta \tilde{c}^2 \tilde{c}_r + \frac{\sigma^2}{2} \tilde{c}_{rr}, \\ -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\sigma^2 \tilde{w}_{rr}}{2\eta \tilde{w}_r} &= \sigma^2 \tilde{c} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\tilde{w}_{rr}}{2\tilde{w}_r} + \sigma^2 \tilde{c}_r \frac{\tilde{w}_{rr}}{2\tilde{w}_r} + \frac{\sigma^2}{2} \tilde{c}_{rr}. \end{aligned}$$

La primer ecuación se sigue directamente de (3.10) y la segunda se verifica fácilmente derivando dos veces con respecto a r la ecuación (3.13) y sustituyendo. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{c}^2 + \frac{\sigma^2 \tilde{w}_{rr}}{2\eta \tilde{w}_r} \right) &= -3\eta \tilde{c}^2 \tilde{c}_r + \frac{\sigma^2}{2} \tilde{c}_{rr} - \sigma^2 \tilde{c} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\tilde{w}_{rr}}{2\tilde{w}_r} - \sigma^2 \tilde{c}_r \frac{\tilde{w}_{rr}}{2\tilde{w}_r} - \frac{\sigma^2}{2} \tilde{c}_{rr} \\ &= -\eta \tilde{c} \frac{\partial}{\partial r} \left(\tilde{c}^2 + \frac{\sigma^2 \tilde{w}_{rr}}{2\eta \tilde{w}_r} \right) - \eta \tilde{c}_r \left(\tilde{c}^2 + \frac{\sigma^2 \tilde{w}_{rr}}{2\eta \tilde{w}_r} \right) \end{aligned}$$

Por lo que la función $f := \tilde{c}^2 + \frac{\sigma^2 \tilde{w}_{rr}}{2\eta \tilde{w}_r}$ satisface la EDP lineal

$$f_y = -\eta \tilde{c} f_r - \eta \tilde{c}_r f \quad (3.18)$$

con condición inicial $f(0, r) = 0$. Una solución obvia a esta EDP es $f \equiv 0$; demostraremos que es la única solución.

Consideremos de nuevo las curvas caraterísticas de la ecuación de transporte (3.13); i.e. $P(y, s)$. Sabemos que existe una función $C^{2,4}$ $Q(y, r)$ tal que

$$\begin{aligned} Q(y, P(y, s)) &= s \quad \forall s \in \mathbb{R}, \\ P(y, Q(y, r)) &= r \quad \forall r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Introducimos un nuevo sistema de coordenadas

$$t = y, \quad s = Q(y, r).$$

Usando la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned} f_y &= f_t \cdot t_y + f_s \cdot s_y = f_t + f_s Q_y, \\ f_r &= f_t \cdot t_r + f_s \cdot s_r = f_s \cdot Q_r. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} Q(y, P(y, s)) = Q_y(y, P(y, s)) + Q_r(y, P(y, s)) \eta \tilde{c}(y, P(y, s)).$$

Combinando las tres ecuaciones anteriores:

$$f_y + \eta \tilde{c} f_r = f_t + f_s Q_y + \eta \tilde{c} f_s \cdot Q_r = f_t.$$

De esta manera, la ecuación original (3.18) se reduce a

$$f_t(t, s) = -\eta \tilde{c}_r(t, s) f(t, s),$$

con condición inicial $f(0, s) = 0$. Esta ecuación tiene como única solución $f(t, s) = 0$. \square

El siguiente Lema auxiliar será de gran utilidad en lo que sigue.

Lema 3.1 (Auxiliar). Existen constantes $a_1 \geq 0$ y $\alpha, a_2, a_3, a_4 > 0$ tales que

$$u(r) \geq w(x, r) \geq u(r) \exp(\alpha x^2) \quad (3.19)$$

$$0 \leq w_r(x, r) \leq a_1 + a_2 \exp(-a_3 r + a_4 x^2) \quad (3.20)$$

para todo $(x, r) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$.

Demostración. El lado izquierdo de la primer desigualdad se sigue de la condición de frontera para w y la monotonía de w con respecto a x establecida en la Proposición 3.3. Como la aversión al riesgo de u está acotada por arriba por A_{max} , tenemos

$$u(r - h) \geq u(r) e^{A_{max} h}, \quad h \geq 0. \quad (3.21)$$

Así por la proposición 3.3

$$w(x, r) \geq u(r - \eta \tilde{c}_{max} x^2) \geq u(r) e^{A_{max} \eta \tilde{c}_{max} x^2},$$

lo que establece el lado derecho de la primer desigualdad con $\alpha = A_{max} \eta \tilde{c}_{max}$.

Para la segunda desigualdad, mostraremos la desigualdad equivalente

$$0 \leq \tilde{w}_r(y, r) \leq a_1 + a_2 \exp(-a_3 r + a_4 y).$$

El lado izquierdo se sigue debido a que \tilde{w} es creciente en r . Para el lado derecho, notemos que \tilde{w} tiene «aversión al riesgo acotada» por (3.17) y la cota de \tilde{c} establecida en la Proposición 3.2:

$$-\frac{\tilde{w}_{rr}}{\tilde{w}_r} \leq \frac{2\eta \tilde{c}_{max}^2}{\sigma^2} =: \tilde{A}.$$

Entonces, resolviendo con límites $r < r_u$,

$$\tilde{w}(y, r_u) \geq \tilde{w}(y, r) + \frac{\tilde{w}_r(y, r)}{\tilde{A}} (1 - e^{-\tilde{A}(r_u - r)}).$$

Como

$$\lim_{r_u \rightarrow \infty} \tilde{w}(y, r_u) = \lim_{r_u \rightarrow \infty} u(r_u) = 0,$$

tenemos

$$0 \geq \tilde{w}(y, r) + \frac{\tilde{w}_r(y, r)}{\tilde{A}},$$

y así

$$\tilde{w}_r(y, r) \leq -\tilde{w}(y, r) \tilde{A} \leq -u(r - \eta \tilde{c}_{max} y) \tilde{A}.$$

De la desigualdad (3.8) obtenemos la cota deseada para \tilde{w}_r . □

3.2. Argumento de verificación

Es momento de conectar los resultados de la [sec. 3.1](#) con el problemas de inversión y liquidación óptima introducidos en la [sec. 2.4](#). Para cualquier estrategia $\xi \in \mathcal{X}$ y $k \in \mathbb{N}$ definamos

$$\tau_k^\xi = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \xi_s^2 ds \geq k \right\}.$$

Mostraremos primero que $u(R_t^\xi)$ y $w(X_t^\xi, R_t^\xi)$ satisfacen desigualdades de supermartíngalas locales. Después de eso, mostraremos que $w(x_0, r_0) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(u(R_t^\xi) \right)$ con igualdad para $\xi = \xi^*$.

Lema 3.2. Para cualquier estrategia admisible $\xi \in \mathcal{X}$, la utilidad esperada $\mathbf{E} \left(u(R_t^\xi) \right)$ es decreciente en t . Aún más, se tiene $\mathbf{E} \left(u \left(R_{t \wedge \tau_k^\xi}^\xi \right) \right) \geq \mathbf{E} \left(u \left(R_t^\xi \right) \right)$.

Demostración. Como el proceso $R_t^\xi - r_0$ es la diferencia de la martíngala $\sigma \int_0^t X_s^\xi dW_s$ y del proceso creciente $\eta \int_0^t \xi_s^2 ds$, entonces se satisface la desigualdad $\mathbf{E} \left(R_t^\xi | \mathcal{F}_s \right) \leq R_s^\xi$ para $s \leq t$ (aunque podría no ser supermartíngala debido a la falta de integrabilidad). Por lo que $\mathbf{E} \left(u \left(R_t^\xi \right) \right)$ es decreciente de acuerdo a la desigualdad de Jensen.

Para la segunda afirmación, escribamos $\tau_m := \tau_m^\xi$ y para cada $n \geq k$ consideremos

$$Z_n := r_0 - \eta \int_0^{t \wedge \tau_k} \xi_s^2 ds + \sigma \int_0^{t \wedge \tau_n} X_s^\xi dW_s. \quad (3.22)$$

Por el teorema de paro opcional se obtiene

$$\mathbf{E} \left(u \left(Z_{n+1} \right) \right) \leq \mathbf{E} \left(u \left(Z_n \right) \right).$$

Ahora, sabemos que el proceso $Y_t := \int_0^t X_s^\xi dW_s$ es un martíngala continua que comienza en cero; por lo que puede ser representado como un movimiento browniano con cambio de tiempo (posiblemente bajo un alargamiento del espacio de probabilidad, véase [\[SK91\]](#) Cap. 3, Secc. 4). Es decir, existe un movimiento browniano B tal que

$$Y_t = B_{\langle Y, Y \rangle_t}.$$

De esta forma es posible acotar por abajo la integral estocástica de la ecuación [\(3.22\)](#):

$$\int_0^{t \wedge \tau_n} X_s^\xi dW_s \geq \inf_{0 \leq q \leq t} B_{\langle Y, Y \rangle_q} \geq \inf_{0 \leq q \leq M^2 t} B_q,$$

donde M es una cota para $|X^\xi|$.

Finalmente, como u está acotada por abajo por una función exponencial y la integral de ξ^2 está acotada por k , el teorema de convergencia dominada conduce a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(u(Z_n)) = \mathbf{E}\left(u\left(r_0 - \eta \int_0^{t \wedge \tau_k} \xi_s^2 ds + \sigma \int_0^t X_s^\xi dW_s\right)\right) \geq \mathbf{E}(u(R_t^\xi)).$$

□

Lema 3.3. Para cualquier estrategia admisible $\xi \in \mathcal{X}$, $w(X_t^\xi, R_t^\xi)$ es una supermartingala local con sucesión localizante $\{\tau_k^\xi\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Demostración. Para $T > t \geq 0$, la fórmula de Itô conduce a

$$\begin{aligned} w(X_T^\xi, R_T^\xi) - w(X_t^\xi, R_t^\xi) &= \int_t^T \sigma w_r(X_s^\xi, R_s^\xi) X_s^\xi dW_s \\ &\quad - \int_t^T \left[-\frac{1}{2} (\sigma X_s^\xi)^2 w_{rr} + \eta \xi_s^2 w_r + \xi_s w_x \right] (X_s^\xi, R_s^\xi) ds. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Por la Proposición 3.4 la última integral es no negativa y obtenemos

$$w(X_t^\xi, R_t^\xi) \geq w(X_T^\xi, R_T^\xi) - \int_t^T \sigma w_r(X_s^\xi, R_s^\xi) X_s^\xi dW_s. \tag{3.24}$$

Ahora, demostraremos que la integral estocástica en (3.24) es una martingala local con sucesión localizante $\{\tau_k\} := \{\tau_k^\xi\}$. Para esto, nótese que el acotamiento uniforme de X^ξ , la desigualdad de Jensen y la definición de los tiempos τ 's implican, para $s \leq t \wedge \tau_k$

$$\begin{aligned} -\sigma X_s W_s &\leq \sigma M \sup_{q \leq t} |W_q|, \\ -\int_0^s \sigma W_q \xi_q dq &\leq \sigma \sqrt{kt} \sup_{q \leq t} |W_q|, \\ \int_0^s \eta \xi_q^2 dq &\leq \eta k, \end{aligned}$$

donde M es una cota para $|X^\xi|$. Esto demuestra la existencia de una constante positiva C tal que

$$R_s^\xi \geq r_0 - C \left(1 + \sup_{q \leq t} |W_q|\right). \tag{3.25}$$

Usando el Lema 3.1, observamos que para $s \leq t \wedge \tau_k$

$$0 \leq w_r \left(X_s^\xi, R_s^\xi \right) \leq a_1 + a_2 \exp \left[a_3 \left(C \left(1 + \sup_{q \leq t} |W_q| \right) - r_0 \right) + a_4 M^2 \right].$$

Como $\sup_{q \leq t} |W_q|$ tiene momentos exponenciales de todos los órdenes, concluimos que la integral estocástica en (3.24) es una martíngala local.

Tomando esperanzas condicionales en (3.24), obtenemos la desigualdad de supermartíngala deseada:

$$w \left(X_{t \wedge \tau_k}^\xi, R_{t \wedge \tau_k}^\xi \right) \geq \mathbf{E} \left(w \left(X_{T \wedge \tau_k}^\xi, R_{T \wedge \tau_k}^\xi \right) \mid \mathcal{F}_t \right). \quad (3.26)$$

Para la integrabilidad de $w \left(X_{t \wedge \tau_k}^\xi, R_{t \wedge \tau_k}^\xi \right)$, observemos que de (3.19), (3.21) y (3.25) para $s \leq t \wedge \tau_k$ se cumple

$$0 < -w \left(X_s^\xi, R_s^\xi \right) \leq -u \left(r_0 \right) \exp \left(C \left(1 + \sup_{q \leq t} |W_q| \right) A_{max} + \alpha M^2 \right).$$

Por lo tanto, $\mathbf{E} \left(\left| w \left(X_{t \wedge \tau_k}^\xi, R_{t \wedge \tau_k}^\xi \right) \right| \right) < \infty$. □

Lema 3.4. Sea ξ^* definida por

$$\xi_t^* := c \left(X_t^{\xi^*}, R_t^{\xi^*} \right).$$

Entonces ξ^* es admisible para los problemas de liquidación óptima y maximización del valor asintótico del portafolio ($\xi^* \in \mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}$) y satisface $\int_0^\infty (\xi_t^*)^2 dt < \infty$. Además, $w \left(X_t^{\xi^*}, R_t^{\xi^*} \right)$ es una martíngala y

$$w \left(x_0, r_0 \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(u \left(R_t^{\xi^*} \right) \right) \leq v_2 \left(x_0, r_0 \right). \quad (3.27)$$

Demostración. Escribamos $X_t^* := X_t^{\xi^*}$ y $R_t^* := R_t^{\xi^*}$. Por (3.11) y (3.16),

$$X_0 \exp \left(-\tilde{c}_{max} t \right) \leq X_t^* \leq X_0 \exp \left(-\tilde{c}_{min} t \right);$$

lo que demuestra $\xi^* \in \mathcal{X}_1$. Además,

$$\xi_t^* \leq \tilde{c}_{max} \cdot X_0 \exp \left(-\tilde{c}_{min} t \right).$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty (\xi_t^*)^2 dt < \infty. \quad (3.28)$$

Después, con la elección $\xi = \xi^*$ la integral de Riemann en (3.23) se anula y se obtiene igualdad en (3.26). Sea N el número natural más pequeño que supera la integral en (3.28). De esta forma, $\tau_N^{\xi^*} = \infty$ y en consecuencia $w(X_t^*, R_t^*)$ es una martíngala. Por otra parte, de (3.19) obtenemos

$$u(R_t^*) \geq w(X_t^*, R_t^*) \geq u(R_t^*) \exp(\alpha(X_t^*)^2)$$

Tomando esperanzas, límites y usando las cotas para X_t^* concluimos (3.27). \square

Proposición 3.5. Considérese el caso de maximización del valor asintótico del portafolio. Entonces $v_2 = w$ y la única estrategia óptima (c.s.) está dada por ξ^* .

Demostración. Gracias al Lema 3.4 basta demostrar $v_2 \leq w$. Sea ξ cualquier estrategia admisible tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(u \left(R_t^\xi \right) \right) > -\infty.$$

De los Lemas 3.1 y 3.3 tenemos para todo k, t y $\{\tau_k\} := \{\tau_k^\xi\}$

$$w(x_0, r_0) \geq \mathbf{E} \left[w \left(X_{t \wedge \tau_k}^\xi, R_{t \wedge \tau_k}^\xi \right) \right] \geq \mathbf{E} \left[u \left(R_{t \wedge \tau_k}^\xi \right) \exp \left(\alpha \left(X_{t \wedge \tau_k}^\xi \right)^2 \right) \right]$$

Siguiendo la misma línea de razonamiento como en la demostración del Lema 3.2, se demuestra que

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[u \left(R_{t \wedge \tau_k}^\xi \right) \exp \left(\alpha \left(X_{t \wedge \tau_k}^\xi \right)^2 \right) \right] &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[u \left(R_t^\xi \right) \exp \left(\alpha \left(X_{t \wedge \tau_k}^\xi \right)^2 \right) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[u \left(R_t^\xi \right) \exp \left(\alpha \left(X_t^\xi \right)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Así,

$$w(x_0, r_0) \geq \mathbf{E} \left[u \left(R_t^\xi \right) \right] + \mathbf{E} \left[u \left(R_t^\xi \right) \left(\exp \left(\alpha \left(X_t^\xi \right)^2 \right) - 1 \right) \right].$$

Supongamos por un momento que la segunda esperanza del lado derecho toma valores arbitrariamente cercanos a cero conforme t crece. Entonces

$$w(x_0, r_0) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[u \left(R_t^\xi \right) \right].$$

Tomando el supremo sobre todas las estrategias ξ se obtiene $v_2 \leq w$. La optimalidad de ξ^* se sigue de la ecuación (3.27) y su unicidad del hecho que c es la única solución a la ecuación de HJB (3.1).

Mostraremos ahora que $\mathbf{E} \left[u \left(R_t^\xi \right) \left(\exp \left(\alpha \left(X_t^\xi \right)^2 \right) - 1 \right) \right]$ toma valores arbitrariamente cercanos a cero. Por el Lema 3.2 y la fórmula de Itô, tenemos para todo k, t y $\{\tau_k\} := \{\tau_k^\xi\}$

$$\begin{aligned} -\infty &< \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[u \left(R_s^\xi \right) \right] \leq \mathbf{E} \left[u \left(R_t^\xi \right) \right] \leq \mathbf{E} \left[u \left(R_{t \wedge \tau_k}^\xi \right) \right] \\ &= u \left(r_0 \right) + \mathbf{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_k} \sigma u_r \left(R_s^\xi \right) X_s^\xi dW_s \right] \\ &\quad - \mathbf{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_k} \left[\eta \xi_s^2 u_r - \frac{1}{2} \left(\sigma X_s^\xi \right)^2 u_{rr} \right] \left(R_s^\xi \right) ds \right] \\ &= u \left(r_0 \right) - \mathbf{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_k} \left[\eta \xi_s^2 u_r - \frac{1}{2} \left(\sigma X_s^\xi \right)^2 u_{rr} \right] \left(R_s^\xi \right) ds \right]. \end{aligned}$$

Esto implica, tendiendo k y t a infinito,

$$\int_0^\infty \mathbf{E} \left[\left(X_s^\xi \right)^2 u_{rr} \left(R_s^\xi \right) \right] ds > -\infty.$$

En consecuencia $\mathbf{E} \left[\left(X_s^\xi \right)^2 u_{rr} \left(R_s^\xi \right) \right]$ toma valores arbitrariamente cercanos a cero.

Ahora, observemos que

$$-\frac{u_r(r)}{A_{min}} \leq u(r) \leq -\frac{u_r(r)}{A_{max}}, \quad \forall r \in \mathbb{R},$$

debido a la aversión al riesgo acotada de u . Lo que demuestra

$$a_5 u_{rr}(r) \leq u(r) \leq 0,$$

con $a_5 > 0$. Por otra parte, la convexidad de la función exponencial y el acotamiento uniforme de X^ξ implican

$$\exp \left(\alpha \left(X_t^\xi \right)^2 \right) - 1 \leq a_6 \alpha \left(X_t^\xi \right)^2,$$

con $a_6 > 0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{E} \left[\alpha a_5 a_6 u_{rr} \left(R_t^\xi \right) \left(X_t^\xi \right)^2 \right] \leq \mathbf{E} \left[u \left(R_t^\xi \right) \left(\exp \left(\alpha \left(X_t^\xi \right)^2 \right) - 1 \right) \right] \leq 0.$$

Concluyendo así el resultado. □

Proposición 3.6. Considérese el problema de liquidación óptima. Entonces $v_1 = w$ y la única estrategia óptima (c.s.) está dada por ξ^* .

Demostración. Para cualquier estrategia $\xi \in \mathcal{X}_1$, la martíngala $\int X_s^\xi dW_s$ es uniformemente integrable debido a la condición (2.11). Lo que implica,

$$\mathbf{E} \left(r_0 + \sigma \int_0^\infty X_s^\xi dW_s - \eta \int_0^t \xi_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t \right) = R_t^\xi, \quad \forall t \geq 0;$$

y por la tanto

$$\mathbf{E} \left(u \left(R_\infty^\xi \right) \right) \leq \mathbf{E} \left(u \left(R_t^\xi \right) \right), \quad \forall t \geq 0.$$

De aquí, la Proposición 3.5 conduce

$$\mathbf{E} \left(u \left(R_\infty^\xi \right) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(u \left(R_t^\xi \right) \right) \leq v_2(x_0, r_0) = w(x_0, r_0). \quad (3.29)$$

Tomando el supremo sobre todas las estrategias admisibles obtenemos $v_1 \leq w$. Combinando (3.27) y (3.29) concluimos $v_1 = w$ y la optimalidad de ξ^* . \square

4. Liquidación e inversión óptimas II: Caracterización

Después del esfuerzo realizado en el [Capítulo 3](#) para demostrar que no sólo tiene sentido hablar de estrategias «óptimas» de liquidación e inversión, sino que además coinciden y se reducen a una única estrategia óptima, es momento de estudiar el comportamiento de dicha estrategia.

Este capítulo consiste de dos partes. En la primera parte, enunciamos un conjunto de propiedades cualitativas que caracterizan a la estrategia óptima y la función de valor. En la segunda, presentamos la justificación matemática de tales propiedades.

La implementación numérica del modelo, utilizada para realizar las figuras y simulaciones de este capítulo, se realizó en MATLAB y los códigos asociados pueden consultarse en el [Apéndice B](#).

4.1. Propiedades cualitativas de la estrategia óptima adaptativa

Para comenzar la discusión recordemos, del [Corolario 2.1](#), que la estrategia óptima $X_t^* := X_t^{\xi^*}$ tiene un comportamiento exponencialmente decreciente:

$$X_t^* = X_0 \exp \left(- \int_0^t \tilde{c} \left((X_s^*)^2, R_s^* \right) ds \right).$$

El comportamiento de la estrategia óptima queda determinado por las propiedades de la función c (a través de \tilde{c}). Vale la pena entonces estudiar con detalle a la función retroalimentativa c . Comenzaremos analizando su dependencia con respecto al parámetro de aversión al riesgo.

Teorema 4.1. Supongamos que u_0 y u_1 son dos funciones de utilidad tales que u_1 tiene mayor aversión al riesgo que u_0 , i.e. $A_1(r) \geq A_0(r)$ para toda r . Entonces un agente con función de utilidad u_1 liquida el mismo portafolio $X_0 = x_0$ más rápido que un agente con función de utilidad u_0 . Más precisamente, las correspondientes estrategias óptimas satisfacen

$$c_1 \geq c_0 \quad \text{y} \quad \xi_1^* \geq \xi_0^* \quad P - \text{c.s.}$$

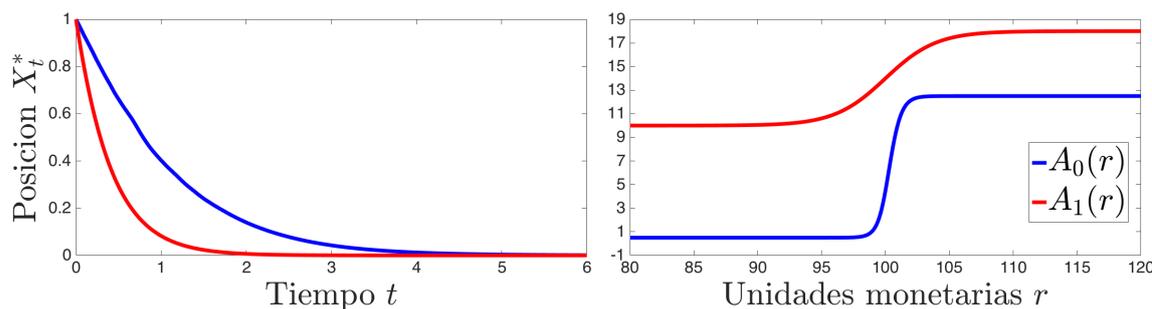


Figura 4.1.: Simulación de estrategias óptimas X_t^* asociadas a dos diferentes niveles de aversión al riesgo. El primer nivel corresponde a $A_0(r) = 2(1.5 + \tanh(r - 100))^2$ y el segundo $A_1(r) = 10 + 8(1 + e^{-0.5(r-100)})^{-1}$. Los parámetros son $\gamma = \eta = \sigma = 1$, $X_0 = 1$, $R_0 = 99.5$ y $S_0 = 100$.

El Teorema 4.1 confirma nuestra intuición; entre mayor es la aversión al riesgo, mayor es la urgencia de liquidar la posición, por miedo a enfrentar movimientos adversos en el precio del activo riesgoso. La Fig. 4.1 muestra un ejemplo numérico de este hecho.

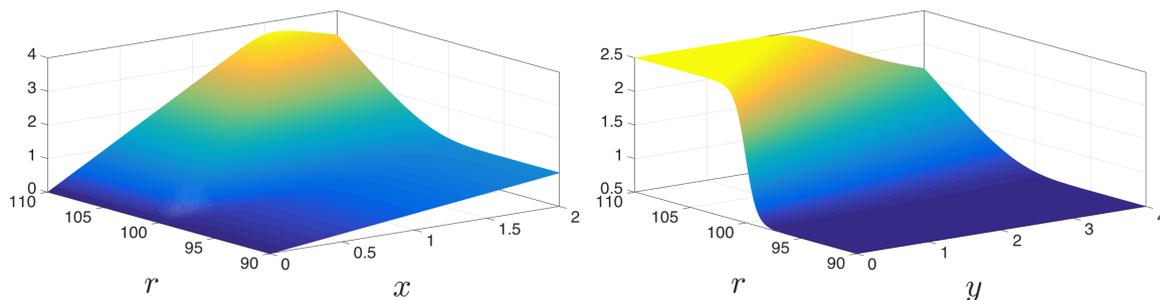
Dado el control óptimo $c(x, r)$ (o el control óptimo transformado $\tilde{c}(y, r)$), podemos clasificar la estrategia óptima a través de la monotonía en r . Una estrategia con un control óptimo c que es creciente en r (todo lo demás constante), diremos que es **agresiva en el dinero** (AIM¹); si c es decreciente en r , será **pasiva en el dinero** (PIM²); y si c es independiente de r , entonces la estrategia será **neutral en el dinero** (NIM³). La interpretación de éstas definiciones descansa en las siguiente filosofía: Cuando los precios suben, el valor del portafolio R sube. En tal escenario, algunos inversionistas querrán vender más rápido con el propósito de aprovechar la situación y generar ganancias; mientras que cuando los precios bajan, ellos preferirán vender más lento con el propósito de evitar pérdidas. Éstos inversionistas siguen estrategias que son «agresivas» en el dinero.

La especificación de valor inicial para \tilde{c} (véase el Teorema 2.2) muestra que existe una relación cercana entre el coeficiente de aversión al riesgo y la estrategia óptima adaptativa: Si A es una función creciente (IARA), entonces la estrategia óptima es agresiva en el dinero por lo menos para valores pequeños de x . El siguiente teorema establece que dicha monotonía de \tilde{c} se propaga para todos los valores de x , no sólo para aquellos pequeños.

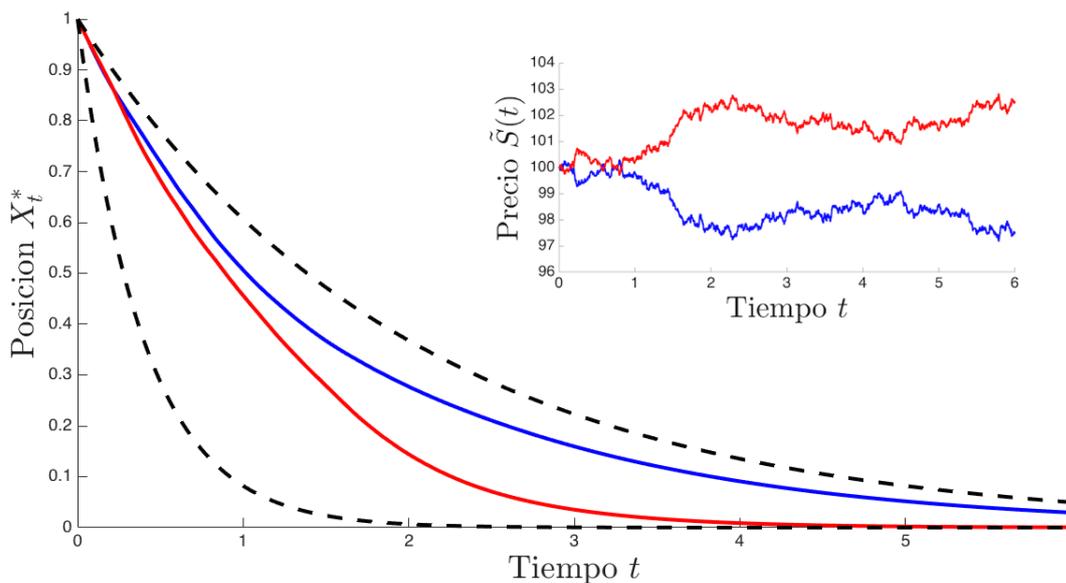
¹Del inglés **aggressive in-the-money**

²Del inglés **passive in-the-money**

³Del inglés **neutral in-the-money**



(a) Control óptimo $c(x, r)$ (izquierda) y control óptimo transformado $\tilde{c}(y, r)$ (derecha).



(b) Estrategias óptimas X_t^* asociadas a dos diferentes simulaciones del proceso de precios inafectado \tilde{S}_t . Las líneas punteadas representan las cotas superior e inferior de X_t^* .

Figura 4.2.: Ejemplo numérico para una función de utilidad con aversión al riesgo $A(r) = 2(1.5 + \tanh(r - 100))^2$. Los parámetros son $\gamma = \eta = \sigma = 1$, $X_0 = 1$, $R_0 = 99.5$ y $S_0 = 100$.

Teorema 4.2. $c(x, r)$ es creciente (decreciente) en r para todos los valores de x si y sólo si el coeficiente de aversión al riesgo $A(r)$ es creciente (decreciente) en r . En particular, $A(r)$ determina las características de la estrategia óptima:

<i>Función de utilidad</i>		<i>Estrategia óptima</i>
<i>Aversión al riesgo decreciente (DARA)</i>	\iff	<i>Pasivo en el dinero</i>
<i>Aversión al riesgo constante (CARA)</i>	\iff	<i>Neutral en el dinero</i>
<i>Aversión al riesgo creciente (IARA)</i>	\iff	<i>Agresivo en el dinero</i>

La Fig. 4.2 muestra el control óptimo y dos simulaciones de X_t^* para una aversión al riesgo creciente. En la parte (a), observamos la preservación de la monotonía tanto en el control óptimo como en el control óptimo transformado. Notamos también que el control transformado conserva la forma de la función A en cierto grado; ésta se va perdiendo al alejarnos de la frontera $y = 0$. La parte (b) muestra que, como se esperaba, la estrategia decrece más rápido cuando los precios suben que cuando están a la baja.

Ahora analizaremos la dependencia del control óptimo c respecto a los parámetros γ , η , x y σ . Específicamente hablando sobre los parámetros de impacto, sorprendentemente tanto la función de valor v como el control óptimo c ninguno depende directamente del parámetro de impacto permanente γ . Por otra parte, con respecto al parámetro de impacto temporal η , intuitivamente se esperaría un decremento en la velocidad de liquidación conforme η aumenta, debido a que trasaccionar rápidamente se vuelve más costoso. En la Fig. 4.3 se muestra que este no es necesariamente el caso; en este ejemplo, un incremento en el impacto temporal conduce a una mayor velocidad de liquidación. El siguiente Teorema establece que tal comportamiento contraintuitivo no ocurre en el caso de aversión al riesgo creciente.

Teorema 4.3. Si la función de utilidad u tiene aversión al riesgo creciente (IARA), entonces el control óptimo c es decreciente en el parámetro de impacto temporal η .

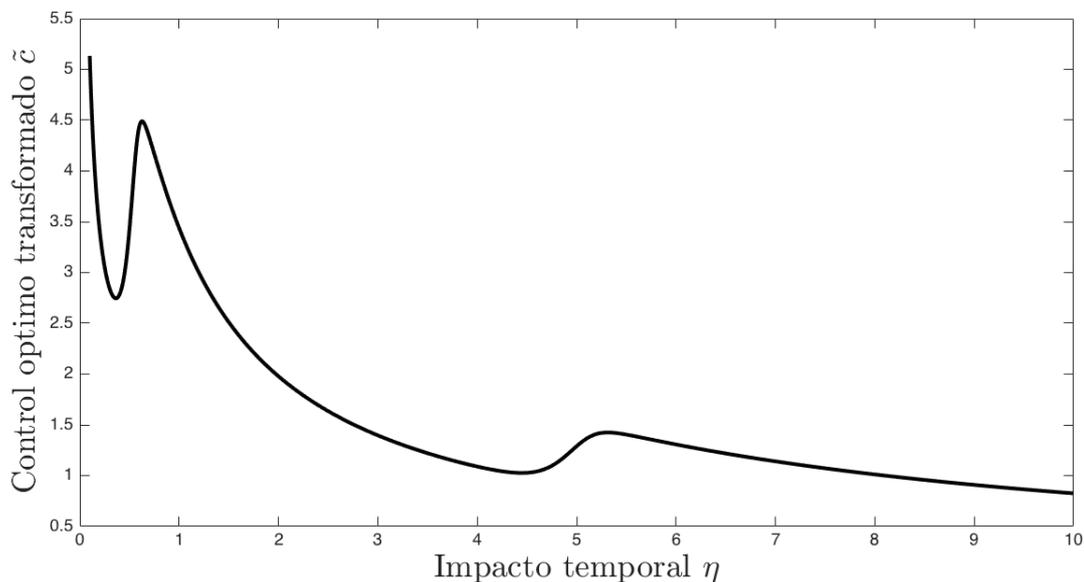


Figura 4.3.: Dependencia del control óptimo transformado $\tilde{c}(y, r, \eta, \sigma)$ en el parámetro de impacto temporal η . Los parámetros son $\sigma = 1$, $y = 0.5$, $r = 49.875$, y la aversión al riesgo $A(r) = 15 + 12 \sin(2r - 100)$.

Un incremento en la posición del activo X tiene dos efectos en la estrategia óptima de liquidación. Primero, incrementa el riesgo global, conduciendo a un deseo de incrementar la velocidad de liquidación. Segundo, cambia la distribución de los ingresos totales R_∞ : Incrementa su dispersión debido al incremento en el riesgo, y los mueve hacia abajo debido a un incremento en los costos de liquidación por impacto temporal. Este cambio en la distribución puede conducir a un deseo de reducir la velocidad de liquidación, con la esperanza de que los precios suban y por tanto R_∞ suba. En la parte (a) de la Fig. 4.2, observamos sorprendentemente que el segundo efecto puede tener más peso que el primero; i.e., que la estrategia óptima $c(x, r)$ no necesariamente es creciente en x . Esto es, un incremento en la posición en el activo puede conducir a un *decremento* en la tasa de liquidación.

Ahora, con respecto al parámetro σ , es natural pensar que «un inversionista liquidará su posición más rápidamente en presencia de mayor volatilidad». Ésta es una conjetura que se verifica cuando el cambio en la volatilidad es lo suficientemente grande.

Teorema 4.4. Sean $\sigma_0, \sigma_1 > 0$ dos parámetros de volatilidad. Si se cumple que $\sigma_0 \sqrt{A_{max}/A_{min}} \leq \sigma_1$, entonces el agente liquida el portafolio $X_0 = x_0$ más rápido en un mercado con volatilidad σ_1 que en un mercado con volatilidad σ_0 . Es decir,

$$c_1 \geq c_0 \quad \text{y} \quad \xi_1^* \geq \xi_0^* \quad \mathbf{P} - \text{c.s.}$$

Como vemos en la Teorema de arriba, se requiere de una condición fuerte sobre las volatilidades para obtener una conclusión fuerte en las estrategias óptimas. Cuando las volatilidades son diferentes pero cercanas cabe la posibilidad de obtener comportamientos contraintuitivos; como se muestra en la Fig. 4.4, donde se reafirma que, más que la volatilidad en sí misma, en ese caso resulta más importante la dirección de los precios.

Concluimos nuestro análisis con el siguiente teorema que liga la dependencia en σ con la dependencia en η y x .

Teorema 4.5. Sea $c(x, r, \eta, \sigma)$ el contro óptimo en un mercado con parámetro de impacto temporal η y volatilidad σ . Entonces

$$c(x, r, \eta, \sigma_1) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} c\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} x, r, \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \eta, \sigma_2\right). \quad (4.1)$$

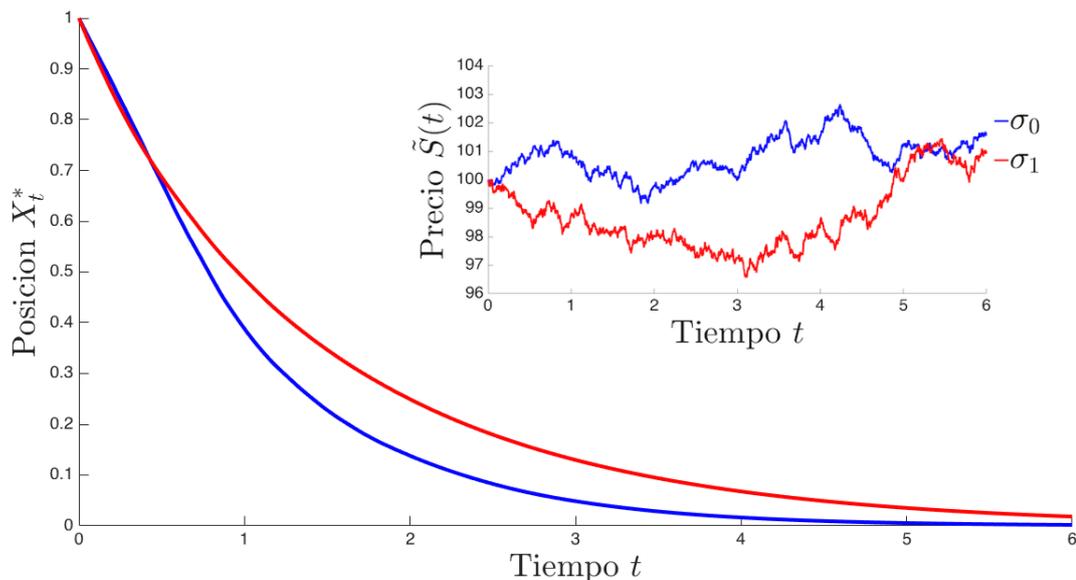


Figura 4.4.: Estrategias óptimas X_t^* asociadas a dos simulaciones del proceso de precios inafectado \tilde{S}_t con diferentes niveles de volatilidad. Los parámetros son $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1.25$, $\gamma = \eta = 1$, $X_0 = 1$, $R_0 = 99.5$, $S_0 = 100$ y aversión al riesgo $A(r) = 2(1.5 + \tanh(r - 100))^2$.

Por la condición inicial, sabemos que $v(0, r) = u(r)$ es una función de utilidad. El siguiente teorema establece que la función de valor $v(x, r)$ puede pensarse como una función de utilidad en r . En la Fig. 4.5 se muestra un ejemplo numérico de v .

Teorema 4.6. La función de valor $v(x, r)$ es estrictamente cóncava, conjuntamente en x y r , estrictamente creciente en r y estrictamente decreciente en x . En particular, para cada $x > 0$, la función de valor $v(x, r)$ es de nuevo una función de utilidad en r . Más aún, para todo x y r , $\tilde{c}(x^2, r)$ es proporcional a la raíz cuadrada de la aversión al riesgo $A(x, r) := -v_{rr}(x, r)/v_r(x, r)$ de $v(x, r)$; i.e.,

$$\tilde{c}(x^2, r) = \sqrt{\frac{\sigma^2 A(x, r)}{2\eta}}. \tag{4.2}$$

Los problemas de liquidación e inversión óptimas fueron abordados únicamente para agentes aversos al riesgo. Uno podría preguntarse en que grado la concavidad de la función de utilidad u fue ingrediente esencial en el desarrollo de nuestros análisis. ¿Cuales de nuestros resultados podrían extenderse para funciones de utilidad neutrales o amantes al riesgo? Supongamos que v está definida como en (2.13) o (2.14). Entonces se sigue inmediatamente que $r \mapsto v(x, r)$ es estrictamente creciente. Si v

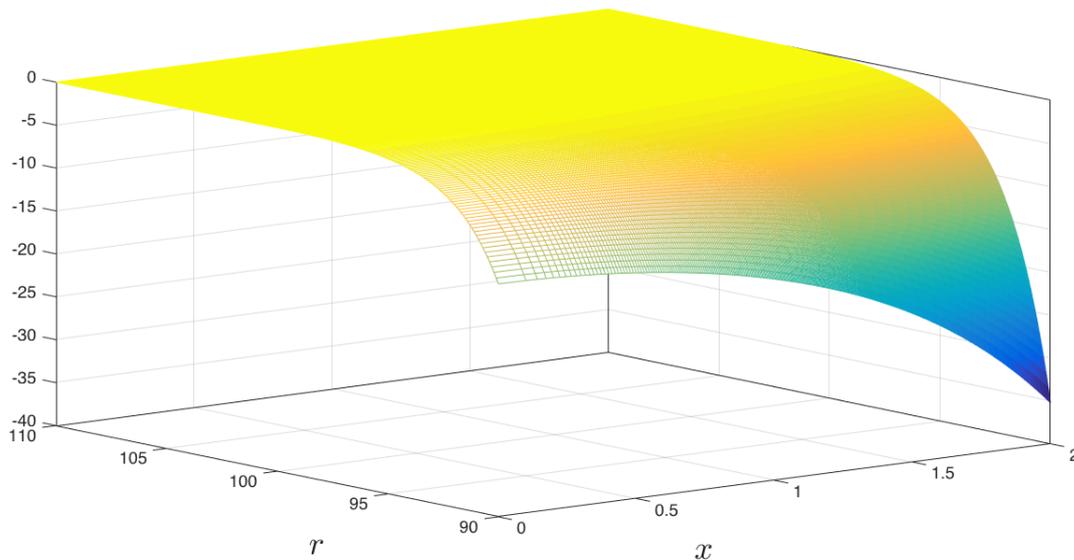


Figura 4.5.: Función de valor $v(x, r)$ para la aversión al riesgo $A(r) = 2(1.5 + \tanh(r - 100))^2$ y parámetros $\eta = \sigma = 1$.

también satisface la ecuación de HJB (2.15), entonces

$$v_{rr} = -\frac{v_x^2}{2\eta\sigma^2x^2v_r} \leq 0, \quad x > 0.$$

De esta forma, $r \mapsto v(x, r)$ es cóncava para cada $x > 0$. Por lo tanto, v no puede ser solución del problema de valor inicial (2.15)-(2.16) a menos que $v(0, r) = u(r)$ sea también cóncava. Esto demuestra que la concavidad de u sí es esencial para nuestro enfoque.

4.2. Demostraciones

Demostración del Teorema 4.1. Demostraremos la desigualdad equivalente $\tilde{c}_1 \geq \tilde{c}_0$. Sea $N > 0$ y denotemos por f^i la función f_N construida en la demostración de la Proposición 3.2 cuando la condición de frontera está dada por

$$f_N^i(y, r) = \sqrt{\frac{\sigma^2 A_i(r)}{2\eta}}, \quad \text{para } y = 0 \text{ o } |r| = N.$$

Basta demostrar que $g := f^1 - f^0 \geq 0$. Un cálculo sencillo conduce a que g resuelve la EDP lineal:

$$g_y = \frac{1}{2}ag_{rr} + bg_r + Vg,$$

donde

$$a = \frac{\sigma^2}{2f^0}, \quad b = -\frac{3}{2}\eta f^1, \quad V = -\frac{\sigma^2 f_{rr}^1}{4f^0 f^1} - \frac{3}{2}\eta f_r^0.$$

La condición de frontera de g es

$$g(y, r) = \sqrt{\frac{\sigma^2 A_1(r)}{2\eta}} - \sqrt{\frac{\sigma^2 A_0(r)}{2\eta}} =: h(r), \quad \text{para } y = 0 \text{ o } |r| = N.$$

Las funciones a , b , V y h son suaves y (al menos localmente) acotadas en $\mathbb{R}^+ \times [-N, N]$, y $a > 0$.

Ahora, tomemos $T > 0$, $r \in (-N, N)$; y sea Z la solución a la ecuación diferencial estocástica

$$dZ_t = b(T - t, Z_t) dt + \sqrt{a(T - t, Z_t)} dW_t, \quad Z_0 = r.$$

La cual está definida hasta antes del tiempo

$$\tau := \inf \{t \geq 0 \mid |Z_t| = N \text{ o } t = T\}.$$

De esta manera, la fórmula de Feynman-Kac permite representar a g como

$$g(T, r) = \mathbf{E} \left[h(Z_\tau) \exp \left(\int_0^\tau V(T - t, Z_t) dt \right) \right].$$

Por lo tanto $g \geq 0$ debido a que $h \geq 0$. □

Demostración del Teorema 4.2. En el Teorema 4.1 tomemos $u_0(r) := u(r)$ y $u_1(r) := u(r + h)$. Si u tiene aversión al riesgo creciente, entonces $A_1 \geq A_0$ si $h > 0$; y en consecuencia $c_1 \geq c_0 = c$. Pero claramente tenemos $c_1(x, r) = c(x, r + h)$. El caso para aversión al riesgo decreciente se sigue tomando $h < 0$. □

Demostración del Teorema 4.3. Sean $\eta_1 > \eta_0$ dos constantes positivas. Fijemos $N > 0$ y denotemos por f^i la función f_N construida en la demostración de la Proposición 3.2 con $\eta = \eta_i$. El resultado se sigue si podemos demostrar que $g := f^1 - f^0 \geq 0$.

Supongamos entonces que (y_0, r_0) es una raíz de g con y_0 mínimo. El punto (y_0, r_0) no pertenece a la frontera de la banda $\mathbb{R}_0^+ \times [-N, N]$, ya que $g > 0$ sobre ella debido

a (3.10). Por lo tanto, (y_0, r_0) es un mínimo local en $(0, y_0] \times (-N, N)$ y una raíz. Así,

$$\begin{aligned} g(y_0, r_0) = 0 & \implies f^0 = f^1, \\ g_y(y_0, r_0) & \leq 0, \\ g_r(y_0, r_0) = 0 & \implies f_r^0 = f_r^1, \\ g_{rr}(y_0, r_0) & \geq 0. \end{aligned}$$

Por (3.10), se tiene

$$\begin{aligned} 0 & \geq g_y(y_0, r_0) \\ & = f_r^0 - f_r^1 \\ & = \left(\frac{\sigma^2}{4f^0} f_{rr}^0 - \frac{3}{2} \eta_0 f^0 f_r^0 \right) - \left(\frac{\sigma^2}{4f^1} f_{rr}^1 - \frac{3}{2} \eta_1 f^1 f_r^1 \right) \\ & = -\frac{3}{2} (\eta_0 - \eta_1) f^0 f_r^0 + \frac{\sigma^2}{4f^0} g_{rr} \\ & > 0. \end{aligned}$$

La última desigualdad usa el hecho de $f_r^0 > 0$, el cual es válido para funciones de utilidad IARA por el Teorema 4.2. Esta contradicción nos conduce a concluir que g no tiene raíces y por tanto $f^0 > f^1$. \square

Demostración del Teorema 4.4. Es una consecuencia directa de los Teoremas 2.1 y 2.2. \square

Demostración del Teorema 4.5. Se verifica fácilmente que $\tilde{c}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}y, r, \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\eta, \sigma_2\right)$ resuelve la EDP (3.4) con $\sigma = \sigma_1$. De aquí que $\tilde{c}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}y, r, \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\eta, \sigma_2\right) = \tilde{c}(y, r, \eta, \sigma_1)$ y en consecuencia la ecuación(4.1) se cumple. \square

Demostración del Teorema 4.6. Sean $(x_1, r_1), (x_2, r_2) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ pares distintos y $0 < \lambda < 1$. Consideremos las estrategias óptimas $\xi_1^*, \xi_2^* \in \mathcal{X}$ tales que $v(x_i, r_i) = \mathbf{E}\left(u\left(R_\infty^{\xi_i^*}\right)\right)$, $i = 1, 2$. Definamos $\hat{\xi} = \lambda\xi_1^* + (1 - \lambda)\xi_2^*$. Entonces

$$\begin{aligned} v(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda r_1 + (1 - \lambda)r_2) & \geq \mathbf{E}\left(u\left(R_\infty^{\hat{\xi}}\right)\right) \\ & > \mathbf{E}\left(u\left(\lambda R_\infty^{\xi_1^*} + (1 - \lambda)R_\infty^{\xi_2^*}\right)\right) \\ & > \lambda \mathbf{E}\left(u\left(R_\infty^{\xi_1^*}\right)\right) + (1 - \lambda) \mathbf{E}\left(u\left(R_\infty^{\xi_2^*}\right)\right) \\ & = \lambda v(x_1, r_1) + (1 - \lambda)v(x_2, r_2). \end{aligned}$$

De aquí, v es estrictamente cóncava. Por la Proposición 3.3, sabemos que v es estrictamente creciente en r y estrictamente decreciente en x . La ecuación (4.2) se sigue inmediatamente de (3.17). \square

A. Modelo Almgren-Chriss

El trabajo de Robert Almgren y Neil Chriss [AC99, AC01] fué un parteaguas en la modelación del impacto en los precios de los activos financieros; ayudó a sentar las bases del desarrollo de los algoritmos de compra-venta. En él se considera la ejecución de transacciones de portafolio en tiempo discreto, con el objetivo de minimizar una combinación de riesgo volatilidad y costos transaccionales.

El modelo supone lo siguiente:

1. Un agente posee un portafolio con $X \neq 0$ unidades de un activo financiero S que le gustaría liquidar completamente antes del tiempo T . Éste operará en N períodos del tiempo, descritos por

$$t_k := k \frac{T}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

2. El agente escoge una **estrategia de transacciones**, la cual describiremos por la lista $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_N)$, donde x_k es el número de unidades restantes en el portafolio al tiempo t_k que éste planea tener. De esta manera, la estrategia estará sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} x_0 &= X, \\ x_N &= 0. \end{aligned}$$

3. El precio del activo evoluciona de acuerdo a dos factores, uno exógeno: volatilidad, y uno endógeno: impacto de mercado.

- a) La volatilidad es el resultado de las fuerzas de mercado que ocurren aleatoria e independientemente de las operaciones realizadas por el agente.

Dado un precio inicial $\tilde{S}_0 = S_0 > 0$, la dinámica del **precio inafectado**, aquel precio que ocurriría en ausencia de órdenes tan grandes, está descrita por una caminata aleatoria

$$\tilde{S}_k = \tilde{S}_{k-1} + \sigma \tau^{\frac{1}{2}} \xi_k, \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad (\text{A.1})$$

donde $\sigma > 0$ representa la volatilidad del activo, ξ_k 's son v.a. i.i.d con media cero y varianza uno.

- b) Debido a insuficiente liquidez, las operaciones del agente impactan el precio del activo. Se distinguirá entre dos tipos de impacto: El **impacto temporal** que se refiere a los desbalances entre la oferta y la demanda causados por la ejecución de órdenes grandes y que conducen a movimientos temporales del precio fuera del equilibrio, y el **impacto permanente** que se refiere a cambios en el precio de equilibrio que permanecen durante toda la vida del proceso de liquidación.

Los impactos permanente y temporal estarán modelados por funciones crecientes $g(\cdot)$ y $h(\cdot)$ respectivamente, las cuales dependen de la «intensidad» con la que el agente transacciona.

Entre los tiempos t_0 y t_1 el agente operará $n_1 := (x_1 - x_0)$ unidades de activo. Si el número total de unidades n_1 es suficientemente grande, el precio decrecerá entre t_0 y t_1 , obteniendo así el nuevo precio de mercado

$$S_1 := \tilde{S}_0 - \tau g(v_1) - h(v_1),$$

donde $v_1 := n_1/\tau$ y $\tau := T/N$. La variable v_1 representa la **velocidad o tasa de transacciones** del período (t_0, t_1) . Entre más grande es la tasa de transacciones, mayor es el impacto en el precio del activo. Después, entre los tiempos t_1 y t_2 el agente operará $n_2 := (x_2 - x_1)$, lo que nuevamente tendrá un impacto en el precio, conduciendo a

$$S_2 := \tilde{S}_1 - \tau [g(v_1) + g(v_2)] - h(v_2),$$

donde $v_2 := n_2/\tau$. Procediendo de manera análoga, el **precio de mercado** S_k , al que se podrá operar el activo en el tiempo t_k , estará dado por

$$S_k := \tilde{S}_k - \tau \sum_{j=1}^k g(v_j) - h(v_k),$$

donde v_k y n_k están definidos de la manera obvia.

Entonces, en cada período de tiempo el agente comerciará en el activo con el fin de liquidar su posición:

$$X - \sum_{k=1}^N n_k = 0.$$

Notemos que el vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ especifica de manera equivalente a la estrategia de transacciones; por tanto, utilizaremos el término «estrategia transacciones» indistintamente para referirnos a \mathbf{x} o \mathbf{n} . Claramente, x_k y n_k están relacionados por

$$x_k = X - \sum_{j=1}^k n_j = \sum_{j=k+1}^N n_j, \quad \forall k = 1, \dots, N-1.$$

Ahora, las ganancias resultantes de seguir cierta estrategia de transacciones están dadas por la suma del producto del número de unidades n_k que el agente comercia en cada intervalo de tiempo por el precio efectivo S_k recibido en dicha operación. Esto es

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N n_k S_k &= n_1 S_0 + \sum_{k=2}^N n_k \left(S_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sigma \tau^{\frac{1}{2}} \xi_j - \tau g(v_j) \right) \right) - \sum_{k=1}^N n_k h(v_k) \\
 &= X S_0 + \sum_{k=2}^N \sum_{j=1}^{k-1} n_k \left(\sigma \tau^{\frac{1}{2}} \xi_j - \tau g(v_j) \right) - \sum_{k=1}^N n_k h(v_k) \\
 &= X S_0 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N n_k \left(\sigma \tau^{\frac{1}{2}} \xi_j - \tau g(v_j) \right) - \sum_{k=1}^N n_k h(v_k) \\
 &= X S_0 + \sum_{j=1}^{N-1} x_j \left(\sigma \tau^{\frac{1}{2}} \xi_j - \tau g(v_j) \right) - \sum_{k=1}^N n_k h(v_k) \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho de (A.2) es el valor de la posición inicial del agente; cada término adicional representa una ganancia o pérdida debido a un factor de mercado particular. El término $\sum x_j \sigma \tau^{\frac{1}{2}} \xi_j$ representa el efecto total de la volatilidad. El término $-\sum x_j \tau g(v_j)$ representa la pérdida de valor de nuestra posición total, causada por el impacto permanente. La suma $\sum n_k h(v_k)$ corresponde a los costos transaccionales resultantes del impacto temporal.

El **costo total** de la estrategia de transacciones es la diferencia entre el valor inicial del portafolio y las ganancias asociadas a la estrategia, $X S_0 - \sum_{k=1}^N n_k S_k$. Notemos que la distribución del costo será exactamente Gaussiana si ξ_j 's son Gaussianas; en caso contrario, si N es grande la distribución será aproximadamente Gaussiana.

Denotaremos por $E(\mathbf{x})$ al costo esperado de la estrategia \mathbf{x} y por $V(\mathbf{x})$ a su varianza. Entonces

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N-1} \tau x_k g(v_k) + \sum_{k=1}^N n_k h(v_k), \tag{A.3}$$

$$V(\mathbf{x}) = \sigma^2 \tau \sum_{k=1}^N x_k^2. \tag{A.4}$$

El objetivo final es encontrar la(s) estrategia(s) óptima(s) que minimice(n) una combinación de costo medio y volatilidad, cuidando siempre el balance entre éstas dos últimas cantidades. Por lo tanto, decimos que una estrategia es **eficiente** u **óptima** si no existe otra estrategia con menor varianza para el mismo o menor nivel de costo medio, o, equivalentemente, no existe estrategia con menor costo medio para el mismo o menor nivel de varianza.

Podemos construir estrategias eficientes resolviendo el problema de optimización con restricciones:

$$\min_{\mathbf{x}: V(\mathbf{x}) \leq \bar{V}} E(\mathbf{x}) \quad (\text{A.5})$$

Esto es, dado un máximo nivel de varianza $\bar{V} > 0$, encontraremos una estrategia que tiene mínimo nivel de costo. Como $V(\mathbf{x})$ es convexa, el conjunto $\{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) \leq \bar{V}\}$ es convexo, y suponiendo convexidad estricta en $E(\mathbf{x})$, entonces existe un único minimizador $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\bar{V})$.

Sin importar el balance preferido de riesgo-rendimiento del agente, cualquier otra estrategia \mathbf{x} con $V(\mathbf{x}) \leq \bar{V}$ tiene costo medio mayor que \mathbf{x}^* para la misma o menor varianza, y por lo tanto no puede ser eficiente. Así, la familia de todas las posibles estrategias óptimas está parametrizada por el valor \bar{V} , representando todos los posibles niveles máximos de varianza. Llamamos a esta familia la **frontera eficiente de estrategias óptimas**.

Notemos ahora que resolver (A.5), es equivalente a resolver el siguiente problema sin restricciones

$$\min_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}) + \lambda V(\mathbf{x}) \quad (\text{A.6})$$

para algún $\lambda \geq 0$. Variando λ , $\mathbf{x}^*(\lambda)$ recorrerá la misma familia de estrategias óptimas que $\mathbf{x}^*(\bar{V})$.

El parámetro λ tiene una interpretación financiera directa. De la ecuación (A.6), observamos que λ es una medida de cuanto el agente penaliza la varianza con respecto al costo esperado; por tanto, λ puede ser interpretada como una medida de la aversión al riesgo del agente.

Dado un conjunto de parámetros, el problema (A.6) puede ser resuelto mediante métodos numéricos dependiendo de la forma de las funciones $g(v)$ y $h(v)$. Sin embargo, en el caso *lineal* es posible obtener soluciones analíticas. Así pues, supongamos que el impacto permanente es lineal en la tasa media de transacciones

$$g(v) = \gamma v,$$

con $\gamma > 0$. De esta manera, cada n unidades que sean vendidas disminuye el precio

del activo en γv . Entonces, el término de impacto permanente en (A.3) se convierte

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} \tau x_k g(v_k) &= \gamma \sum_{k=1}^N x_k n_k = \gamma \sum_{k=1}^N x_k (x_{k-1} - x_k) \\ &= \frac{1}{2} \gamma \sum_{k=1}^N (x_{k-1}^2 - x_k^2 - (x_k - x_{k-1})^2) \\ &= \frac{1}{2} \gamma X^2 - \frac{1}{2} \gamma \sum_{k=1}^N n_k^2 \end{aligned}$$

De manera similar, para el impacto temporal

$$h(v) = \epsilon \operatorname{sgn}(\tau v) + \eta v,$$

donde sgn es la función signo.

Así, el costo medio (A.3) se simplifica a

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \gamma X^2 + \epsilon \sum_{k=1}^N |n_k| + \frac{\tilde{\eta}}{\tau} \sum_{k=1}^N n_k^2 \quad (\text{A.7})$$

donde $\tilde{\eta} = \eta - \frac{1}{2} \gamma \tau$.

Con $E(\mathbf{x})$ de (A.7) y $V(\mathbf{x})$ de (A.4), y suponiendo que n_k no cambia de signo¹, la combinación $U(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) + \lambda V(\mathbf{x})$ es una función cuadrática, y es estrictamente convexa para $\lambda \geq 0$. Por lo tanto, determinamos el único mínimo global igualando las derivadas parciales a cero.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_k} &= 0 \\ 2\tau \left(\lambda \sigma^2 x_k - \tilde{\eta} \frac{x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}}{\tau^2} \right) &= 0 \\ \frac{1}{\tau^2} (x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}) &= \tilde{\kappa}^2 x_k \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

con $\tilde{\kappa}^2 = \frac{\lambda \sigma^2}{\tilde{\eta}}$, para $k = 1, \dots, N - 1$.

La ecuación (A.8) es una ecuación en diferencias lineal, cuya estrategia solución es de la forma:

¹Una estrategia únicamente de venta.

$$x_k = \frac{\sinh(\kappa(T - t_k))}{\sinh(\kappa T)} X,$$

$$n_k = \frac{2 \sinh\left(\frac{1}{2}\kappa T\right)}{\sinh(\kappa T)} \cosh\left(\kappa\left(T - \left(j - \frac{1}{2}\right)\tau\right)\right).$$

Donde

$$\kappa := \lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{\kappa}.$$

Tenemos $n_k > 0$ para todo k siempre y cuando $X > 0$. Así, para vender una posición inicial grande, la solución decrece desde su valor inicial hasta cero a un tasa determinada por el parámetro κ ; la ejecución óptima de un problema de venta nunca involucra compras intermedias.

B. Implementación computacional

Dada una función $A(r)$ de aversión al riesgo y un conjunto de parámetros γ , η y σ , el objetivo final en los problemas de liquidación e inversión óptimas es la obtención de la estrategia óptima adaptativa X_t^* . En este punto, queda claro que el paso fundamental para ello es resolver la EDP asociada al control óptimo transformado \tilde{c} , véase el Teorema 2.2. Dicha ecuación es no-lineal del tipo advección-difusión. En el caso de aversión constante es posible obtener una solución analítica; pero para funciones de aversión más generales resulta prácticamente imposible. Razón por la que tendremos que recurrir a los métodos numéricos.

Existe una gran variedad de métodos dentro de la literatura de solución numérica de EDPs. Unos bastante sencillos; donde lo que se hace es reemplazar el problema original por un conjunto de ecuaciones algebraicas obtenidas mediante la aproximación discreta de las derivadas involucradas, *métodos de diferencias finitas* (véase p. ej. Thomas [Tho98]); hasta métodos que requieren el uso de técnicas mucho más sofisticadas para su desarrollo, *métodos de elemento finito, volumen finito, espectrales, etc.* (véase p. ej. Larsson y Thomée [LT08]). Por ser un muy intuitivo y de fácil implementación, se utilizó el método de diferencias finitas para la aproximación de las EDPs involucradas en la obtención de la estrategia óptima X_t^* .

Aproximación numérica de \tilde{c} y v

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \tilde{c}_y = \frac{\sigma^2}{4\tilde{c}}\tilde{c}_{rr} - \frac{3}{2}\eta\tilde{c} \cdot \tilde{c}_r \\ \tilde{c}(0, r) = \sqrt{\frac{\sigma^2 A(r)}{2\eta}} \end{cases} . \quad (\text{B.1})$$

Nuestro objetivo es construir un esquema numérico para aproximar la solución del problema (B.1). La estrategia será reducir éste a un problema discreto que sea más sencillo de resolver. Mientras que la solución exacta es una función $\tilde{c}(y, r)$ definida

sobre todo el rectángulo $\mathcal{R} := \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$, nuestra solución numérica estará definida en a lo más un conjunto numerable de puntos¹:

$$\mathcal{M} := \Lambda \times \Pi,$$

donde

$$\Lambda = \{y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < \infty\}$$

y

$$\Pi = \{-\infty \leftarrow \dots \leftarrow r_{-1} < r_0 = 0 < r_1 < \dots \leftarrow \infty\}.$$

Al conjunto \mathcal{M} se le conoce como **partición** o **mall**a del rectángulo \mathcal{R} .

Consideraremos una malla **uniforme** $\mathcal{M} = \mathcal{M}(h, k)$; esto es, una malla para la cual existen constantes positivas h y k tales que

$$\begin{aligned} y_n &= n \cdot k, & \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ r_m &= m \cdot h, & \forall m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A las constantes h y k se les denomina **tamaños de paso**.

Cuando la solución \tilde{c} es evaluada sobre la malla obtenemos que

$$(\tilde{c}_y)_m^n = \frac{\sigma^2}{4\tilde{c}_m^n} (\tilde{c}_{rr})_m^n - \frac{3}{2}\eta\tilde{c}_m^n \cdot (\tilde{c}_r)_m^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z},$$

donde \tilde{c}_m^n , $(\tilde{c}_y)_m^n$, $(\tilde{c}_r)_m^n$ y $(\tilde{c}_{rr})_m^n$ son las evaluaciones de cada una de las funciones en el punto (y_n, r_m) . Usando el Teorema de Taylor, estas ecuaciones pueden reescribirse en términos de aproximaciones discretas de cada una de las derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{c}_m^{n+1} - \tilde{c}_m^n}{k} + \mathcal{O}_m^n(k) &= \frac{\sigma^2}{4\tilde{c}_m^n} \left(\frac{\tilde{c}_{m+1}^n - 2\tilde{c}_m^n + \tilde{c}_{m-1}^n}{h^2} + \mathcal{O}_m^n(h^2) \right) \\ &\quad - \frac{3}{2}\eta\tilde{c}_m^n \left(\frac{\tilde{c}_{m+1}^n - \tilde{c}_{m-1}^n}{2h} + \mathcal{O}_m^n(h^2) \right), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{O}_m^n(k)$ y $\mathcal{O}_m^n(h^2)$ son los términos de error que convergen a cero cuando h y k tienden a cero. Si estos términos no son considerados, entonces la ecuación de arriba ya no será satisfecha por \tilde{c} . En su lugar, podría ser satisfecha por cierta función discreta $D : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual esperaríamos se aproxime a \tilde{c} , cuando h y k son pequeños. Este proceso conduce al siguiente **esquema de diferencias finitas**:

¹Naturalmente, en la práctica sólo obtendremos la solución en un número finito de puntos

$$\left\{ \begin{array}{l} D_m^0 = \sqrt{\frac{\sigma^2 A_m}{2\eta}} \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \\ D_m^{n+1} = D_m^n + \frac{\sigma^2}{4D_m^n} \left(\frac{D_{m+1}^n - 2D_m^n + D_{m-1}^n}{h^2} \right) k \\ \quad - \frac{3}{2}\eta D_m^n \left(\frac{D_{m+1}^n - D_{m-1}^n}{2h} \right) k \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

donde $D_m^n := D(y_n, r_m)$ y $A_m := A(r_m)$. El objetivo es obtener una aproximación a la solución de la ecuación diferencial parcial original, resolviendo el problema discreto (B.2). Este esquema proporciona un algoritmo recursivo para los valores de D . Gracias a la condición inicial, D_m^0 es conocido para cualquier $m \in \mathbb{Z}$; estos valores pueden ser utilizados para determinar D_m^1 , $m \in \mathbb{Z}$, y con ellos calcular D_m^2 , $m \in \mathbb{Z}$; este proceso se puede continuar para determinar D_m^n , $m \in \mathbb{Z}$, hasta cualquier nivel de tiempo desado n .

Así, la aproximación D puede ser utilizada para:

1. Obtener una aproximación al control óptimo c , definida sobre la malla $\mathcal{N} := \{(x_n, r_m) := (\sqrt{y_n}, r_m) \mid n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}\}$, vía:

$$C_m^n := D_m^n \cdot x_n. \quad (\text{B.3})$$

2. Construir un esquema de diferencias finitas para la función de valor v . Las Proposiciones 3.3 y 3.4 implican que el esquema

$$\left\{ \begin{array}{l} V_m^0 = u_m \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \\ V_m^{n+1} = V_m^n - \eta C_m^n \left(\frac{V_m^n - V_{m-1}^n}{h} \right) k \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

donde $u_m := u(r_m)$, aproxima la función de valor v sobre los punto de malla (y_n, r_m) , o equivalentemente sobre los puntos de malla $(x_m, r_m) := (\sqrt{y_m}, r_m)$.

Ahora bien, la exactitud de las aproximaciones C y V dependerá de la exactitud de la función D . Por construcción, entre más pequeños son los tamaños de paso h y k , mejor es la aproximación D . Sin embargo, la *convergencia* y *estabilidad* de esquemas

de diferencias finitas es un tema delicado (en el que no profundizaremos); no basta con pedir tamaños de paso pequeños, también importa la relación que guardan h y k (véase Cap. 2 y 3 de Thomas [Tho98]). La dificultad radica en el hecho de que, a diferencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias, las ecuaciones diferenciales parciales están definidas en más de una dimensión. Afortunadamente, el problema (B.1) es un problema de advección-difusión. En el caso de coeficientes constantes, esta clase de problemas ha sido extensamente estudiada y se han encontrado condiciones para el «buen» comportamiento de los métodos numéricos. Así que, estableceremos condiciones análogas a las de coeficientes constantes.

Definamos

$$\alpha = \max \frac{3}{2} \eta \tilde{c} \frac{k}{h} = \frac{3\eta \tilde{c}_{max} k}{2h},$$

$$\beta = \max \frac{\sigma^2 k}{4\tilde{c} h^2} = \frac{\sigma^2 k}{4\tilde{c}_{min} h^2}.$$

Conjeturamos que la condición de estabilidad y convergencia del esquema numérico (B.2) se garantiza siempre que

$$\frac{\alpha^2}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}.$$

Esta condición se cumple si

$$k \leq \frac{2\tilde{c}_{min} h^2}{\sigma^2} \quad \text{y} \quad h \leq \frac{\sigma}{\eta \tilde{c}_{min} \tilde{c}_{max}}. \quad (\text{B.5})$$

Mismo es el caso de la aproximación para la función de valor v . La EDP satisfecha por la función de valor (transformada \tilde{v}) es del tipo hiperbólico. Por lo que, la condición que podría garantizar estabilidad y convergencia del método (B.4) está dada por

$$\epsilon \leq 1,$$

donde $\epsilon := \max \eta \tilde{c} \frac{k}{h} = \eta \tilde{c}_{max} \frac{k}{h}$. Equivalentemente

$$k \leq \frac{h}{\eta \tilde{c}_{max}}. \quad (\text{B.6})$$

En la implementación de las simulaciones, elegiremos tamaños de paso h y k pequeños que satisfagan las condiciones (B.5)-(B.6).

Aproximación numérica de la estrategia óptima adaptativa

La estrategia y valor de portafolio óptimos satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$d \begin{pmatrix} X_t^* \\ R_t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c(X_t^*, R_t^*) dt \\ -\eta c(X_t^*, R_t^*) dt + \sigma X_t^* dW_t \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Este sistema también puede ser aproximado por diferencias finitas, con dos diferencias principales: Primero, como la única variable independiente del sistema (B.7) es el tiempo, y además la función c es suave, no habrá que preocuparnos de la convergencia y estabilidad del método; en este caso sí bastará pedir tamaño de paso pequeño (véase Cap. 9 de Kloeden y Palten [KP95]). Segundo, existe un componente aleatorio que conduce el comportamiento de las soluciones; por tanto utilizaremos simulación de variables aleatorias gaussianas para aproximar tal componente.

Dada una partición uniforme $\{t_j = j \cdot \Delta t | j \in \mathbb{N} \text{ y } \Delta t > 0\}$ y un par de condiciones iniciales (x_0, r_0) , el sistema (B.7) puede ser aproximado a través del esquema

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - c(x_j, r_j) \Delta t, \\ r_{j+1} = r_j - \eta c(x_j, r_j) \Delta t + \sigma x_j \Delta W_j, \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

donde $\{\Delta W_j | j \in \mathbb{N}\}$ es una muestra aleatoria con distribución $N(0, \Delta t)$.

En cada paso del algoritmo anterior, necesitamos la evaluación del control óptimo c en un punto que no necesariamente pertenece a la malla \mathcal{N} . Con el propósito de remediar este problema, utilizaremos la función C para interpolar linealmente² el valor $c(x_j, r_j)$. Denotemos por $\hat{c}(x_j, r_j)$ dicha interpolación. De esta manera, el esquema queda:

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j - \hat{c}(x_j, r_j) \Delta t, \\ r_{j+1} = r_j - \eta \hat{c}(x_j, r_j) \Delta t + \sigma x_j \Delta W_j, \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.8})$$

²También es posible utilizar interpolación cuadrática o cúbica. Sin embargo, estas interpolaciones son computacionalmente más demandantes. Además, cuando los tamaños de paso h y k son razonablemente pequeños, la diferencia entre los tres tipos de interpolación es despreciable.

Códigos de Matlab

A continuación presentamos los códigos de la implementación de los esquemas (B.2), (B.3) (B.4), y (B.8).

Algoritmo B.1 Código para aproximación de los controles óptimos \tilde{c} y c .

```
function [y, r, ct, x, c]=Control_opt(A, sigma, eta, h, k, limy, linfr, lsupr)
Py=0:k:limy;
CardPy=numel(Py);
Pr=linfr:h:lsupr;
CardPr=numel(Pr);
%Como se requiere que los valores de la función en [CardPy*CardPr] puntos
%se necesita evaluar la condición inicial en (CardPr+2*(CardPy-1)) puntos
Pr_ext=[(min(Pr)-(CardPy-1)*h):h:(min(Pr)-h), Pr, (max(Pr)+h):h:(max(Pr)+(CardPy-1)*h)];
CardPr_ext=CardPr+2*(CardPy-1);
%-----
[y, r]= meshgrid(Py, Pr); % [y_ext, r_ext]= meshgrid(Py, Pr_ext);
ct_ext=zeros(CardPr_ext, CardPy);
%Condición inicial
ct_ext(:, 1)=sqrt((sigma^2)*A(Pr_ext'))/(2*eta);
%-----
%Definimos los parámetros de malla
rho=k/h^2; pi=k/h;
%-----
%Definimos variables auxiliares
alfa=(sigma^2)/4; beta=-3*eta/2;
%-----
%Resolvemos la EDP del control transformado por diferencias finitas
for n=1:(CardPy-1)
for m=(1+n):(CardPr_ext-n)
ct_ext(m, n+1)=ct_ext(m, n)+alfa*rho*(ct_ext(m+1, n)-2*ct_ext(m, n)+ct_ext(m-1, n))/ct_ext(m, n)+pi*beta*ct_ext(m, n)*(ct_ext(m+1, n)-ct_ext(m-1, n))/2;
end
if sum(isnan(ct_ext(:, n+1))) > 0 || sum(isinf(ct_ext(:, n+1))) > 0
error('Ocurrió un error debido a la malla'); break
end
end
%-----
%Filtramos los valores que necesitamos
ct=ct_ext(1+(CardPy-1):(CardPr_ext-(CardPy-1)),:);
%-----
%Obtenemos el control óptimo
x=sqrt(y); c=ct.*x;
end
```

Algoritmo B.2 Código para la aproximación de la función de valor v .

```
function [v_ext, v]=Func_valor(ct_ext, u, eta, h, k)
[CardPr_ext, CardPy]=size(ct_ext);
v_ext=zeros(CardPr_ext, CardPy);
%Asignamos la condición inicial
v_ext(:, 1)=u;
%-----
param=eta*k/h;
for n=1:(CardPy-1)
for m=(1+n):(CardPr_ext-n)
v_ext(m, n+1)=v_ext(m, n)-param*ct_ext(m, n)*(v_ext(m, n)-v_ext(m-1, n));
end
end
%Filtramos los valores que necesitamos
v=v_ext(1+(CardPy-1):(CardPr_ext-(CardPy-1)),:);
%-----
end
```

Algoritmo B.3 Código para simulación de trayectorias Brownianas.

```
function [t, Stilde]=Escenarios(S0, sigma, dt, tf)
t=[0:dt:tf]';
Cardt=numel(t);
numesc=numel(S0);
%Generamos un vector con variables aleatorias normales
Z=normrnd(0, 1, Cardt-1, numesc);
%Generamos el vector auxiliar
Stilde=tril(ones(Cardt, Cardt))*[S0; sigma*Z*sqrt(dt)];
end
```

Algoritmo B.4 Código para simulación de la estrategia y valor de portafolio óptimos: X_t^* y R_t^* .

```
function [St, Xt, Rt, GRt]=Estrategia_opt(t, Stilde, X0, R0, x, r, c, eta, gamma)
dt=t(2)-t(1);
Cardt=numel(t);
numej=numel(X0);
St=zeros(Cardt, numej);
Xt=zeros(Cardt, numej);
Rt=zeros(Cardt, numej);
%Asignamos valores iniciales
St(1, :)=repmat(Stilde(1), 1, numej);
Xt(1, :)=X0; Rt(1, :)=R0;
%-----
for k=1:(Cardt-1)
Xt(k+1, :)=Xt(k, :)-interp2(x, r, c, Xt(k, :), Rt(k, :))*dt;
Rt(k+1, :)=Rt(k, :)-eta*dt*interp2(x, r, c, Xt(k, :), Rt(k, :)).^2+Xt(k, :)*(Stilde(k+1)-
Stilde(k));
St(k+1,      :)=St(k,      :)+(Stilde(k+1)-Stilde(k))+gamma*(Xt(k+1,      :)-Xt(k,
:))+eta*(interp2(x, r, c, Xt(k+1, :), Rt(k+1, :))-interp2(x, r, c, Xt(k, :), Rt(k, :)));
end
GRt=Rt-Xt.*(repmat(Stilde, 1, numej)+gamma*(Xt-X0)-(gamma/2)*Xt);
end
```

Bibliografía

- [AC99] Robert Almgren and Neil Chriss, *Value under liquidation*, Risk **12** (1999), no. 12, 61–63.
- [AC01] ———, *Optimal execution of portfolio transactions*, Journal of Risk **3** (2001), 5–40.
- [AK65] J Arrow Kenneth, *Aspects of the theory of risk-bearing*, Helsinki, Yrjö Hahnsson Foundation (1965).
- [Alm03] Robert F Almgren, *Optimal execution with nonlinear impact functions and trading-enhanced risk*, Applied mathematical finance **10** (2003), no. 1, 1–18.
- [ATHL05] Robert Almgren, Chee Thum, Emmanuel Hauptmann, and Hong Li, *Direct estimation of equity market impact*, Risk **18** (2005), no. 7, 58–62.
- [Ber54] Daniel Bernoulli, *Exposition of a new theory on the measurement of risk*, Translated from Latin into English by Dr. Louise Sommer, The American University, Washington, DC, from “Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis,” Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tomus V [Papers of the Imperial Academy of Sciences in Petersburg, Vol. V], 1738, pp. 175–192., *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1954), 23–36.
- [BL98] Dimitris Bertsimas and Andrew W Lo, *Optimal control of execution costs*, Journal of Financial Markets **1** (1998), no. 1, 1–50.
- [BS73] Fischer Black and Myron Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, The journal of political economy (1973), 637–654.
- [BSW80] Václav E Benes, Lawrence A Shepp, and Hans S Witsenhausen, *Some solvable stochastic control problems*, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes **4** (1980), no. 1, 39–83.
- [FS11] Hans Föllmer and Alexander Schied, *Stochastic finance: an introduction in discrete time*, Walter de Gruyter, 2011.

-
- [Kis13] Robert Kissell, *The science of algorithmic trading and portfolio management*, Academic Press, 2013.
- [KP95] Peter Kloeden and Eckhard Platen, *Numerical solution of stochastic differential equations*, Applications of Mathematics. Stochastic Modelling and Applied Probability, vol. 23, Springer, 1995.
- [Kyl85] Albert S Kyle, *Continuous auctions and insider trading*, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1985), 1315–1335.
- [LSU88] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, and N.N. Ural'ceva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 23, American Mathematical Society, 1988.
- [LT08] Stig Larsson and Vidar Thomée, *Partial differential equations with numerical methods*, Texts in Applied Mathematics, vol. 45, Springer Science and Business Media, 2008.
- [Pha09] Huyên Pham, *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications*, vol. 61, Springer Science & Business Media, 2009.
- [Pra64] John W Pratt, *Risk aversion in the small and in the large*, *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1964), 122–136.
- [Pri07] Jean-Luc Prigent, *Portfolio optimization and performance analysis*, Financial Mathematics Series, Chapman and Hall/CRC, 2007.
- [Rud91] Walter Rudin, *Functional analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [RY99] Daniel Revuz and Marc Yor, *Continuous martingales and brownian motion*, 3rd ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Sch08] Torsten Schöneborn, *Trade execution in illiquid markets: Optimal stochastic control and multi-agent equilibria*, PhD thesis, Technical University Berlin, 2008.
- [SK91] Steven E Shreve and Ioannis Karatzas, *Brownian motion and stochastic calculus*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 113, Springer, 1991.
- [SS09] Alexander Schied and Torsten Schöneborn, *Risk aversion and the dynamics of optimal liquidation strategies in illiquid markets*, *Finance and Stochastics* **13** (2009), no. 2, 181–204.

- [SS11] Alexander Schied and Alla Slynko, *Some mathematical aspects of market impact modeling*, Surveys in Stochastic Processes (2011), 153–179.
- [SST10] Alexander Schied, Torsten Schöneborn, and Michael Tehranchi, *Optimal basket liquidation for cara investors is deterministic*, Applied Mathematical Finance **17** (2010), no. 6, 471–489.
- [Tad13] Steven Tadelis, *Game theory: an introduction*, Princeton University Press, 2013.
- [Tho98] James William Thomas, *Numerical partial differential equations: Finite difference methods*, Texts in Applied Mathematics, vol. 22, Springer Science and Business Media, 1998.
- [VNM44] John Von Neumann and Oskar Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, 1944.

