UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
UNIDAD IZTAPALAPA

Mercados financieros de alta frecuencia: Equilibrio de Nash en modelos de impacto de precios.

Tesis para obtener el título de:

Maestra en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Indistriales

Jennifer Rangel Madariaga

Agosto 2016

Director: Dr. Erick Treviño Aguilar
Co-director: Julio César García Corte

Director

Dr. Erick Treviño Aguilar - Universidad de Guanajuato

Co-director

Dr. Julio César García Corte - Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

Sinodales

Dra. Patricia Saavedra Barrera - UAM-I
Dr. J. Refugio Vallejo Gutiérrez - UGto.
Dr. Erick Treviño Aguilar -UGto.

Fecha de examen profesional

xx.yy.zzzz

Dedicatoria.

Índice general

Introducción 1

I. Preliminares 3

1. Teoría de Juegos: Equilibrio de Nash 5
1.1. Introducción . . . 5
1.2. Juegos de estrategia . . . 6
1.2.1. Solución a los juegos de estrategia . . . 8
1.2.2. Equilibrio de Nash . . . 9

2. Modelos de impacto de precios 13
2.1. Introducción . . . 13
2.2. El modelo de Kyle . . . 13
2.2.1. Modelado . . . 15
2.3. El modelo de Almgren y Chriss . . . 17
2.3.1. Modelado . . . 18
2.4. El modelo de Alfonsi, Schied y Slynko . . . 23
2.4.1. Estrategias de manipulación de precios. . . . 23
2.4.2. Modelado . . . 24
2.4.3. Resultados . . . 26

3. Mercados de alta frecuencia 27
3.1. *Algorithmic Trading* (AT) y *High Frequency Trading* (HFT) . . . 27
3.1.1. Transacciones Predatorias . . . 29

II. Equilibrio de Nash en modelos de impacto de precios 33

4. Modelación matemática 35
4.1. Introducción . . . 35
4.2. El modelo . . . 35
4.2.1. Costos de liquidación . . . 37
4.3. Equilibrio de Nash . . . 39
4.3.1. Notación . . . 39
4.3.2. Estrategias de equilibrio . . . 40

4.3.3. Impacto de los costos de transacción y la frecuencia de las transacciones en los costos esperados 41

III. Simulaciones y resultados **47**

5. Programación **49**
5.1. Elección de kérnel de decaimiento 49

6. Resultados. **51**

IV. Demostraciones **65**

7. Demostraciones **67**
7.1. Teorema de existencia y unicidad del equilibrio de Nash 67
7.2. Proposiciones referentes a oscilaciones en las estrategias 77

V. Apéndices **95**

A. Gráficas adicionales **97**

B. Códigos **113**

Bibliografía **117**

Introducción

Impulsados por los avances tecnológicos, las empresas financieras han automatizado las órdenes mediante sistemas de operaciones electrónicos. Este nivel de modernización ha permitido el desarrollo de otra forma de negocio conocida como *Algorithmic Trading*, que de manera muy general, se basa en la incorporación de algoritmos eficientes que automatizan la toma de decisiones para generar ganancias. Entre sus ventajas se encuentran, la reducción de costos al eliminar la contratación de personal para estas tareas, mayor rapidez en la ejecución de las transacciones y mayor facilidad de encontrar oportunidades en las fluctuaciones de precios. Sin embargo, también juegan las desventajas, siendo una de ellas la existencia del trading predatorio donde los agentes buscan generar ganancias a expensas de la liquidación de otros agentes, tal práctica puede provocar comportamientos oscilatorios en las estrategias, es decir, órdenes alternadas de compra y venta que dan lugar a incrementos en los costos.

Dentro del *Algorithmic Trading* existen estrategias que se denominan de alta frecuencia, a esto se conoce como *High Frequency Trading* cuyo objetivo es transaccionar a grandes velocidades aprovechando los diferenciales en los precios de tal manera que se obtienen fracciones de centavo en cada operación ejecutada, logrando ganancias importantes al ejecutarse millones de operaciones en un tiempo corto. Los modelos clásicos en matemáticas financieras habitualmente asumen que el proceso de precios no se ve efectado por transacciones grandes y las órdenes pueden ejecutarse al precio corriente. Esto es un error, en la realidad las transacciones grandes tienen un efecto importante en los precios futuros. Más aún, en mercados de alta frecuencia donde el volumen de operaciones puede crecer desmesuradamente en poco tiempo, los precios de los activos se ven afectados a consecuencia de la participación de los agentes. Prueba de ello es el famoso *"Flash Crash"* de 2010 donde una orden de venta de 75,000 contratos de acciones *E-Mini S&P* dio lugar a transacciones electrónicas tan rápidas que la liquidación se dio en 20 minutos ocasionando una importante caída del precio de estas acciones; ver [16]. Es por ello que el concepto de impacto de mercado se introduce para complementar los modelos existentes, se refiere al efecto que causan las transacciones que da lugar a movimiento en el precio de los activos.

El impacto de mercado se refleja mediante modelos matemáticos donde el precio corriente de los activos se ve afectado por las transacciones de los participantes en el mercado. Algunos de estos modelos son: el modelo de Kyle [17] y el modelo de

Almgren y Chriss [4], ambos comentados en el presente trabajo. Entonces, considerando que el precio de los activos se mueve tanto por su dinámica estocástica como por las operaciones de los participantes de la economía podemos decir que un asunto interesante se encuentra en obtener aquella estrategia que minimice los costos esperados de las transacciones teniendo en cuenta tanto el impacto de mercado como un mercado de alta frecuencia con dos competidores. Es ahí donde podemos adecuar un concepto clave de la teoría de juegos para ayudarnos: El equilibrio de Nash. Éste describe la estrategia óptima para los participantes de un juego no cooperativo. Si aplicamos este concepto al entorno financiero proponiendo a los jugadores como los agentes donde el objetivo del juego es minimizar el costo esperado, obtendremos resultados interesantes que nos darán mayor entendimiento de la interacción de agentes y de la fomación de precios en mercados financieros. Ésta tesis proporciona una solución óptima en el sentido de equilibrio de Nash incorporando el concepto de impacto de mercado, teniendo conocimiento de que el rendimiento total de una inversión está influenciado por la manera en la que se hace la liquidación.

Nuestro trabajo se encuentra dividido en 5 partes. La primera parte consiste de los preliminares básicos que deben ser consultados para un mejor entendimiento del desarrollo principal de esta tesis, temas como el equilibrio de Nash, modelos de impacto de precios, el *"algorithmic trading"* se encuentran expuestos de manera breve y concisa. En la Parte II, se desarrollan con cuidado los detalles del modelo propuesto por Shied y Zhang [21], es aquí donde se da a conocer el teorema que proporciona la estrategia óptima en el sentido de equilibrio de Nash en un esquema de dos participantes, así como otros resultados respectivos a la velocidad de transacciones y a los costos de transacción. En la Parte III implementamos un programa computacional que refleja los resultados de la Parte II. Aquí se encuentran resultados numéricos interesantes que verifican lo obtenido en los teoremas principales. En la penúltima parte se encuentran plasmadas todas las demostraciones correspondientes al desarrollo de la tesis. Finalmente presentamos la sección de apéndices que complementan lo expuesto en el trabajo.

Parte I.

Preliminares

1. Teoría de Juegos: Equilibrio de Nash

1.1. Introducción

«*La teoría de juegos puede verse como una bolsa de herramientas analíticas designadas para ayudarnos a entender los fenómenos que observamos cuando personas que toman decisiones interactúan.*» Martin Osborne[20].

Cuando hablamos de asuntos relacionados con algún intercambio, ya sea monetario o de algún bien en general, es natural pensar en dos agentes tomando decisiones donde cada uno busca obtener el mayor beneficio posible. Este sólo es un caso particular de todas las veces en las que nos encontramos frente a una "competencia", las cuales no son para nada ajenas a nuestro día a día, por ejemplo, al ir al mercado y regatear por los precios o al buscar ser elegido como presidente de algún comité. Estas situaciones, motivan al desarrollo de la teoría de juegos. Sin embargo, ésta es demasiado extensa por lo que para este trabajo sólo nos enfrentaremos al caso particular de los juegos de estrategia en los que podremos introducir uno de los conceptos más usados en teoría de juegos: el equilibrio de Nash.

Antes de comenzar, debemos considerar que en el desarrollo de la teoría tomaremos los siguientes supuestos (supuestos de racionalidad) como válidos.

a) Todos los jugadores son **racionales**, esto es, cada uno elige la acción $s_i \in S_i$ de tal manera que maximice sus ganancias consistentemente con lo que él piensa de acuerdo a sus conocimientos.

b) Todos los jugadores son **inteligentes**, conocen todo acerca del juego: las acciones, los resultados y las preferencias de todos los jugadores.

c) Tienen **conocimiento común**, el hecho de que todos los jugadores sean racionales e inteligentes es conocido por todos.

d) **Eligen de manera propia** sólo para su propio beneficio, nadie forza a ningún jugador a tomar alguna estrategia.

1.2. Juegos de estrategia

Un juego de estrategia es un modelo de desiciones interactivas en el cual cada jugador elige su plan de acción de manera inmediata, sin cambio y de manera simultánea, consta de un conjunto de jugadores, un conjunto de estrategias para cada jugador, y un resultado para cada vector de estrategias, el cual está dado comúnmente por el vector de utilidad de los posibles resultados.

Todo problema de decisión consta de tres partes:

Acciones, las cuales son todas las alternativas que un jugador puede tomar.

Resultados, que son las consecuencias que derivan de tomar acciones.

Preferencias, que describen cómo los jugadores ordenan los posibles resultados, del más deseado al menos deseado. Una relación de preferencia $\succsim$ describe las preferencias de cada jugador, por lo que la notación $x \succsim y$ significa «x es al menos tan bueno como y» la cual supondremos cumple con los axiomas de von Neumann-Morgenstern. (Ver Capítulo 2, Sección 3, [18]).

En este caso, diremos que una estrategia es un conjunto de acciones que se tomarán para alcanzar un objetivo de forma óptima, mientras que el resultado obtenido en el juego por seguir alguna estrategia pueden ser representado de distintas formas (ver el siguiente ejemplo), la más socorida es la función de utilidad que será explicada brevemente a continuación.

Ejemplo 1.1. Supongamos que dos jugadores lanzan una moneda al aire, si cae sol el jugador 1 ganará 5 pesos mientras que si cae águila el jugador 2 gana 5 pesos.

Nuestro conjunto de posibles resultados, el cual denotaremos por la letra O, es:

$O = \{\textit{águila},\ \textit{sol}\}$,

Observemos que este mismo conjunto puede ser representado de muchas maneras, por ejemplo:

$A = \{5,\ -5\}$, $B = \{5,\ -5\}$, $C = \{-5,\ 5\}$, etc.

¿Cuál será entonces la mejor manera de representar a los resultados? El representarlos de manera alfanumérica como con las palabras «águila» o «sol» puede traernos complicaciones al interpretar cuál de los dos se prefiere, siempre es más intuitiva una representación en la recta real que nos permita comparar de manera sencilla qué resultado es el más deseado, por ejemplo, la relación de preferencia del jugador 1 es: $\textit{sol} \succsim \textit{águila}$, pero sería más sencillo denotar al evento «sol» como el número real 5 que representaría a la ganancia del jugador 1 y al evento sol con el número real 0, de esta forma el conjunto O quedaría representado por el conjunto $R = \{5,\ 0\}$ y fácilmente sabríamos que la estrategia que más conviene al jugador 1 es la que lo acerca al elemento 5 del conjunto R.

Definición 1.1. Sea O el conjunto de resultados, y sea $\succeq$ una relación de preferencia completa, transitiva y reflexiva sobre O. Una función $u : O \to \mathbb{R}$ se llama función de utilidad representando a $\succeq$, si para toda $x, y \in O$,

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y).$$

Podemos distinguir entre un juego de estrategia y un problema de desición pues en el primero, a diferencia del segundo, no sólo debemos cuidar nuestras acciones, también debemos considerar las que otros jugadores tomen.

Definición 1.2. Un juego de estrategia es un triplete ordenado $(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$, en el cual:

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ es un conjunto finito de jugadores.
- S_i es el conjunto de estrategias o acciones del jugador i, para cada $i \in N$, donde además $S_i \neq \emptyset$. En este caso, denotaremos al conjunto de todos los vectores de estrategias por $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$.
- $u_i : S \to \mathbb{R}$ es una función que asocia cada vector de estrategias $s = (s_i)_{i\in N}$ con función de pago o utilidad $u_i(s)$ del jugador i, para cada jugador $i \in N$.

Los juegos de estrategia son llamados también juegos de matrices, pues éstos pueden representarse por medio de ellas. Particularmente cuando $N = 2$, se les conoce como juegos bimatrices. Cuando N es mayor a 2, la matriz correspondiente es $N - dimensional$, y cada celda de la matriz contiene un vector de N coordenadas, representando las funciones de pago de cada jugador. (Ver Capítulo 4, [18])

Una interpretación de los juegos de estrategia es verlo como un modelo de un evento que ocurre una sola vez, donde cada jugador conoce los detalles, todos son racionales y sus decisiones son efectuadas al mismo tiempo de manera independiente por lo que ningún jugador está consciente de la elección de los otros salvo por posibles especulaciones. En consecuencia, una sucesión de juegos puede ser modelada por un juego de estrategia siempre y cuando sólo se esté interesado en el resultado instantáneo de la desición y se ignore los efectos de la acción en curso en el futuro. El hecho de que las acciones sean simultáneas no significa que se hagan precisamente en el mismo instante temporal, simplemente se refiere a que las decisiones se toman de manera aislada, sin conocimiento alguno de la selección de otros.

Una vez entendido el concepto de juego de estrategia, podemos reconocer una pregunta totalmente natural que concierne a cualquier jugador, ¿Existe alguna manera de elegir una estrategia en la que pueda obtenerse la mejor ganancia posible? La respuesta para algunos casos es afirmativa, aunque para comprenderlo necesitaremos

un poco más de teoría que nos llevará al concepto de equilibrio de Nash, el cual es uno de los temas fundamentales en el desarrollo de esta tesis.

1.2.1. Solución a los juegos de estrategia

1.2.1.1. Notación

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto finito, y para cada $i \in N$, sea X_i un conjunto no vacío. Denotaremos a $X \coloneqq \underset{i \in N}{\times} X_j$, y para cada $i \in N$, definimos a

$$X_{-i} \coloneqq \underset{j \neq i}{\times} X_j$$

como el producto cartesiano de todos los conjuntos X_j excepto de X_i. En otras palabras, $X_{-i} = \{(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) : x_j \in X_j \; \forall j \neq i\}$ además, nos referiremos a algún elemento del conjunto X_{-i} como x_{-i}, observemos que dichos elementos son vectores $(n-1)$-dimensionales derivados de elementos de X suprimiendo el vector con coordenada $i-$ésima.

En nuestro caso, el conjunto X representará a S, el conjunto de las posibles estrategias.

Por simplicidad, las definiciones, así como ejemplos que se presentan a continuación se desarrollarán para el caso donde $N = 2$, i.e hay dos jugadores, aunque pueden ser generalizados sin problema alguno.

1.2.1.2. Dominación

Definición 1.3. Decimos que la estrategia del jugador i, denotada por $s_i \in S_i$ está estrictamente dominada por la estrategia s_i' si:

$$u_i(s_i',\, s_{-i}) > u_i(s_i,\, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

Definición 1.4. Decimos que la estrategia del jugador i, denotada por s_i está débilmente dominada por la estrategia s_i' si satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} &a)\; u_i(s_i',\, s_{-i}) \geq u_i(s_i,\, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i} \\ &b)\; \exists\, t_{-i} \in S_{-i} \qquad \textit{tal que} \qquad u_i(s_i',\, t_{-i}) > u_i(s_i,\, t_{-i}). \end{aligned}$$

Bajo los supuestos de racionalidad antes mencionados, queda claro que ningún jugador utilizaría una estrategia dominada, por lo que una de las formas más sencillas y utilizadas de encontrar una solución al juego es eliminando las estrategias dominadas[1].En otras palabras, una estrategia s es racional si es la resultante de eliminar todas las estrategias dominadas, aunque, como es lógico pensar, no todos los juegos las tienen, así que necesitaremos otras herramientas que nos permitan solucionarlos o al menos reducir el número de estrategias factibles.

Antes de continuar, plantearemos un ejemplo para dejar más claro el concepto de dominación y la eliminación de estrategias dominadas expuesto en [24]. Supongamos que se tiene el siguiente juego de estrategia:

Ejemplo 1.2. $N = 2$

$S_1 = \{U,\ D\}$

$S_2 = \{L,\ M,\ R\}$.

Donde $u_1(s_i)$ y $u_2(s_i)$ están expresadas en las siguiente tabla.

$u_1,\ u_2$	L	M	R
U	1, 0	1, 2	0,1
D	0, 3	0, 1	2, 0

En este caso, observamos que el jugador uno no tiene estrategias dominadas al principio, sin embargo, en el caso del jugador dos, la estrategia R está dominada por la estrategia M así que eliminamos la estrategia R, entonces el jugador uno tiene a D dominada por U, haciendo que la estrategia D quede eliminada, finalmente el jugador dos deberá eliminar la estrategia L pues M es sustancialmente mejor y la estrategia que soluciona el juego es $s = (U,\ M)$ en la que $u_1(s) = 1$ y $u_2(s) = 2$.

1.2.2. Equilibrio de Nash

Como se mencionó, en teoría de juegos la dominación es un concepto muy importante pero limitado, así que para complementar nuestro conocimiento presentaremos el equilibrio de Nash, el cual es uno de los más socorridos en teoría de juegos, pues nos otorga las estrategias de equilibrio del juego cuando no existen estrategias de dominación[2].

[1] Es importante mencionar que, cuando el juego tiene estrategias estrictamente dominadas, el orden de eliminación no impacta en el resultado, en cambio puede alterarse al tener estrategias débilmente dominadas.

[2] Aunque es posible que el equilibro de Nash no sea único.

Antes de definirlo formalmente, consideremos primero el siguiente ejemplo expuesto en [18]:

Ejemplo 1.3. $N = 2$

$S_1 = \{T,\ M,\ B\}$

$S_2 = \{L,\ C,\ R\}$

Y finalmente $u_1(s_i)$ y $u_2(s_i)$ están expresadas en las siguiente tabla.

$u_1,\ u_2$	L	C	R
T	0, 6	6, 0	4, 3
M	6, 0	0, 6	4, 3
B	3, 3	3, 3	5, 5

En este caso no existe ninguna estrategia dominada, pero si analizamos un poco más a detalle las posibles utilidades en la tabla, descubriremos que hay una estrategia que permite a ambos participantes obtener una utilidad muy cercana a la mayor, esta es $s = (B,\ R)$, ¿Existirá una manera de obtener una solución como esta de forma analítica? La respuesta es sí, y como comentamos va más allá de la dominación.

Definición 1.5. Sea s_{-i} un vector de estrategia de todos los jugadores excepto del i, la estrategia del jugador i denotada por s_i es la mejor respuesta a s_{-i} si

$$u_i(s_i,\ s_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i,\ s_{-i}).$$

Definición 1.6. La estrategia $s^* = (s_1^*,\ s_n^*,\ \cdots,\ s_N^*) \in S$ es un equilibrio de Nash si s_i^* es la mejor respuesta a $s_{-i}^* \qquad \forall\, i \in N,$

$$u_i(s_i^*,\ s_{-i}^*) \geq u_i(s_i,\ s_{-i}^*) \qquad \forall\, s_i \in S_i\, y\, \forall\, i \in N.$$

Cuando hablamos de equilibrio podemos pensar en muchas definiciones, en este caso John Nash lo definió como la **Definición** 1.6, aunque burdamente lo podemos describir como aquella estrategia en la que cada jugador da la mejor respuesta posible, **Definición** 1.5, a las elecciones de los demás competidores, obviamente basada en los supuestos de racionalidad.

Basándonos en el ejemplo 2, y en la definición anterior observemos lo siguiente:

Si el jugador 1 elige $\{T\}$ el jugador 2 deberá elegir $\{L\}$,

Si el jugador 1 elige $\{M\}$ el jugador 2 deberá elegir $\{C\}$,

Si el jugador 1 elige $\{B\}$ el jugador 2 deberá elegir $\{R\}$.

En cambio, si el jugador 2 elige primero:

Si el jugador 2 elige $\{L\}$ el jugador 1 deberá elegir $\{T\}$,

Si el jugador 2 elige $\{C\}$el jugador 1 deberá elegir $\{M\}$,

Si el jugador 2 elige $\{R\}$ el jugador 1 deberá elegir $\{B\}$.

Entonces, la única estrategia que hace que ambos jugadores den la mejor respuesta uno al otro es $s = (B,\ R)$. La cual llamamos equilibrio de Nash.

1.2.2.1. Estrategias puras y mixtas

La estrategia de equilibrio del juego anterior fue muy clara pues no había ninguna forma de que alguno de los dos jugadores se moviera del equilibrio y obtuviera una mejor ganancia. A esto se le llama **estrategia pura**.

Un detalle que debemos considerar es que el equilibrio no siempre es único, por ejemplo, en el siguiente juego la estrategia (A,A) y la (B,B) son de equilibrio:

	A	B
A	2, 2	0, 0
B	0, 0	2, 2

Analicemos ahora otra situación. Se tienen dos jugadores y cada uno tendrá dos acciones posibles, elegir cara o cruz en un volado, de manera que la utilidad para cada uno puede representarse con el siguiente cuadro.

	C	X
C	1, -1	-1, 1
X	-1, 1	1, -1

Como podemos ver, este juego no tiene ninguna estrategia pura. En estas ocasiones, en vez de sólo seleccionar una acción los jugadores deben elegir una distribución de probabilidad sobre en conjunto de acciones factibles; cuando se realiza este procedimento las estrategias posibles se denominan **estrategias mixtas**, cualquier conjunto de estrategias mixtas induce una distribución de probabilidad sobre el conjunto de las acciones posibles en el juego. Bajo ciertos supuestos, las preferencias sobre todas las loterías pueden ser representadas por una función (función de utilidad de von Neumann-Morgenstern) que asigna un número real a cada acción y de esta forma

una lotería es preferida respecto a la otra sí y sólo sí su función de utilidad tiene un valor esperado más alto. Entonces, una estrategia de equilibrio de Nash mixta es una estrategia mixta con la propiedad de que ningún jugador puede obtener una utilidad esperada mayor si se mueve de ella.

El matemático John Nash demostró que todo juego en el cual el conjunto de acciones posible para cada jugador es finito, tiene al menos una estrategia de equilibrio mixta. En el juego presentado, existe al menos una estrategia mixta cuando cada jugador elige cara con probabilidad $\frac{1}{2}$.

Existen muchas referencias donde se puede ahondar más en este tema [18, 20, 23, 24], sin embargo, para efectos de esta tesis lo anterior provee la definición básica de Equilibrio de Nash.

2. Modelos de impacto de precios

2.1. Introducción

El dato más importante por excelencia al adquirir algún producto o servicio es claramente ¿Cuánto cuesta? o, ¿Qué precio tiene?

En el mercado financiero los activos se transaccionan a cierto precio, sin embargo, éste no permanece constante por lo que es interesante saber qué tanto cambia y por qué lo hace. El impacto de precios, consecuencia de la actividad en el mercado es, en palabras sencillas, una medida de qué tanto se mueve el precio actual del activo debido a las transacciones. Éste es un concepto de reelevancia en finanzas, particularmente en la teoría de microestructura del mercado[1]. En este capítulo presentaremos algunos modelos que requieren de este concepto y que necesitaremos en el desarrolo de la presente tesis.

El concepto de impacto de precio, se refiere a la relación que existe entre una orden de compra o venta de un activo y el cambio en su precio. Por ejemplo, es intuitivo pensar que si una persona compra grandes cantidades de un activo, su precio subirá, contrario al efecto de vender una gran cantidad. En el día a día, el volumen de transacciones es del orden de billones por lo que el proceso de generación de precios es complejo. En la literatura especializada encontramos un parámetro que caracteriza el fenómeno: el impacto de precios. Éste puede ser clasificado como temporal, transitorio o permanente como veremos.

2.2. El modelo de Kyle

En 1985, Albert S. Kyle publicó en la revista *Econometrica* el artículo *Continuous auctions and insider trading* [17], en el cual se introducen conceptos financieros y económicos interesantes y de gran importancia para nuestro trabajo, tales como *profundidad* y *resilencia* del mercado. El modelo propuesto, presenta tres casos que

[1] La microestructura del mercado es la parte de las finanzas que se encarga de explicar y entender los detalles de cómo se dan las transacciones en el mercado.

describen el equilibrio de los precios cuando los participantes presentan información asimétrica, el primer caso se refiere al equilibrio cuando la transacción se da en un sólo período, el segundo cuando se hace de manera secuencial y finalmente el tercero trata del modelo en tiempo continuo. Este documento es considerado por varios un pilar en la teoría de la microestructura del mercado, así que con base en éste, expondremos en lo que sigue sus puntos clave que nos serán de utilidad.

Describamos un poco el contexto del problema que deseamos atacar. Supongamos que cada participante del mercado quiere cambiar un activo riesgoso por uno menos riesgoso. Los participantes se dividen en tres grupos:

Agente **informado**, el cual tiene acceso a información privilegiada, conoce el valor de liquidación *ex post* del activo riesgoso, además supondremos que es neutral al riesgo, y siempre tratará de maximizar sus ganancias esperadas, por otro lado, su información se incorporará gradualmente a los precios.

Agentes **ruidosos**, quienes carecen de información y transaccionan de manera aleatoria, por lo que proporcionan cierto camuflaje a las transacciones del agente informado y les permite generar ganancias a sus expensas.

Agente **creador o generador del mercado**, quien fija los precios de acuerdo a la información obtenida de las cantidades transaccionadas por los otros dos tipos de agentes, éstos precios se asumen iguales a la esperanza del valor de liquidación del activo condicional a los conjuntos de información con lo que los precios pasados fueron determinados, asumiremos que en promedio el generador del mercado tiene ganancia cero.

Las transacciones se modelan como una secuencia de subastas en la que cada una se realiza en dos pasos:

En el **primer paso**, el agente informado y los ruidosos eligen simultáneamente las cantidades de activos que van a transaccionar (comprar o vender) y mandan órdenes de mercado, al efectuar esta desición el agente informado tendrá en cuenta el precio de liquidación así como la cantidad transaccionada por él mismo en el pasado, pero no observa nada acerca de las transacciones de los agentes ruidosos. La cantidad aleatoria seleccionada por los ruidosos se encuentra independientemente distribuída de las cantidades transaccionadas en el presente y el pasado del agente informado y de ellos mismos. En el **segundo paso**, el creador del mercado fija el precio y efectúa las transacciones para despejar el mercado, es decir, surtir las órdenes existentes. En ese momento, su información se basa en las cantidades transaccionadas en el presente y el pasado de los agentes informado y ruidosos aunque de manera agregada. A esa cantidad agregada se le conoce como flujo de órdenes, y como consecuencia de que el creador del mercado no pueda distringuir entre las transacciones de ambos agentes, las fluctuaciones en el precio vendrán por los cambios en el flujo de órdenes.

En este modelo, se asume que las variables aleatorias de interés son normalmente distribuídas ya que gracias a esto se obtiene una estructura lineal tratable y permite un único y explícito equilibrio en el que los precios y cantidades son funciones lineales simples de las observaciones.

En el modelo de subastas continuas se supone que la cantidad transaccionada por los ruidosos, así como los precios, siguen un movimiento browniano. La volatilidad constante representa que la información se incorpora en el precio a velocidad constante y toda la información privada se incorpora al final de las subastas.

La definición de liquidez del mercado es ambigua pues en primera instancia se relaciona con varias propiedades. Algunas de ellas que destacan son la *estrechez*, la *profundidad* y la *resiliencia*. La **estrechez** se refiere al costo de cambiar una posición en un período corto de tiempo, la **profundidad** al tamaño del flujo de orden que se requiere actualizar para mover en cierta cantidad el precio del activo, y la **resiliencia** a la velocidad en la que los precios se recuperan de un choque aleatorio debido a la desinformación, estas dos últimas son consecuencias endógenas de la presencia de agentes informados y ruidosos. En su artículo Black [7] describe intuitivamente la liquidez de mercado que de manera aproximada podemos definir como uno que es infinitamente estrecho, no infinitamente profundo y lo suficientemente resilente para que los precios eventualmente tiendan a su valor subyacente. Descubriremos que el modelo continuo tiene esas características, más aún , gracias a esto el agente informado deberá también hacer supuestos racionales acerca de estas 3 características además de elegir su estrategia óptima.

2.2.1. Modelado

Denotemos a $\tilde{v}$ como el valor de liquidación ex post del activo riesgoso, éste será normalmente distribuido con media p_0 y varianza Σ_0, i.e $\tilde{v} \sim N(p_0, \Sigma_0)$. La cantidad de activos transaccionados por los agentes ruidosos será $\tilde{u}$, la cual es normalmente distribuida con media cero y varianza σ_u^2, i.e $\tilde{u} \sim N(0, \sigma_u^2)$. Las variables aleatorias $\tilde{v}$ y $\tilde{u}$ tienen distribuciones independientes. La cantidad transaccionada por el agente informado es denotada por $\tilde{x}$, la cual depende del valor conocido $\tilde{v}$, $\tilde{x} = x(\tilde{v})$, y su ganancia, será expresada por π y se darán gracias al diferencial entre el valor de liquidación $\tilde{v}$ y el precio fijado $\tilde{p}$, $[\pi = (\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{x}]$. Finalmente, el precio del activo estará dado por p.

Los dos pasos de la transacción antes descritos son, 1) los valores de $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ quedan determinados y el agente informado elige cuánto transaccionar $\tilde{x}$, recordando que él conoce el valor de $\tilde{v}$. 2) El creador de mercado asigna el precio p al cual se comprará

o venderá la cantidad de activo suficiente para despejar el mercado, teniendo en cuenta que él conoce el agregado $\tilde{x} + \tilde{u}$ que llamaremos y, entonces el precio que fijará dependerá de y, esto es $\tilde{p} = p(y) = p(\tilde{x} + \tilde{u})$.

Definición 2.1. Llamaremos **equilibrio** a la existencia de un par $(x(\tilde{v}),\ p(y))$ que cumple las siguientes condiciones:

- **Maximización de ganancias:** Para cualquier estrategia $x'(\tilde{v})$ y para cualquier v, $E\{\pi(x,\ p) \mid \tilde{v} = v\} \geq E\{\pi(x',\ p) \mid \tilde{v} = v\}$.
- **Eficiencia del mercado:** La variable aleatoria $\tilde{p}$ satisface que: $\tilde{p}(x,\ p) = E\{\tilde{v} \mid y\} = E\{\tilde{v} \mid \tilde{x} + \tilde{u}\}$.

Observemos que la condición de eficiencia nos dice que, dado que el generador del mercado tendrá una ganacia de $-(\tilde{v} - p)(y)$, y supusimos que él tiene tener una ganancia esperada igual a cero, entonces el precio que debe fijar es $\tilde{p} = E[\tilde{v} \mid \tilde{x} + \tilde{u}]$, además si el agregado $\tilde{x}+\tilde{u}$ es grande podrá intuír que $\tilde{x}$ también lo es, en consecuencia subirá el precio $\tilde{p}$ y recíprocamente, si $\tilde{x} + \tilde{u}$ es pequeño. Entonces, el equilibrio llega cuando el agente informado maximiza sus ganancias dado que el generador fija un precio.

En este caso, los supuestos anteriores dan al modelo de un período una propiedad muy fortuita, tiene un equilibrio analítico tratable, donde x y p son funciones lineales, esto se demuestra a partir del siguiente teorema que puede consultarse de manera completa en [17].

Teorema 2.1. *Existe un único equilibrio en el cual x y p son funciones lineales. Definiendo constantes β y λ de tal manera que $\beta = (\sigma_u^2/\Sigma_0)^{1/2}$ y $\lambda = 2\,(\sigma_u^2/\Sigma_0)^{1/2}$, el equilibrio $(x(\tilde{v}),\ p(y))$ está dado por:*

$$x(\tilde{v}) = \beta(\tilde{v} - p_0) \qquad p(y) = p_0 + \lambda(\tilde{x} + \tilde{u}).$$

El equilibrio x y p queda determinado por las variables exógenas Σ_0 y σ_u^2, si quisiéramos obtener una medida de la informatividad de los precios, podemos definir a $\Sigma_1 = var\,(\tilde{v} \mid \tilde{p})$ cuya solución es $\Sigma_1 = \frac{1}{2}\Sigma_0$, lo cual nos indica que la mitad de la información privada es incorporada a los precios y la volatilidad de los precios no es afectada por la de los agentes ruidosos σ_u^2. La cantidad $1/\lambda$ mide la profundidad del mercado, en otras palabras, es el flujo de orden necesario para que el precio suba o caiga en una unidad. Esta medida de liquidez es proporcional al cociente entre la volatilidad de transacciones ruidosas y la cantidad de información que el agente privilegiado tiene. Finalmente, la ganancia esperada del agente informado condicionales en $\tilde{v}$, están dadas por $v^2/(4\lambda)$, y son proporcionales a la profundidad del mercado pues ante una profundidad mayor, se permite transaccionar más sin modificar demasiado los precios.

2.3. El modelo de Almgren y Chriss

Un modelo más reciente que también considera el impacto de precios es el de Robert Almgren y Neil Chriss [4]. En este artículo los autores consideran la ejecución de transacciones en un portafolio, es decir, mover el portafolio de su configuración inicial a otra distinta final después de un período fijo de tiempo T, con el objetivo de minimizar la combinación de riesgo por volatilidad y los costos de transacción. Hacemos notar que en trabajos anteriores se tiene el mismo fin pero se trabaja ignorando la volatilidad de los rendimientos de cada estrategia, lo cual es importante pues por ejemplo, suponiendo que se tiene cierta cantidad de un activo ilíquido el cual queremos vender, tenemos dos posibilidades, a) venderlo inmediatamente todo a un alto costo, o b) venderlo en un intervalo de tiempo, donde en cada intervalo ofrezcamos cierta cantidad del total del activo. En la opción b) se tiene menor costo de transacción pero la incertidumbre sobre el precio al que venderemos al final es muy grande. Al final la opción que se elija dependerá de qué tan cómodo esté el inversionista con asumir grandes riesgos, lo cual tiene que ver con el concepto de utilidad[2].

La inclusión del riesgo en el estudio viene con un costo adicional, a más complejidad del modelo más difíciles son las soluciones, así que los autores deciden hacer ciertos supuestos para obtener un problema tratable:

- La dinámica de precios sigue una caminata aleatoria aritmética.
- Los resultados fueron obtenidos al utilizar optimización estática.

El artículo analiza tres situaciones, en primer lugar considera la correlación de corto término en el movimiento de los precios, aquí demuestran que la mejora marginal de incluír esta información a la estrategia es pequeña e independiente del tamaño del portafolio, mientras el tamaño del portafolio crece, el porcentaje de ganancias decrece proporcionalmente. En segundo lugar, examinan el impacto de eventos anticipados en la estrategia óptima, los cuales pueden tener un impacto temporal significativo en los parámetros que gobiernan los movimientos en los precios[3]. De hecho se demuestra que la estrategia óptima consiste en seguir una estrategia estática hasta que suceda dicho evento donde se replanteará otra estrategia estática que sólo puede ser determinada después de que el evento ocurra. Por último, osbervan que cualquier estrategia óptima es vulnerable a eventos no anticipados.

A partir de lo anterior, el resultado más relevante es la obtención de una fórmula cerrada para la estrategia óptima para cualquier nivel de aversión al riesgo, y se

[2]En este trabajo no se incluye un módulo respectivo a utilidad pero puede ser consultado en [12]

[3]En otras palabras, mientras que el activo sigue una caminata aleatoria aritmética, en un tiempo conocido un evento no correlacionado provoca un cambio importante en la dinámica de precios.

demuestra que es posible construir una frontera eficiente de estrategias óptimas donde cada elemento de la frontera está formado por una estrategia con el mínimo costo para su nivel de costo por varianza. La frontera está caracterizada por una función suave, convexa y diferenciable en su punto mínimo.

2.3.1. Modelado

Supongamos que contamos con X unidades de cierto activo S que deseamos liquidar en a lo más un período de tiempo T, entonces dividimos el período T en N intervalos de longitud $\tau = \frac{T}{N}$, y definimos los tiempos discretos $t_k = k\tau$, para $k = 0, 1, \ldots, , N$.

Definición 2.2. Una trayectoria de transacciones es una lista $\boldsymbol{x} = x_0, \ldots, x_N$ donde x_k es el número de unidades que aún poseemos en el tiempo t_k.

En la definición anterior tenemos $x_0 = X$, mientras que nuestro objetivo es que $x_N = 0$.

Definición 2.3. Una lista de transacciones $\boldsymbol{n} = n_1, n_2, \ldots, n_N$ donde $n_k = x_{k-1} - x_k$ es el número de unidades del activo que venderemos entre el período t_{k-1} y t_k.

Observemos entonces que podemos relacionar a x_k y a n_k por la siguiente ecuación:

$$x_k = X - \sum_{j=1}^{k} n_j = \sum_{j=k+1}^{N} n_j, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots, N.$$

Una estrategia de transacciones es una regla que determina n_k en términos de la información disponible.

2.3.1.1. Dinámica de precios

Sea S_0 el precio inicial del activo que deseamos liquidar, entonces el valor de nuestra posición es XS_0, conforme pase el tiempo el activo evolucionará por cuestiones exógenas como la volatilidad y la tendencia[4], así como un factor endógeno: el impacto del mercado que en este artículo se considera de dos tipos;

[4]La volatilidad y la tendencia se asumen como el resultado de fuerzas en el mercado que ocurren aleatoria e independientemente de nuestras operaciones.

- **Impacto permanente**, el cual considera los cambios en el precio del activo que duran al menos el tiempo que resta para la liquidación.

  Al asumir que el precio del activo evoluciona como una caminata aleatoria, podemos representarlo por la siguiente ecuación,

$$S_k = S_{k-1} + \sigma\tau^{1/2}\xi_k - \tau g\left(\frac{n_k}{\tau}\right), \qquad k = 1, \ldots, N.$$

  Donde, σ representa la volatilidad, ξ_j las realizaciones de variables aleatorias independientes con media cero y varianza uno, y el impacto permanente $g(\nu)$ que es una función de la tasa promedio de transacciones $\nu = \frac{n_k}{\tau}$ durante el intervalo t_{k-1} a t_k.

- **Impacto temporal**, que se refiere a cambios temporales[5] entre la oferta y demanda provocados por los agentes que mueven los precios de su equilibrio económico.

  En este caso, modelamos el impacto temporal como una función $h(\nu)$, que representa el salto temporal en el precio promedio de la acción causado por hacer transacciones a una tasa promedio ν durante un intervalo de tiempo $[t_k, t_{k-1}]$. Entonces, el precio recibido en ese período por una unidad de activo es:

$$\tilde{S}_k = S_{k-1} - h\left(\frac{n_k}{\tau}\right).$$

  El efecto de $h(\nu)$ no aparecerá en el precio al tiempo siguiente.

Con base en las dos ecuaciones anteriores para el precio del activo, después de hacer ciertas manipulaciones algebráicas, definimos al **ingreso total** de una trayectoria como las ganancias obtenidas al completar todas las transacciones definidas en ella:

$$\sum_{k=1}^{N} n_k\tilde{S}_k = XS_0 + \sum_{k=1}^{N}\left(\sigma\tau^{1/2}\xi_k - \tau g\left(\frac{n_k}{\tau}\right)\right)x_k - \sum_{k=1}^{N} n_k h\left(\frac{n_k}{\tau}\right). \tag{2.3.1}$$

Podemos interpretar al primer factor del lado derecho XS_0, como el precio de mercado inicial de nuestra posición, es decir, el valor de nuestro activo total al inicio de la liquidación. El segundo factor $\sum_{k=1}^{N}\sigma\tau^{1/2}\xi_k x_k$ representa el efecto total de la volatilidad, mientras que $\sum_{k=1}^{n}\tau g\left(\frac{n_k}{\tau}\right)x_k$ es la pérdida en el valor total de nuestra posición debida al impacto permanente del mercado asociado a las ventas que hemos

[5]Decimos que son temporales si duran menos del tiempo en el que queremos liquidar el activo.

hecho. Por último $\sum_{k=1}^{N} n_k h\left(\frac{n_k}{\tau}\right)$ es la caída en el precio debido a nuestras ventas pero que sólo actúan sobre las ventas que se hacen en el período k.

El **costo total** por efectuar las operaciones, también conocido como **déficit de operaciones**, es la diferencia entre el valor inicial y la captura, $XS_0 - \sum_{k=1}^{N} n_k \tilde{S}_k$. La expresión anterior es una variable aleatoria, entonces podemos calcular su esperanza ($E(\boldsymbol{x})$), y varianza ($V(\boldsymbol{x})$), como sigue

$$E(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{N} \tau x_k g\left(\frac{n_k}{\tau}\right) - \sum_{k=1}^{N} n_k h\left(\frac{n_k}{\tau}\right), \tag{2.3.2}$$

$$V(\boldsymbol{x}) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{N} \tau x_k^2. \tag{2.3.3}$$

En el caso que las ξ_k tengan distribución gaussiana, heredarán esta propiedad a la distribución del costo total.

2.3.1.2. Optimización de recursos

Nuestro objetivo principal es encontrar la estrategia que minimice los costos de transacción así como el riesgo por volatilidad, para lo cual, por una simplificación en los cálculos, supondremos que las funciones de impacto temporal y permanente son lineales respecto a la tasa promedio de transacciones, de esta manera la función que caracteriza el impacto permanente será de la forma:

$$g(\nu) = \gamma\nu \text{ con } \gamma \text{ constante.} \tag{2.3.4}$$

Esta función nos indica que cada que vendamos n unidades el precio de cada unidad de activo S se depreciará γn, independientemente del momento en que las vendamos.

Para el impacto temporal tomamos a la función h definida como:

$$h(\nu) = \epsilon sgn(n_k) + \frac{\eta}{\tau} n_k, \tag{2.3.5}$$

donde ϵ y η son constantes no negativas.

Un estimador razonable para ϵ es el costo fijo de venta, por ejemplo, la mitad del valor del *bid-ask spread* más honorarios. Es mucho más difícil estimar η pues depende de aspectos particulares de la microestructura del mercado.

El modelo lineal de la ecuación (2.3.5) es conocido comúnmente como un **modelo de costo cuadrático** pues el costo total incurrido por comprar o vender n unidades en un mismo período de tiempo es cuadrático en la cantidad de activos vendidos:

$$nh(\nu) = \xi|n| + \frac{\eta}{\tau}n^2.$$

Al sustituir las ecuaciones lineales (2.3.4) y (2.3.5) en la ecuación (2.3.2), obtenemos

$$\begin{aligned} E(x) &= \gamma \sum_{k=1}^{N} x_k n_k + \epsilon \sum_{k=1}^{N} |n_k| + \frac{\eta}{\tau} \sum_{k=1}^{N} n_k^2 = \gamma \sum_{k=1}^{N} x_k \left(x_{k-1} - x_k\right) + \epsilon \sum_{k=1}^{N} |n_k| + \frac{\eta}{\tau} \sum_{k=1}^{N} n_k^2 \\ &= \frac{1}{2}\gamma \sum_{k=1}^{N} \left(x_{k-1}^2 - x_k^2 - \left(x_k - x_{k-1}\right)^2\right) + \epsilon \sum_{k=1}^{N} |n_k| + \frac{\eta}{\tau} \sum_{k=1}^{N} n_k^2 \\ &= \frac{1}{2}\gamma X^2 + \epsilon \sum_{k=1}^{N} |n_k| - \frac{\tilde{\eta}}{\tau}\gamma \sum_{k=1}^{N} n_k^2, \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

donde $\tilde{\eta} = \eta - \frac{1}{2}\gamma\tau$.

Observemos que la ecuación (2.3.6) es una función convexa si $\tilde{\eta} > 0$, lo cual nos será de utilidad al buscar la trayectoria óptima.

2.3.1.3. Frontera eficiente

Pensando en que los agentes son racionales, siempre buscarán minimizar el costo total de las operaciones, buscamos minimizar la esperanza del déficit para un nivel de varianza. Así que definimos a una **estrategia óptima o eficiente** como aquella para la que no existe otra con menos varianza para el mismo o menor nivel de costos esperados o de manera equivalente no existe otra con menor costo esperado para un nivel igual o menor de varianza. A partir de esta definición podemos construir estrategias eficientes resolviendo el siguiente problema de optimización con restricciones

$$\min_{x:V(x)\leq\tilde{V}} E(x) \tag{2.3.7}$$

Esto es, para un nivel de varianza $\tilde{V} \geq 0$, buscamos la estrategia con menor costo esperado de operación. Al ser $V(x)$ una función convexa, el conjunto $\left\{V(x) \leq \tilde{V}\right\}$

también lo es. De la misma manera $E(x)$ es estrictamente convexa por lo que existe un único mínimo x^*. La familia de todas las estrategias óptimas queda parametrizada por la variable $\tilde{V}$, representando a todos los posibles máximos niveles de varianza por costo de operación, por lo que llamamos a esta familia la **frontera eficiente de las estrategias de transacción óptimas**.

Para resolver la ecuación (2.3.7) introducimos un multiplicador de Lagrange λ, y haciendo una simplificación al problema obtenemos el siguiente problema equivalente,

$$\min_x \left(E(x) + \lambda V(x)\right) \tag{2.3.8}$$

En caso de que $\lambda > 0$, entonces la función $E(x) + \lambda V(x)$ es estrictamente convexa, por lo que el problema (2.3.8) tiene una solución única $x^*(\lambda)$, y conforme λ varía, $x^*(\lambda)$ «barre» a la familia completa y traza la frontera eficiente. El parámetro λ tiene una interpretación financiera interesante, pues puede verse como un coeficiente de aversión al riesgo, mientras más grande es λ el riesgo se vuelve más importante que los costos de transacción. La solución de esta ecuación puede encontrarse por diversos métodos numéricos dependiendo de la forma que tengan las funciones de impacto temporal y permanente, en el caso de ser funciones lineales podemos encontrar soluciones explícitas que presentaremos a continuación.

2.3.1.4. Solución para el caso lineal

Comencemos por suponer que n_j no tiene cambios de signo, entonces la función $U(x) = E(x)+\lambda V(x)$ es cuadrática de los valores de $\boldsymbol{x}$, y estrictamente convexa para $\lambda > 0$. Así que procedemos a encontrar su único mínimo global resolviendo el sistema de ecuaciones en derivadas parciales igualadas a cero,

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = 2\tau\left(\lambda\sigma^2 x_j - \tilde{\eta}\frac{x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}}{\tau^2}\right), \quad j = 1, \ldots, N-1.$$

$$\frac{1}{\tau^2}\left(x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}\right) = \tilde{\kappa}^2 x_j,$$

donde $\tilde{\kappa}^2 = \frac{\lambda\sigma^2}{\tilde{\eta}}$.

Cuyas soluciones para x_j y n_j son de la forma:

$$x_j = \frac{\sinh\left(\kappa\left(T - t_j\right)\right)}{\sinh(\kappa T)} X, \quad j = 0, \ldots, N,$$
$$n_j = \frac{2\sinh\left(\frac{1}{2}\kappa\tau\right)}{\sinh(\kappa T)} \cosh\left(\kappa\left(T - t_{j-\frac{1}{2}}\right)\right) X, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Mientras que para $E(x)$ y $V(x)$ son,

$$E(x) = \frac{1}{2}\gamma X^2 + \epsilon X + \tilde{\eta} X^2 \frac{\tanh\left(\frac{1}{2}\kappa\tau\right)\left(\tau\sinh\left(2\kappa T\right) + 2T\sinh\left(\kappa\tau\right)\right)}{2\tau^2\sinh^2\left(\kappa T\right)}$$
$$V(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\tau\sinh\left(\kappa T\right)\cosh\left(\kappa\left(T-\tau\right)\right) - T\sinh\left(\kappa\tau\right)}{\sinh^2\left(\kappa T\right)\sinh\left(\kappa\tau\right)}.$$

2.4. El modelo de Alfonsi, Schied y Slynko

En 2012, el *Journal of Financial Mathematics* de la SIAM publicó un nuevo artículo que analizaba la viabilidad[6] de los modelos de impacto de precios, escrito por Alfonsi, A., Schied, A. y Slynko, A. [3], cuyo resultado principal deriva en que el impacto de precios debe ser una función del tiempo convexa y decreciente para que no existan irregularidades ni manipulación de precios. A continuación comentaremos brevemente los puntos principales de este artículo y con ello tener más contexto para entrar a nuestro problema principal.

2.4.1. Estrategias de manipulación de precios.

La ausencia de oportunidades de arbitraje garantiza la viabilidad de los modelos estándar de valuación de activos pero, ¿qué debemos pedirle a un modelo de impacto de precios dónde la actividad de los competidores impacta en el precio del subyacente?, ¿Es suficiente la condición de no arbitraje? La respuesta general es no, pues aún teniendo el supuesto de no arbitraje y modelando la dinámica del subyacente como una martingala podemos encontrar **estrategias de manipulación de precios**, es decir, estrategias de compra y venta en un determinado horizonte de tiempo donde se comienza y termina con cero inventario pero la esperanza de los costos de ejecutar la estrategia es estrictamente negativa. En otras palabras, la existencia de

[6] Usualmente significa que no existan estrategias de manipulación de precios en el sentido de Huberman y Stanzl; para más detalles consultar [14].

estrategias de manipulación recae directamente en el modelo de impacto de precios y no en la dinámica estocástica elegida para el proceso de precios inafectado.

En este artículo se analiza un modelo discreto de impacto de precios lineal, instantáneo, transitorio y permanente para un sólo participante del mercado y se centra en los efectos creados por la resilencia de este impacto, en cómo garantizar la viabilidad de un modelo a partir de la elección de funciones de resilencia o kérnel y en la existencia y unicidad de alguna estrategia que minimice los costos esperados.

Además, exhiben otro tipo de manipulación que consiste en estrategias oscilantes. Es decir, estrategias que reducen los costos esperados por vender (comprar) e inmediatamente comprar (vender) de manera muy dramática, a las que llaman transacciones desencadenadas de manipulación. De manera más precisa, denotando por $C(\cdot)$ al costo esperado de alguna estrategia, se dice que el modelo admitirá transacciones desencadenadas de manipulación si existen $X_0 \neq 0$, una malla de tiempo $0 = t_0 < \cdots < t_N$, y $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{N+1}$ tal que $\boldsymbol{y}^\top \mathbf{1} = X_0$ y

$$C(\boldsymbol{y}) < \mathit{mín}\left\{C(\boldsymbol{x})|\, \boldsymbol{x}^\top \mathbf{1} = X_0,\ \mathit{donde}\ sgn(x_i) = sgn(x_j)\ \forall\, i,\ j \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ N\}\right\}.$$

2.4.2. Modelado

Mientras el agente se encuentre inactivo (no haga transacciones), los precios de los activos estarán determinados por las acciones de otros participantes descrito por una martingala $(S_t^0)_{t\geq 0}$, definida en un espacio de probabilidad filtrado $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\,,\ \mathbb{P}\right)$. Una estrategia consiste de una sucesión $\xi_{t_0},\ \xi_{t_1},\ \ldots,\ \xi_{t_N}$ de transacciones donde el agente adquiere o liquida un portafolio de cierto número de acciones. Así,

$$\sum_{n=0}^{N} \xi_{t_n} = X_0,$$

Donde $X_0 > 0$ corresponde a una compra y $X_0 < 0$ a una venta. Una estrategia con $X_0 = 0$ se conoce como *«round trip»* y si la estrategia $\boldsymbol{\xi} = \xi_{t_0},\ \xi_{t_1},\ \ldots,\ \xi_{t_N}$ óptima asociada contiene entradas distintas de cero se dice que es una estrategia de manipulación de precios. Cada operación ξ_{t_n}es efectuada al tiempo t_n, donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ es un conjunto predeterminado de tiempos. Se permite que la estrategia sea adaptativa, es decir, que ξ_{t_n} puede depender de la información disponible al tiempo t_n. También asumimos que cada ξ_{t_n} es acotada, lo cual es razonable pues existen un número finito de acciones.

Cuando la estrategia $\boldsymbol{\xi}$ es aplicada, el precio al tiempo t es:

$$S_t = S_t^0 + \sum_{t_n<t} \xi_{t_n} G\left(t - t_n\right),$$

donde, $G : [0,\ \infty) \to [0,\ \infty)$ es una función no creciente conocida como la función de resilencia o el kérnel de decaimiento. Así, $\xi_{t_n} G(0)$ es el impacto de precios inmediato para la orden ξ_{t_n}. Después de un incremento de tiempo Δt, este impacto decae a $\xi_{t_n} G(\Delta t)$. Podemos identificar a los tipos del impacto de la siguiente manera:

- El impacto instantáneo o temporal es $\xi_{t_n}\left(G(0) - G(0+)\right)$, donde $G(0+)$ denota el límite por la derecha de G en $t = 0$. Este sólo afecta en el costo de ejecución de ξ_{t_n}y no en órdenes subsecuentes, por lo general es causado por los costos de transacción o por cruzar el *bid-ask spread*.

- El impacto permanente es $\xi_{t_n} G\left(\infty\right)$, donde $G\left(\infty\right) \coloneqq \lim_{t\to\infty} G(t)$. Describe el cambio en el precio que permanecerá en el subyacente hasta finalizar el período de transacción debido a información revelada por alguna orden demasiado grande.

- El impacto transitorio es la parte que resta, $\xi_{t_n}\left(G(0+) - G\left(\infty\right)\right)$. Resulta importante para cierto período después de efectuada la orden pero conforme pasa el tiempo su efecto en las transacciones futuras se va desvaneciendo.

2.4.2.1. La función de costos

El costo de la estrategia $\boldsymbol{\xi}$, denotado $C(\boldsymbol{\xi})$ será el costo acumulado de cada una de las transacciones en $\boldsymbol{\xi}$, tomando en cuenta que una vez que se ejecuta la orden ξ_{t_n} el precio del activo se mueve de S_{t_n} a $S_{t_n^+} = S_{t_n} + \xi_{t_n} G(0)$, y corresponde a:

$$C(\boldsymbol{\xi}) \coloneqq \frac{1}{2G(0)} E\left[\sum_{n=0}^{N}\left(S_{t_n^+}^2 - S_{t_n}^2\right)\right].$$

Es importante observar que la estrategia óptima corresponde a aquella que minimiza $C(\boldsymbol{\xi})$ para X_0 dado. Como habíamos comentado, una estrategia de manipulación es un *«round trip»* para el cual $C(\boldsymbol{\xi}) < 0$.

2.4.3. Resultados

Recordando la siguiente definición:

Definición 2.4. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, y $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ decimos que la función F es estrictamente positiva en el sentido de Bochner si tenemos que

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} x_i x_j F(|t_i - t_j|) \geq 0,$$

en donde la igualdad se logra sí y sólo sí $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Dos resultados muy importantes encontrados en este artículo [3] son:

- Si la función G es positiva definida, entonces el modelo no admite estrategias de manipulación de precio. Más aún, la estrategia óptima existe pero no necesariamente es única.
- Si la función G es estrictamente positiva definida, entonces existe una única estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$para toda posición inicial X_0.

El teorema de Bochner caracteriza cuándo una función es positiva definida.

Teorema 2.2. *Una función continua G es positiva definida sí y sólo sí, la función $G(|\cdot|)$ es la transformada de Fourier de una medida positiva de Borel μ en $\mathbb{R}$. Es decir,*

$$G(|x|) = \int e^{ixy} \mu(dy).$$

Si el soporte de μ no es discreto, entonces G es estrictamente positiva definida (Ver Teorema 2.2 [10].

Hemos expuesto de manera breve 3 modelos de impacto de precios para poder retomarlos más adelante. Esta tesis utilizará principalmente el modelo de Alfonsi, Schied y Slynko [3].

3. Mercados de alta frecuencia

En el contexto financiero, cuando nos referimos a un mercado entendemos un lugar en el que se ofertan y demandan productos y servicios a algún costo fijado por sus participantes. La dinámica que se sigue en ellos ha ido evolucionando a través del tiempo, desde lanzar órdenes al aire haciéndose escuchar para obterner el mejor precio, o transaccionar por teléfono, o simplemente desde una computadora a través de alguna casa de bolsa. Muchos de los cambios que han sufrido los mercados en cuanto a la forma en la que se realizan las transacciones, si no es que todos, se deben al incremento en el conocimiento, que poco a poco se convierte en nuevas formas de hacer negocios y nueva tecnología de la cual apoyarse, de ahí surgen los mercados de alta frecuencia los cuales se diferencían por contener operaciones utilizando estrategias algorítmicas mejor conocidas por su nombre en inglés *«algorithmic trading»* las cuales son el tema principal de este capítulo.

3.1. *Algorithmic Trading* (AT) y *High Frequency Trading* (HFT)

El *algorithmic trading* (AT) es un sistema de operaciones contenido en algoritmos computacionales que utilizan modelos matemáticos avanzados para tomar decisiones respecto a las transacciones en los mercados financieros. Las reglas que se encuentran en el modelo determinan el tiempo óptimo para establecer la orden causando el menor impacto en el precio. Un ejemplo clásico del uso del *algorithmic trading* es cuando se busca dividir largos bloques de acciones, que deben ser vendidos (comprados), en pequeños bloques distribuyendo su transacción en un período de tiempo. Lo anterior con la finalidad de reducir en impacto de precio y consecuentemente el costo de liquidación.

Dentro del *algorithmic trading* existe un subconjunto de estrategias denominadas operaciones de alta frecuencia o en inglés *«high frequency trading»* (HFT), éstas manejan pequeñas órdenes que se envían a gran velocidad, a menudo en milisegundos o microsegundos, realizadas por algoritmos también de alta velocidad que replican el rol de un *«market maker»* que tratan de beneficiarse de los diferenciales de compra y venta (*bid-ask spread*) comprando barato y vendiendo caro. Además, el HFT intenta localizar órdenes grandes pendientes de ejecución en el mercado enviando pequeñas

órdenes y analizando patrones de tiempo entre cada compra y venta para aprovechar cualquier oportunidad de hacer ganancias ajustando los precios de las transacciones.

La principal innovación que separa al HFT del trading tradicional es la alta capacidad de rotar el capital en respuestas inmediatas dictadas por computadoras que cambian las condiciones del mercado y cuya característica principal es obtener una pequeña ganancia, generalmente fracciones de centavo, en cada una de esas millones de transacciones a diferencia de los administradores tradicionales quienes deben mantener sus posiciones por semanas o en ocasiones meses para generar algún retorno significativo. Otro punto interesante que diferencía al HFT es el hecho de liquidar prácticamente todas las posiciones antes de finalizar el día, tener un inventario cero, pues la ausencia de posiciones durante la noche es importante para los inversionistas por las siguienes tres razones [1]:

1. Dado que la globalización es una realidad, en particular la de los mercados de capitales, extiende las operaciones a ciclos de 24 horas. La volatilidad corriente en el mercado cambia durante la noche y las posiciones se vuelven riesgosas aún cuando el mercado no se encuentra operando.

2. Las estrategias de HFT permiten una completa transparencia en el capital que se mantiene, es decir, se conocen con exactitud las pérdidas y ganancias así como el capital listo para continuar transaccionando al día siguiente, sin necesidad de acudir a un préstamo.

3. Las posiciones que se mantienen por la noche son pagadas a una tasa de interés conocida como la tasa de «interés nocturna», que es por lo general ligeramente mayor a la tasa LIBOR. Si consideramos que la tasa LIBOR está sujeta a volatilidad variable y que la hiperinflación está a la vuelta de la esquina, las posiciones nocturnas pueden volverse muy caras y hasta no rentables.

El HFT tiene ventajas adicionales, sus estrategias tienen poca correlación con las estrategias tradicionales de largo plazo, convirtíendolas en herramientas de diversificación interesantes para los portafolios de largo plazo. La evaluación de las estrategias de HFT requieren menores períodos de evaluación por sus propiedades estadísticas[1], mientras que una estrategia mensual promedio requiere de seis meses a dos años de observaciones para decir que tiene credibilidad, las estrategias de HFT pueden ser estadísticamente acertadas con sólo un mes. Adicionalmente a los beneficios anteriores podemos incluir que el HFT brinda ahorros operativos, la naturaleza automatizada de las transacciones se convierte en ahorro al eliminar el error humano relativo a la duda y a las emociones. También podemos considerar ventajas a la sociedad tales como **incrementar la eficiencia del mercado** al identificar las ineficiencias aprovechándolas e incorporando la información en los precios más rápidamente, la mayoría de operaciones de HFT **proporcionan liquidez** significativa al mercado y

[1]Para una referencia más detallada ver [1].

de manera indirecta propician al avance tecnológico al buscar soluciones al aumento en la velocidad y la comunicación eficiente.

A pesar de que el HFT ha conseguido posicionarse como una nueva y efectiva forma de hacer negocios, también debemos explorar sus posibles desventajas, entre las cuales surgen los siguientes puntos:

1. La principal razón detrás de la existencia de un mercado de activos es proporcionar capital a las compañías que lo requieren así el HFT no agrega capital al mercado pues como se mencionó las posiciones se liquidan y la cantidad invertida es muy pequeña, de hecho el monto con el que se inicia un agente HFT es el mismo que se reinvierte muchas veces cada instante.

2. Si existiese alguna falla en algún algoritmo ésta podría causar desviaciones importantes en los precios correctos de oferta y demanda, esto es, el mercado se vuelve menos dependiente del retorno de una inversión y más de la especulación.

3. Puede causar situaciones de crísis como el Flash Crash de 2010.

4. Por lo general podríamos decir que los HFT y sus algoritmos de búsqueda de agentes que buscan comprar o vender activos para obtener provecho, hacen menos atractivo el mercado a los inversionistas tradicionales pues se puede decir que «se cobra un impuesto» a aquellos que no operan rápidamente, sin embargo, se puede decir que este punto en contra es más o menos despreciable pues la mayoría de transacciones HFT sólo se hacen en contra de otros HFT traders.

Derivado del punto 4. existe un problema de competencia dentro del HFT que es conocido en la literatura como transacciones predatorias y se refiere a los conflictos de intereses entre los operadores de HFT que buscan perjudicar las ganancias de sus contrincantes desestabilizando los precios. Un artículo influyente en este tema es el escrito por Brunnermeier, M. y Pedersen, L.H. [9] el cual se discutirá brevemente en la siguiente sección, no ahondaremos demasiado en los detalles técnicos del artículo pues es demasiado amplio y no lo necesitaremos de manera rigurosa en el desarrollo de las ideas posteriores.

3.1.1. Transacciones Predatorias

Como se menciona en el artículo de Brunnermeier, M. y Pedersen, L.H. [9], uno de los peores temores de los inversionistas grandes es la liquidación forzada, en especial si esta necesidad es conocida por otros agentes pues casi seguramente estará asociada a un impacto de precios alto y una baja liquidez. Este artículo proporciona un

marco para estudiar las interacciones entre los agentes grandes que deben cuidarse del impacto de mercado, también se muestra que si un inversionista está forzado a liquidar una posición, los otros agentes comenzarán a hacer operaciones en la misma dirección aprovechándose de los cambios en los precios retirando la liquidez del activo en lugar de aumentarla además de observar que la depredación es rentable si el mercado es ilíquido y la posición del agente grande que busca liquidar es mayor a la capacidad de compra de los otros agentes, más aún, la depredación es más «salvaje» si sólo hay unos cuantos depredadores.

3.1.1.1. Ideas principales del artículo

El modelo que presentan distingue tres tipos de valores de una posición, **el valor fundamental o no afectado** que es el valor actual de una posición, **el valor de liquidación de la orden** que refleja las posibles ganancias de liquidar la posición de manera secreta contemplando también que la curva de demanda va decayendo poco a poco y **el valor de liquidación afectado** el cual es el monto que obtendremos por enfrentar la depredación de otros agentes. Claramente el valor de liquidación de la orden es menor que el valor fundamental mientras que el valor de liquidación afectado es aún menor si los depredadores tienen posiciones largas.

Se considera un mercado que contiene dos activos, uno riesgoso y uno sin riesgo observables de manera continua donde existen dos tipos de participantes, los que tienen posiciones largas (i.e que poseen el activo) como los fondos de cobertura (*hedge funds*) y aquellos que invierten a largo plazo como los fondos de pensiones. A lo largo del artículo se analizan matemáticamente las situaciones en las que ambos tipos de agentes deben actuar para maximizar sus rendimientos dado que existen depredadores que estresan el mercado de manera endógena y exógena buscando su beneficio.

La estrategia básica de depredación es la siguiente: el depredador vende lo más que puede del activo, luego espera a que el agente estresado liquide su posición haciendo que el precio del activo caiga aún más, finalmente el depredador vuelve a comprar su posición.

Es preferible mantener las estrategias y el manejo del riesgo en privado, de manera confidencial y lo suficientemente flexible, como el crash de 1987 lo demostró.

Mientras más ilíquido es un activo mayor es el costo de liquidación debido a la depredación.

Este modelo es de información perfecta, es decir, se conoce por completo la trayectoria del precio del activo, el número de depredadores y el número de víctimas.

Se recalca que en cualquier condición del mercado, el trading predatorio ocurre con probabilidad positiva.

Hay aún mucho que decir acerca del AT y el HFT, de hecho la literatura sigue avanzando en estos temas ya que son muy recientes y están conectados directamente con los problemas de la actualidad.

Como veremos, el artículo de Schied y Zhang, que es el principal que se analizará en este trabajo, aporta una nueva visión a los fenómenos que surgen en los mercados HFT.

Parte II.

Equilibrio de Nash en modelos de impacto de precios

4. Modelación matemática

4.1. Introducción

Una vez descrito nuestro marco teórico nos adentraremos a atacar el problema principal de la tesis que consiste en encontrar las estrategias de equilibrio (en el sentido de equilibrio de Nash) de dos competidores del mercado buscando minimizar los costos esperados de liquidación dado que el impacto sigue la dinámica del modelo de Schied y Zhang [21].

Anteriormente comentamos la intuición detrás del *High Frequency Trading* (HFT), en este tipo de operaciones la velocidad a la que se efectúa la transacción así como los costos que genera al ejecutarla son factores clave en la elección de las estrategias que se llevarán a cabo por los agentes, por otro lado al incluír en nuestro análisis que existe otro competidor que cuenta con características similares al primero en el sentido que busca obtener alguna posición en el mercado, es racional y conoce el conjunto de posibles elecciones de su contrincante, hace al problema aún más realista e interesante conduciéndonos a la teoría de juegos. Considerando un mercado donde existen dos agentes económicos de alta frecuencia que transaccionan bajo un modelo de impacto de precios transitorio como en [3] probaremos la existencia y unicidad del equilibrio de Nash. Más aún, se determinarán umbrales para los costos transaccionales y la velocidad de transacción que caracterizan la presencia, o ausencia, de «*predatory trading*». Dicotomía que se ve reflejada en que las estrategias óptimas sean oscilatorias o monótonas.

Tanto el modelo como los resultados teóricos que presentamos en este capítulo se basan en el artículo de Shied y Zhang [21].

4.2. El modelo

Considérense dos agentes financieros, a saber X y Y, que operan en un mercado cuyo impacto será considerado transitorio como lo describimos en la sección 2.4. Cuando ninguno de los dos agentes se encuentra operando, el precio de alguno de los activos puede ser descrito como una martingala continua por la derecha a la que llamaremos

$S^0 = (S^0_t)_{t>0}$ en un espacio filtrado de probabilidad $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$, con $\mathcal{F}_0$ trivial. A S^0 le llamaremos proceso de precio inafectado. Supondremos también que las operaciones se llevan a cabo en el conjunto discreto $\mathbb{T} = \{t_0, \ldots, t_N\}$, con $t_0 = 0$ y $t_N = T$ y que los agentes utilizarán estrategias admisibles, las cuales están definidas a continuación.

Definición 4.1. Sea $\mathbb{T} = \{t_0, \ldots, t_N\}$ un conjunto de valores en el tiempo. Una **estrategia admisible** para $\mathbb{T}$ y $Z_0 \in \mathbb{R}$ es un vector $\zeta = (\zeta_0, \ldots, \zeta_N)$ de variables aleatorias tales que:

1. Cada ζ_i es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible y acotada, $\forall\, i \in \{0, \ldots, N\}$.
2. $Z_0 = \zeta_0 + \cdots + \zeta_N$ $\mathbb{P}-$c.s.[a]

[a] Casi seguramente.

Al conjunto de todas las estrategias admisibles para $\mathbb{T}$ y Z_0 dados se le denotará por $\mathcal{H}(Z_0, \mathbb{T})$, y para $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{H}(Z_0, \mathbb{T})$, el valor de ζ_i representará el número de acciones que se transaccionan al tiempo t_i donde un signo positivo indica una orden de venta y uno negativo una de compra.

Entonces, siendo $\mathcal{H}(X_0, \mathbb{T})$ y $\mathcal{H}(Y_0, \mathbb{T})$ al conjunto de estrategias de los dos agentes X y Y respectivamente. Para $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}(X_0, \mathbb{T})$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{H}(Y_0, \mathbb{T})$ dos estrategias admisibles aplicadas, el precio del activo es:

$$S^{\xi,\eta}_t = S^0_t - \sum_{t_k<t} G(t - t_k)(\xi_k + \eta_k). \tag{4.2.1}$$

En la ecuación anterior, la función $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$[1] se conoce como kernel de descenso, kérnel de decaimiento o función de resilencia y nos indica el cambio que sufrirá el precio del activo debido a las estrategias adoptadas por los agentes y puede ser una función cualquiera aunque en nuestro caso supondremos que es una función no creciente además de que $t \mapsto G(|t|)$ será estrictamente positiva definida en el sentido de Bochner.

Definición 2.4 Para toda $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, y $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ decimos que la función F es estrictamente positiva en el sentido de Bochner si tenemos que

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} x_i x_j F(|t_i - t_j|) \geq 0,$$

en donde la igualdad se logra sí y sólo sí $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

[1] $\mathbb{R}_+$ se refiere al conjunto de los reales no negativos.

Los supuestos anteriores son necesarios pues en [3] se observó que gracias a ellos se descarta la existencia de estrategias de manipulación de precios y cuasi-arbitraje que son aquellas para las que se obtiene un costo esperado negativo (es decir , no hay costos sólo ganancias), tal como se discutió en la **Sección** 2.4.3.

Para dar una idea más precisa del cuasi-arbitraje, se define en [14] el concepto de **viaje redondo** más conocido por *«round trip»* en inglés, el cual es una estrategia $\boldsymbol{\xi}$ que comienza sin inventario en $t = 0$ y termina sin ningún activo riesgoso[2] así, una **estrategia de manipulación** es un viaje redondo con valor esperado positivo, mientras que el **cuasi-arbitraje** es una sucesión de viajes redondos $\boldsymbol{\xi}^m = \{\boldsymbol{\xi}_k^m\}_{k=1,\,\ldots,\,N}$ para $m = 1, 2, \ldots$ de tal forma que si $\Pi(\boldsymbol{\xi})$ es la ganancia de la estrategia $\boldsymbol{\xi}$ entonces,

$$\lim_{m\to\infty} E\left(\Pi\left(\boldsymbol{\xi}^m\right)\right) = \infty \qquad y$$
$$\lim_{m\to\infty} \frac{E\left(\Pi\left(\boldsymbol{\xi}^m\right)\right)}{\sqrt{Var\left(\Pi\left(\boldsymbol{\xi}^m\right)\right)}} = \infty.$$

Existen más resultados importantes respecto a la manipulación de precios y cuasi-arbitraje por lo que se comenta que un tratamiento más profundo del tema se encuentra en el artículo de Huberman y Stanzl [14] así como en [13, 15, 11].

4.2.1. Costos de liquidación

En el momento en el que algún agente envía una orden al mercado, digamos X en el tiempo t_k, el precio del activo se mueve linealmente de $S_{t_k}^{\xi,\eta}$ a $S_{t_{k+}}^{\xi,\eta}$,

$$S_{t_{k+}}^{\xi,\eta} := S_{t_k}^{\xi,\eta} - G(0)\xi_k.$$

La orden ξ_k se ejecuta al precio promedio $\frac{1}{2}\left(S_{t_{k+}}^{\xi,\eta} + S_{t_k}^{\xi,\eta}\right)$, y por lo tanto gasta,

$$-\frac{1}{2}\left(S_{t_{k+}}^{\xi,\eta} + S_{t_k}^{\xi,\eta}\right)\xi_k = \frac{G(0)}{2}\xi_k^2 - S_{t_k}^{\xi,\eta}\xi_k.$$

Si inmediatamente después de la operación anterior, el agente Y envía la orden η_k el precio se mueve linealmente de $S_{t_{k+}}^{\xi,\eta}$ a $S_{t_{k+}}^{\xi,\eta} - G(0)\eta_k$, y tendrá un gasto de

$$-\frac{1}{2}\left(S_{t_{k+}}^{\xi,\eta} + S_{t_{k+}}^{\xi,\eta} - G(0)\eta_k\right)\eta_k = \frac{G(0)}{2}\eta_k^2 - S_{t_k}^{\xi,\eta}\eta_k + G(0)\xi_k\eta_k.$$

[2]El ejemplo más sencillo de viaje redondo es aquella estrategia para la cual todas sus entradas son cero. i.e $\boldsymbol{\xi} = (0,\, 0,\, \cdots,\, 0)$.

En este caso, el agente Y tiene un gasto extra de $G(0)\xi_k\eta_k$ respecto a X debido al orden en el que se ejecutaron las órdenes, lo cual puede significar una pérdida o un beneficio. En nuestro modelo supondremos que ni X ni Y tienen ventaja sobre el orden en el que se llevan a cabo las transacciones, por lo que si ambos envían una orden distinta de cero en t_k se realizará primero la de aquel que gane un «volado»[3].

Otro supuesto a incluir es que cada transacción incurre en un costo de tipo cuadrático, es decir, cada operación ζ_k carga un costo de la forma $\theta\zeta_k^2$ donde θ es un parámetro no negativo.

Así, los costos de las operaciones incurridas por los agentes X y Y al seguir las estrategias $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ toman la siguiente forma.

Definición 4.2. Supongamos que $\mathbb{T} = \{t_0, \ldots, t_n\}$, que X_0 y Y_0 están dados, y sea $(\varepsilon_i)_{i=0}^n$ una sucesión i.i.d.[a] de variables aleatorias Bernoulli que son independientes de $\sigma\left(\cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t\right)$. Entonces, el costo de la estrategia $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}\left(X_0,\ \mathbb{T}\right)$ dada $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{H}\left(Y_0,\ \mathbb{T}\right)$está definido por:

$$C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\eta}\right) = X_0S_0^0 + \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{G(0)}{2}\xi_k^2 - S_{t_k}^{\xi,\eta}\xi_k + \varepsilon_k G(0)\xi_k\eta_k + \theta\xi_k^2\right), \tag{4.2.2}$$

mientras que el costo de $\boldsymbol{\eta}$ dada $\boldsymbol{\xi}$ es,

$$C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\xi}\right) = Y_0S_0^0 + \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{G(0)}{2}\eta_k^2 - S_{t_k}^{\xi,\eta}\eta_k + (1-\varepsilon_k)\,G(0)\xi_k\eta_k + \theta\eta_k^2\right). \tag{4.2.3}$$

[a] Independiente e idénticamente distribuída.

Observemos que en las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.3) los términos $X_0S_0^0$ y $Y_0S_0^0$ corresponden al valor de las posiciones X_0 y Y_0 respectivamente al tiempo $t = 0$, mientras que los demás términos corresponden a los costos de liquidación.

Un comentario interesante acerca de este modelo surge al notar que no existe alguna variable en la que se refleje el gasto correspondiente al *bid-ask spread,* i.e. el precio de compra es igual al precio de venta, esto se debe a que falta. La elección de costos de transacción cuadráticos hace al modelo tratable, además de que modelan una progresión que crece junto con el tamaño de la órden lo cual penaliza aquellas órdenes grandes que tratan de mover el mercado.

[3] Por «volado» nos referimos a un ensayo de Bernoulli con $p = 0.5$.

4.3. Equilibrio de Nash

Una vez que identificamos los gastos en los que incurren las órdenes podemos volver a nuestro problema: encontrar aquella estrategia admisible que minimice el costo esperado de nuestras operaciones. La solución es bien conocida cuando sólo se considera que un agente desea minimizar su gasto; ver e.g. en [3]. Sin embargo, en esta ocasión resolveremos para el caso en el que dos agentes desean minimizar los gastos bajo el supuesto de que ambos tienen completo conocimiento de las posibles estrategias del otro competidor y por lo tanto ajustarán sus decisiones de manera «conjunta» a sabiendas que son racionales. Debido a lo anterior, es natural que definamos nuestra optimalidad en términos del concepto de equilibrio de Nash, el cual es similar a lo que comentamos en los preliminares aunque en este caso la definición está adecuada a nuestro contexto.

Definición 4.3. Para un conjunto $\mathbb{T}$ de tiempos y valores iniciales X_0 y Y_0, un equilibrio de Nash es un par $(\xi^*,\, \eta^*)$ de estrategias en $\mathcal{H}(X_0,\, \mathbb{T}) \times \mathcal{H}(Y_0,\, \mathbb{T})$ tales que cumplen las siguientes igualdades,

$$E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\xi^* | \eta^*\right)\right] = \inf_{\xi \in \mathcal{H}(X_0,\, \mathbb{T})} E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\xi | \eta^*\right)\right]$$
$$E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\eta^* | \xi^*\right)\right] = \inf_{\eta \in \mathcal{H}(Y_0,\, \mathbb{T})} E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\eta | \xi^*\right)\right].$$

4.3.1. Notación

Para poder trabajar de mejor manera, definiremos a continuación la redacción que seguiremos.

Para una malla de tiempo $\mathbb{T} = \{t_1,\, \ldots,\, t_N\}$ definimos la matriz $\Gamma \in M_{(N+1)\times(N+1)}$ por:

$$\Gamma_{ij} = G\left(|t_{i-1} - t_{j-1}|\right),\ i, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, N+1, \tag{4.3.1}$$

y para $\theta \geq 0$,

$$\Gamma_\theta = \Gamma + 2\theta Id. \tag{4.3.2}$$

En donde Id es la matriz identidad de tamaño $(N+1) \times (N+1)$.

Denotaemos mediante $\tilde{\Gamma}$ la matriz triangular inferior siguiente

$$\tilde{\Gamma}_{ij} = \begin{cases} \Gamma_{ij} & si\ i > j \\ \frac{1}{2}G(0) & si\ i = j \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases} \tag{4.3.3}$$

Escribiremos como $\mathbf{1}$ al vector en $\mathbb{R}^{N+1}$ compuesto por unos, i.e $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$. La estrategia $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_0, \ldots, \zeta_N) \in \mathcal{H}(Z_0, \mathbb{T})$ quedará identificada con el vector aleatorio de dimensión $N+1$ $(z_1, \ldots, z_{N+1})^{\mathrm{T}}$, donde la entrada $\zeta_k = z_{k+1}$, para $k = 0, \ldots N$. Así, todo vector $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_{N+1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{N+1}$ puede ser identificado como una estrategia determinística $\boldsymbol{\zeta}$ para la cual $\zeta_k = z_{k+1}$.

También definiremos a los siguientes dos vectores,

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \left(\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}} \left(\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}, \tag{4.3.4}$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \left(\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}} \left(\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}. \tag{4.3.5}$$

Los denominadores de las ecuaciones (4.3.4) y (4.3.5) son estrictamente positivos debido a la condición de la **Definición** 4.2 pues la función $G(|\cdot|)$es estrictamente positiva definida. Además, el siguiente lema nos garantiza la invertibilidad de las matrices $\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}$ y $\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}$.

Lema 4.1. *Las matrices Γ_θ, $\tilde{\Gamma}$, $\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}$ y $\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}$ son positivas definidas para toda $\theta \geq 0$. En particular, todos los términos de las ecuaciones (4.3.4) y (4.3.5) están bien definidos, los denominadores son estrictamente positivos.*

La demostración a este lema se encuentra en la página 67.

4.3.2. Estrategias de equilibrio

Podemos encontrar en [22] que en el caso particular donde $G(t) = \gamma + \lambda e^{-\rho t}$ con γ, λ y ρ constantes, existe un único equilibrio de Nash en la clase de las estrategias deterministas. Esto es importante, sin embargo, el resultado principal de esta tesis, desarrollado por Schied y Zhang en [21] lo extiende para cualquier kérnel de descenso positivo definido incluyendo costos de transacción dando una fórmula explícita para las estrategias de equilibrio probando que son únicas en la clase de las estrategias

adaptadas. El siguiente teorema es la clave de todo nuestro trabajo posterior pues será nuestro punto inicial para el desarrollo de más resultados teóricos así como de un análisis numérico que dará luz sobre lo que sucedería en la práctica. Para la demostración consultar la página 75.

Teorema 4.1. *Para un conjunto* $\mathbb{T}$ *de tiempos y valores iniciales* X_0 *y* $Y_0 \in \mathbb{R}$ *, existe un único equilibrio de Nash* $(\boldsymbol{\xi}^*, \boldsymbol{\eta}^*) \in \mathcal{H}(X_0, \mathbb{T}) \times \mathcal{H}(Y_0, \mathbb{T})$*. Las estrategias óptimas* $\boldsymbol{\xi}^*$ *y* $\boldsymbol{\eta}^*$*son deterministas y están dadas por las siguientes expresiones,*

$$\xi^* = \frac{1}{2}(X_0 + Y_0)\, v + \frac{1}{2}(X_0 - Y_0)\, w, \tag{4.3.6}$$

$$\eta^* = \frac{1}{2}(X_0 + Y_0)\, v - \frac{1}{2}(X_0 - Y_0)\, w. \tag{4.3.7}$$

Podemos notar que en las fórmulas (4.3.6) y (4.3.7), los vectores v y w generan todas las posibles estrategias de equilibrio y por tanto ambos forman una base para ellas.

4.3.3. Impacto de los costos de transacción y la frecuencia de las transacciones en los costos esperados

Una vez presentadas las soluciones de equilibrio analizaremos algunas de sus propiedades cualitativas. Para este fin consideraremos el caso particular de un kérnel de descenso exponencial que modela un impacto permanente y transitorio de precios. Este tipo de kérnel ha sido estudiado en buena medida en [3, 22], donde también se prueba que éste satisface la **Definición** 4.2. Sea la función $G(\cdot)$ como sigue

$$G(t) = \lambda e^{-\rho t} + \gamma, \quad \lambda,\ \rho > 0,\ \gamma \geq 0. \tag{4.3.8}$$

Gracias a algunas simulaciones numéricas y el análisis de un ejemplo particular, Schöneborn [22] observó que las estrategias de equilibrio presentaban oscilaciones[4] fuertes cuando $\theta = 0$. Más aún, notó que al cambiar el número de transacciones permitidas en el intervalo de $[0, T]$ de un número par a uno impar las estrategias óptimas podían cambiar dramáticamente. Esto dio pie a que en el artículo [21], Schied y Zhang buscaran resultados más allá de lo empírico que justificaran la existencia de esas oscilaciones así como del cambio de estrategia por la dimensión de la malla de tiempo.

La siguiente proposición provee un resultado del caso particular (4.3.8) que nos indica bajo qué condiciones para el costo de transacción θ y la velocidad de transacciones N

[4]Por oscilaciones nos referimos a estrategias alternadas de compra-venta.

la estrategia $\boldsymbol{w}$ implica compras y ventas alternadas (oscilaciones). La demostración se encuentra en la página 77.

De aquí en adelante nos concentraremos en mallas de tiempo equidistantes, es decir,

$$\mathbb{T}_N = \left\{ \frac{kT}{N} \middle| \; k = 0,\, 1,\, \ldots,\, N \right\}.$$

Proposición 4.1. *Suponiendo que la función G es de la forma (4.3.8) con $\gamma = 0$ y $T > 0$ fija, entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $N \geq N_0$ existe una $\delta > 0$ de tal forma que para $0 \leq \theta < \delta$ las entradas del vector $\boldsymbol{w} = (w_1,\, w_2, \ldots,\, w_{N+1})$ son distintas de cero y tienen signos alternantes.*

La intuición detrás de esto es la siguiente. Suponiendo que la función $G(\cdot)$ es de la forma (4.3.8), donde no hay efecto del impacto permanente γ, existen valores δ y N_0 para los cuales todos los costos de transacción θ que caigan por debajo de δ harán que el vector $\boldsymbol{w}$ sea una estrategia correspondiente a compras y ventas alternadas siempre y cuando la cantidad de transacciones efectuadas en $[0,\, T]$ sea mayor o igual a N_0. Además notemos que para $X_0 = -Y_0$ la estrategia $\boldsymbol{w}$ determina por completo el equilibrio de Nash por lo que las oscilaciones siempre ocurrirán si el parámetro θ es lo suficientemente pequeño y la velocidad de transacciones suficientemente alta. Si quisiéramos hacer un análisis similar para $\boldsymbol{v}$, Schied y Zhang [21] observan que es mucho más complicado, y es un problema abierto.

Una posible interpretación financiera de las oscilaciones compra-venta es la interacción de dos agentes pues al haber más de un participante siempre existirá la competencia y el deseo de obtener mayores ganancias que nuestro competidor. En algunos estudios previos de equilibrio entre varios agentes, por ejemplo [22] y [9], se menciona que la forma dominante de estas interacciones es el *«predatory trading»*, que como ya fue comentado en la página 29 son predatorias en el sentido de que obtienen ganancias utilizando el impacto de precio generado por otro agente y en ese sentido la ganancia de uno se basa en reducir la de otro, de esta manera la protección contra esta mala práctica requiere eliminar el impacto creado. Bajo nuestro modelo de impacto, el impacto de una transacción ζ_0 puede ser borrado poniendo una orden contraria[5] ζ_1, es decir $\zeta_1 := -\zeta_0 G(t_1 - t_0)$ eliminará por completo el efecto de ζ_0 y la combinación de estrategias resultará en un total de $\zeta_0 (1 - G(t_1 - t_0))$ acciones. Es por esto que las oscilaciones pueden verse como una protección al *«predatory trading»*.

En particular, cuando sólo hay un agente activo y G es convexa, no creciente y no constante (que es el caso de (4.3.8)) entonces para cada malla de tiempo $\mathbb{T}$ existe una estrategia óptima la cual consiste de sólo compras o sólo ventas y si G es como

[5] Es decir, si ζ_0 fue de compra, ζ_1 debe ser de venta.

en (4.3.8) con $\theta = 0$ la estrategia puede conocerse explícitamente [2]. Sin embargo, Alfonsi et al. [3], descubrió que podían existir oscilaciones en las estrategias de un mercado de un solo competidor bajo impacto transitorio de precio siempre y cuando el kérnel no decreciera como una función convexa del tiempo, la intuición detrás es que puede convenir en ciertos casos cambiar de estrategia aprovechando el retraso en la respuesta del mercado a una orden larga, cosa que no sucede cuando el impacto decrece como función convexa del tiempo.

4.3.3.1. Umbral del costo de transacción

A continuación presentamos un resultado fundamental, éste muestra que las oscilaciones de los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ se eliminan cuando el parámetro θ es lo suficientemente grande, de hecho el teorema nos da una fórmula explícita para aquel valor crítico o umbral θ^* para el cual por encima de él las oscilaciones desaparecen. Intuitivamente al incrementar los costos de transacción las estrategias oscilantes serán penalizadas por lo que habrá un suavizamiento en la trayectoria que deja la estrategia efectuando órdenes sólo de compra o sólo de venta. Se puede consultar la demostración en la página 91.

Teorema 4.2. *Suponiendo que la función G es de la forma (4.3.8) y $\mathbb{T}_N$ denota una malla de tiempo equidistante, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. Para toda $N \in \mathbb{N}$ y $\rho > 0$, todos los componentes de $\boldsymbol{v}$ son no negativos.
2. Para toda $N \in \mathbb{N}$ y $\rho > 0$, todos los componentes de $\boldsymbol{w}$ son no negativos.
3. $\theta \geq \theta^* = (\lambda + \gamma)/4$.

En el capítulo siguiente exponemos algunos ejemplos numéricos que ilustran por medio de simulaciones los resultados anteriores.

4.3.3.2. Análisis de la velocidad de transacciones

Como fue comentado anteriormente en [22] se habla de que cuando no hay costos de transacción ($\theta = 0$) el cambio en las estrategias óptimas puede deberse únicamente al cambio en el número de transacciones permitidas N, es decir, es determinante que N sea una cantidad par o impar para describir qué estrategia se seguirá. De esta manera Shied y Zhang [21] analizaron la posible convergencia de las estrategias de equilibrio cuando la velocidad de las transacciones tiende a infinito i.e $N \to \infty$. Para ello, consideremos una malla equidistante $\mathbb{T}_N$ como se definió anteriormente, variaremos $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que denotaremos a $\boldsymbol{v}^{(N)} = \left(v_1^{(N)}, \ldots, v_{N+1}^{(N)}\right)$ y a

$\boldsymbol{w}^{(N)} = \left(w_1^{(N)}, \ldots, w_{N+1}^{(N)}\right)$ como los vectores en (4.3.4) y (4.3.5) respectivamente, haciendo explícita su dependencia en N.

En la siguiente proposición se analizará la convergencia individual de los componentes de $\boldsymbol{w}^{(N)}$ cuando $N \to \infty$, cuya demostración se puede consultar en la página 80.

Proposición 4.2. *Supongamos que n es fija.*

1. *Cuando $\theta = 0$, tenemos que*

$$\lim_{N\to\infty} w_n^{(2N)} = (-1)^{n+1} \frac{2a}{\rho T + a + 1} \quad y \quad \lim_{N\to\infty} w_n^{(2N+1)} = (-1)^{n+1} \frac{2a}{\rho T - a + 1},$$

así como

$$\lim_{N\to\infty} w_{2N+1-n}^{(2N)} = (-1)^{n} \frac{2}{\rho T + a + 1} \quad y \quad \lim_{N\to\infty} w_{2N+2-n}^{(2N+1)} = (-1)^{n} \frac{2}{\rho T - a + 1}.$$

2. *Cuando $\theta > 0$, tenemos que*

$$\lim_{N\to\infty} w_n^{(N)} = 0,$$

y

$$\lim_{N\to\infty} w_{N+1-n}^{(N)} = \left(\frac{4\theta - \lambda}{4\theta + \lambda}\right)^n \frac{2\lambda}{(\rho T + 1)(4\theta + \lambda)}.$$

La proposición anterior nos da más información acerca de las estrategias de equilibrio en el caso que $\theta < \theta^*$. En particular observamos que en la condición de equilibrio para $X_0 = -Y_0$ con $\theta = 0$ las transacciones oscilan y dependen de si N es par o impar. Más aún, cuando $\theta > 0$, necesitaremos que $\theta < \frac{\lambda}{4}$ para que la estrategia oscile asintóticamente al rededor de una constante.

Consideremos el equilibrio de Nash $\left(\boldsymbol{\xi}^{*,(N)}, \boldsymbol{\eta}^{*,(N)}\right)$ con posiciones iniciales X_0 y Y_0 y una malla de tiempo $\mathbb{T}_N$. Definimos a la posición de los agentes de la siguiente manera:

$$X_t^{(N)} := X_0 - \sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{Nt}{T} \right\rceil} \xi_k^{*,(N)}, \qquad Y_t^{(N)} := Y_0 - \sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{Nt}{T} \right\rceil} \eta_k^{*,(N)}, t \geq 0.$$

Cuando $X_0 = -Y_0$, se tiene que $X^{(N)} = -Y^{(N)} = X_0 W^{(N)}$, donde

$$W_t^{(N)} = 1 - \sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{Nt}{T} \right\rceil} w_k^{(N)}, \qquad t \geq 0.$$

El siguiente resultado caracteriza el comportamiento asintótico de $W^{(N)}$, para la demostración ver la página 83.

Proposición 4.3. *Supongamos que $\theta > 0$, para $t \in [0, T]$ tenemos que*

$$\lim_{N\to\infty} W_t^{(N)} = \frac{\rho\,(T-t)+1}{\rho T+1}.$$

Más aún, $W_t = 0$ para $t > T$.

En la proposición anterior, la función límite es independiente del parámetro θ siempre que $\theta > 0$. Siendo

$$V_t^{(N)} = 1 - \sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{Nt}{T} \right\rceil} v_k^{(N)}, t \geq 0.$$

El análisis asintótico para $V_t^{(N)}$ resulta mucho más complicado que para $W_t^{(N)}$ y no abordaremos este problema. Más adelante en la sección de simulaciones se puede observar que $V_t^{(N)}$ converge para $\theta \geq \theta^*$ a alguna función $V^{(\infty)}$ por lo que empíricamente se puede considerar hay un resultado semejante al de $W_t^{(N)}$.

Parte III.

Simulaciones y resultados

5. Programación

A partir de nuestros resultados teóricos en la Parte II, se programaron rutinas en Matlab que nos permitieron replicar y extender las simulaciones hechas en el artículo original de Shied y Zhang [21]. Las rutinas se encuentran explícitamente en el Apéndice B de este trabajo y tienen como propósito ilustrar las siguientes tres situaciones:

- Los valores de las entradas de los vectores $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, que dan lugar a los vectores $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ que representan las estrategias óptimas, para distintos parámetros y kérneles de decaimiento junto con las oscilaciones de compra y venta presentes en algunos casos.

- El costo esperado de las estrategias óptimas para diferentes valores del parámetro θ que proporciona los costos de transacción, así como la existencia de un umbral θ^* para θ para el cual las estrategias dejan de oscilar.

- El costo esperado de las estrategias óptimas cuando podemos incrementar o disminuír la cantidad de transacciones que se hacen en el período $[0, T]$.

En lo que sigue se presentan los resultados de las simulaciones a manera de gráfica para permitir una sencilla interpretación.

5.1. Elección de kérnel de decaimiento

Debido a que los resultados dependen directamente del modelo de impacto de precios y por lo tanto de la elección del kérnel de decaimiento decidimos tomar cuatro diferentes funciones kérnel que son consistentes con nuestro requisito de ser positivas definidas en el sentido de Bochner, esto justificado en [3]. A continuación presentamos estas cuatro funciones que nos servirán para ejemplificar nuestro modelo.

1. **Kérnel exponencial.**
   Corresponde a
   $$G(t) = e^{-\rho t}.$$
   Es probablemente el ejemplo mejor conocido ya que corresponde al modelo de Alfonsi, Fruth y Schied [2] que analiza el modelo de Obizhaeva y Wang [19].

En este caso, podemos agregar un factor de impacto permanente $\gamma \geq 0$ así como un factor de impacto transitorio λ de modo que asemeje al modelo de [4] para llevar a nuestra función a una caso más general, así

$$G(t) = \lambda e^{-\rho t} + \gamma.$$

2. **Kérnel lineal.**

$$G(t) = \eta \left(1 - \rho t\right)^{+}.$$

Éste es estrictamente positivo para η, $\rho > 0$.

3. **Kérnel ley de potencias.**

$$G(t) = \eta \left(1 + \lambda t\right)^{-\gamma}.$$

En algunos estudios empíricos [8], [13] se ha considerado este tipo de función, se cree que ajusta bien la realidad [3]. Una definición alternativa a este kérnel que también resulta estrictamente positivo es el caso:

$$G(t) = \frac{1}{1 + t^2}.$$

4. **Kérnel Gaussiano.**

$$G(t) = \eta e^{-t^2}.$$

Esta función es interesante pues, salvo alguna constante, es su propia transformada de Fourier.

6. Resultados.

Como vimos en el Teorema 4.1, para un conjunto $\mathbb{T}$ de tiempos y valores iniciales X_0 y $Y_0 \in \mathbb{R}$, existe un único equilibrio de Nash $(\xi^*,\ \eta^*) \in \mathcal{H}\,(X_0,\ \mathbb{T}) \times \mathcal{H}\,(Y_0,\ \mathbb{T})$. Estas estrategias óptimas dependen del parámetro θ que controla los costos de transacción así que para las diferentes elecciones de funciones kérnel podemos ilustrar el comportamiento de los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ para distintos valores de θ y para distintas velocidades de transacción.

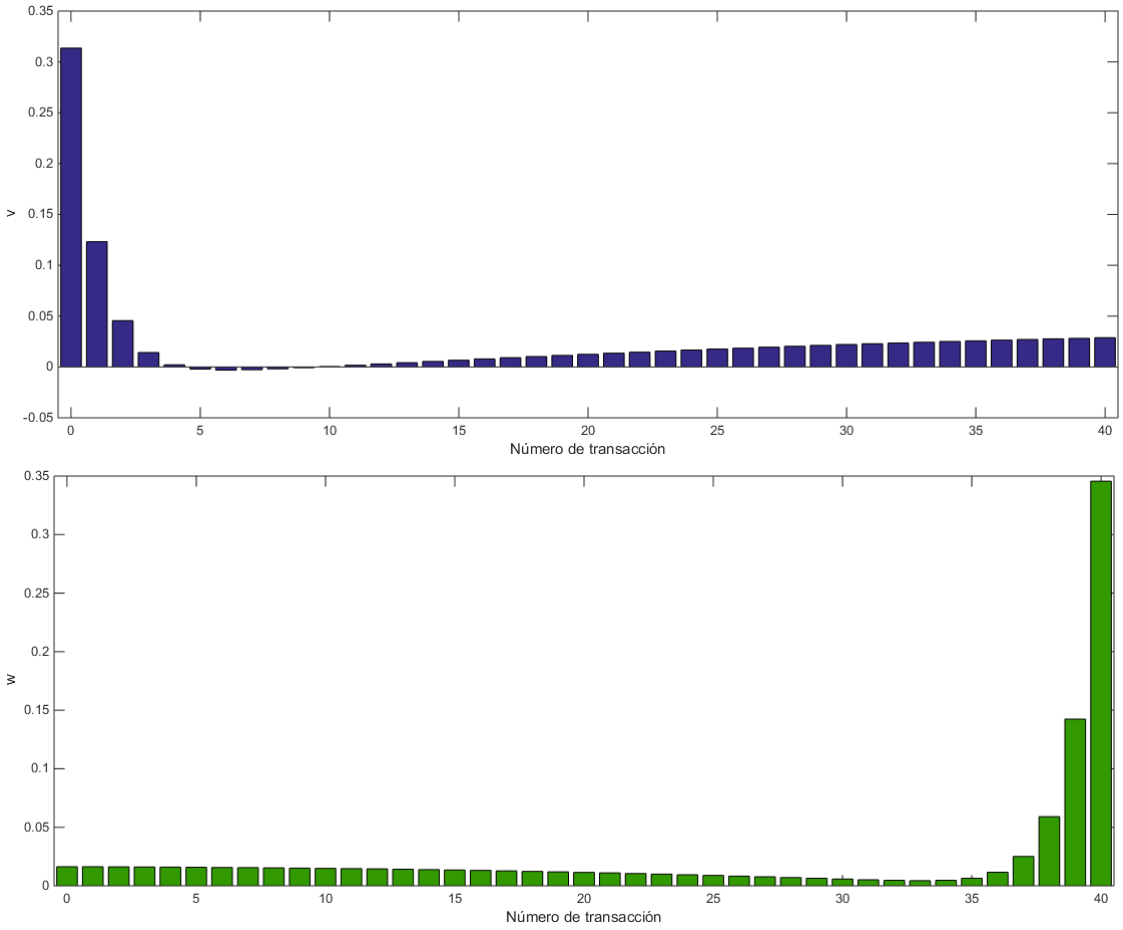

Figura 6.4.: Vectores $\boldsymbol{v}$ (arriba) y $\boldsymbol{w}$ (abajo) para una malla equidistante $\mathbb{T}_{40}$, $G(t) = 0.1e^{-t^2}$ (Gaussiana), $\theta = 0.06$ y $T = 1$.

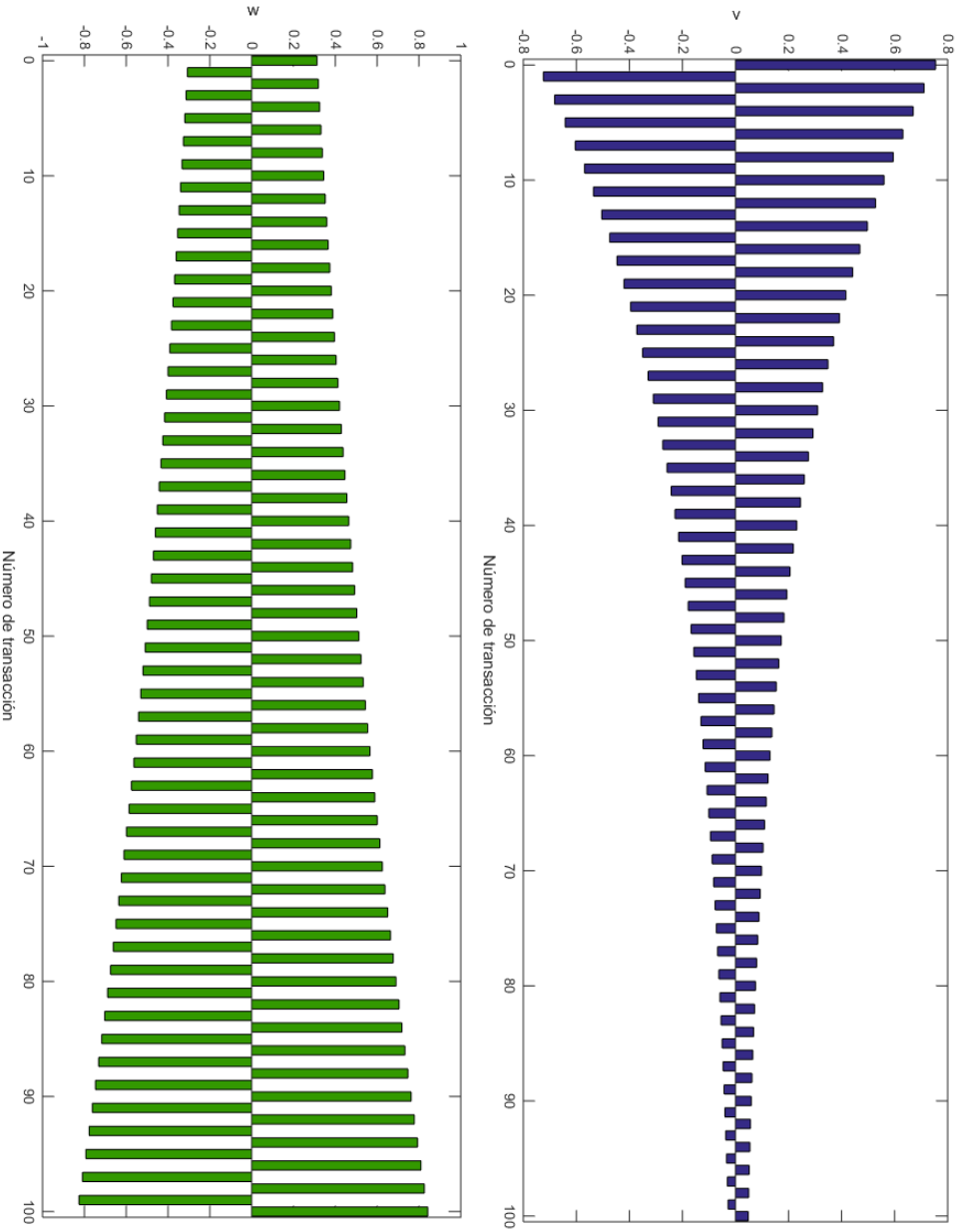

Figura 6.1.: Vectores $\boldsymbol{v}$ (arriba) y $\boldsymbol{w}$ (abajo) para una malla equidistante $\mathbb{T}_{100}$, $G(t) = e^{-\rho t}$ (Exponencial), $\theta = 0$ y $T = 1$.

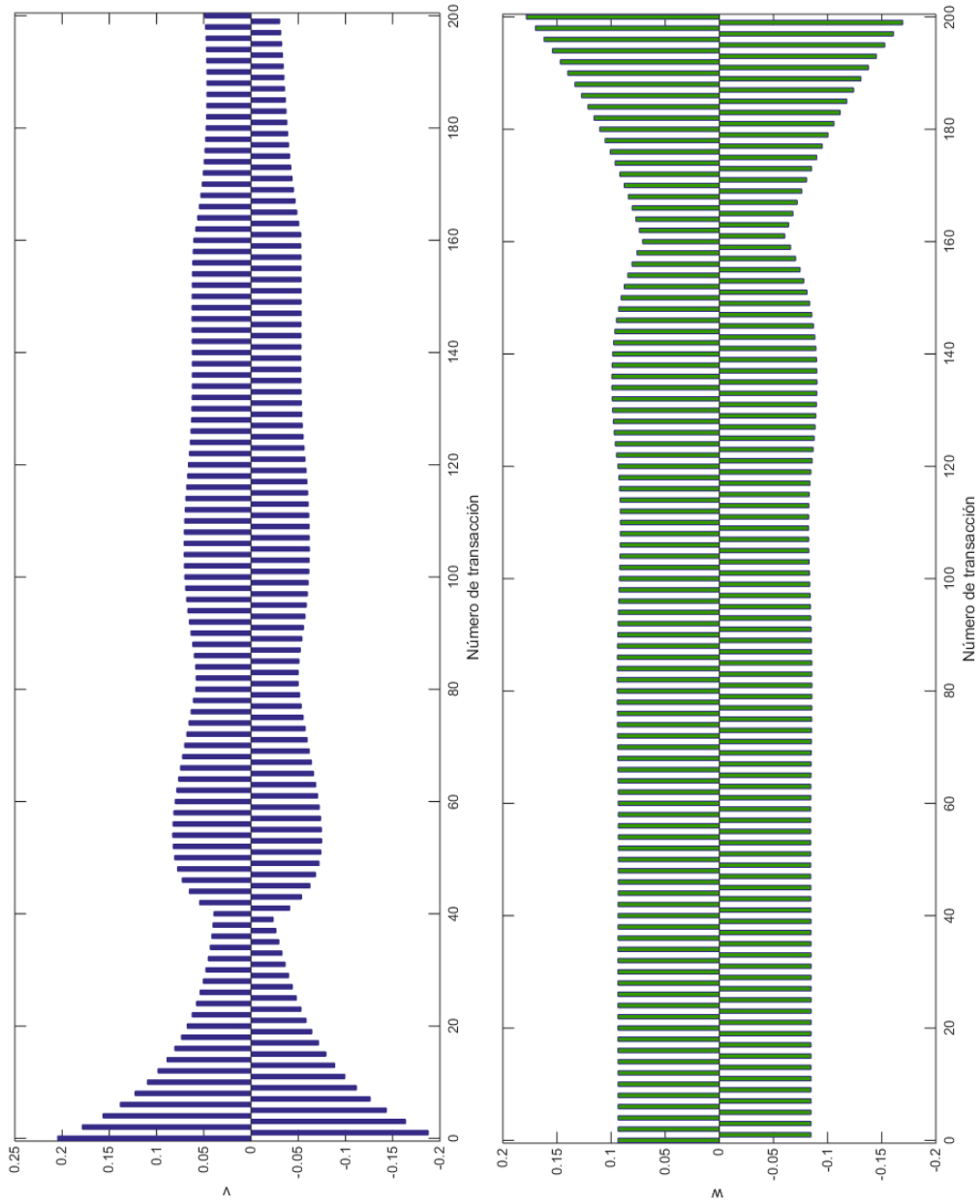

Figura 6.2.: Vectores $\boldsymbol{v}$ (arriba) y $\boldsymbol{w}$ (abajo) para una malla equidistante $\mathbb{T}_{200}$, $G(t) = 3\,(1-5t)^{+}$ (Lineal), $\theta = 0$ y $T = 1$.

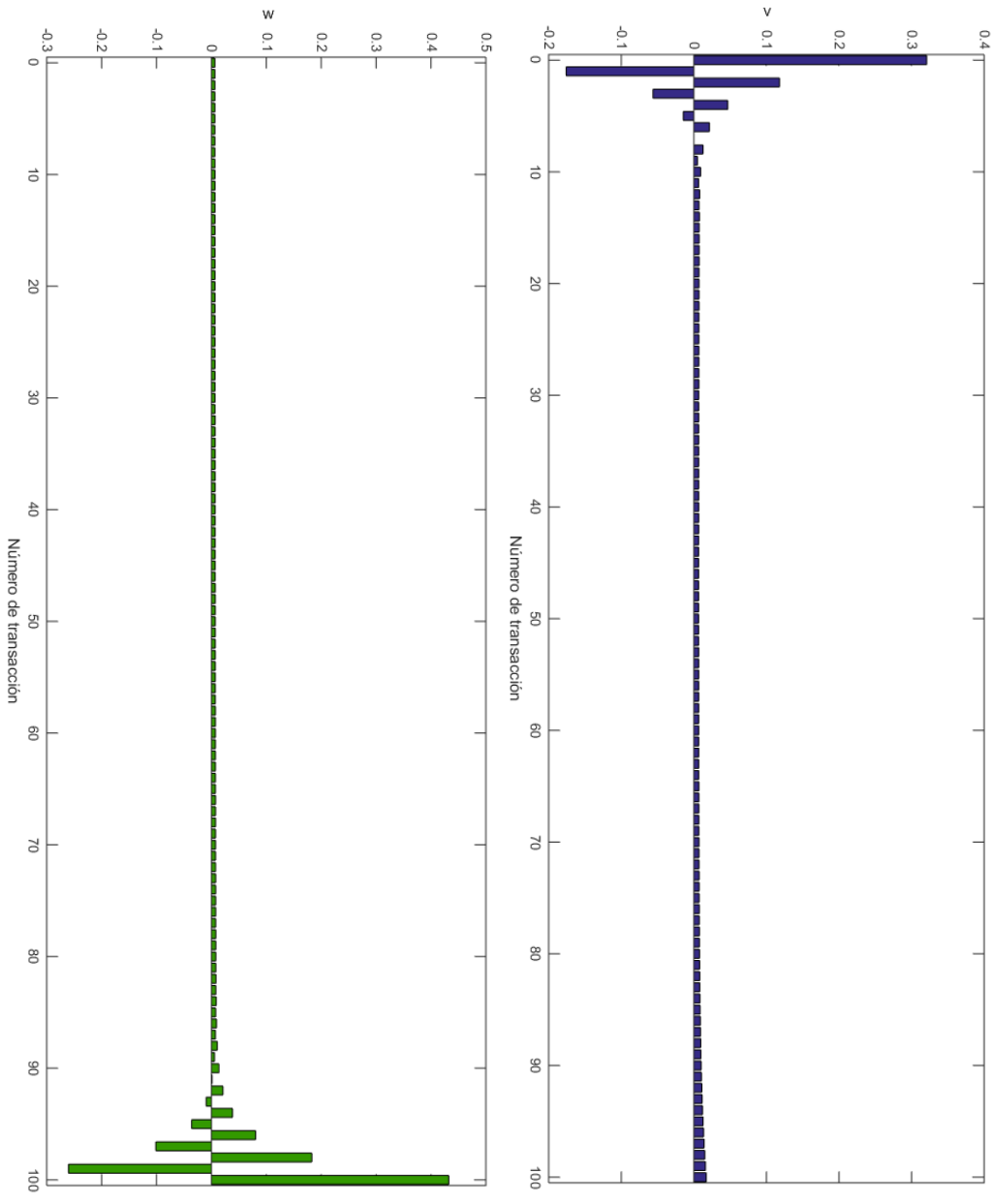

Figura 6.3.: Vectores $\boldsymbol{v}$ (arriba) y $\boldsymbol{w}$ (abajo) para una malla equidistante $\mathbb{T}_{100}$, $G(t) = 2\,(1+2t)^{-2}$ (Ley de Potencias), $\theta = 0.1$ y $T = 1$.

En las figuras anteriores (Fig. 6.1, Fig. 6.2, Fig. 6.3, Fig. 6.4) presentamos las gráficas de los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ para 4 problemas distintos. Podemos hacer algunas observaciones importantes. En los cuatro casos, los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ tienen mucha similitud entre sí, pareciera que las gráficas se reflejan, además tienen comportamientos oscilatorios al ser el valor de θ muy cercano a cero, esto nos lleva a pensar que tal vez nuestro resultado para el Kérnel exponencial presentado en el Teorema 4.2 pueda modificarse para cada uno de los distintos Kérneles, de hecho en las siguientes figuras veremos más evidencia empírica de que las oscilaciones desaparecen al aumentar el parámetro θ en todos los casos.

Algo que llama la atención es que los distintos kérneles dan lugar a geometrías diferentes, observamos que las 4 gráficas otorgan formas distintas volviendo interesante el hecho de que cada uno modela situaciones diferentes por lo que no son comparables y por tanto otrorgan variedad a la resolución de problemas reales. Es importante recalcar que los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ no son las soluciones a nuestro problema de optimización, por lo que el efecto de las posiciones iniciales X_0 y Y_0 aún no se ve reflejado.

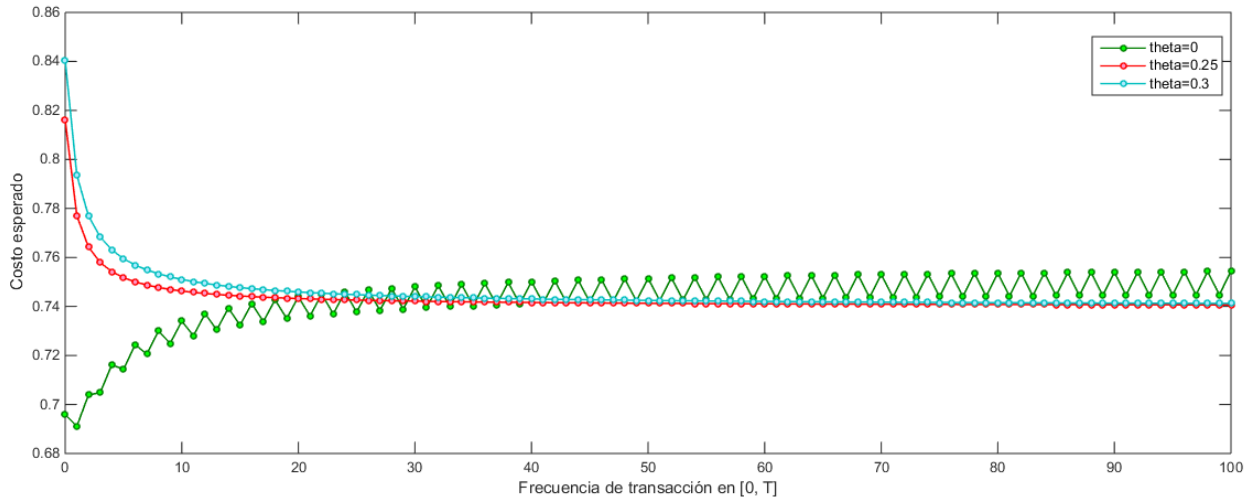

Figura 6.5.: Costo esperado $E\left[C_{\mathbb{T}_N}\left(\boldsymbol{\xi}^*|\boldsymbol{\eta}^*\right)\right] = E\left[C_{\mathbb{T}_N}\left(\boldsymbol{\eta}^*|\boldsymbol{\xi}^*\right)\right]$ para algunos valores de θ como función de la frecuencia de transacciones, N, utilizando una malla equidistante $\mathbb{T}_N$ con $G(t) = e^{-\rho t}$ (Exponencial), $T = 1$, $X_0 = Y_0 = 1$.

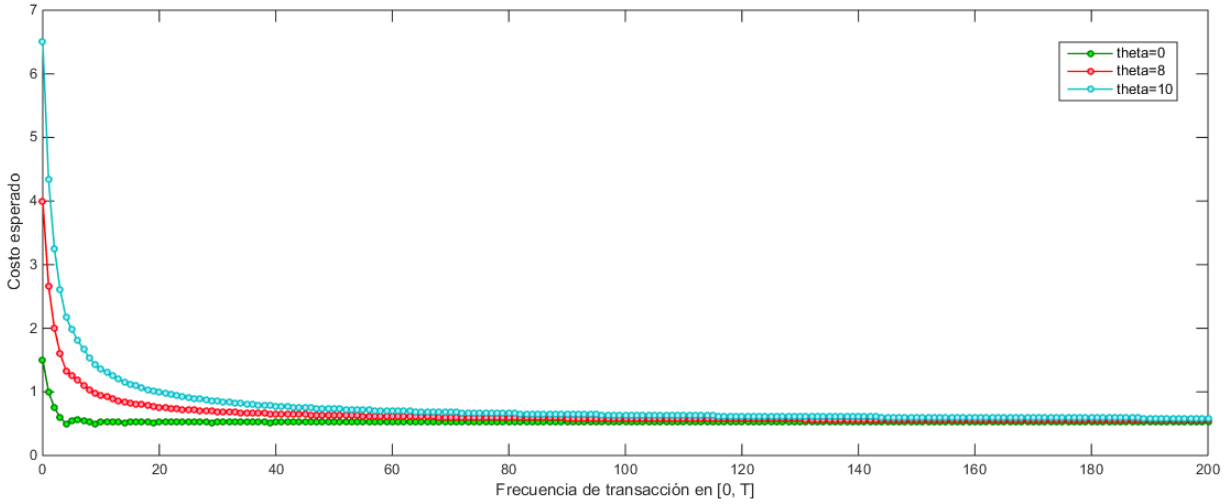

Figura 6.6.: Costo esperado $E\left[C_{\mathbb{T}_N}\left(\boldsymbol{\xi}^*|\boldsymbol{\eta}^*\right)\right] = E\left[C_{\mathbb{T}_N}\left(\boldsymbol{\eta}^*|\boldsymbol{\xi}^*\right)\right]$ para algunos valores de θ como función de la frecuencia de transacciones, N, utilizando una malla equidistante $\mathbb{T}_N$ con $G(t) = 3\left(1-5t\right)^{+}$ (Lineal), $X_0 = Y_0 = 1$ y $T = 1$.

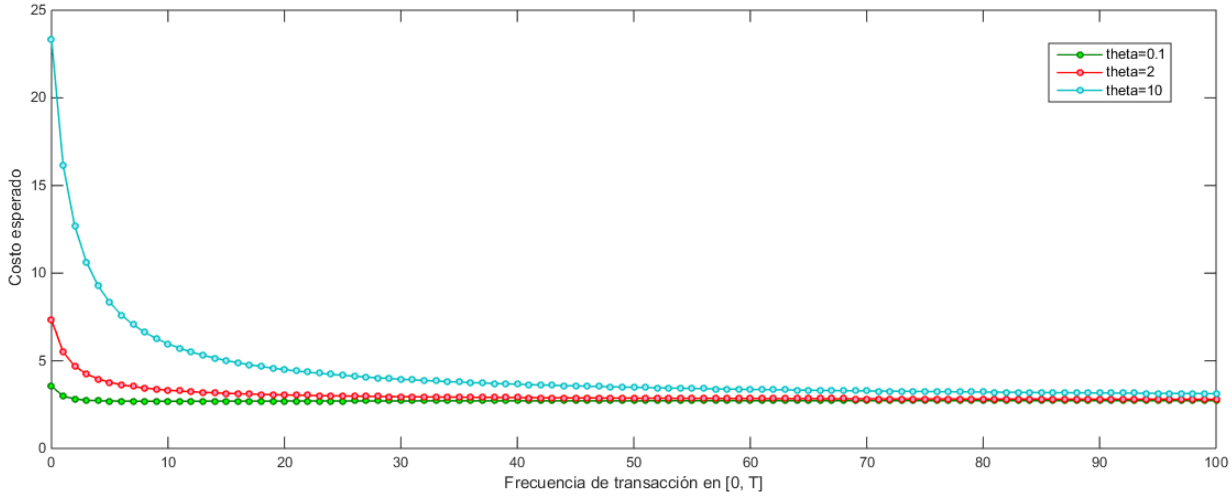

Figura 6.7.: Costo esperado $E\left[C_{\mathbb{T}_N}\left(\boldsymbol{\xi}^*|\boldsymbol{\eta}^*\right)\right]$ para algunos valores de θ como función de la frecuencia de transacciones, N, utilizando una malla equidistante $\mathbb{T}_N$ con $G(t) = 2\left(1+2t\right)^{-2}$ (Ley de Potencias), $X_0 = 2$, $Y_0 = 1$, y $T = 1$.

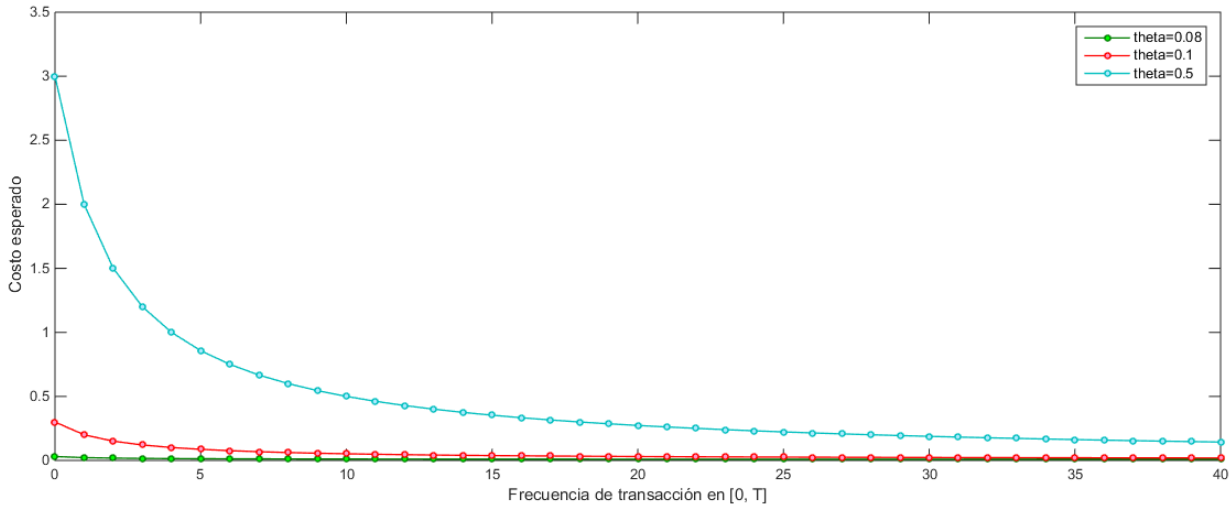

Figura 6.8.: Costo esperado $E\left[C_{\mathbb{T}_N}\left(\boldsymbol{\xi}^*|\boldsymbol{\eta}^*\right)\right]$ para algunos valores de θ como función de la frecuencia de transacciones, N, utilizando una malla equidistante $\mathbb{T}_N$ con $G(t) = 0.1e^{-t^2}$ (Gaussiana), $X_0 = 1$, $Y_0 = -1$, y $T = 1$

Los costos esperados para las estrategias óptimas varían al elegir valores distintos de θ, y también al aumentar el número de transacciones que podemos efectuar en el período $[0,\ T]$. Debemos tener en cuenta que la frecuencia en las transacciones nos proporciona una ventaja para disminuír los costos, en los cuatro problemas podemos verificar que si logramos hacer más de 40 transacciones en el período $[0,\ T]$ logramos reducir los costos esperados aún cuando nuestro parámetro θ sea «grande» o no muy cercano a cero, exepto en la Figura Fig. 6.5 con $\theta = 0$ ya que el oscilamiento permanece aún cuando la cantidad de transacciones crece. Recordando que, aunque es intuitivo pensar que mientras más chico sea el parámetro θ menor debería ser el costo esperado de la estrategia, es un error como mencionamos anteriormente debido al *«predatory trading»*. De hecho, en las figuras se alcanza a apreciar que para un valor «alto» de la frecuencia de transacción, los costos esperados son menores para el mayor valor de θ.

Las imágenes anteriores sugieren que existen resultados similares al Teorema 4.2 para kérneles no exponenciales. En las figuras Fig. 6.7 y Fig. 6.8 las oscilaciones no se alcanzan a distinguir debido a la escala aunque sí están presentes. Las oscilaciones desaparecen en los cuatro casos mientras aumentamos el valor de θ, aunque se desconoce qué tan grande debe ser θ en los casos Lineal, Ley de Potencias y Gaussiano. Debido a la gran diferencia entre las funciones $G(\cdot)$ no es sencillo derivar resultados a partir de los del kérnel exponencial.

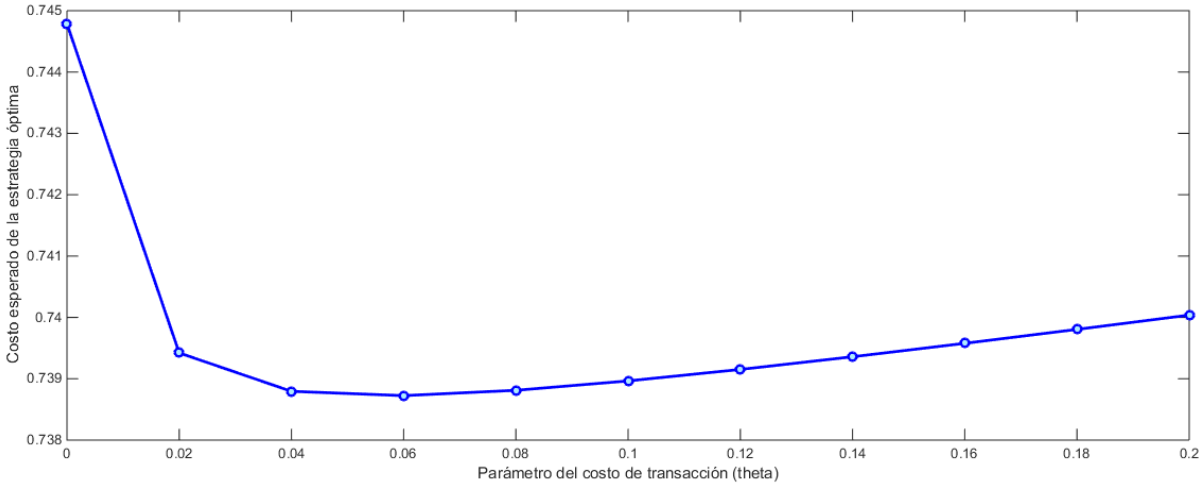

Figura 6.9.: Costo esperado $E\left[C_{\mathbb{T}_{100}}\left(\boldsymbol{\xi}^*|\boldsymbol{\eta}^*\right)\right] = E\left[C_{\mathbb{T}_{100}}\left(\boldsymbol{\eta}^*|\boldsymbol{\xi}^*\right)\right]$ como función de $\theta \in [0,\, 0.2]$, utilizando una malla equidistante $\mathbb{T}_N$ con $G(t) = e^{-\rho t}$ (Exponencial), $T = 1$, $X_0 = Y_0 = 1$.

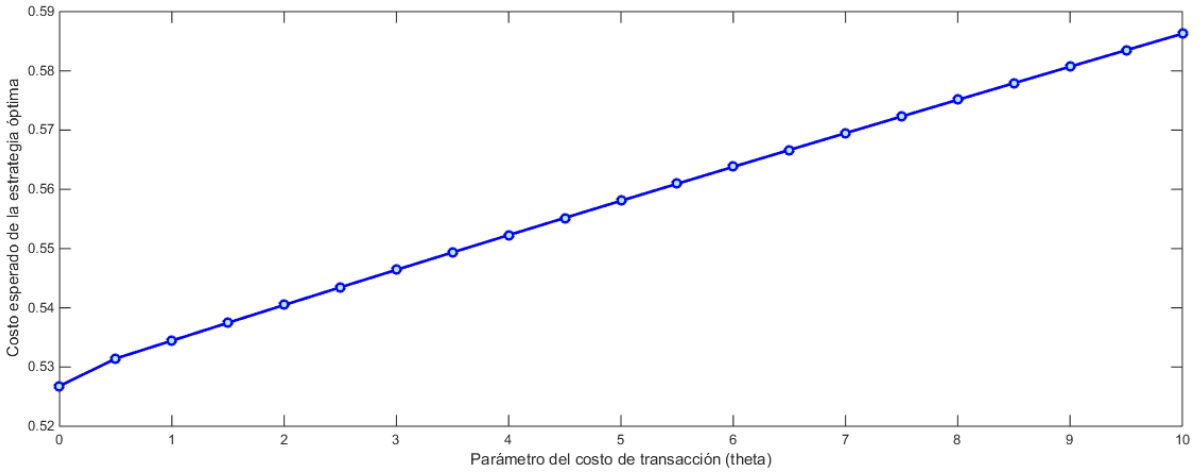

Figura 6.10.: Costo esperado $E\left[C_{\mathbb{T}_{200}}\left(\boldsymbol{\xi}^*|\boldsymbol{\eta}^*\right)\right] = E\left[C_{\mathbb{T}_{200}}\left(\boldsymbol{\eta}^*|\boldsymbol{\xi}^*\right)\right]$ como función de $\theta \in [0,\, 10]$, utilizando una malla equidistante $\mathbb{T}_N$ con $G(t) = 3\left(1 - 5t\right)^+$ (Lineal), $X_0 = Y_0 = 1$ y $T = 1$.

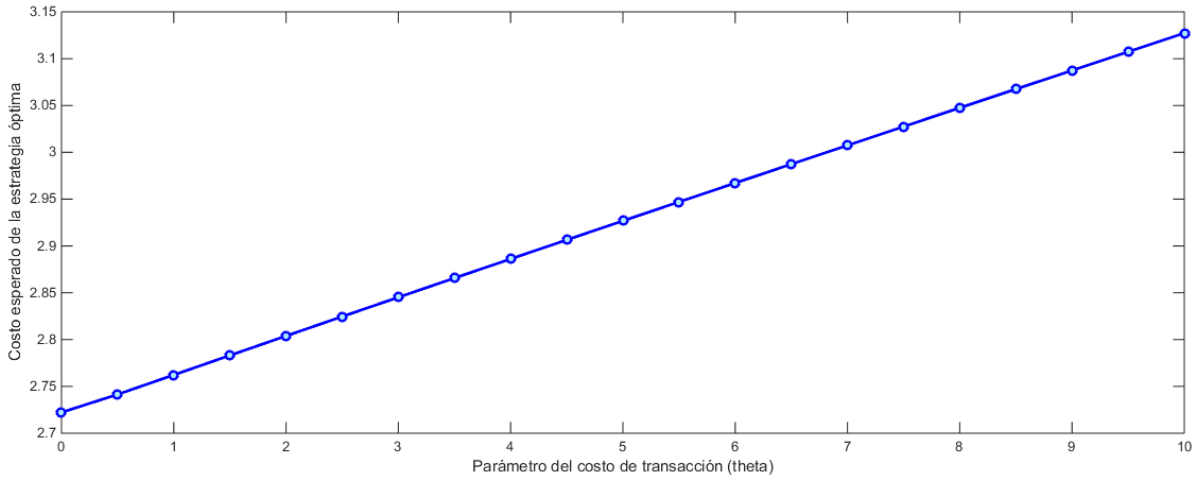

Figura 6.11.: Costo esperado $E\left[C_{\mathbb{T}_{100}}\left(\boldsymbol{\xi}^{*}|\boldsymbol{\eta}^{*}\right)\right]$ como función de $\theta \in [0,\ 10]$, utilizando una malla equidistante $\mathbb{T}_N$ con $G(t) = 2\left(1+2t\right)^{-2}$ (Ley de Potencias), $X_0 = 2$, $Y_0 = 1$, y $T = 1$.

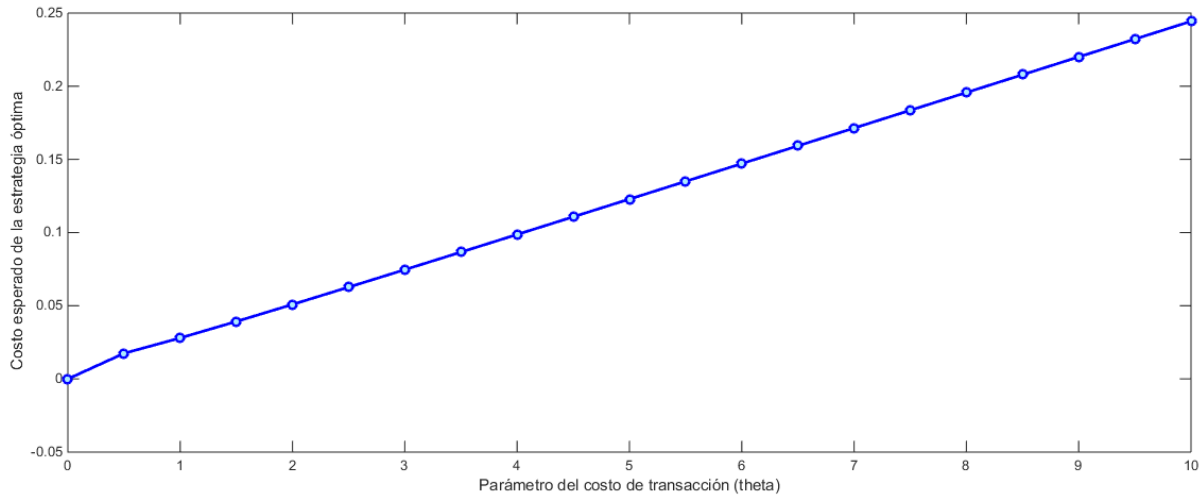

Figura 6.12.: Costo esperado $E\left[C_{\mathbb{T}_{40}}\left(\boldsymbol{\xi}^{*}|\boldsymbol{\eta}^{*}\right)\right]$ como función de $\theta \in [0,\ 10]$, utilizando una malla equidistante $\mathbb{T}_N$ con $G(t) = 0.1e^{-t^2}$ (Gaussiana), $X_0 = 1$, $Y_0 = -1$, y $T = 1$

Cuando variamos el parámetro θ para una frecuencia de transacciones dada (N), observamos distintos comportamientos, en el caso del Kérnel exponencial Fig. 6.9, el costo esperado baja hasta un mínimo cercano a $\theta = 0.04$ para después incrementar. Mientras que en los otros tres casos Fig. 6.10, Fig. 6.11 y Fig. 6.12, el costo esperado aumenta conforme incrementamos el valor de θ de manera casi lineal. Al realizar otras simulaciones notamos que estos comportamientos no permanecen al

variar los parámetros, ni siquiera dejando fijo el Kérnel por lo que empíricamente no encontramos evidencia para hacer alguna conjetura respecto a si los costos esperados aumentan o disminuyen al variar el parámetro θ.

A continuación presentaremos las estrategias $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ derivadas de un ejercicio más. Los parámetros utilizados son los mismos que en los casos anteriores con excepción de las posiciones iniciales X_0 y Y_0. Estos resultados resaltaron debido a que a pesar de ser óptimos contradicen la intuición por ser imprácticos económicamente hablando. Mientras los dos agentes tengan posiciones iguales, ya sea de compra o venta donde uno tiene un inventario mayor que el otro, i.e $X_0 > Y_0$ o $Y_0 > X_0$, la estrategia óptima para aquel con un inventario menor logra alcanzar el inventario del agente con inventario mayor, aún para cantidades muy grandes. En otras palabras, si un agente desea comprar (vender) un millón de unidades de activo el agente con la posición más pequeña deberá ajustar su estrategia de manera que termine comprando (vendiendo) una cantidad cercana a ese millón de unidades del inventario del otro agente para finalmente vender todo en las últimas transacciones quedandose sólo con lo que necesitaba en principio aún si sólo necesite comprar (vender) una sóla unidad de activo. La única manera en la que se observa que este efecto se elimina es si el parámetro θ es excesivamente grande[1]. Este comportamiento se observa en todos los tipos de Kérneles como veremos.

[1]El valor del parámetro θ debe ser casi tan grande como el mayor valor entre X_0 y Y_0.

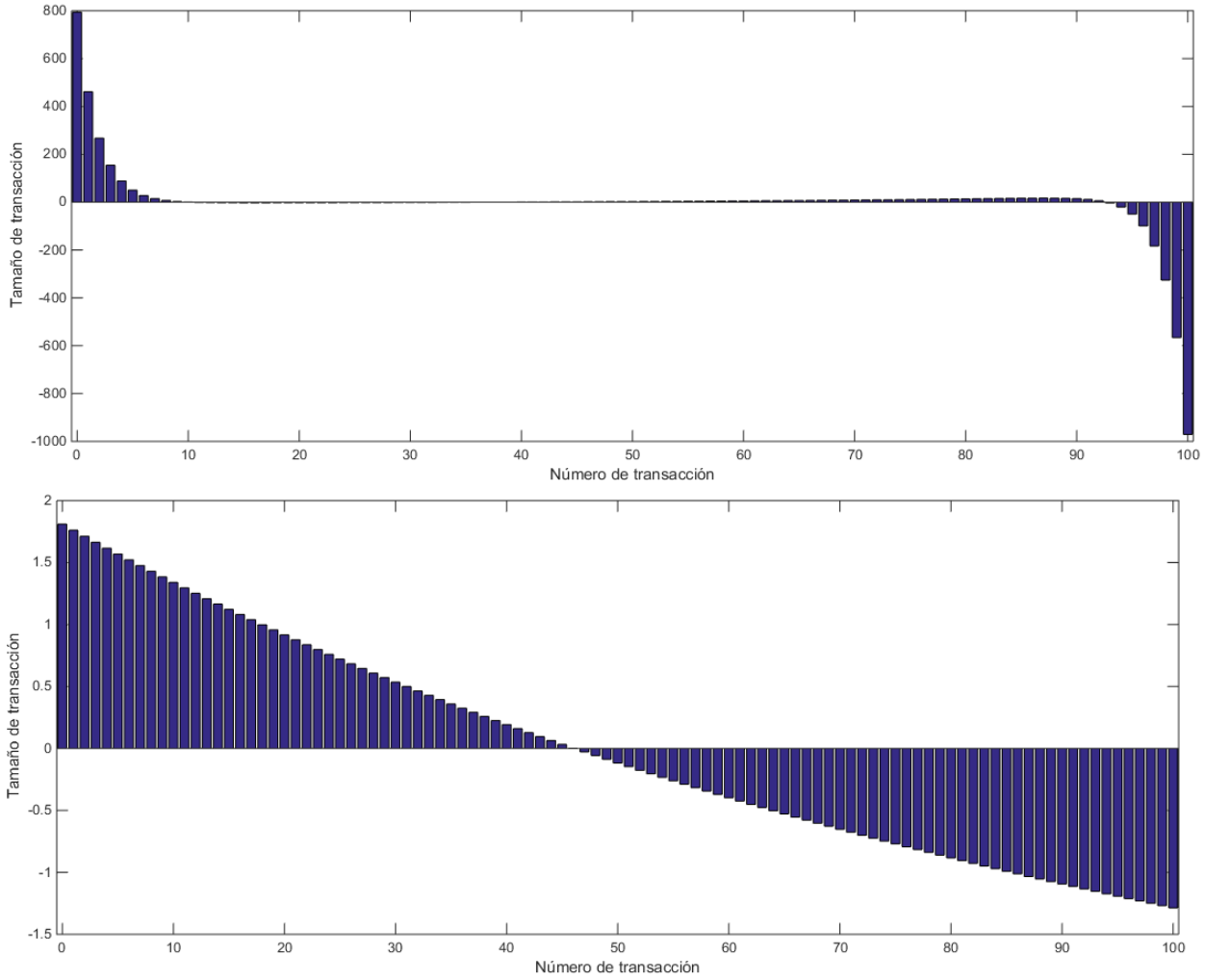

Figura 6.13.: Estrategia $\boldsymbol{\xi}$ para una malla equidistante $\mathbb{T}_{100}$, $G(t) = e^{-\rho t}$ (Exponencial), $T = 1$, $X_0 = 1$, $Y_0 = 10,000$, $\theta = 1$ (Arriba), $\theta = 1{,}000$ (Abajo).

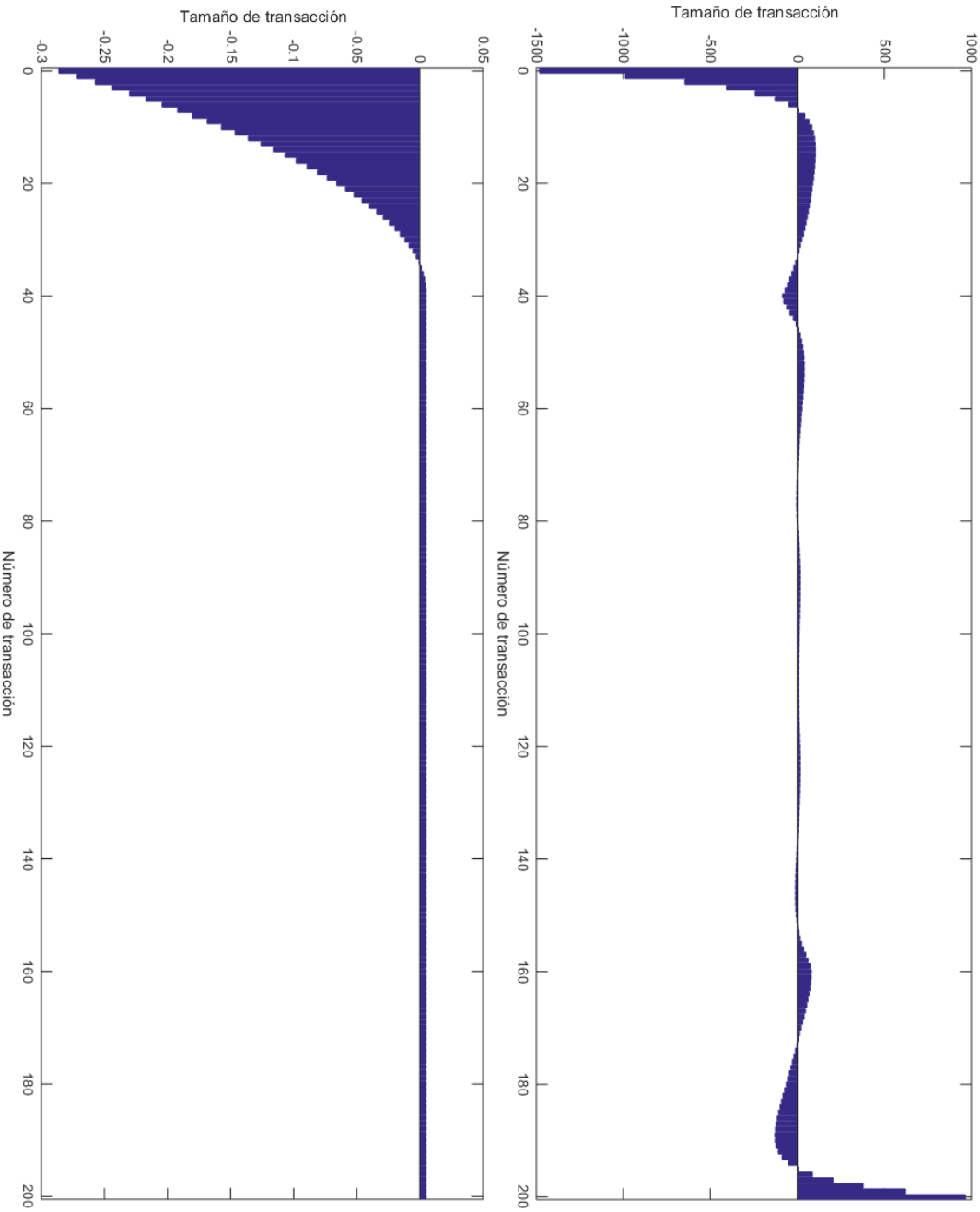

Figura 6.14.: Estrategia $\boldsymbol{\xi}$ para una malla equidistante$\mathbb{T}_{200}$, $G(t) = 3\,(1-5t)^{+}$ (Lineal), $T = 1$, $X_0 = -3$, $Y_0 = -100,000$, $\theta = 5$ (Arriba), $\theta = 50,000$ (Abajo).

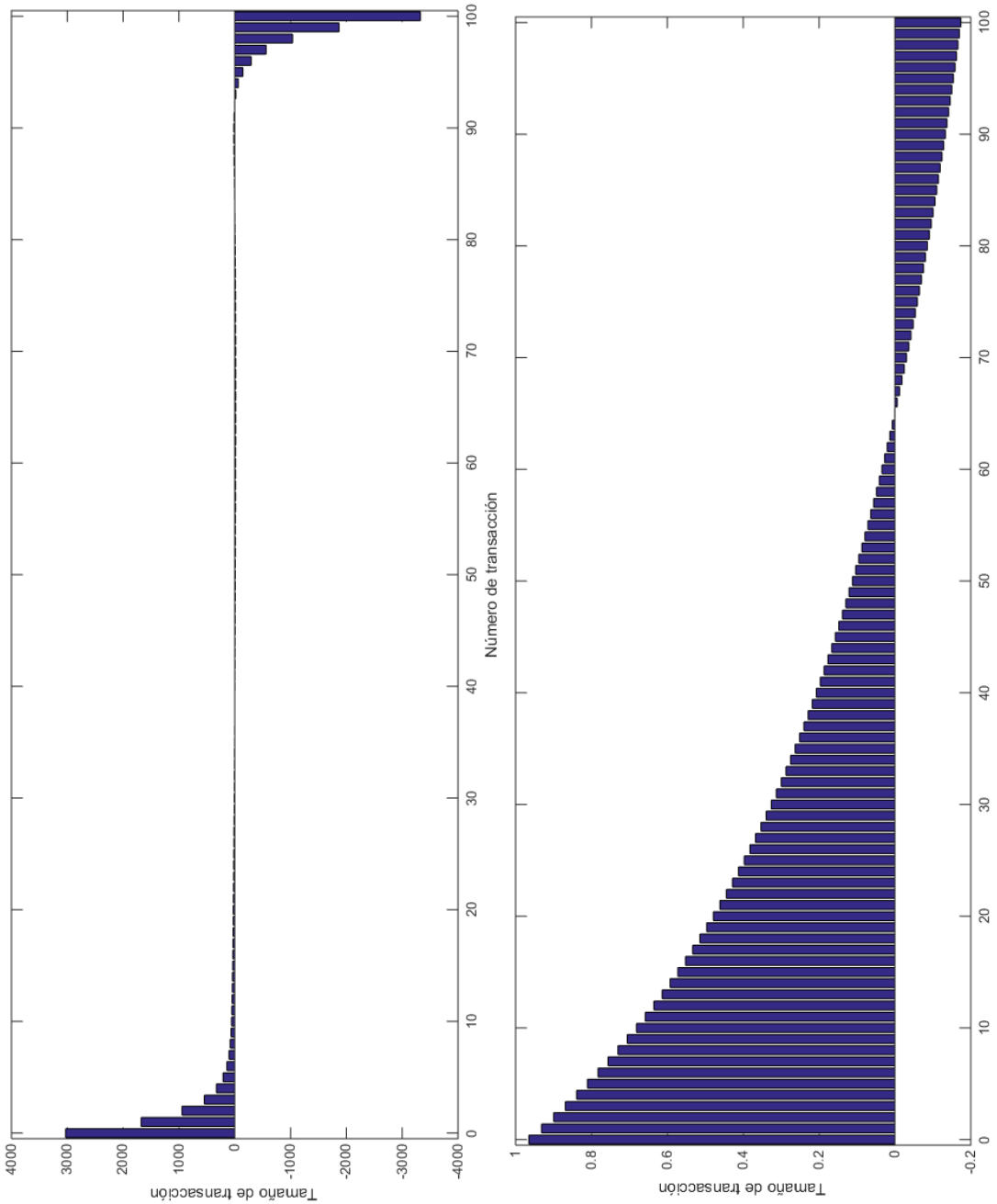

Figura 6.15.: Estrategia $\boldsymbol{\xi}$ para una malla equidistante $\mathbb{T}_{100}$, $G(t) = 2\,(1+2t)^{-2}$ (Ley de Potencias), $T = 1$, $X_0 = 20$, $Y_0 = 70,000$, $\theta = 2$ (Arriba), $\theta = 20,000$ (Abajo).

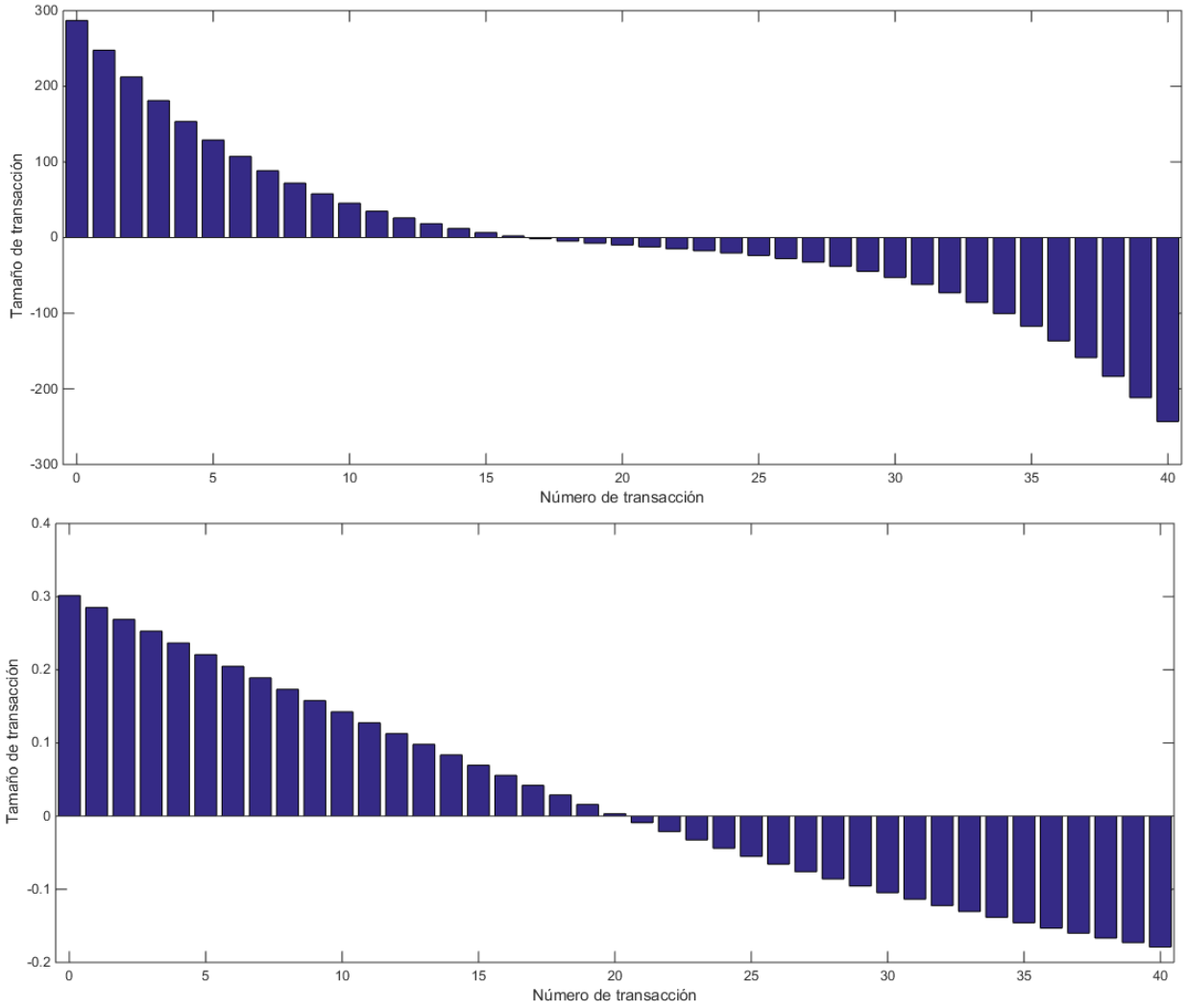

Figura 6.16.: Estrategia $\boldsymbol{\xi}$ para una malla equidistante $\mathbb{T}_{40}$, $G(t) = 0.1e^{-t^2}$ (Gaussiana), $T = 1$, $X_0 = 1$, $Y_0 = 10,000$, $\theta = 0.5$ (Arriba), $\theta = 750$ (Abajo).

Sin pérdida de generalidad, en las figuras anteriores (Fig. 6.13, Fig. 6.14, Fig. 6.15 y Fig. 6.16) tomamos a $X_0 < Y_0$. Como podemos observar en los cuatro casos, al ser el valor de θ «pequeño» respecto al inventario del jugador con posición inicial Y_0, la estrategia óptima para el jugador con la posición inicial X_0 es extrema y un tanto ilógica en el sentido que él simplemente desea comprar (vender) un número menor a 10 unidades de activo y termina comprando más de 100 veces lo que necesita para luego venderlo (comprarlo). Este comportamiento se reduce al incrementar considerablemente el valor de θ, es posible que exista algún valor de θ que evite estos comportamientos aunque no es sencillo aislarlo de las ecuaciones que nos ayudan a obtener el equilibrio (4.3.4) y (4.3.5). Estos resultados nos invitan a proponer una metodología que prevenga este tipo de situaciones en las que el modelo parece insensato.

Parte IV.

Demostraciones

7. Demostraciones

En este capítulo presentamos las demostraciones a los teoremas principales del **Capítulo 4**.

7.1. Teorema de existencia y unicidad del equilibrio de Nash

Lema.4.1 *Las matrices* Γ_θ, $\tilde{\Gamma}$, $\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}$ *y* $\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}$ *son positivas definidas para toda* $\theta \geq 0$. *En particular, todos los términos de las ecuaciones* (4.3.4) *y* (4.3.5) *están bien definidos, y los denominadores son estrictamente positivos.*

Demostración.

a) La matriz Γ es positiva definida dado que hicimos el supuesto que la función $G(|\cdot|)$ es positiva definida en el sentido de Bochner. Sabemos que la matriz $2\theta Id$ también lo es, finalmente la suma de matrices positivas definidas es positiva definida por lo que $\Gamma_\theta = \Gamma + 2\theta Id$ también lo es.

b) Observemos que podemos escribir a la matriz Γ de la siguiente manera, $\Gamma = \tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}^\top$, así para todo vector $x \in \mathbb{R}^{N+1}$, tenemos que

$$0 < x^\top \Gamma x = x^\top \left(\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}^\top\right) x = x^\top \tilde{\Gamma} x + x^\top \tilde{\Gamma}^\top x = 2x^\top \tilde{\Gamma} x = 2x^\top \tilde{\Gamma}^\top x.$$

Por lo tanto, las matrices $\tilde{\Gamma}$ y $\tilde{\Gamma}^\top$ son positivas definidas.

c) Por los incisos anteriores Γ_θ y $\tilde{\Gamma}$ son positivas definidas, de ahí que la suma también lo sea.

d) Tenemos por el inciso b) que $\Gamma - \tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^\top$ es positiva definida, entonces

$$\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma} = \Gamma - \tilde{\Gamma} + 2\theta Id.$$

De esta manera la suma de dos matrices positivas definidas nos arroja también una de este tipo.

■

Observación 7.1. Denotaremos a la clase de las estrategias deterministas en $\mathcal{H}(Z_0,\ \mathbb{T})$ por,

$$\mathcal{H}_{det}(Z_0,\ \mathbb{T}) \coloneqq \{\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{H}(Z_0,\ \mathbb{T}) \mid \boldsymbol{\zeta}\ es\ determinista\}.$$

Un equilibrio de Nash en esta clase se define de igual manera que en la Definición 4.3.

Lema 7.1. *El costo esperado de una estrategia admisible* $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}(X_0,\ \mathbb{T})$ *dada otra estrategia* $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{H}(Y_0,\ \mathbb{T})$*es*

$$E\left[C_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\eta})\right] = E\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}\right].$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E\left[C_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\eta})\right] &= E\left[X_0S_0^0 + \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{G(0)}{2}\xi_k^2 - S_{t_k}^{\xi,\eta}\xi_k + \varepsilon_k G(0)\xi_k\eta_k + \theta\xi_k^2\right)\right] \\ &= X_0S_0^0 + E\left[\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{G(0)}{2}\xi_k^2 - S_{t_k}^{\xi,\eta}\xi_k + \varepsilon_k G(0)\xi_k\eta_k + \theta\xi_k^2\right)\right] \\ &= X_0S_0^0 + E\left[\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{G(0)}{2}\xi_k^2 - S_{t_k}^{\xi,\eta}\xi_k + \frac{G(0)}{2}\xi_k\eta_k + \theta\xi_k^2\right)\right]. \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que $(\varepsilon_i)_{i=0}^{N}$ es una sucesión independiente de $\sigma\left(\cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t\right)$ y a que las dos estrategias $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$ son medibles respecto a esta misma sigma álgebra, así que $E\left[\varepsilon_k G(0)\xi_k\eta_k\right] = \frac{1}{2}G(0)E\left[\xi_k\eta_k\right]$.

Además, sustituyendo la ecuación (4.2.1), obtenemos.

$$
\begin{aligned}
E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\eta}\right)\right] &= X_0 S_0^0 + E\left[\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{G(0)}{2}\xi_k^2 - \xi_k\left(S_{t_k}^0 - \sum_{m=0}^{k-1} G\left(t_k - t_m\right)\left(\xi_m + \eta_m\right)\right) + \frac{G(0)}{2}\xi_k\eta_k + \theta\xi_k^2\right)\right] \\
&= X_0 S_0^0 + E\left[\sum_{k=0}^{N} -\xi_k S_{t_k}^0\right. \\
&\left. + \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{G(0)}{2}\xi_k^2 + \sum_{k=0}^{N}\left(\xi_k\sum_{m=0}^{k-1} G\left(t_k - t_m\right)\left(\xi_m + \eta_m\right)\right) + \frac{G(0)}{2}\xi_k\eta_k + \theta\xi_k^2\right)\right] \\
&= X_0 S_0^0 + E\left[-\sum_{k=0}^{N}\xi_k S_{t_k}^0 + \sum_{k=0}^{N}\frac{G(0)}{2}\xi_k^2\right. \\
&\left. + \sum_{k=0}^{N}\xi_k\sum_{m=0}^{k-1}\xi_m G\left(t_k - t_m\right) + \sum_{k=0}^{N}\left(\xi_k\left(\frac{G(0)}{2}\eta_k + \sum_{m=0}^{k-1}\eta_m G\left(t_k - t_m\right)\right) + \theta\xi_k^2\right)\right].
\end{aligned}
$$

Notemos en esta última igualdad que por ser ξ_k una v.a $\mathcal{F}_{t_k}-$medible donde se cumple la condición **2.** de la Definición 4.1 y por ser $S_{t_k}^0$ una martingala, usando integración por partes, se tiene que

$$
E\left[\sum_{k=0}^{N}\xi_k S_{t_k}^0\right] = S_0^0 E\left[\sum_{k=0}^{N}\xi_k\right] = X_0 S_0^0.
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N}\frac{G(0)}{2}\xi_k^2 + \sum_{k=0}^{N}\xi_k\sum_{m=0}^{k-1}\xi_m G\left(t_k - t_m\right) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\xi_k\xi_m G\left(|t_k - t_m|\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\top\Gamma\boldsymbol{\xi}, \\
\sum_{k=0}^{N}\xi_k\left(\frac{G(0)}{2}\eta_k + \sum_{m=0}^{k-1}\eta_m G\left(t_k - t_m\right)\right) &= \boldsymbol{\xi}^\top\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}, \\
\sum_{k=0}^{N}\theta\xi_k^2 &= \boldsymbol{\xi}^\top\theta\boldsymbol{\xi}.
\end{aligned}
$$

Utilizando los cálculos anteriores calculamos la esperanza deseada,

$$
E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\eta}\right)\right] = X_0 S_0^0 - X_0 S_0^0 + E\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\top\Gamma\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^\top\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}^\top\theta\boldsymbol{\xi}\right] = E\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\top\Gamma_\theta\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^\top\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}\right].
$$

■

Lema 7.2. Para un conjunto $\mathbb{T}$ de tiempos y valores iniciales X_0 y $Y_0 \in \mathbb{R}$, existe a lo más un equilibrio de Nash en la clase $\mathcal{H}(X_0,\, \mathbb{T}) \times \mathcal{H}(Y_0,\, \mathbb{T})$.

Demostración.

Procederemos a demostrarlo por contradicción, así que consideremos que existen dos distintos equilibrios de Nash, a saber $\left(\boldsymbol{\xi}^0,\, \boldsymbol{\eta}^0\right)$ y $\left(\boldsymbol{\xi}^1,\, \boldsymbol{\eta}^1\right)$, al ser distintos podemos definir las siguientes variables,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}^\alpha &= \alpha\boldsymbol{\xi}^1 + (1-\alpha)\,\boldsymbol{\xi}^0,\\ \boldsymbol{\eta}^\alpha &= \alpha\boldsymbol{\eta}^1 + (1-\alpha)\,\boldsymbol{\eta}^0.\end{aligned}$$

Definamos la siguiente función,

$$f(\alpha) = E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\xi}^\alpha|\boldsymbol{\eta}^0\right) + C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\eta}^\alpha|\boldsymbol{\xi}^0\right) + C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\xi}^{1-\alpha}|\boldsymbol{\eta}^1\right) + C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\eta}^{1-\alpha}|\boldsymbol{\xi}^1\right)\right].$$

Recordemos que por el **Lema** 4.1 se tiene que la matriz Γ_θ es positiva definida, entonces el funcional $\boldsymbol{\xi} \mapsto E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\eta}\right)\right] = E\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\top\Gamma_\theta\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^\top\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}\right]$obtenido en el ***Lema*** 7.1 es estrictamente convexo respecto a $\boldsymbol{\xi}$. Por otro lado, como tenemos dos equilibrios diferentes y la suma de funcionales estrictamente convexos es también estrictamente convexo entonces $f(\alpha)$ también lo es y tiene su único mínimo en $\alpha = 0$ como puede comprobarse sustituyendo este valor en $f(\cdot\,)$, así

$$f(\alpha) > f(0) \quad \forall\, \alpha > 0.$$

De la desigualdad anterior podemos ver que

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} \Rightarrow \left.\frac{df(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h) - f(0)}{h} \geq 0. \tag{7.1.1}$$

Por otro lado, observemos que debido a la simetría de Γ_θ se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\xi}^{\alpha}|\boldsymbol{\eta}\right)\right] &= E\left[\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\xi}^{\alpha}\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\xi^{\alpha}+\left(\boldsymbol{\xi}^{\alpha}\right)^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}\right] \\
&= E\left[\frac{1}{2}\left(\left(\alpha\left(\boldsymbol{\xi}^{1}\right)^{\top}+(1-\alpha)\,\boldsymbol{\xi}^{0}\right)\Gamma_{\theta}\left(\alpha\left(\boldsymbol{\xi}^{1}\right)^{\top}+(1-\alpha)\,\boldsymbol{\xi}^{0}\right)\right)\right. \\
&\left.+\left(\alpha\left(\boldsymbol{\xi}^{1}\right)^{\top}+(1-\alpha)\,\boldsymbol{\xi}^{0}\right)^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}\right] \\
&= E\left[\frac{1}{2}\alpha^{2}\left(\boldsymbol{\xi}^{1}\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^{1}+\alpha\left(1-\alpha\right)\left(\boldsymbol{\xi}^{1}\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^{0}+\frac{1}{2}\left(1-\alpha\right)^{2}\left(\boldsymbol{\xi}^{0}\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^{0}\right. \\
&\left.+\alpha\left(\boldsymbol{\xi}^{1}\right)^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}+\left(1-\alpha\right)\left(\boldsymbol{\xi}^{0}\right)^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}\right].
\end{aligned}
$$

Ahora, derivando la expresión anterior con respecto a α y evaluándo ésta en [1]$\alpha = 0^{+}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\xi}^{\alpha}|\boldsymbol{\eta}\right)\right] &= \alpha\left(\boldsymbol{\xi}^{1}\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^{1}+\left(1-\alpha\right)\left(\boldsymbol{\xi}^{1}\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^{0}-\alpha\left(\boldsymbol{\xi}^{1}\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^{0} \\
&\quad-\left(1-\alpha\right)\left(\boldsymbol{\xi}^{0}\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^{0}+\left(\boldsymbol{\xi}^{1}\right)^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}+\left(\boldsymbol{\xi}^{0}\right)^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}. \\
\Rightarrow \left.\frac{d}{d\alpha}E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\xi}^{\alpha}|\boldsymbol{\eta}\right)\right]\right|_{\alpha^{+}=0} &= E\left[\left(\boldsymbol{\xi}^{1}\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^{0}-\left(\boldsymbol{\xi}^{0}\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^{0}+\left(\boldsymbol{\xi}^{1}\right)^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}+\left(\boldsymbol{\xi}^{0}\right)^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}\right] \\
&= E\left[\left(\boldsymbol{\xi}^{1}-\boldsymbol{\xi}^{0}\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^{0}+\left(\boldsymbol{\xi}^{1}-\boldsymbol{\xi}^{0}\right)^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}\right].
\end{aligned}
$$

Haciendo los ajustes correspondientes, recordando que $\tilde{\Gamma}+\tilde{\Gamma}^{\top}=\Gamma$ se sigue que,

[1] 0^{+} significa tender por la derecha.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}f(\alpha)\Big|_{\alpha^+=0} &= E\left[\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)^\top\Gamma_\theta\boldsymbol{\xi}^0+\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)^\top\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}^0+\left(\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)^\top\Gamma_\theta\boldsymbol{\eta}^0+\left(\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)^\top\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\xi}^0\right.\\
&\quad\left.+\left(\boldsymbol{\xi}^0-\boldsymbol{\xi}^1\right)^\top\Gamma_\theta\boldsymbol{\xi}^1+\left(\boldsymbol{\xi}^0-\boldsymbol{\xi}^1\right)^\top\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}^1+\left(\boldsymbol{\eta}^0-\boldsymbol{\eta}^1\right)^\top\Gamma_\theta\boldsymbol{\eta}^1+\left(\boldsymbol{\eta}^0-\boldsymbol{\eta}^1\right)^\top\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\xi}^1\right]\\
&= E\left[\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)^\top\Gamma_\theta\left(\boldsymbol{\xi}^0-\boldsymbol{\xi}^1\right)+\left(\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)^\top\Gamma_\theta\left(\boldsymbol{\eta}^0-\boldsymbol{\eta}^1\right)\right.\\
&\quad\left.+\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)^\top\tilde{\Gamma}\left(\boldsymbol{\eta}^0-\boldsymbol{\eta}^1\right)+\left(\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)^\top\tilde{\Gamma}\left(\boldsymbol{\xi}^0-\boldsymbol{\xi}^1\right)\right]\\
&= -E\left[\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)^\top\Gamma_\theta\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)+\left(\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)^\top\Gamma_\theta\left(\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)\right]\\
&\quad+E\left[\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)^\top\tilde{\Gamma}\left(\boldsymbol{\eta}^0-\boldsymbol{\eta}^1\right)+\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)^\top\tilde{\Gamma}^\top\left(\boldsymbol{\eta}^0-\boldsymbol{\eta}^1\right)\right]\\
&= -E\left[\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)^\top\Gamma_\theta\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)+\left(\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)^\top\Gamma_\theta\left(\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)\right]\\
&\quad-E\left[\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)^\top\Gamma\left(\boldsymbol{\eta}^0-\boldsymbol{\eta}^1\right)\right].
\end{aligned}$$

Observemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)^\top\Gamma_\theta\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)+\left(\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)^\top\Gamma_\theta\left(\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)\right)+\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)\Gamma\left(\boldsymbol{\eta}^0-\boldsymbol{\eta}^1\right)\\
&\qquad\geq\frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0+\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)^\top\Gamma\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0+\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)\right)\geq 0.
\end{aligned}$$

Así que, como los dos equilibrios de Nash son distintos,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}f(\alpha)\Big|_{\alpha^+=0} &= -E\left[\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)^\top\Gamma_\theta\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)+\left(\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)^\top\Gamma_\theta\left(\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)\right]\\
&\quad-E\left[\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0\right)^\top\Gamma\left(\boldsymbol{\eta}^0-\boldsymbol{\eta}^1\right)\right]\\
&\leq -\frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0+\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)^\top\Gamma\left(\boldsymbol{\xi}^1-\boldsymbol{\xi}^0+\boldsymbol{\eta}^1-\boldsymbol{\eta}^0\right)\right)<0.
\end{aligned}$$

Lo anterior contradice (7.1.1). Por lo tanto existe a lo más un equilibrio de Nash en $\mathcal{H}(X_0,\,\mathbb{T})\times\mathcal{H}(Y_0,\,\mathbb{T})$.

■

Lema 7.3. Una estrategia de Nash en la clase de las estrategias deterministas denotadas por $\mathcal{H}_{det}(X_0,\, \mathbb{T}) \times \mathcal{H}_{det}(Y_0,\, \mathbb{T})$, es también un equilibrio de Nash en la clase de las estrategias adaptadas $\mathcal{H}(X_0,\, \mathbb{T}) \times \mathcal{H}(Y_0,\, \mathbb{T})$.

Demostración

Supongamos que $(\boldsymbol{\xi}^*,\, \boldsymbol{\eta}^*)$ es un equilibrio de Nash en la clase $\mathcal{H}_{det}(X_0,\, \mathbb{T}) \times \mathcal{H}_{det}(Y_0,\, \mathbb{T})$ de las estrategias deterministas. Debemos probar que $\boldsymbol{\xi}^*$minimiza el costo esperado $E[C_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\eta}^*)]$ mientras que $\boldsymbol{\eta}^*$minimiza el costo esperado $E[C_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\xi}^*)]$ en las respectivas clases $\mathcal{H}(X_0,\, \mathbb{T})$ y $\mathcal{H}_{det}(Y_0,\, \mathbb{T})$ de las estrategias adaptadas, así que sea $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}(X_0,\, \mathbb{T})$ dada.

Definamos a $\tilde{\boldsymbol{\xi}} \in \mathcal{H}_{det}(X_0,\, \mathbb{T})$ como $\tilde{\xi}_k = E[\xi_k]$ para $k = 0,\, 1,\, \ldots,\, N$.

Entonces, aplicando la desigualdad de Jensen a la función convexa $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}^\top \Gamma_\theta \boldsymbol{x}$ se tiene,

$$\begin{aligned}
E[C_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\eta}^*)] &= E\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\top \Gamma_\theta \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^\top \tilde{\Gamma} \boldsymbol{\eta}^*\right] \\
&= E\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^\top \Gamma_\theta \boldsymbol{\xi}\right] + \tilde{\boldsymbol{\xi}}^\top \tilde{\Gamma} \boldsymbol{\eta}^* \\
&\geq \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^\top \Gamma_\theta \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\boldsymbol{\xi}}^\top \tilde{\Gamma} \boldsymbol{\eta}^* \\
&= E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}|\boldsymbol{\eta}^*\right)\right] \\
&\geq E[C_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}^*|\boldsymbol{\eta}^*)]\,.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $\boldsymbol{\xi}^*$ minimiza la esperanza $E[C_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\eta}^*)]$ sobre todas las $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}(X_0,\, \mathbb{T})$, y de manera análoga puede probarse que $\boldsymbol{\eta}^* \in \mathcal{H}(Y_0,\, \mathbb{T})$ minimiza $E[C_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\xi}^*)]$.

■

Observación 7.2. Antes de demostrar el resultado que consideramos como principal, vamos a comentar un poco a manera de bosquejo la intuición de la definición de los vectores v y w propuestos que generan los posibles equilibrios de Nash.

De acuerdo al **Lema** 7.1 el costo esperado de cada una de las estrategias $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ dada la otra es,

$$E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\eta}\right)\right] = E\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}\right],$$
$$E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\xi}\right)\right] = E\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\xi}\right].$$

Así que, sin pérdida de generalidad, encontraremos aquella estrategia $\boldsymbol{\xi}^{*}$ que minimiza el costo esperado dada la estrategia $\boldsymbol{\eta}$ sujeta a las condiciones en la Definición 4.1 y análogamente la estrategia $\boldsymbol{\eta}^{*}$. Para ello utilizaremos la técnica de multiplicadores de Lagrange en su versión para problemas cuadráticos con restricciones lineales que será presentada a continuación, cuya demostración puede consultarse en [Sección 5.2, [5]].

Proposición 7.1. El problema de minimización cuadrático con restricciones lineales

$$Q(y) = \frac{1}{2}y^{\top}M^{-1}y - b^{\top}y, \tag{7.1.2}$$
$$s.a\ A^{\top}y = f, \tag{7.1.3}$$

tiene una única solución $(y,\ \lambda)$ *y está dada por el sistema*

$$\begin{pmatrix} M^{-1} & A \\ A^{\top} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ f \end{pmatrix}.$$

Para obtener $\boldsymbol{\xi}^{*}$, utilizando la **Proposición** 7.1, tomando a $y = \boldsymbol{\xi}$, $M^{-1} = \Gamma_{\theta}$, $b^{\top} = -\boldsymbol{\eta}^{\top}\tilde{\Gamma}^{\top}$, $A^{\top} = \mathbf{1}^{\top}$, $\lambda = \lambda_1$ y $f = X_0$. Y para obtener $\boldsymbol{\eta}^{*}$, tomando a $y = \boldsymbol{\eta}$, $M^{-1} = \Gamma_{\theta}$, $b^{\top} = -\boldsymbol{\xi}^{\top}\tilde{\Gamma}^{\top}$, $A^{\top} = \mathbf{1}^{\top}$, $\lambda = \lambda_2$ y $f = Y_0$.

Así, la primer ecuación del sistema a resolver nos dice que una condición necesaria para que $\boldsymbol{\xi}^{*}$y $\boldsymbol{\eta}^{*}$definan un equilibrio de Nash en $\mathcal{H}\left(X_0,\ \mathbb{T}\right) \times \mathcal{H}\left(Y_0,\ \mathbb{T}\right)$ es,

$$\begin{cases} \Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{1}\lambda_1 & = -\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta} \\ \Gamma_{\theta}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{1}\lambda_2 & = -\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\xi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi} + \tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta} = \lambda_1\mathbf{1} \\ \Gamma_{\theta}\boldsymbol{\eta} + \tilde{\Gamma}\boldsymbol{\xi} = \lambda_2\mathbf{1} \end{cases} \tag{7.1.4}$$

Sumando las dos ecuaciones en (7.1.4), obtenemos,

$$\left(\Gamma_{\theta} + \tilde{\Gamma}\right)\left(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}\right) = \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\mathbf{1}. \tag{7.1.5}$$

Por el **Lema** 4.1, la matriz $\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}$ es positiva definida y por lo tanto invertible, por otro lado, de la segunda ecuación a resolver provista en la **Proposición** 7.1 referente a los multiplicadores de Lagrange, tenemos también que

$$\mathbf{1}^\top (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) = X_0 + Y_0. \tag{7.1.6}$$

Entonces, de (7.1.5) y (7.1.6) obtenemos que,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{X_0 + Y_0}{\mathbf{1}^\top \left(\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}}.$$

Por lo que,

$$\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} = \frac{X_0 + Y_0}{\mathbf{1}^\top \left(\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}} \left(\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1} = (X_0 + Y_0)\, \boldsymbol{v}. \tag{7.1.7}$$

De manera similar, pero restando las ecuaciones en (7.1.4) tenemos,

$$\left(\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}\right) (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) = (\lambda_1 - \lambda_2)\, \mathbf{1}. \tag{7.1.8}$$

Como también por el **Lema** 4.1, $\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}$ es una matriz positiva definida, se puede encontrar que,

$$\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta} = \frac{X_0 - Y_0}{\mathbf{1}^\top \left(\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}} \left(\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1} = (X_0 - Y_0)\, \boldsymbol{w}. \tag{7.1.9}$$

Entonces, $\boldsymbol{\xi}^*$y $\boldsymbol{\eta}^*$deberían estar dadas por (4.3.6) y (4.3.7).

Teorema 4.1 *Para un conjunto $\mathbb{T}$ de tiempos y valores iniciales X_0 y $Y_0 \in \mathbb{R}$, existe un único equilibrio de Nash $(\xi^*, \eta^*) \in \mathcal{H}(X_0, \mathbb{T}) \times \mathcal{H}(Y_0, \mathbb{T})$. Las estrategias óptimas $\boldsymbol{\xi}^*$ y $\boldsymbol{\eta}^*$son deterministas y están dadas por las siguientes expresiones,*

$$\boldsymbol{\xi}^* = \frac{1}{2}(X_0 + Y_0)\, \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}(X_0 - Y_0)\, \boldsymbol{w}$$
$$\boldsymbol{\eta}^* = \frac{1}{2}(X_0 + Y_0)\, \boldsymbol{v} - \frac{1}{2}(X_0 - Y_0)\, \boldsymbol{w}.$$

Demostración.

Como ya tenemos los **Lemas** 7.2 y 7.3 sólo basta demostrar que las ecuaciones (4.3.6) y (4.3.7) definen un equilibrio de Nash en la clase $\mathcal{H}_{det}(X_0,\ \mathbb{T}) \times \mathcal{H}_{det}(Y_0,\ \mathbb{T})$.

Para $(\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta}) \in \mathcal{H}_{det}(X_0,\ \mathbb{T}) \times \mathcal{H}_{det}(Y_0,\ \mathbb{T})$ tenemos por el **Lema** 7.1,

$$E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\eta}\right)\right] = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}. \tag{7.1.10}$$

Como ya había sido comentado en la 7.2, minimizar $E\left[C_{\mathbb{T}}\left(\boldsymbol{\xi}|\boldsymbol{\eta}\right)\right]$ sobre $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}_{det}(X_0,\ \mathbb{T})$ es equivalente a la minimización de la forma cuadrática del lado derecho de (7.1.10) con $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{N+1}$ sujeto a la restricción $\mathbf{1}^{\top}\boldsymbol{\xi} = X_0$; y de manera análoga sobre $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{H}_{det}(Y_0,\ \mathbb{T})$. Así, probemos que las estrategias $\boldsymbol{\xi}^*$ y $\boldsymbol{\eta}^*$son de hecho óptimas.

Primero notemos que,

$$\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^* + \tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}^* = \frac{1}{2}\left(X_0 + Y_0\right)\left(\Gamma_{\theta} + \tilde{\Gamma}\right)v + \frac{1}{2}\left(X_0 - Y_0\right)\left(\Gamma_{\theta} - \tilde{\Gamma}\right)w = \mu\mathbf{1}, \tag{7.1.11}$$

donde

$$\mu = \frac{\left(X_0 + Y_0\right)}{2\,\mathbf{1}^{\top}\left(\Gamma_{\theta} + \tilde{\Gamma}\right)\mathbf{1}} + \frac{\left(X_0 - Y_0\right)}{2\,\mathbf{1}^{\top}\left(\Gamma_{\theta} - \tilde{\Gamma}\right)\mathbf{1}}.$$

Ahora, sea $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{H}_{det}(X_0,\ \mathbb{T})$ arbitraria, y definamos a $\boldsymbol{\zeta} \coloneqq \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^*$que, por la condición 4.1, $\boldsymbol{\zeta}^{\top}\mathbf{1} = 0$.

Por otro lado de (7.1.11) obtenemos $\boldsymbol{\zeta}^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^* + \boldsymbol{\zeta}^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}^* = \mu\boldsymbol{\zeta}^{\top}\mathbf{1}$.

Entonces, por ser Γ_{θ} simétrica y positiva definida,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}^* &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\xi}^*\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^* + \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\zeta} + \left(\boldsymbol{\xi}^*\right)^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\zeta}^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^* + \boldsymbol{\zeta}^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}^* \\
&= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\xi}^*\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^* + \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\zeta} + \left(\boldsymbol{\xi}^*\right)^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}^* + \mu\boldsymbol{\zeta}^{\top}\mathbf{1} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\xi}^*\right)^{\top}\Gamma_{\theta}\boldsymbol{\xi}^* + \left(\boldsymbol{\xi}^*\right)^{\top}\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\eta}^*.
\end{aligned}$$

De la desigualdad anterior se sigue que $\boldsymbol{\xi}^*$ minimiza (7.1.10) en la clase $\mathcal{H}_{det}(X_0,\ \mathbb{T})$ para $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$. De manera análoga podemos obtener este resultado para $\boldsymbol{\eta}^*$.

■

7.2. Proposiciones referentes a oscilaciones en las estrategias

Observación 7.3. De aquí en adelante supondremos que nuestro kérnel es $G(t) = \lambda e^{-\rho t} + \gamma$, λ, $\rho > 0$ $\gamma \geq 0$ y constantes.

Proposición 4.1 *Suponiendo que la función G es de la forma (4.3.8) con $\gamma = 0$ y $T > 0$ fija, entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $N \geq N_0$ existe una $\delta > 0$ de tal forma que para $0 \leq \theta < \delta$ las entradas del vector $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_{N+1})$ son distintas de cero y tienen signos alternantes.*

Demostración.

Recordemos que,

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \left(\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}} \left(\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1},$$

por lo que debemos calcular la inversa de la matriz $\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}$, para este fin, definamos a las siguientes constantes $a := e^{-\rho T}$ y $b := \frac{2\theta}{\lambda} + \frac{1}{2}$, así tenemos

$$\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma} = \lambda \begin{bmatrix} b & a^{1/N} & a^{2/N} & \cdots & a^{N-1/N} & a \\ 0 & b & a^{1/N} & a^{2/N} & \cdots & a^{N-1/N} \\ 0 & 0 & b & a^{1/N} & \cdots & a^{N-2/N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b & a^{1/N} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Haciéndo los cálculos correspondientes podemos probar que la inversa de esta matriz corresponde a

$$\left(\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}\right)^{-1} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & -\frac{a^{1/N}}{b^2} & -\frac{a^{2/N}(b-1)}{b^3} & \cdots & -\frac{a^{(N-1)/N}(b-1)^{N-2}}{b^N} & -\frac{a(b-1)^{N-1}}{b^{N+1}} \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{a^{1/N}}{b^2} & -\frac{a^{2/N}(b-1)}{b^3} & \cdots & -\frac{a^{(N-1)/N}(b-1)^{N-2}}{b^N} \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & -\frac{a^{1/N}}{b^2} & \cdots & -\frac{a^{(N-2)/N}(b-1)^{N-3}}{b^{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{b} & -\frac{a^{1/N}}{b^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}.$$

Denotemos a la matriz inversa $\left(\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}\right)^{-1}$ por Π_N, definamos al vector $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ como $\boldsymbol{u} = \lambda \Pi_N \mathbf{1}$. Entonces, $u_{N+1} = \frac{1}{b}$ y para $n = 1, \ldots, N$

$$u_n = u_{n+1} - \frac{a^{(N+1-n)/N}\,(b-1)^{N-n}}{b^{N+2-n}}.$$

Desarrollando la expresión, cambiando los índices de la suma, usando la fórmula para progresiones geométricas obtenemos,

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{b} - \frac{a^{1/N}}{b^2} \sum_{M=n}^{N} \left(\frac{a^{1/N}\,(b-1)}{b} \right)^{N-m} \\
&= \frac{1}{b} - \frac{a^{1/N}}{b^2} \sum_{m=0}^{N-n} \left(\frac{a^{1/N}\,(b-1)}{b} \right)^{m} \\
&= \frac{1}{b} - \frac{a^{1/N}}{b^2} \left[\frac{\left[b - a^{\frac{1}{N}}\,(b-1)\right]^{N-n+1}}{b^{N-n}\left[b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right) + a^{\frac{1}{N}}\right]} \right] \\
&= \frac{1}{b} \left[1 - \frac{a^{1/N} b^{N-n+1}}{b^{N-n+1}\left(b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right) + a^{\frac{1}{N}}\right)} + \frac{a^{\frac{1}{N}}\left[a^{\frac{1}{N}}\,(b-1)\right]^{N-n+1}}{b^{N-n+1}\left(b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right) + a^{\frac{1}{N}}\right)} \right] \\
&= \frac{1}{b} \left[1 - \frac{a^{1/N}}{\left(b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right) + a^{\frac{1}{N}}\right)} + (-1)^{N-n+1} \frac{a^{\frac{1}{N}}}{b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right) + a^{\frac{1}{N}}} \left[\frac{a^{\frac{1}{N}}\,(1-b)}{b} \right]^{N-n+1} \right].
\end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Si $\theta = 0$, entonces $b = \frac{1}{2}$ y sustituyendo este valor en (7.2.1),

$$u_n = 2 \left[1 - \frac{2a^{\frac{1}{N}}}{1 + a^{\frac{1}{N}}} + (-1)^{N+1-n} \frac{2a^{\frac{N+2-n}{N}}}{1 + a^{\frac{1}{N}}} \right]. \tag{7.2.2}$$

Trabajando por separado dos de los términos en (7.2.2), debido a que $a < 1 \Rightarrow \frac{2a^{\frac{1}{N}}}{1+a^{\frac{1}{N}}} > a^{\frac{1}{N}}$,

$$0 \leq 1 - \frac{2a^{\frac{1}{N}}}{1 + a^{\frac{1}{N}}} < 1 - a^{\frac{1}{N}} \to 0 \qquad N \to \infty.$$

De manera similar,

$$\frac{2a^{\frac{N+2-n}{N}}}{1+a^{\frac{1}{N}}} = \frac{2a^{\frac{1}{N}}}{1+a^{\frac{1}{N}}} a^{\frac{N+1-n}{N}} \geq a^{\frac{N+2-n}{N}} \geq a^{\frac{N+1}{N}} \to a \qquad N \to \infty.$$

De las dos desigualdades anteriores, se sigue que los signos correspondientes a las entradas del vector $\boldsymbol{u}$ alternarán de signo siempre y cuando el valor de N sea lo suficientemente grande para que $1 - a^{\frac{1}{N}} < a^{\frac{N+1}{N}}$.

Además, como la ecuación (7.2.2) es continua en b los signos de las entradas del vector $\boldsymbol{u}$ seguirán alternando si tomamos una b ligeramente mayor a $\frac{1}{2}$.

■

Lema 7.4. *Sea Π_N definido como en la proposición anterior, y denotemos como $\boldsymbol{u}^{(N)} = \left(u_1^{(N)}, \ldots, u_{N+1}^{(N)}\right) \in \mathbb{R}^{N+1}$ al vector $\lambda\Pi_N\mathbf{1}$. Cuando $n \in \{1, \ldots, N+1\}$ se sigue que,*

$$\sum_{m=1}^{n} u_m^{(N)} = \frac{1}{b}\left[n\left(1 - \frac{a^{1/N}}{\left(b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)+a^{\frac{1}{N}}\right)}\right) + \frac{a^{\frac{1}{N}}}{b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)+a^{\frac{1}{N}}}\left[\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right]^{N+1-n} \frac{\left(\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right)^{n}-1}{\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}-1}\right].$$

Demostración.

De la ecuación (7.2.1) en la **Proposición** 4.1 sabemos que,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n} u_m^{(N)} &= \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{b}\left[1 - \frac{a^{1/N}}{\left(b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)+a^{\frac{1}{N}}\right)} + (-1)^{N-n+1}\frac{a^{\frac{1}{N}}}{b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)+a^{\frac{1}{N}}}\left[\frac{a^{\frac{1}{N}}(1-b)}{b}\right]^{N-n+1}\right] \\ &= \frac{1}{b}\left[n\left(1 - \frac{a^{1/N}}{\left(b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)+a^{\frac{1}{N}}\right)}\right) + \frac{a^{\frac{1}{N}}}{b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)+a^{\frac{1}{N}}}\sum_{m=1}^{n}\left[\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right]^{N-n+1}\right].\end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Además,

$$\sum_{m=1}^{n}\left[\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right]^{N-n+1} = \left[\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right]^{N+1-n}\frac{\left(\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right)^{n}-1}{\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}-1}.$$

Que sustituido en (7.2.3) completa la demostración.

■

Proposición. 4.2 *Supongamos que n es fija.*

1. *Cuando $\theta = 0$, tenemos que*

$$\lim_{N\to\infty} w_n^{(2N)} = (-1)^{n+1}\frac{2a}{\rho T + a + 1} \quad y \quad \lim_{N\to\infty} w_n^{(2N+1)} = (-1)^{n+1}\frac{2a}{\rho T - a + 1},$$

así como

$$\lim_{N\to\infty} w_{2N+1-n}^{(2N)} = (-1)^{n}\frac{2}{\rho T + a + 1} \quad y \quad \lim_{N\to\infty} w_{2N+2-n}^{(2N+1)} = (-1)^{n}\frac{2}{\rho T - a + 1}.$$

2. *Cuando $\theta > 0$, tenemos que*

$$\lim_{N\to\infty} w_n^{(N)} = 0,$$

y

$$\lim_{N\to\infty} w_{N+1-n}^{(N)} = \left(\frac{4\theta - \lambda}{4\theta + \lambda}\right)^n \frac{2\lambda}{(\rho T + 1)(4\theta + \lambda)}.$$

Demostración.

Sean Π_N y $\boldsymbol{u}^{(N)}$ como en el **Lema** 7.4. Necesitamos normalizar el vector $\boldsymbol{u}^{(N)}$ esto es, calcular $\mathbf{1}^\top \lambda \Pi_N \mathbf{1} = \mathbf{1}^\top \boldsymbol{u}^{(N)}$ para poder obtener a $\boldsymbol{w}^{(N)} = \frac{1}{\mathbf{1}^\top \Pi_N \mathbf{1}} \Pi_N \mathbf{1}$.

Entonces, haciendo uso del **Lema** 7.4 tomando a $n = N + 1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{1}^\top \lambda \Pi_N \mathbf{1} &= \sum_{n=1}^{N+1} u_n^{(N)} \\ &= \frac{1}{b}\left[(N+1)\left(1 - \frac{a^{1/N}}{\left(b\left(1 - a^{\frac{1}{N}}\right) + a^{\frac{1}{N}}\right)}\right) + \frac{a^{\frac{1}{N}}}{b\left(1 - a^{\frac{1}{N}}\right) + a^{\frac{1}{N}}}\left(\frac{\left(\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right)^{N+1} - 1}{\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b} - 1}\right)\right].\end{aligned}$$

Con ayuda de la igualdad $\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = log\,(a)$, se puede demostrar que,

$$\lim_{N\to\infty} (N+1)\left(1 - \frac{a^{1/N}}{\left(b\left(1 - a^{\frac{1}{N}}\right) + a^{\frac{1}{N}}\right)}\right) = -b\,log\,(a) = b\rho T. \tag{7.2.4}$$

Además,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{N}}}{b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)+a^{\frac{1}{N}}} \left(\frac{\left(\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right)^{N+1}-1}{\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}-1} \right)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\left(\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right)^{N+1}-1}{\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}-1}. \tag{7.2.5}$$

Para probar los primeros límites tenemos como hipótesis que $\theta = 0$, por lo que $b = \frac{1}{2}$, sustituyendo este valor en (7.2.4) y (7.2.5) para el caso de índice par e impar de los siguientes límites obtenemos,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{1}^\top \lambda \Pi_{2N} \mathbf{1} = \frac{1}{b}\left[b\rho T + \lim_{N\to\infty} \frac{\left(\frac{a^{\frac{1}{2N}}(b-1)}{b}\right)^{2N+1}-1}{\frac{a^{\frac{1}{2N}}(b-1)}{b}-1} \right] \tag{7.2.6}$$
$$= \rho T + 2\left(\frac{-a-1}{-2}\right)$$
$$= \rho T + a + 1.$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{1}^\top \lambda \Pi_{2N+1} \mathbf{1} = \frac{1}{b}\left[b\rho T + \lim_{N\to\infty} \frac{\left(\frac{a^{\frac{1}{2N+1}}(b-1)}{b}\right)^{2N+2}-1}{\frac{a^{\frac{1}{2N+1}}(b-1)}{b}-1} \right] \tag{7.2.7}$$
$$= \rho T + 2\left(\frac{a-1}{-2}\right)$$
$$= \rho T - a + 1.$$

En el caso de los últimos dos límites a probar, tenemos por hipótesis que $\theta > 0$, así, $b > \frac{1}{2}$, y $\frac{|b-1|}{b} < 1$, por lo que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{1}^\top \lambda \Pi_{N} \mathbf{1} = \frac{1}{b}\left[b\rho T + \lim_{N\to\infty} \frac{\left(\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right)^{N+1}-1}{\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}-1} \right] \tag{7.2.8}$$
$$= \rho T + 1.$$

Finalmente, encontramos los límites solicitados.

1. Para $\theta = 0$, con ayuda de (7.2.6) y (7.2.2),

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} w_n^{(2N)} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\mathbf{1}^\top \lambda \Pi_{2N} \mathbf{1}} \left(\lambda \Pi_{2N} \mathbf{1}\right) \\ &= \frac{1}{\rho T + a + 1} \left(\lim_{N\to\infty} 2 \left[1 - \frac{2a^{\frac{1}{2N}}}{1 + a^{\frac{1}{2N}}} + (-1)^{2N+1-n} \frac{2a^{\frac{2N+2-n}{2N}}}{1 + a^{\frac{1}{2N}}} \right] \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\rho T + a + 1} \left(2a\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} w_{2N+1-n}^{(2N)} &= \frac{1}{\rho T + a + 1} \left(\lim_{N\to\infty} 2 \left[1 - \frac{2a^{\frac{1}{2N}}}{1 + a^{\frac{1}{2N}}} + (-1)^{n} \frac{2a^{\frac{1+n}{2N}}}{1 + a^{\frac{1}{2N}}} \right] \right) \\ &= 2\frac{(-1)^{n}}{\rho T + a + 1}.\end{aligned}$$

En los siguientes casos utilizando (7.2.7) y (7.2.2)

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} w_n^{(2N+1)} &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\mathbf{1}^\top \lambda \Pi_{2N+1} \mathbf{1}} \left(\lambda \Pi_{2N+1} \mathbf{1}\right) \\ &= \frac{1}{\rho T - a + 1} \left(\lim_{N\to\infty} 2 \left[1 - \frac{2a^{\frac{1}{2N+1}}}{1 + a^{\frac{1}{2N+1}}} + (-1)^{2N+2-n} \frac{2a^{\frac{2N+3-n}{2N}}}{1 + a^{\frac{1}{2N+1}}} \right] \right) \\ &= \frac{(-1)^{n}}{\rho T - a + 1} \left(2a\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} w_{2N+2-n}^{(2N+1)} &= \frac{1}{\rho T - a + 1} \left(\lim_{N\to\infty} 2 \left[1 - \frac{2a^{\frac{1}{2N+1}}}{1 + a^{\frac{1}{2N+1}}} + (-1)^{n} \frac{2a^{\frac{1+n}{2N}}}{1 + a^{\frac{1}{2N+1}}} \right] \right) \\ &= 2\frac{(-1)^{n}}{\rho T - a + 1}.\end{aligned}$$

2. Para $\theta > 0$, utilizando (7.2.8) y (7.2.1), tomando en cuenta que $\frac{|b-1|}{b} < 1$ y que $b = \frac{4\theta+\lambda}{2\lambda}$,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} w_n^{(N)} &= \left(\frac{1}{\rho T+1}\right)\lim_{N\to\infty}\frac{1}{b}\left[1-\frac{a^{1/N}}{\left(b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)+a^{\frac{1}{N}}\right)}+(-1)^{N-n+1}\frac{a^{\frac{1}{N}}}{b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)+a^{\frac{1}{N}}}\left[\frac{a^{\frac{1}{N}}(1-b)}{b}\right]^{N-n+1}\right]\\ &= \left(\frac{1}{b(\rho T+1)}\right)\lim_{N\to\infty}\left[\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right]^{N-n+1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} w_{N+1-n}^{(N)} &= \frac{1}{b(\rho T+1)}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right]^{n}\\ &= \frac{1}{b(\rho T+1)}\left[\frac{(b-1)}{b}\right]^{n}\\ &= \left(\frac{2\lambda}{4\theta+\lambda}\right)\left(\frac{1}{\rho T+1}\right)\left(\frac{4\theta-\lambda}{4\theta+\lambda}\right)^{n}.\end{aligned}$$

■

Proposición 4.3. Cuando $\theta > 0$, para $t < T$

$$\lim_{N\to\infty} W_t^{(N)} = \frac{\rho(T-t)+1}{\rho T+1},$$

y $W_t = 0$ para $t > T$.

Demostración.

Sea $n_t := \left\lceil \frac{Nt}{T} \right\rceil$. Entonces, tomando como referencia la notación de la **Proposición** 4.2, así como el **Lema** 7.4 tenemos que,

$$\begin{aligned}W_t^{(N)} &= 1-\frac{1}{\mathbf{1}^\top\lambda\Pi_N\mathbf{1}}\sum_{k=1}^{n_t}u_k^{(N)}\\ &= 1-\left[\frac{1}{\mathbf{1}^\top\lambda\Pi_N\mathbf{1}}\right]\left[\frac{1}{b}\left(n_t\left(1-\frac{a^{1/N}}{\left(b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)+a^{\frac{1}{N}}\right)}\right)\right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{a^{\frac{1}{N}}}{b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)+a^{\frac{1}{N}}}\left[\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right]^{N+1-n_t}\frac{\left(\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right)^{n_t}-1}{\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}-1}\right)\right].\end{aligned}$$

Por hipótesis, $\theta > 0$ y consideremos el caso donde $t < T$, notemos que,

$$\lim_{N\to\infty} \left[\frac{a^{\frac{1}{N}}(b-1)}{b}\right]^{N+1-n_t} = 0.$$

Mientras que,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{b}\left[n_t\left(1 - \frac{a^{1/N}}{\left(b\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)+a^{\frac{1}{N}}\right)}\right)\right] = log(a) = \rho t.$$

De esta forma,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{n_t} u_k^{(N)} = \rho t.$$

Y ,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} W_t^{(N)} &= \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{\mathbf{1}^\top \lambda \Pi_N \mathbf{1}} \sum_{k=1}^{n_t} u_k^{(N)} \\ &= 1 - \frac{1}{\rho T + 1}(\rho t) \\ &= \frac{\rho(T-t)+1}{\rho T + 1}.\end{aligned}$$

■

Observación 7.4. En las demostraciones que siguen tomaremos como válido el siguiente teorema, el cual puede ser consultado en [6].

Teorema 7.1. *Para una matriz-Z, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. A es una matriz-M no singular .
2. Todos los menores principales de A son positivos[a].
3. A es inversa-positiva, esto es, A^{-1} existe y $A^{-1} \geq 0$.
4. $A + \alpha Id$ es no singular $\forall\, \alpha \geq 0$.

[a] Un menor principal será positivo si su determinante lo es.

Lema 7.5. *Una matriz-Z triangular con diagonal positiva es una matriz-M.*

Demostración.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

una matriz-Z triangular superior con diagonal positiva. Observe que todos sus menores principales son positivos al ser simplemente el producto de su diagonal, siendo $A_{[k]}$ el $k-ésimo$ determinante del $k-ésimo$ menor principal,

$$A_{[k]} = \prod_{i=1}^{k} a_{ii} > 0, \ \forall\, k \in 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Entonces, por el **Teorema** 7.1 punto 2., A es una matriz-M.

■

Observación 7.5. A partir de aquí será conveniente definir a las siguientes matrices,

$$\Phi_{ij} \coloneqq e^{-\rho|t_{i-1}-t_{j-1}|} \qquad y \qquad \Psi_{ij} \coloneqq 1 \ i,\ j \in 1,\ \ldots,\ N+1. \tag{7.2.9}$$

Recordando que $G(t) = \lambda e^{-\rho t} + \gamma$, tenemos que

$$\Gamma = \lambda\Phi + \gamma\Psi,$$

así como,

$$\Gamma_\theta = \lambda\Phi + \gamma\Psi + 2\theta Id.$$

Más aún, para cualquier matriz A, definamos a la matriz $\tilde{A}$ de la siguiente manera,

$$\tilde{A} \coloneqq \begin{cases} A_{ij} & si\ i\ >\ j \\ \frac{1}{2}A_{ij} & si\ i = j \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Esta notación nos permite ver que,

$$\tilde{\Gamma} = \lambda\tilde{\Phi} + \gamma\tilde{\Psi}.$$

Y que,

$$\Psi = \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}^{\top}.$$

Finalmente diremos que,

$$\begin{aligned}\hat{\Phi} &:= \tilde{\Phi} + \frac{1}{2}Id \\ \hat{\Psi} &:= \tilde{\Psi}^{\top} - \frac{1}{2}Id.\end{aligned} \tag{7.2.10}$$

Lema 7.6. *Para $\alpha \geq 0$, la inversa de la matriz $\hat{\Phi} + \alpha\Phi$ está dada por la siguiente matriz.*

$$\begin{pmatrix}
\beta & -a^{\frac{1}{N}}\mu\beta^2 & -a^{\frac{2}{N}}\mu\beta^3 & \cdots & -a^{\frac{N-1}{N}}\mu\beta^N & -\frac{a\alpha}{1+\alpha}\beta^N \\
-a^{\frac{1}{N}}\beta & \left(1+\left(1-a^{\frac{4}{N}}\right)\alpha\right)\beta^2 & -a^{\frac{1}{N}}\mu\nu\beta^3 & \cdots & -a^{\frac{N-2}{N}}\mu\nu\beta^N & -a^{\frac{N-1}{N}}\mu\beta^N \\
0 & -a^{\frac{1}{N}}\beta & \left(1+\left(1-a^{\frac{4}{N}}\right)\alpha\right)\beta^2 & \cdots & -a^{\frac{N-3}{N}}\mu\nu\beta^{N-1} & -a^{\frac{N-2}{N}}\mu\beta^{N-1} \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & -a^{\frac{1}{N}}\beta & \left(1+\left(1-a^{\frac{4}{N}}\right)\alpha\right)\beta^2 & -a^{\frac{1}{N}}\mu\beta^2 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -a^{\frac{1}{N}}\beta & \beta
\end{pmatrix},$$

donde
$\beta = \left(1+\left(1-a^{\frac{2}{N}}\right)\alpha\right)^{-1}$, $\mu = \left(1-a^{\frac{2}{N}}\right)\alpha$, $\nu = \left(1-a^{\frac{2}{N}}\right)(1+\alpha)$.
Que es además una matriz-Z.

La demostración al **Lema** 7.6 se encuentra en [21] denotado como **Lema** 3.10.

Lema 7.7. *La matriz $\Phi^{-1}\left(\hat{\Phi} - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi}\right)$ es una matriz -Z y una matriz-M no singular.*

Demostración.

Podemos encontrar en [2] la demostración al siguiente hecho:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{1-a^{\frac{2}{N}}} \begin{pmatrix} 1 & -a^{\frac{1}{N}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a^{\frac{1}{N}} & 1+a^{\frac{2}{N}} & -a^{\frac{1}{N}} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -a^{\frac{1}{N}} & 1+a^{\frac{2}{N}} & -a^{\frac{1}{N}} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a^{\frac{1}{N}} & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.2.11}$$

Además, la matriz $\left(\hat{\Phi} - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi}\right)$ es igual a,

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\gamma}{\lambda} & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{\gamma}{\lambda} \\ a^{\frac{1}{N}} & 1 & -\frac{\gamma}{\lambda} & \ddots & \ddots & \vdots \\ a^{\frac{2}{N}} & a^{\frac{1}{N}} & 1 & -\frac{\gamma}{\lambda} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a^{\frac{1}{N}} & 1 & -\frac{\gamma}{\lambda} \\ a & \cdots & \cdots & a^{\frac{2}{N}} & a^{\frac{1}{N}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Haciéndo los cálculos correspondientes, obtenemos a la matriz $\left(1-a^{\frac{2}{N}}\right)\Phi^{-1}\left(\hat{\Phi} - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi}\right)$;

$$\begin{pmatrix} 1-a^{\frac{2}{N}} & -a^{\frac{1}{N}} - \frac{\gamma}{\lambda} & -\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)\frac{\gamma}{\lambda} & -\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)\frac{\gamma}{\lambda} & \cdots & -\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)\frac{\gamma}{\lambda} \\ 0 & 1+\frac{\gamma}{\lambda}a^{\frac{1}{N}} & -a^{\frac{1}{N}} - \left(1-a^{\frac{1}{N}}+a^{\frac{2}{N}}\right)\frac{\gamma}{\lambda} & -\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)^2\frac{\gamma}{\lambda} & \cdots & -\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)^2\frac{\gamma}{\lambda} \\ 0 & 0 & 1+\frac{\gamma}{\lambda}a^{\frac{1}{N}} & -a^{\frac{1}{N}} - \left(1-a^{\frac{1}{N}}+a^{\frac{2}{N}}\right)\frac{\gamma}{\lambda} & \ddots & -\left(1-a^{\frac{1}{N}}\right)^2\frac{\gamma}{\lambda} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1+\frac{\gamma}{\lambda}a^{\frac{1}{N}} & -a^{\frac{1}{N}} - \left(1-a^{\frac{1}{N}}+a^{\frac{2}{N}}\right)\frac{\gamma}{\lambda} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1+\frac{\gamma}{\lambda}a^{\frac{1}{N}} \end{pmatrix}.$$

La cual es una matriz-Z por tener elementos positivos en su diagonal y no positivos fuera de ella, además por el **Lema** 7.5, es también una matriz-M.

■

Lema 7.8. *Para $\delta \geq 0$ la matriz $\Lambda_\delta := \Phi^{-1}\left(\hat{\Phi} - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi}\right) + \delta\Phi^{-1}$ es una matriz-M no singular.*

Demostración.

Primero observemos que en el caso que $\delta = 0$, el resultado se sigue del **Lema** 7.7 por lo que basta probarlo para el caso donde $\delta > 0$.

Ahora, Λ_δ es una matriz-Z pues tanto $\Phi^{-1}\left(\hat{\Phi} - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi}\right)$ por 7.7 y Φ^{-1} por (7.2.11) lo son. Así, sólo falta demostrar que Λ_δ es también una matriz-M no singular y lo lograremos a través de la equivalencia 4. del **Teorema** 7.1 probando que $\Lambda_\delta + \alpha Id$ es invertible para toda $\alpha \geq 0$.

Dividiremos la demostración en algunos incisos.

(a) Tomando a $\gamma = 0$ en el **Lema** 7.7 obtenemos que $\Phi^{-1}\hat{\Phi}$ es una matriz-M no singular y de igual manera la matriz $\left(\Phi^{-1}\hat{\Phi} + \alpha Id\right)$. Así, por el punto 3. del **Teorema** 7.1 $\left(\Phi^{-1}\hat{\Phi} + \alpha Id\right)^{-1} \geq 0 \; \forall \, \alpha \geq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}\left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)^{-1}\mathbf{1} &= \left\{(\alpha\Phi)\left[(\alpha\Phi)^{-1}\hat{\Phi} + (\alpha\Phi)^{-1}\alpha\Phi\right]\right\}^{-1}\mathbf{1} \\ &= \left[(\alpha\Phi)^{-1}\hat{\Phi} + Id\right]^{-1}(\alpha\Phi)^{-1}\mathbf{1} \\ &= \left[\Phi^{-1}\hat{\Phi} + \alpha Id\right]^{-1}\Phi^{-1}\mathbf{1} > 0.\end{aligned}$$

Pues, en [2] queda demostrado que,

$$\Phi^{-1}\mathbf{1} = \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{N}}}\left(1,\, 1 - a^{\frac{1}{N}},\, \ldots,\, 1 - a^{\frac{1}{N}}, 1\right)^{\top} \gg 0.$$

Más aún, al ser $\left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)^{-1}\mathbf{1} > 0$, lo es $\sum_{j=1}^{N+1}\left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)^{-1}_{ij} > 0 \; \forall \, i \in 1, \ldots, N+1$ y como también $\left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)^{-1}$ es una matriz-Z por el **Lema** 7.6 sabemos que el único elemento que positivo en esta suma es $\left(\left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)^{-1}_{ii}\right)$ lo cual implica que los elementos de la diagonal mayoran o igualan a la suma de todos los demás elementos de el renglón i-ésimo correspondiente, esto es

$$\left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)^{-1}_{ii} \geq \sum_{j=1}^{N+1}\left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)^{-1}_{ij} \qquad \forall i \in 1, \ldots, N+1.$$

Se sigue que $\left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)^{-1}$ es una matriz diagonalmente dominate $\forall \alpha \geq 0$.

(b) Demostraremos que la matriz Q es una matriz-Z, siendo

$$Q \coloneqq \left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)^{-1}\left(\delta Id - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi}\right).$$

Sea $P \coloneqq \left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)^{-1}$, entonces $Q = \delta P - \frac{\gamma}{\lambda} P\hat{\Psi}$ y,

$$Q_{ij} = \delta P_{ij} - \frac{\gamma}{\lambda} \sum_{k=1}^{j-1} P_{ik}.$$

Usando la convención de que $\sum_{k=1}^{0} a_k = 0$, se sigue que

$Q_{ii} > 0$, $\forall i \in 1, \ldots, N+1$ pues $P_{ii} \geq 0$ y $\frac{\gamma}{\lambda} \sum_{k=1}^{i-1} P_{ik} \leq 0$ por ser P una matriz-Z.

$Q_{ij} \leq 0$, $\forall j > i$, pues al ser P diagonalmente dominante tenemos que $\sum_{k=1}^{j-1} P_{ik} \geq 0$, $\forall j > i$.

$Q_{ij} \leq 0$, $\forall i > j$, Usando el hecho de que $P_{ik} = 0$ para $k \leq i-2$ y de que P es una matriz-Z, $Q_{ij} = \delta P_{ij} < 0$.

De estas tres desigualdades concluimos que Q es una matriz-Z.

(c) Ahora probaremos que Q es una matriz-M no singular.

Observemos primero que la matriz triangular $\left(\delta Id - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi}\right)$ es invertible bajo nuestro supuesto $\delta > 0$. De hecho, podemos calcularla de manera sencilla, obteniendo a la matriz no negativa siguiente.

$$\left(\delta Id - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi}\right)^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} 1 & \sigma & (1+\sigma) & \cdots & (1+\sigma)^{N-2} & (1+\sigma)^{N-1} \\ 0 & 1 & \sigma & (1+\sigma) & \cdots & (1+\sigma)^{N-2} \\ 0 & 0 & 1 & \sigma & \ddots & (1+\sigma)^{N-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 & \sigma \\ 0 & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Donde $\sigma \coloneqq \frac{\gamma}{\lambda\delta} > 0$.

Así,

$$Q^{-1} = \left(\delta Id - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi}\right)^{-1} \left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right) \geq 0.$$

Entonces la inversa de la matriz Q existe y es no negativa, i.e $Q^{-1} \geq 0$, y por el **Teorema** 7.1 punto 3. es una matriz-M no singular.

(d) Para el inciso final, utilizaremos que Q es una matriz-M no singular, pues esto implica que la matriz $Q + Id$ también lo es por el **Teorema** 7.1 punto 4. gracias a este hecho, la inversa $(Q + Id)^{-1}$ existe.

De este modo, podemos calcular el producto,

$$\begin{aligned}(Q + Id)^{-1}\left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)^{-1}\Phi &= \left[\left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)\left(\left(\hat{\Phi} + \alpha\Phi\right)^{-1}\left(\delta Id - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi}\right) + Id\right)\right]^{-1}\Phi \\ &= \left[\delta Id - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi} + \hat{\Phi} + \alpha\Phi\right]^{-1}\Phi \\ &= \left[\delta\Phi^{-1} + \Phi^{-1}\left(\hat{\Phi} - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi}\right) + \alpha Id\right]^{-1} \\ &= \left[\Lambda_\delta + \alpha Id\right]^{-1}.\end{aligned}$$

Esto prueba que $\Lambda_\delta + \alpha Id$ es invertible para toda $\alpha \geq 0$ y Λ_δ es una matriz-M no singular.

■

Lema 7.9. *Sea A una matriz invertible y supongamos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es tal que $A + \alpha\Psi$ es invertible. Entonces el vector $A^{-1}\mathbf{1}$ es proporcional al vector $(A + \alpha\Psi)^{-1}\mathbf{1}$.*

Demostración.

Es fácil ver que $\Psi\boldsymbol{x}$ es proporcional al vector $\mathbf{1}$ para cualquier vector $\boldsymbol{x}$. Así,

$$(A + \alpha\Psi)A^{-1}\mathbf{1} = \left(Id + \alpha\Psi A^{-1}\right)\mathbf{1} = \mathbf{1} + \Psi\boldsymbol{x} = (1 + \beta)\mathbf{1}.$$

Donde $\boldsymbol{x} = \alpha A^{-1}\mathbf{1}$.

Para alguna constante β. Multiplicando en ambos extremos por $(A + \alpha\Psi)^{-1}$,

$$A^{-1}\mathbf{1} = (1 + \beta)(A + \alpha\Psi)^{-1}\mathbf{1}.$$

Y se obtiene el resultado.

■

Teorema 4.2 *Suponiendo que la función G es de la forma (4.3.8) y $\mathbb{T}_N$ denota una malla de tiempo equidistante, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *Para toda $N \in \mathbb{N}$ y $\rho > 0$, todos los componentes de $\boldsymbol{v}$ son no negativos.*
2. *Para toda $N \in \mathbb{N}$ y $\rho > 0$, todos los componentes de $\boldsymbol{w}$ son no negativos.*
3. $\theta \geq \theta^* = (\lambda + \gamma)/4$.

Demostración.

Procederemos a demostrar las implicaciones de la forma: (3) $\Leftrightarrow$ (1) y (3) $\Leftrightarrow$ (2).

(3) $\Rightarrow$ (1) Debemos demostrar que el vector $\boldsymbol{v}$ tiene componentes no negativos cuando $\theta \geq \frac{\lambda+\gamma}{4}$.

Recordemos que el vector $\boldsymbol{v}$ está definido como $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\mathbf{1}^\top \left(\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}} \left(\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}$, por lo que es proporcional al vector $\left(\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}$.

Sea

$$\delta := \frac{4\theta - (\lambda + \gamma)}{2\lambda} \geq 0,$$

Usando las equivalencias definidas en la *Observación* 7.5, podemos calcular,

$$\begin{aligned}
\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma} - 2\gamma\Psi &= \lambda\Phi + \gamma\Psi + 2\theta Id + \lambda\tilde{\Phi} + \gamma\tilde{\Psi} - 2\gamma\Psi \\
&= \lambda\Phi + 2\theta Id + \lambda\tilde{\Phi} - \gamma\tilde{\Psi}^\top \\
&= \lambda\Phi + \lambda\left(\hat{\Phi} - \frac{\gamma}{\lambda}\hat{\Psi} + \delta Id\right) \\
&= \lambda\Phi\left(Id + \Lambda_\delta\right).
\end{aligned}$$

Sabemos que tanto Φ como Λ_δ son invertibles por [2] y el **Lema** 7.8 respectivamente y gracias a que Λ_δ es una matriz-M no singular podemos probar fácilmente que $Id + \Lambda_\delta$ también lo es. Así, aplicando el **Lema** 7.9 con $A = \Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}$ y $\alpha = -2\gamma$ nos queda que el vector $\left(\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}$ es proporcional al $\left(\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma} - 2\gamma\Psi\right)^{-1} \mathbf{1}$, y por lo tanto el vector $\boldsymbol{v}$ es proporcional al vector:

$$\left(\Phi\left(Id + \Lambda_\delta\right)\right)^{-1} \mathbf{1} = \left(Id + \Lambda_\delta\right)^{-1} \Phi^{-1} \mathbf{1}.$$

Por [2], $\Phi^{-1} \gg 0$ y por ser una matriz-M no singular $\left(Id + \Lambda_\delta\right)^{-1} \geq 0$, entonces concluímos,

$$\boldsymbol{v} \approx \left(\Phi\left(Id + \Lambda_\delta\right)\right)^{-1} \mathbf{1} \geq 0.$$

(1) ⇒ (3) Consideremos el caso $N = 1$. Haciendo los cálculos correspondientes,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{1}{\mathbf{1}^\top \left(\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1}} \left(\Gamma_\theta + \tilde{\Gamma}\right)^{-1} \mathbf{1} \\ &= \frac{1}{4\theta + 3\lambda\left(1-a\right)} \begin{pmatrix} 2\theta + \frac{3}{2}\left(\lambda+\gamma\right) - \lambda a - \gamma \\ 2\theta + \frac{3}{2}\left(\lambda+\gamma\right) - 2\lambda a - 2\gamma \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $a < 1$, nos damos cuenta que $4\theta + 3\lambda\left(1-a\right)$ es siempre positivo. Además, $2\theta + \frac{1}{2}\left(\lambda+\gamma\right) > 0$. Sólo nos resta obtener aquellos valores de θ para los que la hipótesis de no negatividad se cumple,

$$\begin{aligned}2\theta + \frac{3}{2}\left(\lambda+\gamma\right) - 2\lambda a - 2\gamma \geq 0 \\ \Leftrightarrow \theta \geq \frac{\lambda+\gamma}{4}.\end{aligned}$$

(3) ⇒ (2)Por hipótesis, $\theta \geq \theta^*$. Primero notemos que,

$$\left(\tilde{\Psi}^\top + \frac{1}{2}Id\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.2.12}$$

Sea $\kappa := \frac{1}{2} + \frac{2\theta}{\lambda} - \frac{\gamma}{2\lambda}$, entonces,

$$\frac{\gamma}{\lambda}\left(\tilde{\Psi}^\top+\frac{1}{2}Id\right)^{-1}\left(\lambda\tilde{\Phi}^\top+\left(2\theta-\frac{\gamma}{2}\right)Id\right)=$$
$$\left(\tilde{\Psi}^\top+\frac{1}{2}Id\right)^{-1}\left(\tilde{\Phi}^\top+\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)Id\right)=$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \kappa & a^{\frac{1}{N}} & a^{\frac{2}{N}} & \cdots & a^{\frac{N-1}{N}} & a \\ 0 & \kappa & a^{\frac{1}{N}} & a^{\frac{2}{N}} & \cdots & a^{\frac{N-1}{N}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \kappa & a^{\frac{1}{N}} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \kappa \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} \kappa & a^{\frac{1}{N}}-\kappa & \left(a^{\frac{1}{N}}-1\right)a^{\frac{1}{N}} & \cdots & \left(a^{\frac{1}{N}}-1\right)a^{\frac{N-2}{N}} & \left(a^{\frac{1}{N}}-1\right)a^{\frac{N-1}{N}} \\ 0 & \kappa & a^{\frac{1}{N}}-\kappa & \left(a^{\frac{1}{N}}-1\right)a^{\frac{1}{N}} & \cdots & \left(a^{\frac{1}{N}}-1\right)a^{\frac{N-2}{N}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \kappa & a^{\frac{1}{N}}-\kappa \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \kappa \end{pmatrix}.$$

Dado que $\theta \geq \theta^*$, $\kappa \geq 1$, recordamos también que $a^{\frac{1}{N}} < 1$, $\forall N \in \mathbb{N}$ por lo tanto la matriz anterior es una matriz-Z y por el **Lema** 7.5 también es una matriz-M no singular.

Con ayuda del **Teorema** 7.1 podemos demostrar que la matriz A definida a continuación también es una matriz-M no singular.

$$A \coloneqq Id+\left(\gamma\tilde{\Psi}^\top+\frac{\gamma}{2}Id\right)^{-1}\left(\lambda\tilde{\Phi}^\top+\left(2\theta-\frac{\gamma}{2}\right)Id\right).$$

Calculemos entonces,

$$\begin{aligned}\left(\gamma\tilde{\Psi}^\top+\frac{\gamma}{2}Id\right)A &= \gamma\tilde{\Psi}^\top+\lambda\tilde{\Phi}^\top+2\theta Id \\ &= \gamma(\Psi-\tilde{\Psi})+\lambda(\Phi-\tilde{\Phi})+2\theta Id \\ &= \Gamma_\theta-\tilde{\Gamma}.\end{aligned}$$

La matriz anterior es invertible a partir del **Lema** 4.1. Además, tomando en cuenta el cálculo en (7.2.12) obtenemos,

$$\left(\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}\right)^{-1}\mathbf{1} = A^{-1}\left(\gamma\tilde{\Psi}^\top + \frac{\gamma}{2}Id\right)^{-1}\mathbf{1} = \frac{1}{\gamma}A^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top.$$

Como A es una matriz-M no singular, por el **Teorema** 7.1 punto 3. , es inversa positiva así, el vector $A^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$ tiene componentes no negativos y por ende los de $\boldsymbol{w}$ también.

(2) $\Rightarrow$ (3)Consideremos el caso $N = 1$. Haciendo los cálculos correspondientes,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= \frac{1}{\mathbf{1}^\top\left(\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}\right)^{-1}\mathbf{1}}\left(\Gamma_\theta - \tilde{\Gamma}\right)^{-1}\mathbf{1} \\ &= \frac{1}{2\theta + \lambda(1-a)}\begin{pmatrix} \frac{4\theta+\lambda+\gamma}{2} - \lambda a - \gamma \\ \frac{4\theta+\lambda+\gamma}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $a < 1$, nos damos cuenta que $2\theta + \lambda(1-a)$ es siempre positivo. Además, $\frac{4\theta+\lambda+\gamma}{2} > 0$. Sólo nos resta obtener aquellos valores de θ para los que la hipótesis de no negatividad se cumple en el primer componente,

$$\begin{aligned}\frac{4\theta+\lambda+\gamma}{2} - \lambda a - \gamma &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \theta &\geq \frac{\lambda+\gamma}{4}.\end{aligned}$$

■

Parte V.

Apéndices

A. Gráficas adicionales

En lo que sigue presentaremos algunos resultados más obtenidos mediante simulación para ilustrar de manera más amplia los distintos Kérneles de decrecimiento.

Kérnel exponencial.

Parámetro	Ver: Fig. A.1, Fig. A.2, Fig. A.3, Fig. A.4	Ver: Fig. A.5, Fig. A.6, Fig. A.7, Fig. A.8
Posición del jugador 1 (X_0)	1	1
Posición del jugador 2 (Y_0)	0	-1
Parámetro costo de transacciones θ	1.75	0.01
Tiempo total de transacciones T	1	1
Impacto permanente γ	5	0.2
Impacto transitorio λ	2	0.5
Parámetro de resilencia ρ	3	0.2
Número de transacciones N	100	100

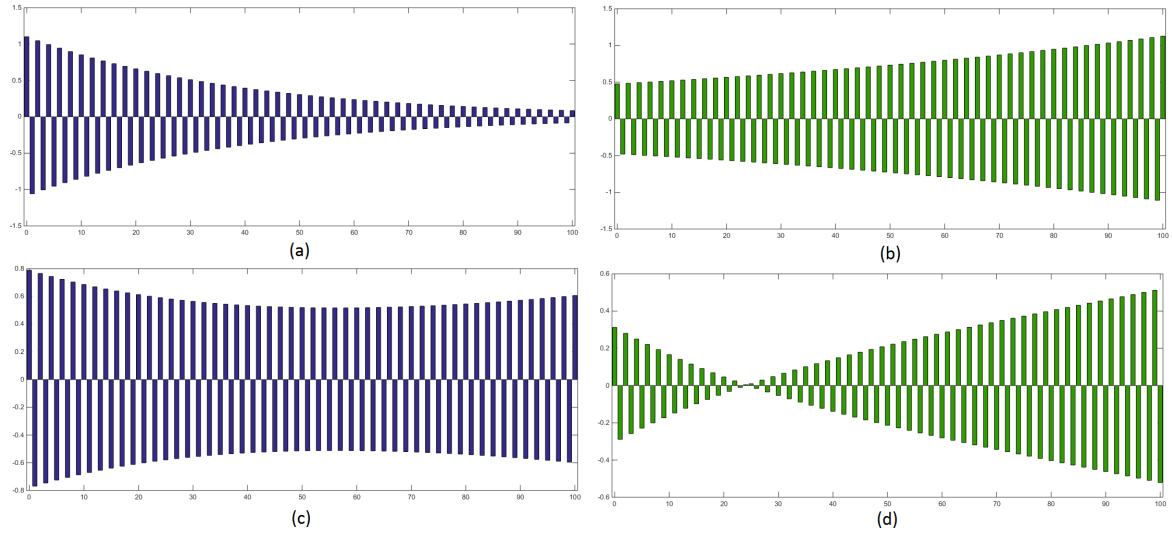

Figura A.1.: (a) Vector $\boldsymbol{v}$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada del vector en el eje horizontal. (b) Vector $\boldsymbol{w}$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada del vector en el eje horizontal.. (c) Estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal. (d) Estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$, $i-$ *ésima* entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal.

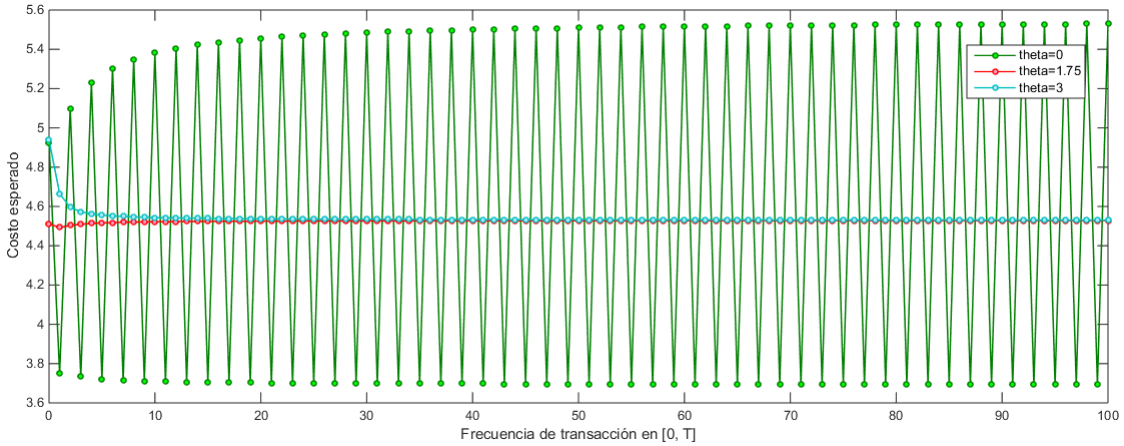

Figura A.2.: Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

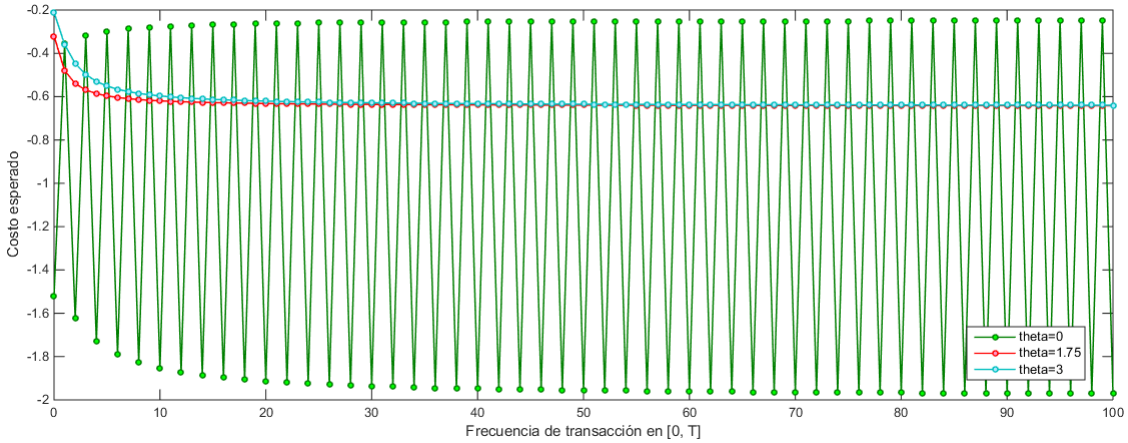

Figura A.3.: Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

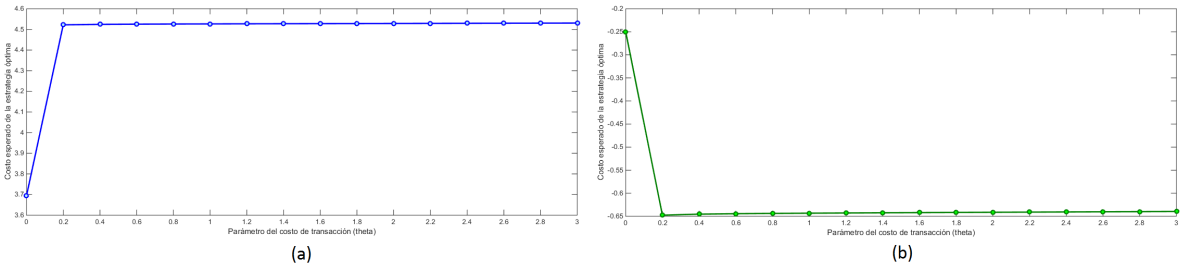

Figura A.4.: (a) Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal). (b) Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal).

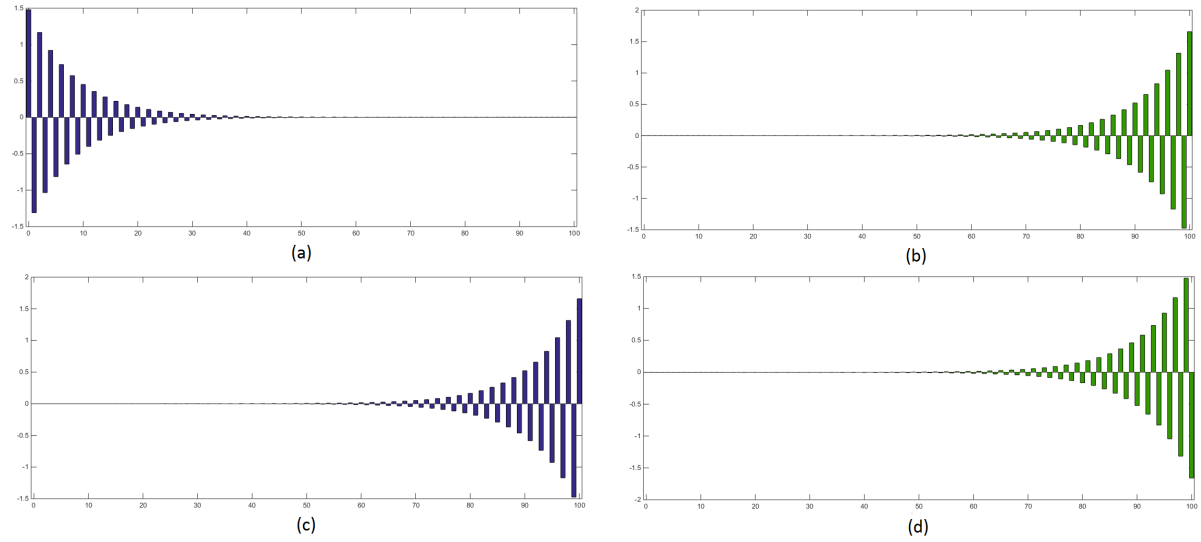

Figura A.5.: Para los parámetros en la tabla (). (a)Vector $\boldsymbol{v}$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada del vector en el eje horizontal. (b) Vector $\boldsymbol{w}$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada del vector en el eje horizontal.. (c) Estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal. (d) Estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$, $i-$ *ésima* entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal.

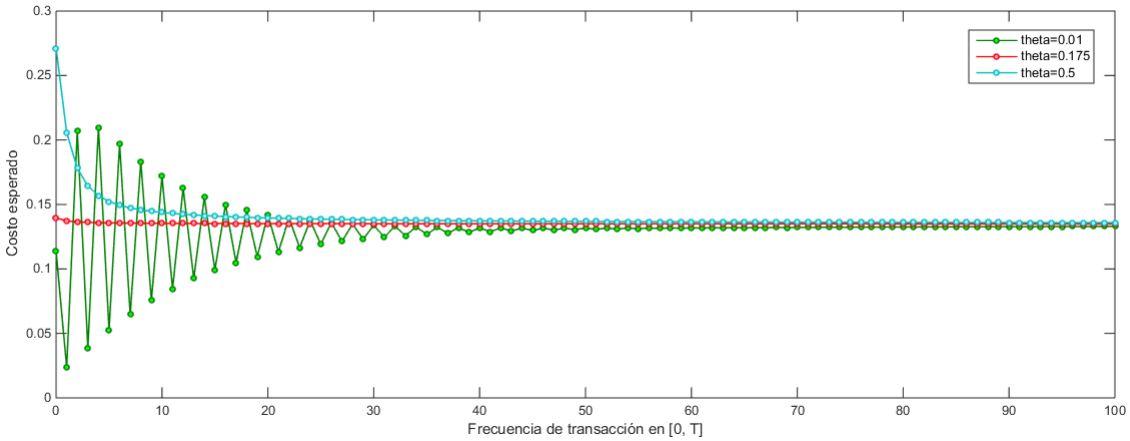

Figura A.6.: Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

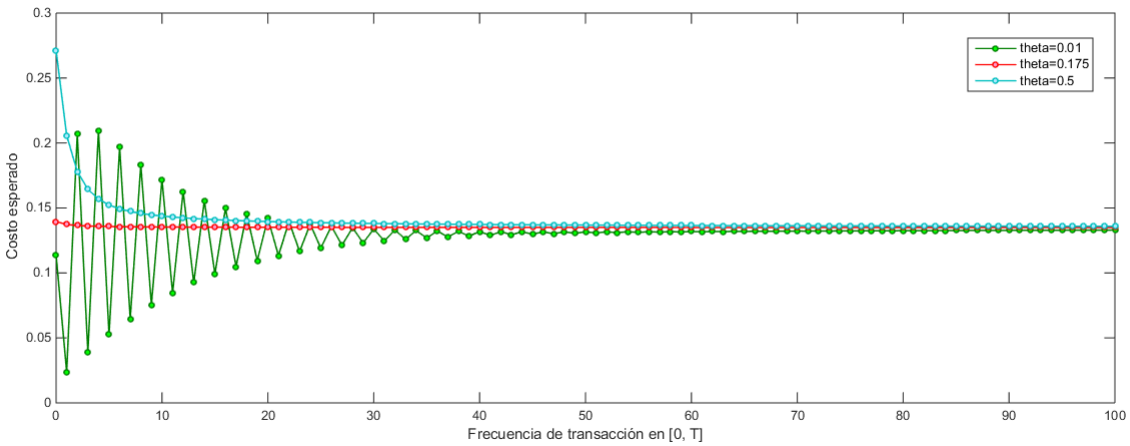

Figura A.7.: Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

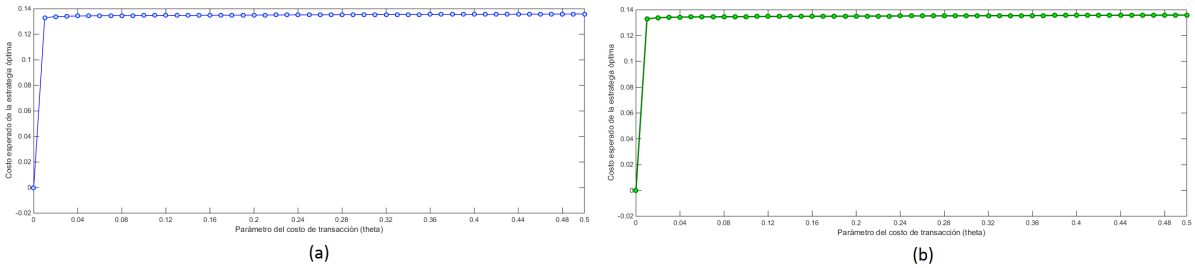

Figura A.8.: (a) Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal). (b) Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal).

Kérnel lineal.

Parámetro	Ver: Fig. A.9, Fig. A.10, Fig. A.11, Fig. A.12	Ver: Fig. A.13, Fig. A.14, Fig. A.15, Fig. A.16
Posición del jugador 1 (X_0)	1	1
Posición del jugador 2 (Y_0)	0	-1
Parámetro costo de transacciones θ	0	0.7
Tiempo total de transacciones T	1	1
Impacto η	1	0.5
Parámetro de resilencia ρ	1	0.2
Número de transacciones N	50	100

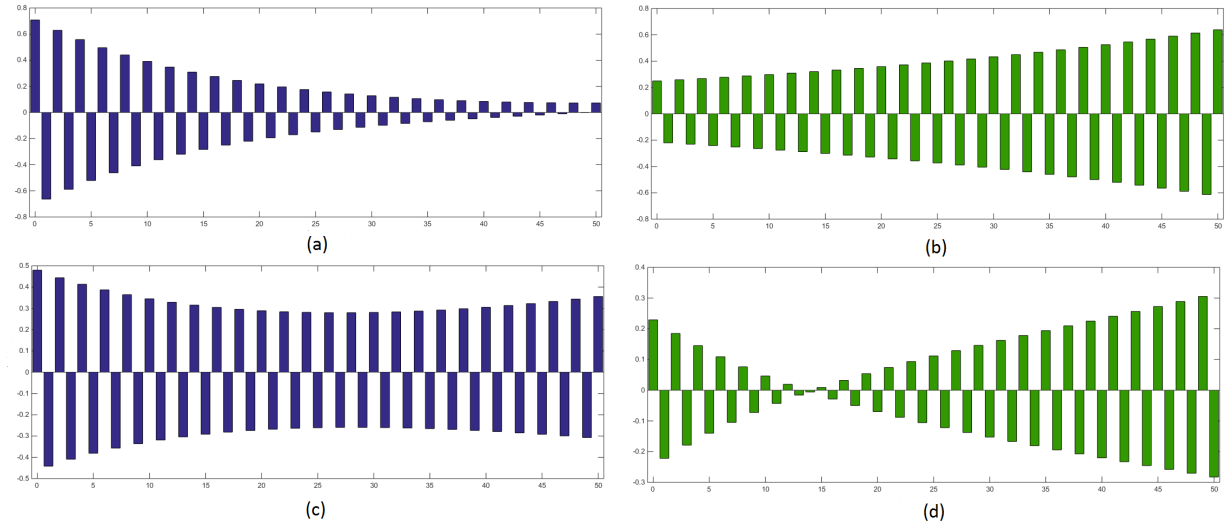

Figura A.9.: (a) Vector $\boldsymbol{v}$ en el eje vertical, $i-ésima$ entrada del vector en el eje horizontal. (b) Vector $\boldsymbol{w}$ en el eje vertical, $i-ésima$ entrada del vector en el eje horizontal.. (c) Estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$ en el eje vertical, $i-ésima$ entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal. (d) Estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$, $i-ésima$ entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal.

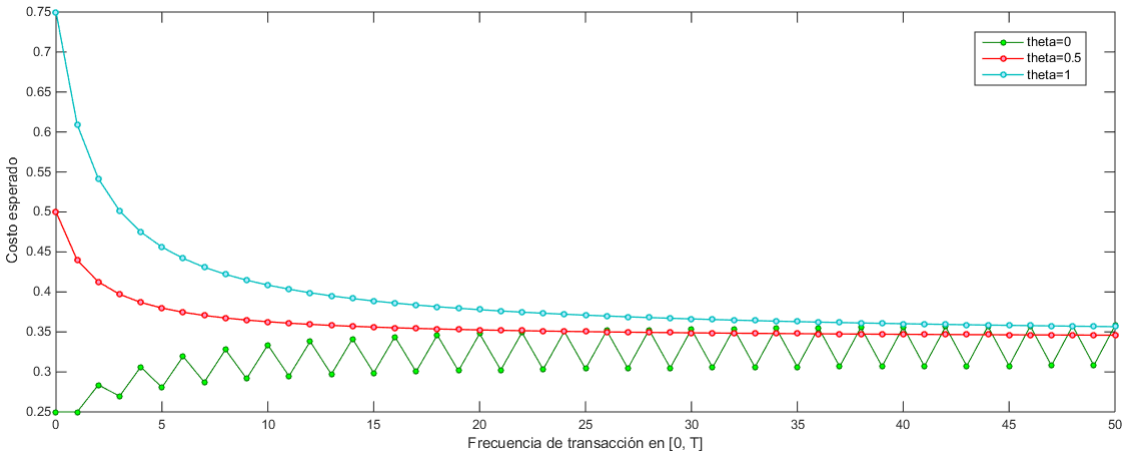

Figura A.10.: Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

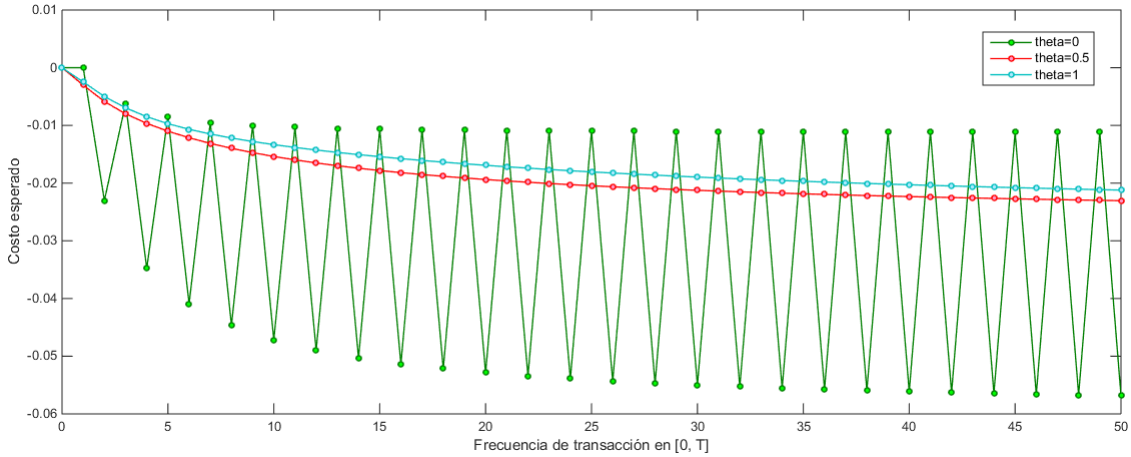

Figura A.11.: Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

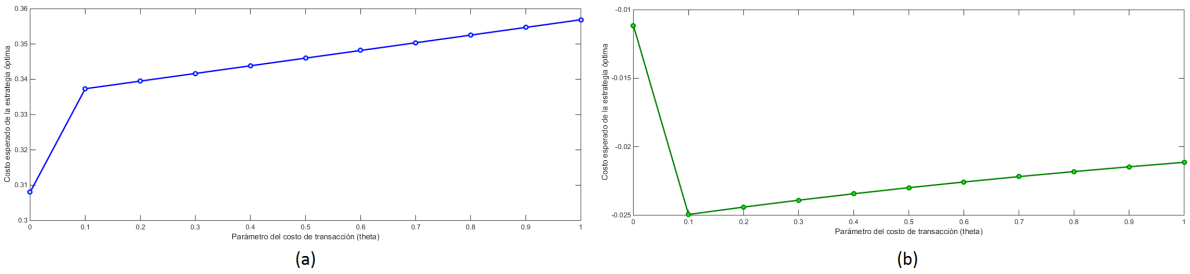

Figura A.12.: (a) Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal). (b) Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal).

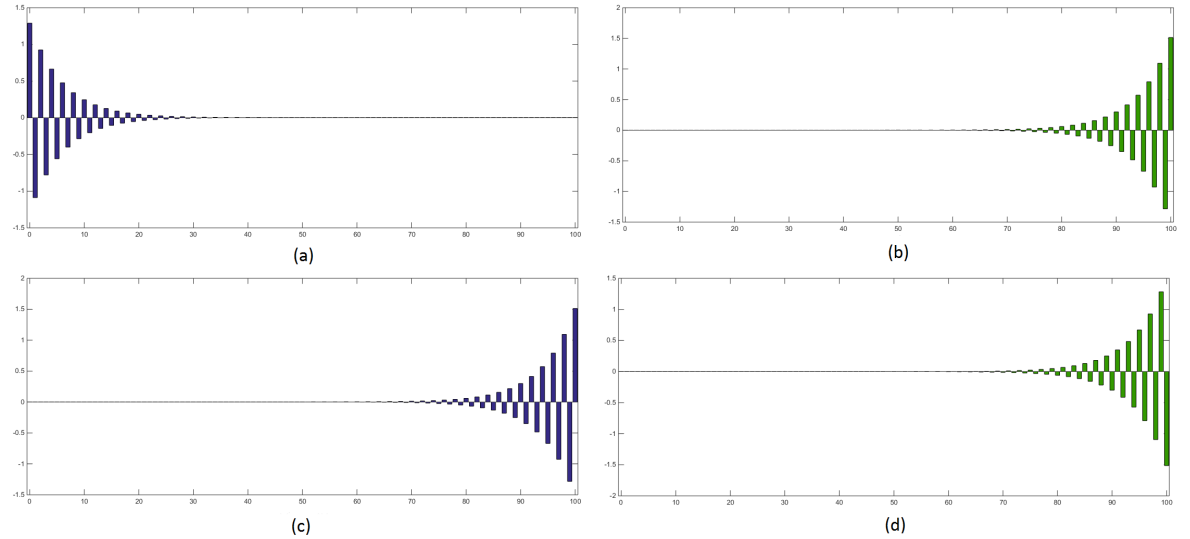

Figura A.13.: Para los parámetros en la tabla (). (a)Vector $\boldsymbol{v}$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada del vector en el eje horizontal. (b) Vector $\boldsymbol{w}$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada del vector en el eje horizontal.. (c) Estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal. (d) Estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$, $i-$ *ésima* entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal.

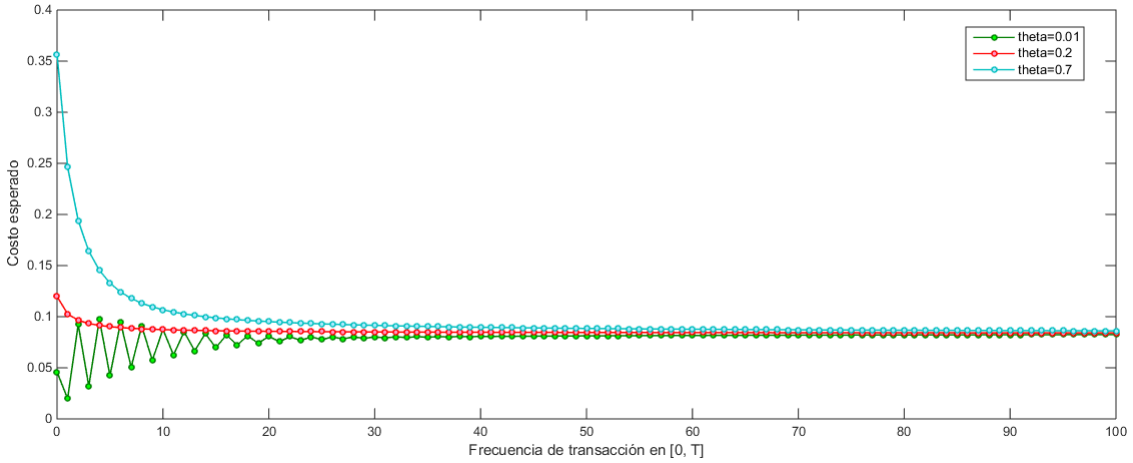

Figura A.14.: Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

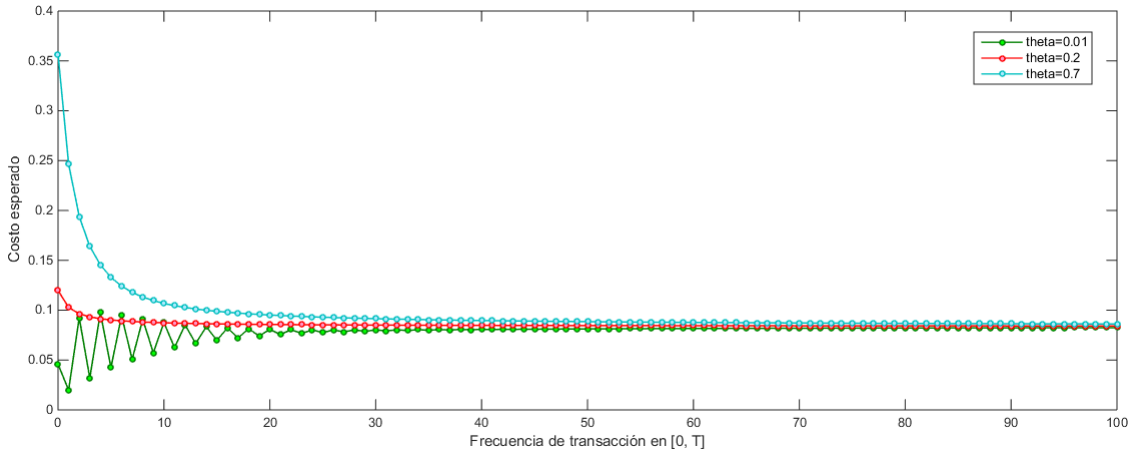

Figura A.15.: Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

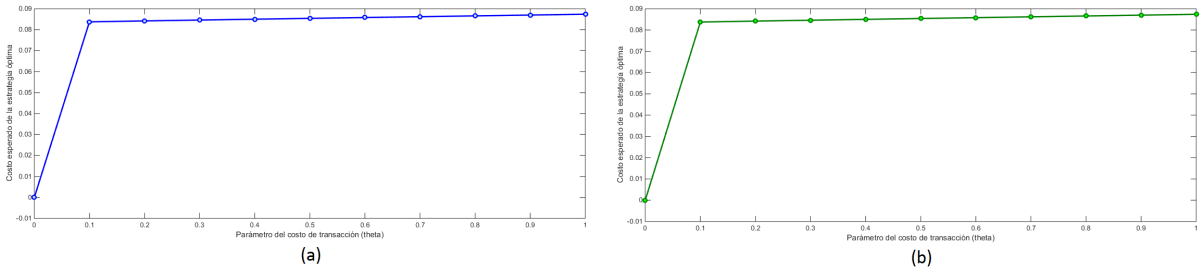

Figura A.16.: (a) Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal). (b) Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal).

Kérnel ley de potencias.

Parámetro	Ver: Fig. A.17, Fig. A.18 Fig. A.19	Ver: Fig. A.20, Fig. A.21, Fig. A.22, Fig. A.23
Posición del jugador 1 (X_0)	1	3
Posición del jugador 2 (Y_0)	1	4
Parámetro costo de transacciones θ	0	0
Tiempo total de transacciones T	1	1
γ	0.4	0.2
λ	1	0.8
η	10	0.4
Número de transacciones N	50	200

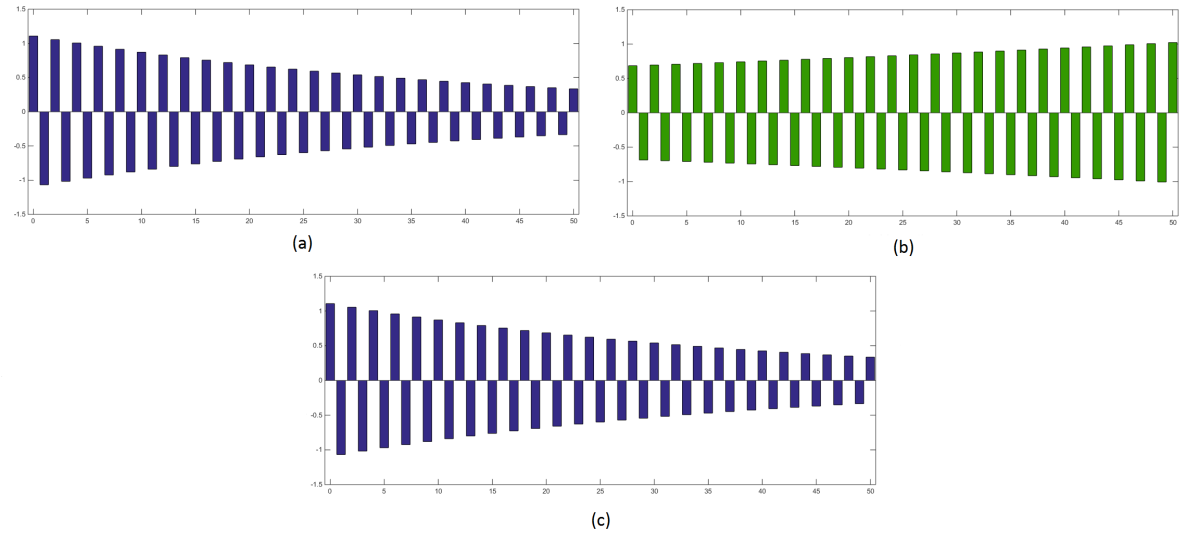

Figura A.17.: (a) Vector $\boldsymbol{v}$ en el eje vertical, $i-$*ésima* entrada del vector en el eje horizontal. (b) Vector $\boldsymbol{w}$ en el eje vertical, $i-$*ésima* entrada del vector en el eje horizontal.. (c) Estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\eta}^*$ en el eje vertical, $i-$*ésima* entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal.

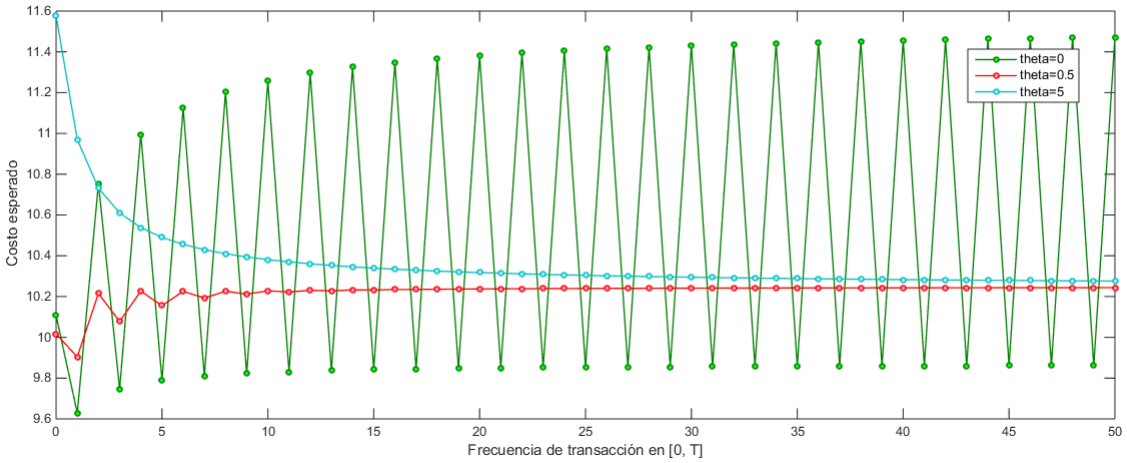

Figura A.18.: Costo esperado de las estrategias óptimas $\boldsymbol{\xi}^*$ y $\boldsymbol{\eta}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

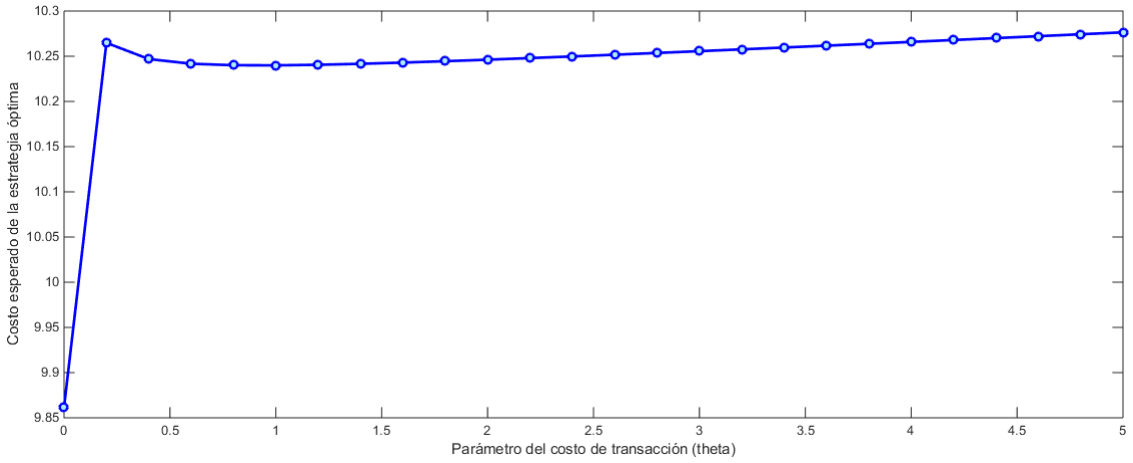

Figura A.19.: (a) Costo esperado de la estrategias óptimas $\boldsymbol{\xi}^*$ y $\boldsymbol{\eta}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal).

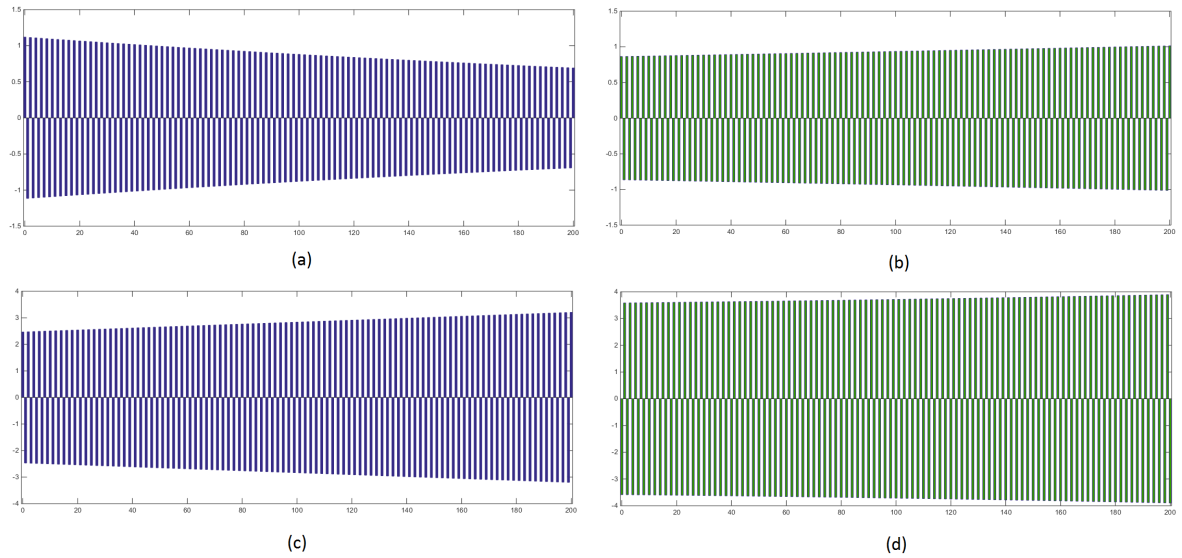

Figura A.20.: (a) Vector $\boldsymbol{v}$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada del vector en el eje horizontal. (b) Vector $\boldsymbol{w}$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada del vector en el eje horizontal.. (c) Estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal. (d) Estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$, $i-$ *ésima* entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal.

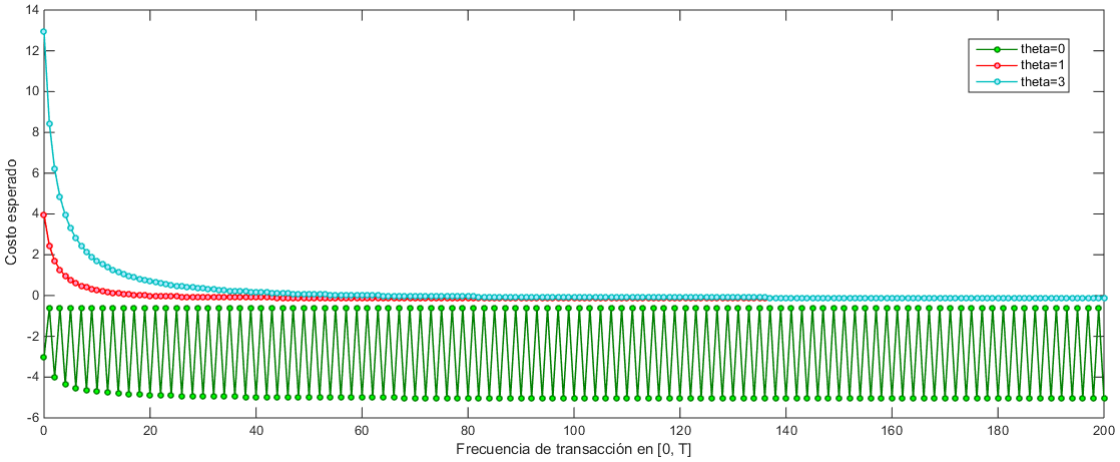

Figura A.21.: Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

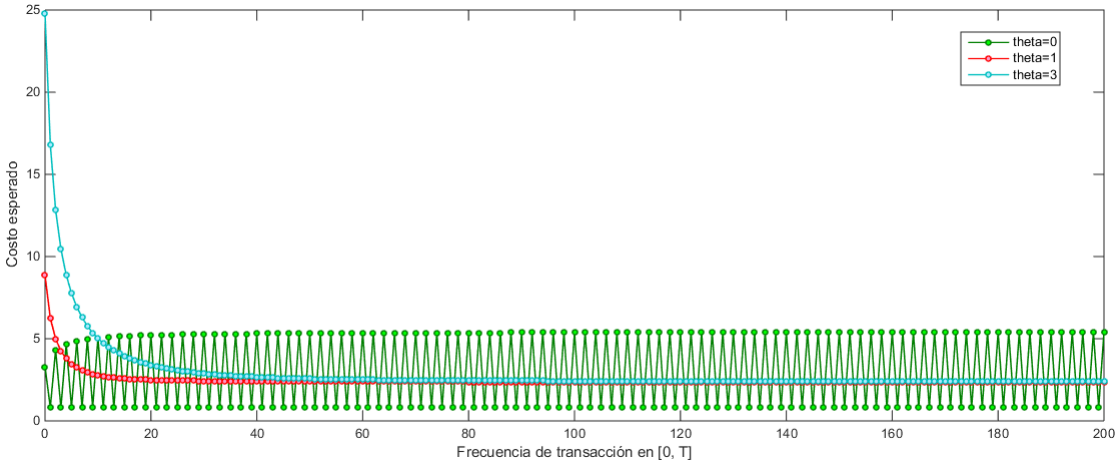

Figura A.22.: Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

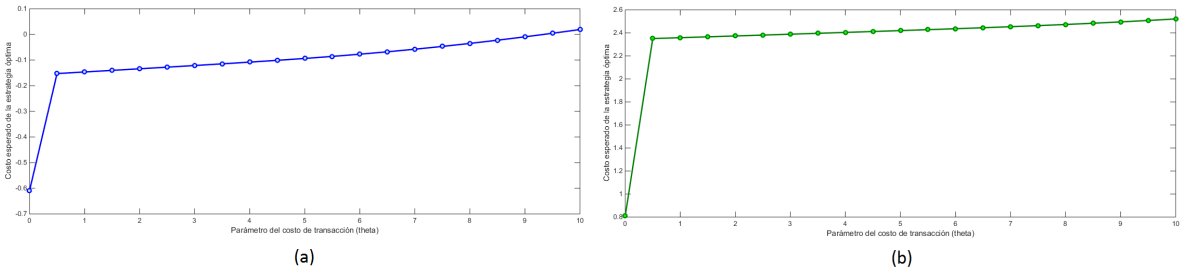

Figura A.23.: (a) Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal). (b) Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal).

Kérnel Gaussiano.

Parámetro	Ver: Fig. A.24, Fig. A.25, Fig. A.26, Fig. A.27	Ver: Fig. A.28, Fig. A.29, Fig. A.30
Posición del jugador 1 (X_0)	10	1
Posición del jugador 2 (Y_0)	7	1
Parámetro costo de transacciones θ	0.08	0.1
Tiempo total de transacciones T	1	1
Impacto permanente η	1	13
Número de transacciones N	50	25

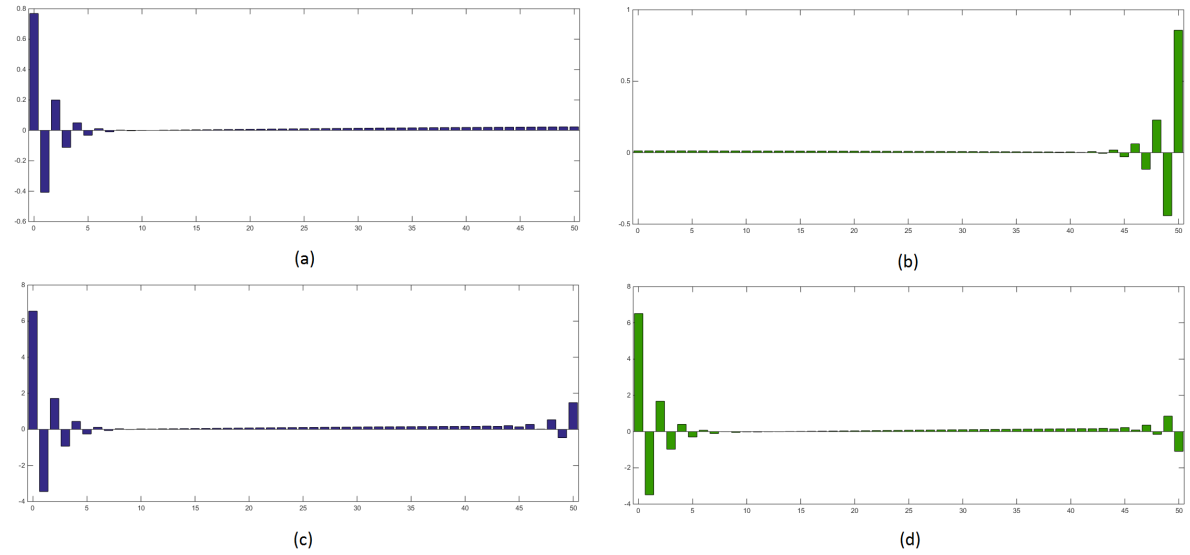

Figura A.24.: (a) Vector $\boldsymbol{v}$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada del vector en el eje horizontal. (b) Vector $\boldsymbol{w}$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada del vector en el eje horizontal.. (c) Estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$ en el eje vertical, $i-$ *ésima* entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal. (d) Estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$, $i-$ *ésima* entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal.

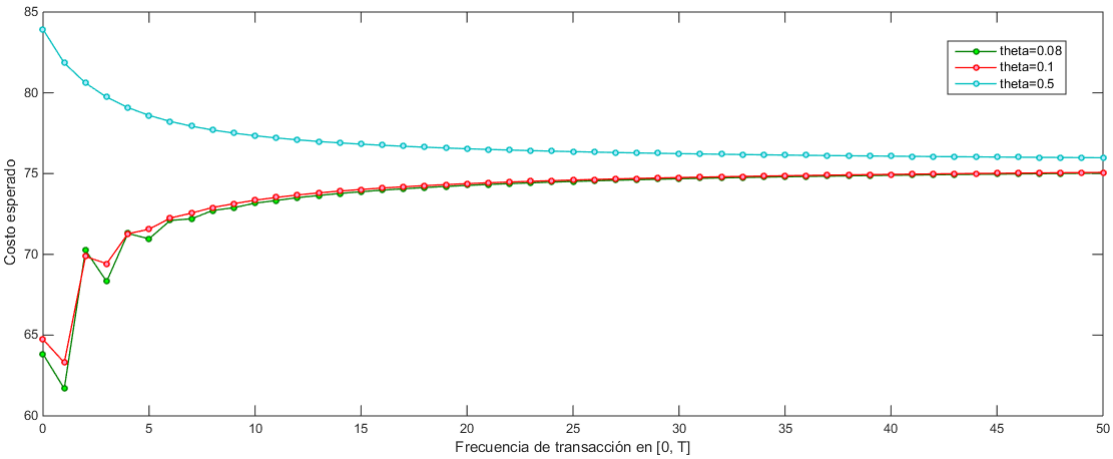

Figura A.25.: Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

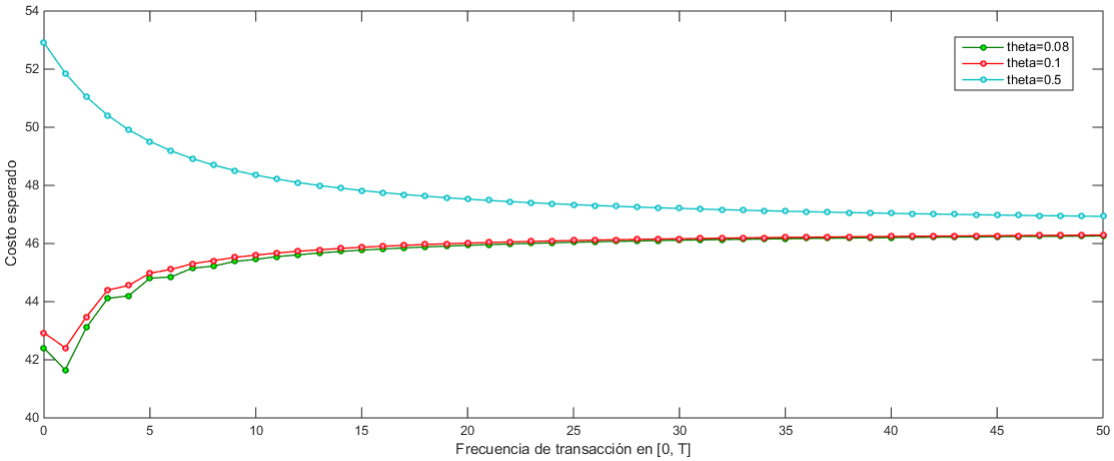

Figura A.26.: Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$(eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

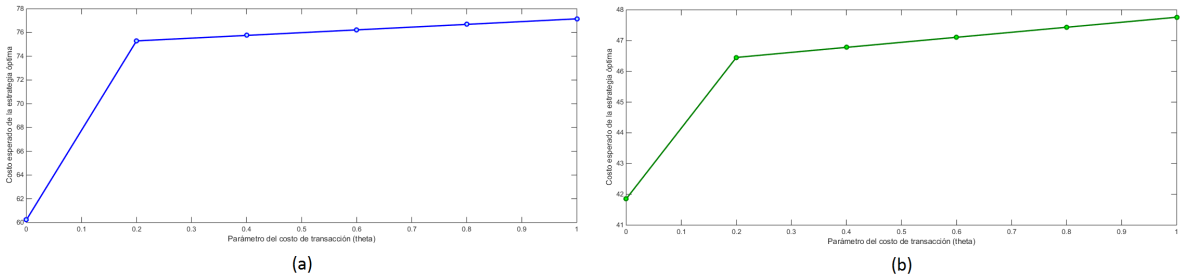

Figura A.27.: (a) Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\xi}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal). (b) Costo esperado de la estrategia óptima $\boldsymbol{\eta}^*$ (eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal).

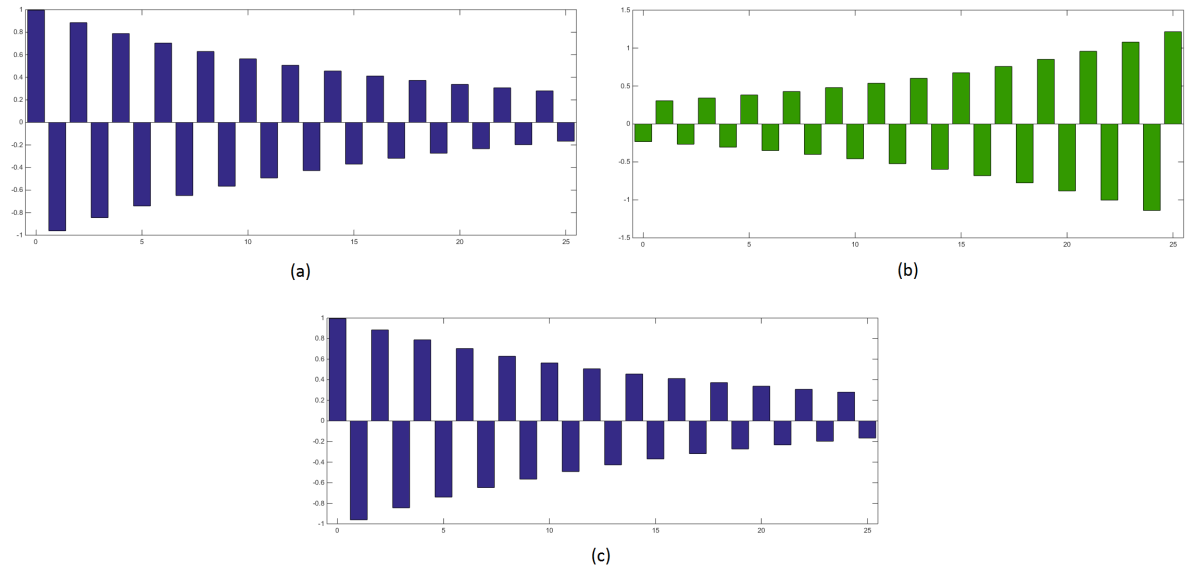

Figura A.28.: (a) Vector $\boldsymbol{v}$ en el eje vertical, $i-$*ésima* entrada del vector en el eje horizontal. (b) Vector $\boldsymbol{w}$ en el eje vertical, $i-$*ésima* entrada del vector en el eje horizontal.. (c) Estrategias óptimas $\boldsymbol{\xi}^*$ y $\boldsymbol{\eta}^*$ en el eje vertical, $i-$*ésima* entrada de la estrategia óptima en el eje horizontal.

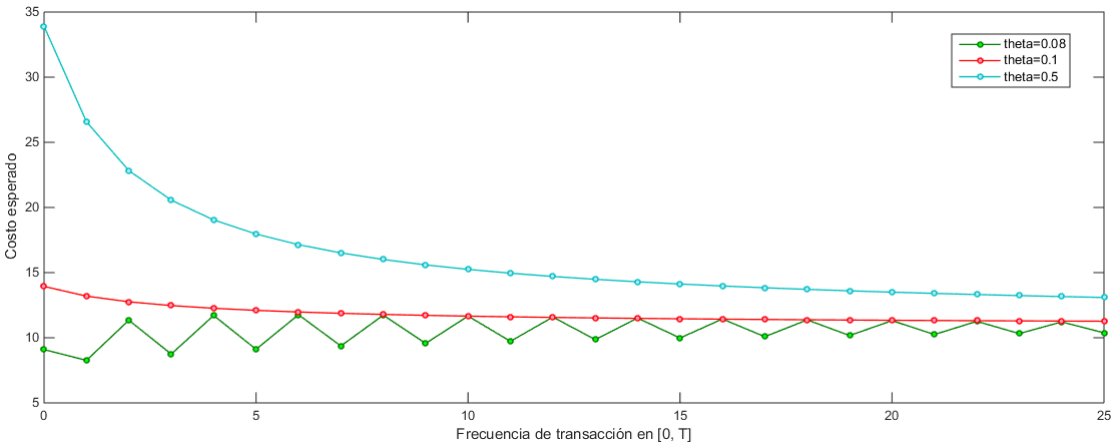

Figura A.29.: Costo esperado de las estrategias óptimas $\boldsymbol{\xi}^*$ y $\boldsymbol{\eta}^*$ (eje vertical) para distintos valores del parámetro θ variando la frecuencia de las transacciones en el período $[0,\ T]$ (eje horizontal).

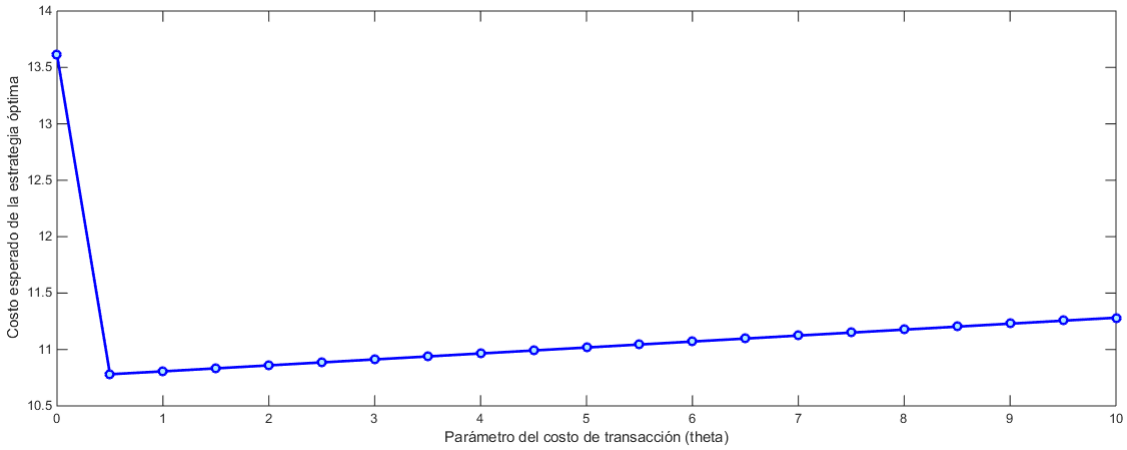

Figura A.30.: (a) Costo esperado de las estrategias óptimas $\boldsymbol{\xi}^*$ y $\boldsymbol{\eta}^*$(eje vertical), para distintos valores del parámetro θ (eje horizontal).

B. Códigos

Algoritmo B.1 Kérnel Exponencial.

```
function x=kGe(t, l, p, g)
x=l*exp(-p*t)+g;
end
```

Algoritmo B.2 Kérnel Lineal

```
function x=kLi(t, l, p)
if (1-p*t)>0 x=l*(1-p*t);
else x=0;
end
end
```

Algoritmo B.3 Kérnel Ley de Potencias

```
function x=kLP(t, h, l, g)
x=h*(1+l*t)^(-g);
end
```

Algoritmo B.4 Kérnel Gaussiano

```
function x=kGa(t, l)
x=l*exp(-t*t);
end
```

Algoritmo B.5 Matriz Gama.

```
function G = MGama(T, N, l, p, g)
G=zeros(N+1,N+1);
f=zeros(N+1,1);
for i=1:N+1;
f(i,1)=((i-1)*T)/N;
end
for j=1:N+1;
for i=1:N+1;
t=abs(f(i,1)-f(j,1));
G(i,j)=kGe(t, l, p , g);%Varía la función de acuerdo al kérnel que
se requiera.
end
end
end
```

Algoritmo B.6 Matriz Gama Tilde.

```
function GTilde=GamaTilde(G)
N=size(G);
GTilde=tril(G);
for j=1:N;
for i=1:N;
if i==j GTilde(i,j)=0.5*GTilde(i,j);
end
end
end
end
```

Algoritmo B.7 Matriz Gama Theta

```
function GTheta=GamaTheta(G, theta)
N=size(G);
GTheta=G+2*theta*eye(N);
end
```

Algoritmo B.8 Vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

```
function v=vv(GTheta,GTilde)
N=size(GTheta);
n=N(1);
uno=ones(n,1);
mi=inv(GTheta+GTilde);
v=(1/(uno'*mi*uno))*(mi)*uno;
end

function w=vw(GTheta,GTilde)
N=size(GTheta);
n=N(1);
uno=ones(n,1);
mi=inv(GTheta-GTilde);
w=(1/(uno'*mi*uno))*(mi)*uno;
end
```

Algoritmo B.9 Costo esperado.

```
function [ce_x, ce_e]=CostoEsperado(v, w, GTheta, GTilde)
xi=0.5*(X+Y)*v+0.5*(X-Y)*w;
eta=0.5*(X+Y)*v-0.5*(X-Y)*w;
ce_x=0.5*(xi'*GTheta*xi)+xi'*GTilde*eta;
ce_e=0.5*(eta'*GTheta*eta)+eta'*GTilde*xi;
end
```

Algoritmo B.10 Costos esperados variando la frecuencia de las transacciones.

```
function [nce_x, nce_e]=NCostos(T, N, l, p, g, theta, X, Y)
nce_x=ones(N+1,1);
nce_e=ones(N+1,1);
for i=1:N+1
G = MGama(T, i, l, p, g);
GTheta=GamaTheta(G, theta);
GTilde=GamaTilde(G);
v=vv(GTheta,GTilde);
w=vw(GTheta,GTilde);
xi=0.5*(X+Y)*v+0.5*(X-Y)*w;
eta=0.5*(X+Y)*v-0.5*(X-Y)*w;
nce_x(i,1)=0.5*(xi'*GTheta*xi)+xi'*GTilde*eta;
nce_e(i,1)=0.5*(eta'*GTheta*eta)+eta'*GTilde*xi;
end
end
```

Algoritmo B.11 Costos esperados variando el parámetro de los costos transaccionales θ.

```
function [tce_x, tce_e]=TCostos(T, N, l, p, g, theta, X, Y, inc)
num=(theta/inc)+1; tce_x=ones(num,1);
tce_e=ones(num,1);
for i=1:num
tm=(i-1)*inc;
G = MGama(T, N, l, p, g);
GTheta=GamaTheta(G, tm);
GTilde=GamaTilde(G);
v=vv(GTheta,GTilde);
w=vw(GTheta,GTilde);
xi=0.5*(X+Y)*v+0.5*(X-Y)*w;
eta=0.5*(X+Y)*v-0.5*(X-Y)*w;
tce_x(i,1)=0.5*(xi'*GTheta*xi)+xi'*GTilde*eta;
tce_e(i,1)=0.5*(eta'*GTheta*eta)+eta'*GTilde*xi;
end
end
```

Bibliografía

[1] I. Aldridge, *High-frequency trading: a practical guide to algorithmic strategies and trading systems*, vol. 459, John Wiley and Sons, 2009.

[2] A. Alfonsi, A. Fruth, and A. Schied, *Constrained portfolio liquidation in a limit order book model*, Banach Center Publ, 83 (2008), pp. 9–25.

[3] A. Alfonsi, A. Schied, and A. Slynko, *Order book resilience, price manipulation, and the positive portfolio problem*, SIAM Journal on Financial Mathematics, 3 (2012), pp. 511–533.

[4] R. Almgren and N. Chriss, *Optimal execution of portfolio transactions*, Journal of Risk, 3 (2001), pp. 5–40.

[5] P. S. Barrera, *Introducción a la optimización no lineal, notas de clase*, Enero 2015.

[6] A. Berman and R. J. Plemmons, *Nonnegative matrices*, The Mathematical Sciences, Classics in Applied Mathematics, 9 (1979).

[7] F. Black, *Toward a fully automated stock exchange, part i*, Financial Analysts Journal, 27 (1971), pp. 28–35.

[8] J.-P. Bouchaud, Y. Gefen, M. Potters, and M. Wyart, *Fluctuations and response in financial markets: the subtle nature of random price changes*, Quantitative Finance, 4 (2004), pp. 176–190.

[9] M. K. Brunnermeier and L. H. Pedersen, *Predatory trading*, The Journal of Finance, 60 (2005), pp. 1825–1863.

[10] K.-F. Chang, *Strictly positive definite functions*, Journal of Approximation Theory, 87 (1996), pp. 148–158.

[11] J. Di Nunno and B. Øksendal, *Advanced mathematical methods for finance*, Springer Science & Business Media, 2011.

[12] H. Föllmer and A. Schied, *Stochastic finance: an introduction in discrete time*, Walter de Gruyter, 2011.

[13] J. Gatheral, *No-dynamic-arbitrage and market impact*, Quantitative finance, 10 (2010), pp. 749–759.

[14] G. Huberman and W. Stanzl, *Price manipulation and quasi-arbitrage*, Econometrica, 72 (2004), pp. 1247–1275.

[15] R. A. Jarrow, *Derivative security markets, market manipulation, and option pricing theory*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 29 (1994), pp. 241–261.

[16] A. A. Kirilenko, A. S. Kyle, M. Samadi, and T. Tuzun, *The flash crash: The impact of high frequency trading on an electronic market*, Journal of Finance, Forthcoming. Available at SSRN 1686004, (2015).

[17] A. S. Kyle, *Continuous auctions and insider trading*, Econometrica: Journal of the Econometric Society, (1985), pp. 1315–1335.

[18] M. Maschler, E. Solan, and S. Zamir, *Game Theory*, Cambridge University Press, 2013.

[19] A. A. Obizhaeva and J. Wang, *Optimal trading strategy and supply/demand dynamics*, Journal of Financial Markets, 16 (2013), pp. 1–32.

[20] M. J. Osborne and A. Rubinstein, *A course in game theory*, MIT press, 1994.

[21] A. Schied and T. Zhang, *A hot-potato game under transient price impact*, Available at SSRN 2256510, (2015).

[22] T. Schöneborn, *Trade execution in illiquid markets: Optimal stochastic control and multi-agent equilibria*, PhD thesis, Technischen Universität Berlin, 2008.

[23] S. Tadelis, *Game theory: an introduction*, Princeton University Press, 2013.

[24] J. N. Webb, *Game theory: decisions, interaction and Evolution*, Springer Science & Business Media, 2007.