Universidad Autónoma Metropolitana

Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales

Modelos macroscópicos para el estudio del tráfico vehicular de dos y tres fases

Pablo Venegas García

Asesora:

Dra. Patricia Saavedra Barrera

Ciudad de México, Mayo 2017

A Ilse Ruiz Mercado,
mi querida y más grande amiga,
por haberme ayudado a crecer y ser una mejor persona.

Agradecimientos

Este trabajo se llevó a cabo gracias a un gran esfuerzo de parte de la Dra. Patricia Saavedra Barrera quién le agradezco profundamente porque, bajo su guía, enseñanza y dedicación, fue una parte fundamental para concretar esta obra. Agradezco también a la Dra. Rosa María Velasco Belmont y al Dr. Francisco Javier Domínguez Mota por dedicar su valioso tiempo, experiencia y sabiduría, y formar parte de la esencia de este proyecto.

Agradezco a la Universidad Autónoma Metropolitana por abrirme sus puertas, a la Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales por permitirme ser parte de su grupo de trabajo y les agradezco mucho a mis compañeros del posgrado quienes me brindaron su incondicional amistad y apoyo.

A mi familia por siempre estar conmigo y haberme brindado toda la ayuda que necesité en el transcurso de esta etapa.

Un especial agradecimiento la brigada de Monitoreo Ecotecnológico por haberme compartido su extensa experiencia laboral en campo, sus conocimientos y su amistad. A mi estimado amigo Edgar Ruiz Mercado por brindarme su ayuda y vasto conocimiento en salud.

Agradezco el apoyo de El Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) a través de su Programa de Becas de Posgrado.

Por último, que a propósito los pongo en la base de estos agradecimientos porque eso son, la base; agradezco mucho al Sr. Margarito Martínez Cruz, a su esposa Carmen Hernández García y su hermana Antonia Hernández

García, por haberme brindado de alimentos sanos y nutritivos con el buen sazón mexicano bajo el cobijo de su hogar y que si bien, ellos así se ganan la vida, nos dan también la oportunidad a nosotros, los estudiantes, ganarnos la nuestra. Fue un privilegio siempre haber tenido deliciosos frijolitos en la mesa.

Índice general

Prefacio ix

1. Tráfico Vehicular **1**
1.1. El primer modelo del tráfico vehicular 1
1.2. Un primer modelo analítico 2
1.3. Relación fundamental 4
1.4. Modelos macroscópicos 8

2. Modelación del flujo vehicular **9**
2.1. Antecedentes 9
2.2. Modelo de Lighthill-Whitham 10
2.3. Modelos de segundo orden 11
2.3.1. Modelo de Payne 11
2.3.2. Modelo de Prigogine y Phillips 12
2.3.3. Modelo de Kerner-Konhäuser 12
2.4. Marco Teórico 14
2.5. Solución numérica 18
2.5.1. Esquemas conservativos 19
2.5.2. Solución numérica de ecuaciones vectoriales conservativas 21

3. Flujo vehicular con rampas de entrada y salida de autos **27**
3.1. Flujo de rampas de entrada y salida 27
3.2. Solución numérica del modelo de primer orden con rampas de entrada y salida de autos. 29
3.3. Dinámica de velocidad para modelos de segundo orden con rampas 31
3.3.1. Solución numérica del modelo de segundo orden con rampas de entrada y salida de autos 33

3.3.2. Experimentos 36
3.4. Cambio en el número de carriles de un circuito 40
3.5. Modelo de tráfico vehicular en un circuito con rampas y cambio en el número de carriles 47

4. Modelación de flujo vehicular: Teoría de tres fases. 51
4.1. Flujo sincronizado y cúmulos de densidad móviles. 52
4.2. Un modelo del tráfico con dos clases de vehículos diferentes . . 52
4.3. Ecuaciones macroscópicas 55
4.4. Resultados numéricos 66
4.4.1. Flujo libre 66
4.4.2. Transición del flujo libre al flujo sincronizado 67
4.4.3. Transición del flujo sincronizado al flujo congestionado 69
4.4.4. Flujo congestionado 70

Conclusiones 71

Bibliografía 73

Prefacio

El problema del tráfico vehicular ha sido objeto de estudio desde el siglo XX debido al incremento del número de autos que transitan por las vialidades. Esto ha provocado un impacto negativo en el ambiente, pérdidas económicas y hasta accidentes fatales. El incremento desmedido de la cantidad de autos que transitan en el mundo agrava cada vez más este problema y la falta de soluciones ha provocado una serie de diferentes estudios buscando respuestas a preguntas tales como ¿Cuándo se producen embotellamientos vehiculares? ¿Qué infraestructura vial es ideal para una mejor circulación del tráfico? ¿A qué velocidad deberían los conductores ir para evitar congestionamientos vehiculares?

Con base en datos experimentales, los cuales han sido tomados alrededor del mundo, se han formulado dos teorías. Una de estas considera que el flujo vehicular se puede encontrar en dos fases únicamente; flujo libre o tráfico congestionado. El flujo libre se define como aquel flujo vehicular en donde los autos pueden transitar hasta la velocidad permitida en una autopista [7]. El tráfico congestionado se refiere cuando los automovilistas se ven obligados a reducir su velocidad, incluso hasta cero, debido a que la cantidad de autos por kilómetro es muy grande. La segunda teoría fue propuesta tiempo después cuando científicos encuentran que existe un estado donde los automovilistas se encuentran oscilando entre los estados del flujo libre y flujo congestionado en cortos periodos de tiempo. Esta teoría se le conoce como teoría de tres fases (Kerner *et al.*, 1997, 2006) en la cual se establece que el tráfico congestionado se divide a su vez en dos fases a las cuales se les llama flujo sincronizado y cúmulos de densidad móviles.

Para estudiar el problema del tráfico vehicular se han propuesto varios modelos cuyo desarrollo a lo largo del tiempo ha sido justificado por la necesidad

de explicar diferentes patrones emergentes descritos en las teorías de dos y tres fases. Los modelos se han desarrollado desde un punto de vista heurístico hasta ser basados en principios de la teoría de fluidos o por medio de la teoría de cinética de gases. En este trabajo se expone el desarrollo de algunos modelos hasta formular aquel descrito por Kerner y Konhäuser que es uno de los más utilizados hoy en día dentro de la teoría de dos fases. Además se describe un modelo reciente propuesto por R.M. Velasco y A.R Méndez [17] basado en la teoría cinética de gases el cual tiene la capacidad de describir las tres fases del tráfico vehicular y sus transiciones. Estos modelos macroscópicos se plantean como un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales en su forma conservativa y se resuelven numéricamente con el método de Lax-Wendroff, un método robusto basado en un esquema de diferencias finitas.

El objetivo de este trabajo es comprender los modelos del tráfico vehicular y las necesidades que se requieren para modelar fenómenos de este tipo, replicando resultados encontrados en la literatura y proponiendo experimentos numéricos para explorar sus capacidades y limitaciones. Este trabajo se ha dividido en cuatro capítulos que son descritos a continuación:

En el primer capítulo se hace un breve recorrido histórico de los principios en el estudio del tráfico vehicular y se describe la importancia de la relación fundamental, que es la base heurística de los datos reales, descrita por funciones matemáticas y con las cuales se dictamina la correlación entre el flujo vehicular y la velocidad local de los autos.

En el segundo capítulo se introducen los primeros modelos macroscópicos de primer orden: modelos con una sola función desconocida. Después se describe la evolución de modelos de segundo orden, aquellos donde la densidad y la velocidad local son funciones desconocidas, hasta desarrollar el modelo propuesto por Kerner y Konhäuser en un circuito homogéneo. Más adelante se describe la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales por medio de un marco teórico. Al finalizar el capítulo, se muestran algunos esquemas numéricos para resolver este tipo de ecuaciones en su forma conservativa y se reproducen varios ejemplos encontrados en la literatura y se proponen algunos experimentos para poner en evidencia numérica los resultados teóricos de estabilidad de las soluciones.

En el tercer capítulo se introducen términos para describir el flujo de los

automóviles para el modelo de segundo orden cuando se consideran rampas de entrada y salida de autos como cuando el número de carriles varía en alguna región. Finalmente se propone un modelo con el cual se consideran las rampas y una reducción en el número de carriles al mismo tiempo para después resolver las ecuaciones bajo ciertos experimentos propuestos con el propósito de observar las capacidades y limitaciones del modelo en sí.

En el cuarto capítulo se expone y describe el modelo propuesto por R.M. Velasco y A.R Méndez con el cual se pueden modelar el flujo libre, el flujo sincronizado y los cúmulos móviles descritos en la teoría de tres fases. Para finalizar este capítulo se replican los resultados que obtuvieron para describir las tres fases del flujo vehicular como sus transiciones entre estas por medio de varios ejemplos citados en el artículo [17].

Para cerrar este trabajo se exponen algunas conclusiones y el trabajo a futuro.

Capítulo 1

Tráfico Vehicular

1.1. El primer modelo del tráfico vehicular

Los primeros estudios sobre el tráfico vehicular se remontan al año de 1935. Bruce D. Greenshields, ingeniero civil, fue de las primeras personas en recopilar datos para medir el flujo vehicular ($Q[Veh/Hr]$) utilizando el método fotográfico. Debido al estudio que realizó en una autopista, descubrió que a cierta cantidad de autos por kilómetro, definido como densidad vehicular promedio ($\rho[Veh/Km]$), la velocidad promedio ($V[Km/Hr]$) empieza a disminuir formándose una congestión vehicular. La cantidad de autos mínima para desencadenar un congestionamiento vehicular se le llama punto crítico y se le denomina como la capacidad de trabajo de la autopista. De los datos que obtuvo, Greenshields formuló la velocidad promedio de los automóviles en función de la densidad promedio

$$V_e(\rho) = V_{max}(1 - \rho/\rho_{max}),$$

donde ρ_{max} es la densidad máxima que es aproximadamente de $140[Veh/Km]$ y $V_{max}[Km/Hr]$ está delimitado por el límite de velocidad de cada autopista. Por otro lado, físicamente el flujo se expresa como $Q = \rho V$ y entonces,

$$Q(\rho) = V_{max}\rho(1 - \rho/\rho_{max}). \tag{1.1}$$

Esta relación, flujo-densidad, se le conoce como relación fundamental de Greenshields. En este primer modelo heurístico se observa que el flujo es cero siempre y cuando la densidad sea $\rho = 0$ ó $\rho = \rho_{max}$.

1.2. Un primer modelo analítico

A partir del trabajo de Greenshields, otros científicos como M.J. Lighthill y G. Whitham (1955) introdujeron la analogía del flujo vehicular con la dinámica de fluidos. Más adelante, Harold Greenberg (1959) realizó una serie de experimentos a mayor escala que Greenshields y a partir de los datos obtenidos, formuló teóricamente una relación fundamental basada en la dinámica unidimensional de un fluido [1]. Para esta deducción primero se considera como hipótesis que el flujo vehicular $Q(x,t)$ se puede considerar como un flujo unidimensional y unidireccional cuando el número de autos N es suficientemente grande. Por medio de un balance de masas a lo largo de una carretera, obtenemos que

$$N = \int \rho(x,t)dx = cte, \tag{1.2}$$

donde ρ es la densidad vehicular. La tasa de cambio en la densidad en un tramo de la autopista $[l_1, l_2]$ está dado por

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{l_1}^{l_2} \rho(x,t)dx = Q(l_1,t) - Q(l_2,t),$$

donde $Q = Q(x,t)$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{l_1}^{l_2} \rho(x,t)dx = -\int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)dx.$$

Debido a que el resultado es válido para cualquier tramo de la autopista y para cualquier tiempo, y si además la función de densidad es suave, se concluye que la ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad está dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \tag{1.3}$$

Sustituyendo la relación de flujo

$$Q(x,t) = \rho(x,t)V(x,t), \tag{1.4}$$

en la ecuación (1.3) se tiene que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \tag{1.5}$$

Por otro lado, la tasa de cambio de la velocidad de un fluido ideal (incompresible y carente de fricción) en una dimensión[1] está dada por:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

donde c es un parámetro de estado. Desarrollando la derivada total dV/dt

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} = -\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \tag{1.6}$$

Para cerrar el sistema, Greenberg utiliza la ecuación (1.5) por lo que se tiene

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Suponiendo que la velocidad depende de la densidad $V(x,t) = V(\rho)$,

$$V'\frac{\partial \rho}{\partial t} + VV'\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho V'\frac{\partial \rho}{\partial x} + V\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Si V' es distinto de cero

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(V + \frac{c^2}{\rho V'}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho V' + V)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Para que el sistema no tenga la solución trivial es necesario que

$$\frac{c^2}{\rho V'} = \rho V',$$

[1] "Para un flujo ideal no viscoso, $k = du/dt = -\nabla p$, para un gas ideal $pV = nRT$, siendo V el volumen y p la presión, n el número de moles. Luego $p = RTk$, donde k es la densidad molar. Se sigue que $\nabla p = RT\nabla k$." [1]

por lo tanto

$$(V')^2 = \frac{c^2}{\rho^2}.$$

Se puede demostrar que si V' se toma con signo positivo, entonces la tasa de cambio de la velocidad debe ser cero y por esto se considera el signo negativo para obtener resultados más interesantes. Resolviendo la ecuación diferencial ordinaria tenemos:

$$\int V' = -\int \frac{c}{\rho},$$

$$V = -cLn(\rho) + cte,$$

donde

$$cte = cLn(\rho_{max}),$$

y así, la relación fundamental de Greenberg está dado por

$$V = cLn\left(\frac{\rho_{max}}{\rho}\right),$$

ó utilizando la relación del flujo,

$$V = \frac{Q}{\rho} = cLn\left(\frac{\rho_{max}}{\rho}\right).$$

Si $V = 0$ entonces $\rho = \rho_{max}$ donde ρ_{max} es la densidad máxima y por lo tanto el flujo es cero.

1.3. Relación fundamental

La importancia de la relación fundamental es evidente y en la actualidad, con instrumentos de mayor precisión para obtener datos del flujo vehicular en autopistas, se han hecho mediciones a mucha mayor escala y, basándose en la idea de Greenshields, se encontró que las relaciones de flujo-densidad para todas las autopistas son muy similares. El diagrama descrito por la relación flujo-densidad, se le conoce como diagrama fundamental (Fig.1.2).
La teoría de dos fases del flujo vehicular nos dice que la dinámica del tráfico vehicular puede separarse en flujo libre y tráfico congestionado. El flujo libre se produce cuando se tiene una cantidad relativamente baja de autos

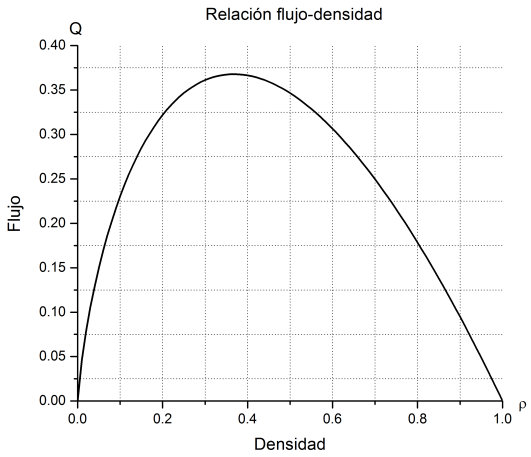

Figura 1.1: Diagrama de la relación fundamental de Greenberg normalizada

por kilómetro, permitiendo que los automovilistas puedan acelerar hasta la velocidad máxima permitida y, en términos de la relación fundamental, esto se interpreta como el aumento casi lineal del flujo de automóviles con respecto a la densidad de autos. Esto es hasta cierta cantidad promedio de autos por kilómetro conocido como capacidad de trabajo de una autopista y se le denota como punto crítico. Los datos empíricos que corresponden después del punto crítico muestran discontinuidades y son dispersos en el flujo de la relación fundamental ocasionando una caída abrupta de la velocidad promedio. El tráfico congestionado se define como el estado del tráfico en el cual la velocidad promedio es menor a la velocidad promedio mínima posible en el flujo libre [7]. Se destacan a continuación las siguientes características que debe presentar una relación fundamental:

- El flujo depende cuasi-linealmente de la densidad antes del punto crítico[2].

- Para densidades mayores al punto crítico existe una discontinuidad en el flujo.

[2]El punto crítico, o capacidad de trabajo, de una autopista, está definido como aquel punto donde el flujo presenta patrones correspondientes al tráfico congestionado.

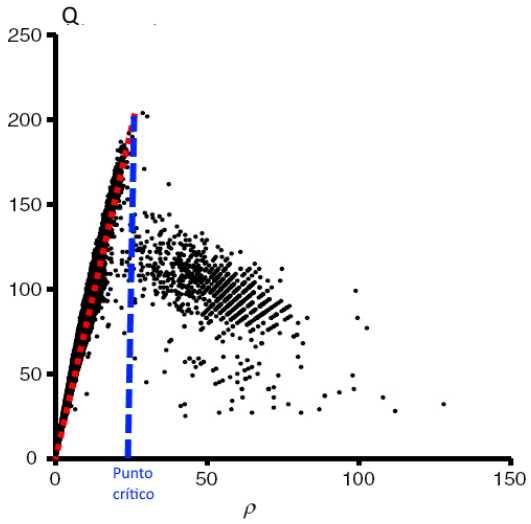

Figura 1.2: Diagrama fundamental heurístico

- Existe una región alrededor de la capacidad de trabajo de la autopista donde puede haber tanto tráfico congestionado como flujo libre.
- Los datos que corresponden a regiones de tráfico congestionado son dispersos.

Para la modelación de tráfico vehicular, es necesario ajustar los modelos de forma que nos sea posible inferir el comportamiento del flujo vehicular en una autopista, como las relaciones fundamentales empíricas lo hacen. Las correlaciones entre el flujo, velocidad y densidad, deberán mostrar las siguientes características importantes del comportamiento del tráfico vehicular:

1. Para densidades pequeñas la velocidad promedio de los autos tiene un máximo, reflejo de los límites de velocidad.
2. La velocidad promedio disminuye al aumentar la densidad.

$$\frac{dV(\rho)}{d\rho} \leq 0.$$

3. Para densidades grandes la velocidad promedio tiende a cero.

4. Existe una densidad máxima para la cual la velocidad promedio es cero.

Cabe señalar que las relaciones fundamentales teóricas propuestas por Greenshields y Greenberg cumplen con las propiedades mencionadas, sin embargo, es evidente que estos modelos no representan del todo los datos experimentales. Debido a la dificultad para describir una relación fundamental empírica por medio de una expresión matemática, se utilizan las relaciones fundamentales analíticas anteriores en ciertos problemas de modelación de tráfico vehicular. Sin embargo, basado en un ajuste de datos empíricos en carreteras alemanas, la relación fundamental teórica más utilizada hoy en día fue desarrollada por Kerner y Konhäuser (Fig.1.3).

$$\left(\frac{V_e(\rho)}{V_{max}}\right) = -3.72 \times 10^{-6} + \left(1 + Exp\left(\frac{\rho/\rho_{max} - 0.25}{0.06}\right)\right)^{-1}. \qquad (1.7)$$

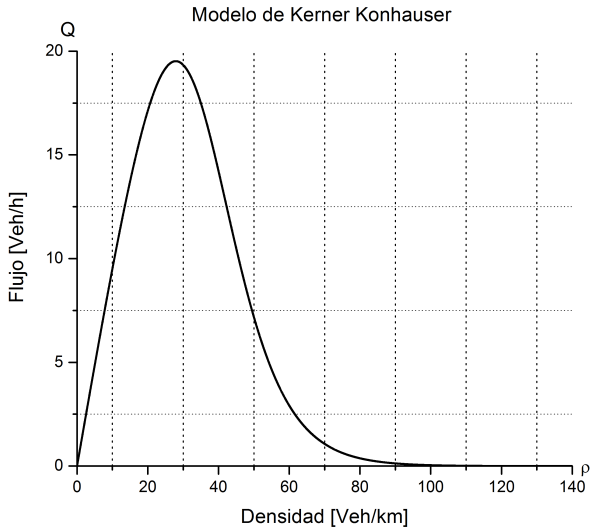

Figura 1.3: Ajuste del diagrama fundamental con $\rho_{max} = 140[Veh/Km]$, $V_{max} = 120[Km/Hr]$

1.4. Modelos macroscópicos

El estudio de fenómenos por medio de modelos matemáticos pueden ser abordados de diferentes formas resaltando propiedades o características del sistema de interés. El estudio del flujo vehicular puede abordarse desde un enfoque macroscópico, tal como Greenberg lo hizo, basado en una analogía entre el flujo vehicular y el flujo compresible. Es necesario considerar un gran número de autos circulando por una autopista o carretera para definir variables como densidad o velocidad promedio. Este tipo de enfoques ofrecen ciertas ventajas:

- Descripción cualitativa del comportamiento del fenómeno.
- Inferir resultados de forma analítica.
- Ofrece la posibilidad de introducir rampas de entrada y salida en una carretera o autopista en el estudio del flujo vehicular.
- Computacionalmente suelen ser más eficientes que otros enfoques, como los microscópicos, siempre y cuando no se utilicen autómatas celulares[1].

Capítulo 2

Modelación del flujo vehicular

2.1. Antecedentes

Los primeros intentos de modelar el flujo vehicular utilizando datos reales, ajustes empíricos y analogías con el flujo de fluidos compresibles presentados en el capítulo anterior, fueron desarrollados a lo largo de casi una década [1]. Lighthill-Whitham proponen en 1955 utilizar la ecuación de conservación de masa (1.3) junto con la ecuación de Greenshields (1.1), como ecuación constitutiva, para plantear un modelo con la capacidad de modelar el flujo vehicular basado en los datos experimentales que se tenían en aquel momento. Los modelos que tienen una sóla variable, como es el caso del modelo de Lighthill-Whitham, se les llaman modelos de primer orden y usualmente no son deseables debido a que presentan soluciones del tipo de onda de choque cuya formación puede ser interpretada como colisiones de vehículos en una región, lo cual no se considera. Con el objetivo de encontrar un modelo que no presente ondas de choque y se ajuste más a la realidad, Kerner y Konhäuser proponen el suyo basado en las ecuaciones de Navier-Stokes considerando una gran cantidad de autos circulando en una autopista, cuya velocidad promedio se calcula por medio de una dinámica independiente, es decir, se considera como otra variable. Los modelos en dos variables se les conocen como modelos de segundo orden. La ventaja de utilizar modelos de segundo orden es que éstos no presentan soluciones del tipo de onda de choque debido a que se introduce un término difusivo, además de ser capaces de modelar situaciones de embotellamientos en el flujo vehicular como otros patrones que existen en el tráfico congestionado.

2.2. Modelo de Lighthill-Whitham

El modelo macroscópico más popular, a pesar de ser el más viejo, fue propuesto por Lighthill y Whitham (1955) [10]. Su modelo está basado en un escenario donde la cantidad de autos en un circuito homogéneo se conserva. Dada la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{2.1}$$

Lighthill y Whitham cierran el sistema proponiendo la relación fundamental de Greenshields, que aún se sigue utilizando para investigaciones analíticas [10], como la ecuación constitutiva de manera que

$$Q(x,t) = Q_e(\rho(x,t)) = \rho(x,t)V_e(\rho(x,t)),$$
$$V_e(\rho) = V_{max}(1 - \rho/\rho_{max}).$$

Sustituyendo la relación fundamental de Greenshields en la ecuación de continuidad y desarrollando la derivada parcial se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dQ_e}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{2.2}$$

donde,

$$\frac{dQ_e}{d\rho} = \left(V_e(\rho) + \rho\frac{dV_e}{d\rho}\right).$$

Considerando que $dV_e/d\rho \leq 0$ entonces $dQ_e/d\rho \leq V_e(\rho)$, por lo que la solución de tipo de onda siempre se propaga en dirección opuesta a la velocidad promedio $V_e(\rho)$. La derivada total $dQ_e/d\rho$ determina la velocidad de propagación de la onda que viaja por las curvas características de la EDP. El modelo de Lighthill-Whitham ha sido utilizado como base para la teoría de ondas de choque y, a pesar de ser académicamente muy ilustrativo, su uso en la modelación de tráfico vehicular tiene sus desventajas. La formación de ondas de choque no son deseables debido a que no representan los datos empíricos y consecuentemente no reflejan la realidad. Para evitar la formación de ondas de choque, Whitham (1974) sugirió en su modelo introducir un término difusivo [10],

$$V = V_e(\rho) - D\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

de esta forma se tiene que el modelo de Lighthill-Whitham modificado es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(V_e(\rho) + \rho \frac{dV_e}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right),$$

donde $D > 0$ pertenece al término difusivo. Esta ecuación se puede resolver de forma analítica utilizando la transformación de Cole-Hopf (2.3) debido a que está relacionada a una ecuación lineal de transferencia de calor (Whitham, 1974).

$$\rho(x,t) = -\frac{2D}{w(x,t)} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \tag{2.3}$$

donde,

$$w(x,t) = \frac{1}{2D\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2D}\int_{\infty}^{x} \rho(s,0)ds} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4D^2 t}} d\xi.$$

2.3. Modelos de segundo orden

Los modelos de segundo orden, a diferencia de los modelos de primer orden, consideran la densidad y la velocidad como incógnitas. A partir del modelo de Lighthill-Whitham se empezaron a proponer una serie de modelos donde cada uno de estos aporta nuevos términos y ecuaciones con la finalidad de aproximarse mejor a las situaciones de la vida real. Estos modelos fueron planteados en diferentes marcos teóricos como por ejemplo el modelo de "car following", teoría de dinámica de fluidos incompresibles, teoría de dinámica de gases [10]. Los modelos que se presentan a continuación fueron base para el desarrollo del modelo más utilizado hoy en día propuesto por Kerner-Konhäuser.

2.3.1. Modelo de Payne

El modelo introducido por Payne (1971) complementa la ecuación de conservación por medio de una dinámica de velocidades basada en un modelo de "car following" propuesto por Newell G.F. (1961).

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\Delta t} \left(V_e(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - V \right), \tag{2.4}$$

en el cual el término difusivo es dependiente de la densidad

$$D(\rho) = 0.5 dV_e(\rho)/d\rho.$$

Este modelo introduce un término de relajación $(V_e(\rho) - V)/\Delta t$ que describe un ajuste en la velocidad de los conductores gobernado por la relación fundamental lo que provoca un aumento o disminución en su velocidad promedio dependiendo de la densidad local. También se introduce un término de advección $V\partial V/\partial x$ que describe la propagación del perfil de velocidad con respecto al gradiente de la velocidad de los autos. Este modelo a pesar de poder describir varios de los patrones del congestionamiento vehicular desafortunadamente es inestable para un cierto rango de densidades [10].

2.3.2. Modelo de Prigogine y Phillips

Como alternativa al modelo de Payne, Phillips (1979a, 1979b) propone el suyo, derivado del modelo de tráfico vehicular de Prigogine, el cual se compone por la ecuación de continuidad y la siguiente ecuación que describe la dinámica de la velocidad para los autos

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\tau(\rho)}\left(V_e(p) - V\right), \tag{2.5}$$

donde $\tau(\rho)$ es un término de relajación y $P(x,t) = \rho(x,t)\theta(x,t)$ es un término análogo a la presión en la teoría cinética de los gases donde $\theta(x,t)$ es la varianza de la velocidad de los autos en movimiento. Este modelo es capaz de modelar algunos patrones del congestionamiento vehicular como son los cúmulos de densidad que se detienen y avanzan de forma intermitente. Sin embargo no es numéricamente robusto y presenta inestabilidades como el modelo de Payne, además, en regiones de alta densidad, la presión del tráfico que disminuye con respecto a ρ provocando que los vehículos aceleren hacia regiones congestionadas lo cual no es realista [10].

2.3.3. Modelo de Kerner-Konhäuser

A partir del modelo de Prigogine, basado en la teoría del flujo vehicular cinético donde los automóviles se consideran como partículas [3], Kerner y Konhäuser plantean que en escenarios donde la densidad es alta dentro de una autopista o carretera, los conductores empiezan a perder libertad en el

movimiento y necesitan adaptarse a las circunstancias en las que se encuentran, viéndose obligados a reducir su velocidad y mantenerse casi siempre en un mismo carril. Esto da lugar a una analogía con fluidos compresibles en una dimensión de modo que las variables como densidad promedio $\rho(x,t)$ y velocidad promedio $V(x,t)$ tienen sentido. El modelo propuesto por Kerner-Konhäuser utiliza la ecuación de continuidad y, para cerrar el sistema, se propone una dinámica para la velocidad local de los automóviles (o ecuación de velocidad) que en su forma conservativa se expresa como una ecuación para el flujo.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(QV + \rho\Theta - \eta\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right), \tag{2.6}$$

donde $V_e(\rho)$ es la velocidad dada por el diagrama fundamental (1.7), $\eta > 0$ y pertenece al término análogo a la viscosidad de un fluido compresible, Θ es la varianza de la velocidad y $\tau\,[seg]$ es un parámetro de amortiguamiento para la aceleración promedio de los automovilistas. Además, el término

$$\frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right),$$

describe localmente el comportamiento del tráfico, simulando la capacidad de los conductores para ajustar su velocidad dependiendo de las circunstancias locales en las que se encuentra. Por otro lado, la presión del flujo vehicular se expresa como

$$P = \rho\Theta - \eta\frac{\partial V}{\partial x},$$

y, debido al término difusivo, se tiene un problema del tipo parabólico no lineal. Es fácil ver que si $\rho = \rho_e$ donde $0 \leq \rho_e \leq \rho_{max}$ es una constante y $Q = \rho V(\rho) = \rho_e V_e(\rho_e)$ dado por la relación fundamental, se tiene una infinidad de soluciones homogéneas del sistema (2.1) y (2.6). En los resultados que obtuvieron en su trabajo, Kerner y Konhäuser concluyeron que en una autopista, sin rampas ni cambio en el número de carriles, bastan pequeñas perturbaciones de densidad no homogéneas en un flujo vehicular inicialmente homogéneo para generar uno o varios cúmulos de automóviles al paso del tiempo los cuales se propagan como soluciones de tipo onda viajera a velocidad constante. Además existe la posibilidad de la unión entre varios cúmulos hasta formar uno sólo de mayor tamaño [3]. Cabe señalar que Sugiyama *et al.*

(2005) recrean de manera experimental con conductores reales y un circuito circular los resultados teóricos obtenidos por Kerner y Konhäuser.

2.4. Marco Teórico

Debido a que el modelo propuesto por Kerner-Konhäuser es uno de los más estudiados en la literatura por su capacidad de replicar varios fenómenos observados en el tráfico vehicular, es importante hacer un análisis de estabilidad lineal para tener conocimiento del comportamiento de las soluciones que son de tipo onda viajera. Para el análisis, se puede observar que el sistema dado por (2.1) y (2.6) satisface la solución homogénea,

$$\rho(x,t) = \rho_e, \qquad \rho_e \in [0, \rho_{max}],$$

$$\rho(x,t)V(x,t) = \rho_e V_e \quad donde \quad V(\rho_e) = V_e.$$

A continuación se introduce una pequeña perturbación a la solución homogénea en términos de una onda plana,

$$\rho(x,t) = \rho_e + \hat{\rho}(k,\gamma)Exp(ikx + \gamma t), \tag{2.7}$$

$$V(x,t) = V_e + \hat{V}(k,\gamma)Exp(ikx + \gamma t), \tag{2.8}$$

donde k es el número de onda, $\hat{\rho}(k,\gamma)$ y $\hat{V}(k,\gamma)$ no necesariamente son constantes y la parte real de γ nos permite determinar la estabilidad de la solución. Sustituyendo la solución homogénea perturbada en la ecuación de conservación (2.1) y considerando sólo los términos lineales tenemos que

$$(\gamma + ikV_e)\hat{\rho} + ik\rho_e\hat{V} = 0. \tag{2.9}$$

Por otro lado, para la ecuación de la dinámica de velocidad local

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\Theta_0\frac{\partial \rho}{\partial x} + \eta_0\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right),$$

se desarrolla la función $V_e(\rho)$ como serie de Taylor alrededor de $\rho = \rho_e$.

$$V_e(\rho) = V_e(\rho_e) + V_e'(\rho_e)(\rho - \rho_e) + O(\rho^2).$$

Utilizando (2.7) en la ecuación anterior,

$$= V_e(\rho_e) + V_e'(\rho_e)\rho_e + V_e'(\rho_e)\hat{\rho}Exp(ikx + \gamma t) - \rho_e V_e'(\rho_e) + O(\rho^2),$$

$$= V_e(\rho_e) + V_e'(\rho_e)\hat{\rho}Exp(ikx + \gamma t) + O(\rho^2). \tag{2.10}$$

Para simplificar los términos denotamos $Exp(ikx + \gamma t) = e^{\beta}$. La sustitución directa de las ecuaciones (2.7),(2.8) y (2.10) en la ecuación de la dinámica de velocidad local obtenemos

$$\left(\rho_e + \hat{\rho}e^{\beta}\right)\left(\gamma\hat{V}e^{\beta} + (V_e + \hat{V}e^{\beta}))(ik\hat{V}e^{\beta})\right) =$$

$$= -ik\Theta_0\hat{\rho}e^{\beta} - k^2\eta_0\hat{V}e^{\beta} + ...$$

$$... + \frac{\rho_e + \hat{\rho}e^{\beta}}{\tau}\left(V_e(\rho_e) + V_e'(\rho_e)\hat{\rho}e^{\beta} - V_e - \hat{V}e^{\beta} + O(\rho^2)\right).$$

Reduciendo términos semejantes, dividiendo entre e^{β} y tomando en cuenta sólo los términos lineales se tiene que,

$$\left(\frac{ik\Theta_0}{\rho_e} - \frac{V_e'}{\tau}\right)\hat{\rho} + \left(\gamma + ikV_e + \frac{\eta_0 k^2}{\rho_e} + \frac{1}{\tau}\right)\hat{V} = 0. \tag{2.11}$$

Se plantea entonces el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} \gamma + iV_e k & ik\rho_e \\ \left(\frac{ik\Theta_0}{\rho_e} - \frac{V_e'}{\tau}\right) & \left(\gamma + ikV_e + \frac{\eta_0 k^2}{\rho_e} + \frac{1}{\tau}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Para que el sistema admita una solución no trivial, se toma en cuenta que $det(A) = 0$ y entonces

$$(\gamma + iV_e k)\left(\gamma + ikV_e + \eta_0\frac{k^2}{\rho_e} + \frac{1}{\tau}\right) - ik\rho_e\left(\frac{ik\Theta_0}{\rho_e} - \frac{V_e'}{\tau}\right) = 0. \tag{2.13}$$

Desarrollando la ecuación anterior en términos de $\gamma(k)$ y definiendo las siguientes variables:

$$T = \frac{1}{\tau} + \frac{\eta_0 k^2}{\rho_e},$$

$$\alpha_r = k^2\Theta_0,$$

$$\alpha_i = -\frac{k\rho_e V_e'}{\tau},$$

se tiene que,

$$\gamma(k) = \frac{1}{2}\left(-(T + 2ikV_e) \pm \sqrt{T^2 - 4\alpha_r + i(4\alpha_i)}\right) \tag{2.14}$$

Teorema 1 *Sea* $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, $r = \mid \xi \mid$. *La solución de la ecuación* $z^2 = \xi$ *está dado por* $\pm w$ *donde,*

$$w = \sqrt{r}\frac{z + r}{\mid z + r \mid}.$$

y además,

$$w = \frac{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/4}}{\sqrt{2}} \frac{\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} + i\xi_2^2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}}.$$

Utilizando el teorema anterior, la parte real de (2.14) está dado por:

$$\gamma(k)_{\pm} = -\frac{T}{2} \pm \frac{((T^2 - 4\alpha_r)^2 + \alpha_r^2)^{1/4}(T^2 - 4\alpha_r + \sqrt{(T^2 - 4\alpha_r)^2 + \alpha_r^2})}{2\sqrt{2}\sqrt{(T^2 - 4\alpha_r)^2 + \alpha_r^2 + (T^2 - 4\alpha_r)\sqrt{(T^2 - 4\alpha_r)^2 + \alpha_r^2}}},$$

y debido a que $-T/2$ es negativo, observamos que solo la raíz positiva de $\gamma(k)$ puede ser mayor o igual que cero. Para hacer un análisis local con respecto a las raíces reales de $\gamma(k)$ se hace un desarrollo en serie de Taylor. Primero, para la ecuación (2.13) evaluada $k = 0$ se tiene que,

$$\gamma(0)\left(\gamma(0) + \frac{1}{\tau}\right) = 0. \tag{2.15}$$

Se considera la raíz $\gamma_+(0) = 0$ y derivando implícitamente (2.13),

$$(\gamma(k)+iV_e k)\left(\gamma'(k) + iV_e + \frac{2\eta_0 k}{\rho_e}\right)+(\gamma'(k)iV_e)\left(\gamma(k) + ikV_e + \frac{\eta_0 k^2}{\rho_e} + \frac{1}{\tau}\right) -,$$

$$... - i\rho_e\left(\frac{ik\Theta_0}{\rho_e} - \frac{V_e'}{\tau}\right) - ik\rho_e\left(\frac{i\Theta_0}{\rho_e}\right) = 0.$$

Evaluando en $k = 0$,

$$(\gamma'(0) + iV_e)\left(\frac{1}{\tau}\right) + \frac{i\rho_e V_e'}{\tau} = 0,$$

$$\gamma'(0) = -i(\rho_e V_e' + V_e). \tag{2.16}$$

Derivando nuevamente de forma implícita (2.13),

$$(\gamma(k) + iV_e k)\left(\gamma''(k) + 2\frac{\eta_0}{\rho_e}\right) + (\gamma'(k) + iV_e)\left(\gamma'(k) + iV_e + 2\frac{2\eta_0 k}{\rho_e}\right) +,$$

$$+\gamma''(k)\left(\gamma(k) + ikV_e + \frac{\eta_0 k^2}{\rho_e} + \frac{1}{\tau}\right) +,$$

$$+(\gamma'(k) + iV_e)\left(\gamma'(k) + iV_e + 2\frac{\eta_0 k}{\rho_e}\right) + 2\Theta_0 = 0.$$

Evaluando en $k = 0$,

$$\gamma''(0) = -2\tau(\Theta_0 - \rho_e^2(V_e')^2). \tag{2.17}$$

Utilizando las expresiones anteriores en la serie de Taylor

$$\gamma_+(k) = \gamma(0) + \gamma'(0)k + \frac{1}{2}\gamma''(0)k^2 + O(k^3),$$

Se obtiene que

$$\gamma_+(k) = -i(\rho_e V_e' + V_e)k - \tau k^2(\Theta_0 - \rho_e^2(V_e')^2) + O(k^3).$$

Así,

$$R_e(\gamma_+) = -\tau k^2(\Theta_0 - \rho_e^2(V_e')^2) + O(k^3). \tag{2.18}$$

Dado $\tau > 0$, para que $R_e(\gamma_+) \leq 0$ se deduce la condición de estabilidad (fig. 2.1) establecida por:

$$\sqrt{\Theta_0} \geq \rho_e \mid V_e' \mid . \tag{2.19}$$

Es decir, para aquellos valores de Θ_0 y ρ_e que cumplan con la condición de estabilidad, la solución perturbada tiende a la solución homogénea. De no ser el caso, entonces se producen soluciones de tipo de onda viajera.

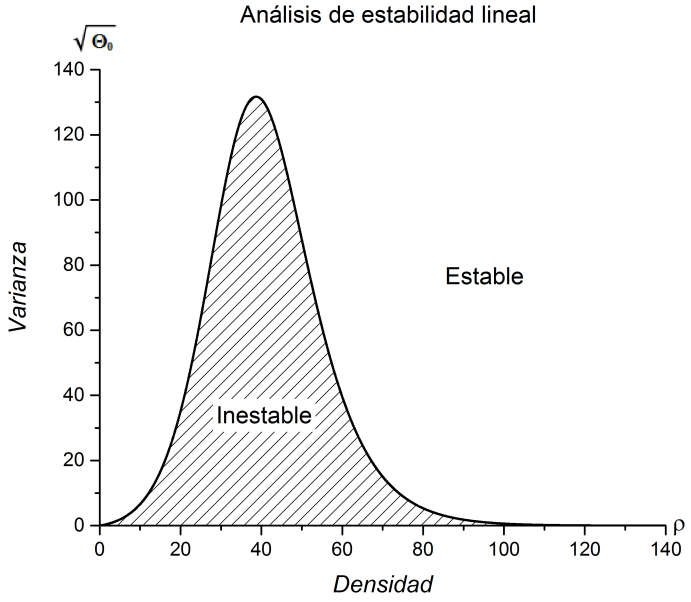

Figura 2.1: Perfil de la condición de estabilidad (2.19)

2.5. Solución numérica

Para este trabajo utilizaremos principalmente el modelo de primer orden de Lighthill-Whitham (2.1) y el modelo de segundo orden de Kerner-Konhäuser, el cual está conformado por la ecuación de continuidad (1.3) y la ecuación que describe la dinámica de la velocidad (2.6), en un circuito circular con o sin rampas de entrada/salida de autos o con un cambio en el número de carriles para cierta región. Las condiciones de frontera para el flujo incompresible en una dimensión junto con la condición inicial se propone como:

$$\rho(0,t) = \rho(L,t) \quad t > 0,$$

$$\rho(x,0) = \varphi(x) \quad 0 < x < L.$$

donde L es la longitud de la periferia del circuito. Dentro del conjunto de esquemas de diferencias finitas para aproximar soluciones de EDP, es necesario hacer una discretización del dominio (después de haber acotado de forma adecuada la región de estudio) y proponer condiciones de frontera según el

requerimiento del sistema asociado al problema. Dado un tiempo $T > 0$, sean N y M dos números naturales tales que, la discretización en el tiempo y espacio respectivamente está dado como $t_j = j\Delta t$ para $j = 0, 1, ..., M$ y $x_i = a + ih$ para $i = 0, 1, ..., N$, donde, $\Delta t = T/M$ y $h = (b-a)/N$, $x \in (a, b)$.

2.5.1. Esquemas conservativos

Los modelos expuestos en las secciones anteriores fueron propuestos bajo la hipótesis de conservación de la densidad de autos en una región y es por esto que es preferible hacer uso de esquemas conservativos en diferencias finitas. Para el caso de las ecuaciones de primer orden tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Aproximar la solución al problema anterior, consiste en determinar $U_i^j \approx u(x_i, x_j)$. De todos los esquemas conservativos que se han desarrollado, se presentan dos con los cuales se resolverán algunos ejemplos y experimentos propuestos.

1. Upwind

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \begin{cases} \frac{\Delta t}{h}\left(f_i^j - f_{i-1}^j\right) & si \quad f'(U_i^j) > 0, \\ \frac{\Delta t}{h}\left(f_{i+1}^j - f_i^j\right) & si \quad f'(U_i^j) < 0. \end{cases}$$

2. Lax-Wendroff

$$U_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\left(U_i^j + U_{i+1}^j - \tfrac{\Delta t}{h}\left(f_{i+1}^j - f_i^j\right)\right), \quad (predictor),$$

$$U_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\left(U_i^j + U_{i-1}^j - \tfrac{\Delta t}{h}\left(f_i^j - f_{i-1}^j\right)\right),$$

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \tfrac{\Delta t}{h}\left(f_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}\right), \quad (corrector),$$

donde $f_i^j = f(U_i^j)$. Para ver el comportamiento de estos dos esquemas, se resolverá el modelo de Lighthill-Whitham en un circuito homogéneo sin entrada ni salida de autos.

Ejemplo 1 *Modelo de Lighthill-Whitham aplicado a la modelación de flujo vehicular en un circuito homogéneo. Se utiliza la relación fundamental de Greenshields (1.1) para el flujo $Q(\rho)$.*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$\rho(x,0) = \rho_e \left(1 + CSen\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right), \quad 0 < x < L,$$

$$\rho(0,t) = \rho(L,t), \quad t > 0,$$

donde $\rho_e = 28[veh/km]$, $C = 0.1$, $L = 12[km]$, $v_{max} = 120[km/hr]$ *y* $\rho_{max} = 140[veh/km]$.

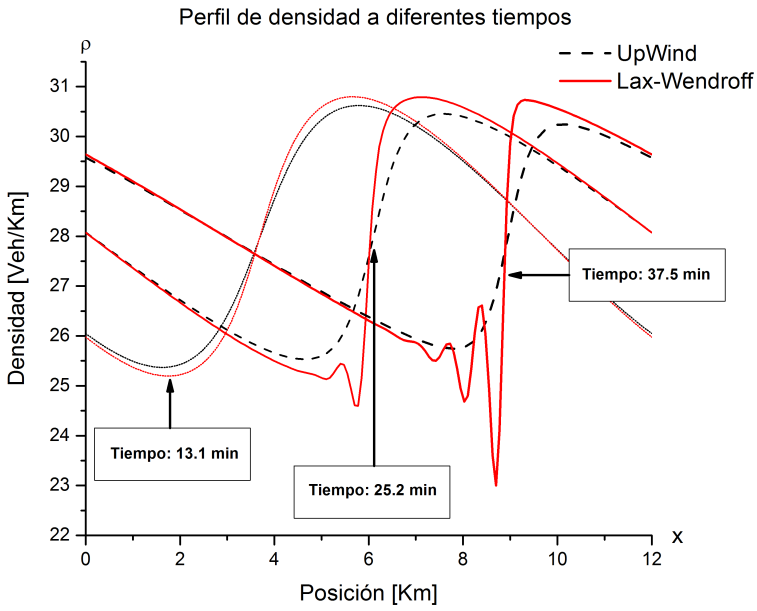

Figura 2.2: Solución numérica con $\rho_e = 28[veh/km]$ (Ejemplo 1)

al resolver este ejemplo a diferentes tiempos y por medio de los esquemas de UP-wind y Lax-Wendroff (Fig. 2.2), se puede apreciar la aparición de una onda de choque en $t = 25.2[min]$. Se observa que la solución numérica

obtenida por el esquema de Lax-Wendroff presenta oscilaciones en donde se encuentra la onda de choque debido a la dispersión[1] del método. Por otro lado, el esquema de Up-Wind suaviza la solución y esto es debido a que este esquema presenta difusión numérica[2]. La aparición de ondas de choque no corresponden a los datos empíricos y esto es reflejo de que los conductores no chocan entre sí al momento de haber una congestión vehicular sino que deben de frenar gradualmente y la forma para representar este cambio de velocidad es introduciendo un término de difusión.

2.5.2. Solución numérica de ecuaciones vectoriales conservativas

Los modelos de segundo orden se caracterizan por tener dos variables desconocidas, es decir, se tiene un sistema de EDP de dos incógnitas. El modelo propuesto por Kerner-Konhäuser es un modelo de segundo orden que incluye un término de difusión ($\eta\frac{\partial V}{\partial x}$) con el cual se evitan las ondas de choque y también se introduce un término de relajación para simular el tiempo de reacción de los conductores para acelerar o frenar dependiendo de sus circunstancias locales. Para resolver este sistema de EDP se utilizará el esquema de Lax-Wendroff en su forma vectorial. Supongamos que se tiene el siguiente problema:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{s}(\mathbf{u}),$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x),$$

$$\mathbf{u}(0,t) = \mathbf{u}(L,t),$$

donde $\mathbf{f}$ y $\mathbf{s}$ son funciones vectoriales de clase $C^1([0,L]\times[0,T])$ y $\mathbf{u}_0(x) \in C^0[0,L]$.

[1] La dispersión numérica se debe a un factor de amplitud introducido por errores numéricos en la solución aproximada. [1]

[2] La difusión numérica se debe al error relativo en el ángulo de fase provocando que la solución numérica se rezague o se propague más rápido de la solución exacta. [1]

1. Lax-Wendroff vectorial

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} &= \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{U}_i^j + \mathbf{U}_{i+1}^j - \tfrac{\Delta t}{h}\left(\mathbf{f}_{i+1}^j - \mathbf{f}_i^j\right) + \tfrac{\Delta t}{2}\left(\mathbf{s}_{i+1}^j + \mathbf{f}_i^j\right)\right), \\
\mathbf{U}_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} &= \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{U}_i^j + \mathbf{U}_{i-1}^j - \tfrac{\Delta t}{h}\left(\mathbf{f}_i^j - \mathbf{f}_{i-1}^j\right) + \tfrac{\Delta t}{2}\left(\mathbf{s}_{i-1}^j + \mathbf{f}_i^j\right)\right), \\
\mathbf{U}_i^{j+1} &= \mathbf{U}_i^j - \tfrac{\Delta t}{h}\left(\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}\right) + \tfrac{\Delta t}{2}\left(\mathbf{s}_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} + \mathbf{s}_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}\right),
\end{aligned}$$

donde $s_i^j = s(U_i^j)$. Se resuelve el siguiente ejemplo para observar la evolución de la aparición y propagación de un cúmulo de densidad en un circuito con un flujo continuo de autos sin obstáculos.

Ejemplo 2 *Supongamos que se tiene el siguiente problema:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho V \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V^2 + \boldsymbol{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right) \end{pmatrix}, \quad x \in (-12, 12)$$

$$\rho(-12, t) = \rho(12, t) \quad V(-12, t) = V(12, t)$$

en donde la presión del tráfico P para este modelo es de la forma:

$$P = \rho\Theta - \eta\frac{\partial V}{\partial x},$$

con $\Theta = (45[km/hr])^2$, $\eta = 600[km/hr]$ y $\tau = 30[seg]$ como tiempo de relajación. El término $V_e(\rho)$ es como se describe en el diagrama fundamental propuesto por Kerner-Konhäuser (1.7) con $\rho_{max} = 140[veh/km]$ y $V_{max} = 120[km/hr]$. La condición inicial está dada por:

$$\rho(x, 0) = \rho_e + 8Cosh^{-2}(2(x - x_0)) - 4Cosh^{-2}(2(x - x_1)),$$
$$\rho(x, 0)V(x, 0) = \rho_e V_e(\rho_e),$$

donde, $\rho_e = 28[veh/km]$, $x_0 = -6$ y $x_1 = 6$.

Este ejemplo se resolvió utilizando el método numérico mencionado y debido a que el problema es del tipo parabólico, por el término difusivo $\eta\frac{\partial V}{\partial x}$, se tomó como condición que $\Delta t = h^2$ con $h = 0.07$. Se presentan varios perfiles de

densidad para distintos tiempos (ver Figura 2.3): en el caso para el tiempo $t = 15[min]$ se observa la formación de cuatro cúmulos de densidad de diferentes tamaños; cuando el tiempo $t = 27[min]$, muchos de estos cúmulos se han unido para formar uno que es más ancho que los anteriores. Este perfil de densidad presenta la unión de los dos últimos cúmulos que aparecen. Finalmente para $t = 72[min]$, todos los cúmulos de densidad se han unido y se ha generado un cúmulo de densidad aun cuando no existen obstáculos en el circuito. Es importante señalar que este patrón emerge a partir de una pequeña perturbación no homogénea en la condición inicial. Debido a ella se forman varios cúmulos de densidad en el flujo vehicular y los cúmulos se unen hasta formar uno sólo que se propaga sin cambiar su forma a velocidad constante el cual se le conoce como onda viajera.

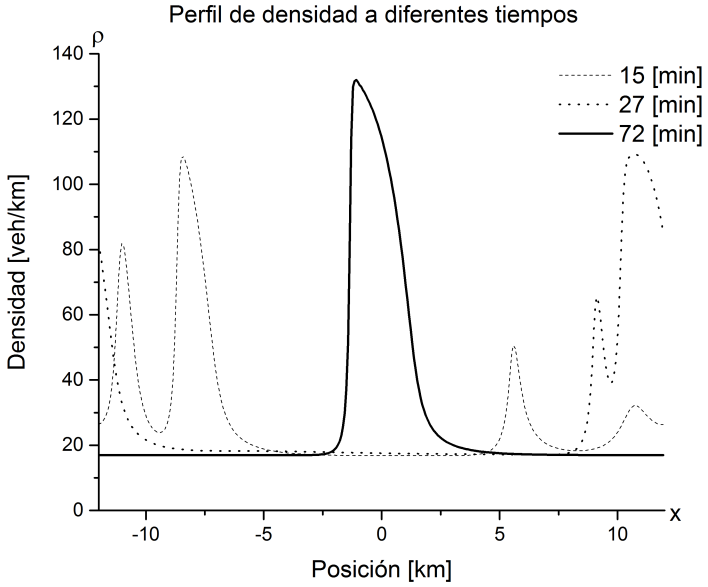

Figura 2.3: Solución numérica por el esquema de Lax-Wendroff (Ejemplo 2)

Para verificar los resultados obtenidos en el análisis de estabilidad lineal se proponen a continuación dos experimentos cuyo objetivo es corroborar el resultado analítico. En el problema anterior se pudo observar la aparición de un cúmulo de densidad debido a que los parámetros Θ y ρ_e se encuentran en la región dónde la solución es inestable según la relación (2.19).

Experimento 1 *Considere el problema anterior con* $\rho_e = 22[veh/km]$ *y la siguiente condición inicial:*

$$\rho(x,0) = \rho_e + 4Sin\left(\frac{\pi x}{3}\right),$$
$$\rho(x,0)V(x,0) = \rho_e V_e(\rho_e).$$

Para este experimento se puede observar que los cúmulos de densidad generados por la condición inicial se desvanecen a lo largo del tiempo hasta que la solución tiende a la solución homogénea (ver Figura 2.4).

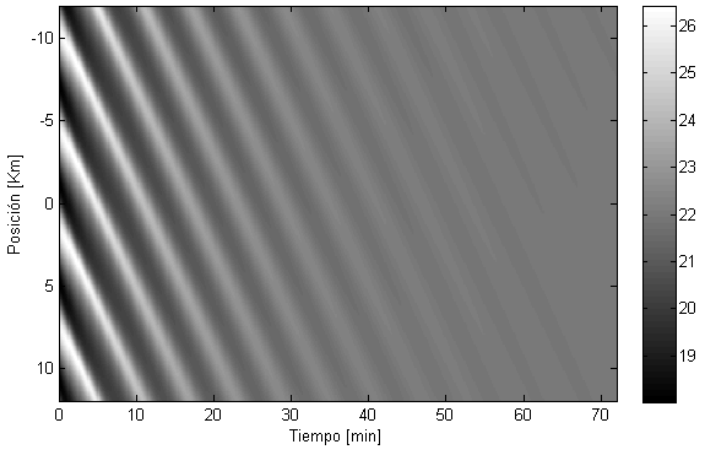

Figura 2.4: Perfil de densidad cuando $\rho_e = 22[veh/km]$ (Experimento 1)

Experimento 2 *Se considera el problema anterior con* $\rho_e = 60[veh/km]$ *y la siguiente condición inicial:*

$$\rho(x,0) = \rho_e + 4Sin\left(\frac{\pi x}{3}\right),$$
$$\rho(x,0)V(x,0) = \rho_e V_e(\rho_e).$$

Cabe señalar que para estos experimentos se consideran valores específicos de ρ_e, dado que $\Theta = (45[km/hr])^2$ es fijo, los cuales pertenecen a la región de estabilidad de la solución (ver Figura (2.1)).

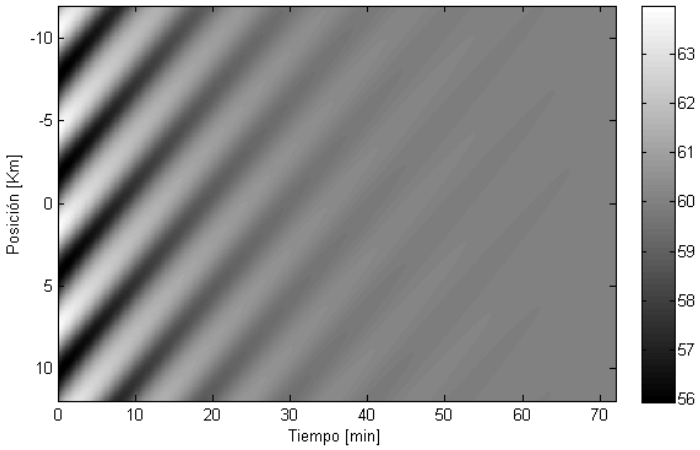

Figura 2.5: Perfil de densidad para $\rho_e = 60[veh/km]$ (Experimento 2)

Nuevamente podemos observar que los cúmulos de densidad que existen a lo largo del dominio se desvanecen al pasar el tiempo hasta que la solución tiende a la solución homogénea.

Capítulo 3

Flujo vehicular con rampas de entrada y salida de autos

En el capítulo anterior se mostraron diferentes tipos de modelos con los cuales se ha estudiado el flujo vehicular en un circuito homogéneo. Debido a que este escenario no es realista, en este capítulo se modifican los modelos usuales para adaptarlos a un circuito donde existen rampas de entrada y salida de autos o un cuello de botella ocasionado por el cambio en el número de carriles en un cierto tramo. Para el modelo de primer orden de Lighthill-Whitham se añade un término en la ecuación de continuidad que deberá cumplir con ciertas características. En el modelo de segundo orden descrito por Kerner-Konhäuser, además de modificar la ecuación de continuidad, se deduce la ecuación de balance que describe la dinámica de velocidades de los autos.

3.1. Flujo de rampas de entrada y salida

Los efectos debidos a las rampas de entrada y salida de autos, como al cambio de número de carriles, se han estudiado con las primeras simulaciones del tráfico; sin embargo, no se realizaron para ese entonces estudios sistemáticos de los fenómenos que se producen ni las condiciones en las que se producen [10]. Varios experimentos se han llevado a cabo a lo largo del tiempo con el objetivo de modelar algunos fenómenos del tráfico vehicular cuando se tienen rampas de autos, como lo es el flujo libre y también algunos patrones del flujo congestionado. En los trabajos de Kerner *et al.* (1995) se logró simular la formación de un congestionamiento vehicular dentro de un circuito

con rampas de entrada y salida de autos, junto con una condición inicial homogénea, cuando el flujo de la rampa de salida era un poco mayor que el flujo de la rampa de entrada. En 1998, bajo el mismo escenario, H.Y. Lee reproduce un patrón del tráfico congestionado al cual le llama "recurring hump" (por la comparación de osciladores químicos [10]) utilizando el modelo de Kerner-Konhäuser, pero a diferencia del modelo original, Lee utiliza otra relación fundamental $V_e(\rho) = (1 - \rho/\rho_m)/(1 + E(\rho/\rho_m)^4)$, donde E es una constante. De manera independiente, Helbing y Treiber publican su modelo del tráfico vehicular cuando se tienen rampas a partir de la siguiente ecuación de balance

$$\frac{dN}{dt} = Q_{in}(x,t) - Q_{out}(x,t) + Q_{rmp}(x,t).$$

Siguiendo los mismos pasos en la ecuación (1.2), cuando se dedujo la ecuación de continuidad se obtiene

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = \nu(x,t),$$

donde $\nu(x,t)$ representa el flujo vehicular en las rampas. Esta función deberá ser cero en todo punto donde no exista ninguna forma de que los vehículos ingresen o salgan del circuito. En la literatura se consideran las rampas como secciones de las carreteras que cuentan con más carriles con el fin de que los conductores aceleren (desaceleren) para ingresar (salir) del flujo de autos. Es claro que en México este tipo de rampas pueden o no existir. En muchos casos las rampas son pequeñas entradas y salidas por las cuales los conductores deberán ingresar o salir del flujo vehicular de manera casi inmediata. Con la motivación de modelar este tipo de entradas en este trabajo, se propone el término fuente $\nu(x,t)$ en la ecuación de continuidad de la siguiente forma,

$$\nu(x,t) = q^e_{rmp} Exp\left(-\frac{(x-x_e)^2}{\sigma}\right) - q^s_{rmp} Exp\left(-\frac{(x-x_s)^2}{\sigma}\right), \qquad (3.1)$$

donde el flujo de las rampas es constante. Además $q^e_{rmp} \geq 0$, representa el flujo de entrada en la posición x_e y $q^s_{rmp} \geq 0$ representa el flujo de salida en x_s. Además, el parámetro $\sigma > 0$ es lo suficientemente pequeño para que la función $\nu(x,t)$ represente la entrada y salida de autos de forma casi puntual. El modelo de Lighthill-Whitham en un circuito de periferia L con rampas de entrada y salida casi puntuales se plantea como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = \nu(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{3.2}$$

$$\rho(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

$$\rho(0,t) = \rho(L,t), \quad t > 0,$$

3.2. Solución numérica del modelo de primer orden con rampas de entrada y salida de autos.

Se considera el modelo de Lighthill-Whitham con rampas de entrada y salida de autos con el propósito de realizar una serie de simulaciones en diferentes escenarios de un modelo simplificado del periférico de la ciudad de México. Esto es para observar los distintos comportamientos de las soluciones numéricas que se pueden obtener variando la condición inicial junto con la relación fundamental propuesta por Greenshields (1.1) o la propuesta por Kerner-Konhäuser (1.7). Los experimentos en esta sección tienen la finalidad de obtener conclusiones útiles para un primer acercamiento en la modelación del tráfico vehicular en México.

Ejemplo 3 *Se considera un circuito cerrado de longitud L que consta de un sólo carril. En este problema se comparan las soluciones obtenidas por el método de Lax-Wendroff para un circuito con rampas y sin rampas (ver ejemplo del capítulo anterior) para observar las diferencias entre los resultados. Se considera un circuito con rampas de entrada y salida con flujo constante $q_{rmp} = 600[veh/hr]$. La ecuación de primer orden a resolver es*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = \nu(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{3.3}$$

$$\nu(x,t) = q_{rmp}\left(Exp\left(-\frac{(x-x_e)^2}{\sigma}\right) - Exp\left(-\frac{(x-x_s)^2}{\sigma}\right)\right), \quad \rho > 0,$$

$$\rho(x,0) = \rho_e \left(1 + CSen\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right), \quad 0 < x < L,$$

$$\rho(0,t) = \rho(L,t), \quad t > 0,$$

donde $x_e = 4[km]$, $x_s = 8[km]$, $C = 0.1$, $L = 12[km]$, $v_{max} = 120[km/hr]$, $\rho_{max} = 140[veh/km]$ *y* $\sigma = 0.005$.

Para resolver este problema se utilizó el esquema numérico de Lax-Wendroff con $h = 0.01$ y $\Delta t = h^2$. Primero se muestran los resultados utilizando la relación fundamental de Greenshields (1.1) variando el parámetro de la condición inicial ρ_e

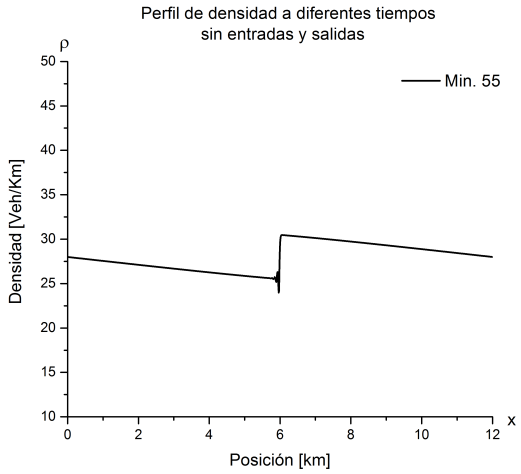

Figura 3.1: Perfil de densidad con $\rho_e = 28[veh/km]$. (Ejemplo 1)

Las soluciones fueron obtenidas con el parámetro $\rho_e = 28[veh/km]$. La Figura (3.1) corresponde al ejemplo del capítulo anterior donde el circuito es homogéneo. Se puede apreciar la formación de una onda de choque para $t = 55[min]$ y representa un aumento instantáneo en la densidad. En la figura (3.2) se observa claramente el mismo patrón cuando se consideran las rampas de entrada y salida de autos. Sin embargo, en el intervalo $4 \leq x \leq 8$, es evidente un aumento en la densidad debido la entrada de autos en el punto $x = x_e$ y la salida de autos en el punto $x = x_s$.

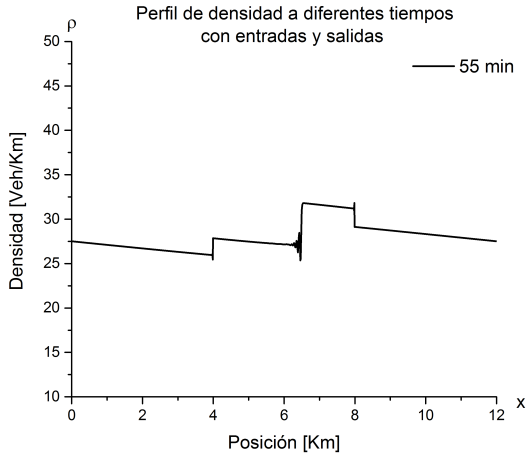

Figura 3.2: Perfil de densidad con $\rho_e = 28[veh/km]$. (Ejemplo 3)

3.3. Dinámica de velocidad para modelos de segundo orden con rampas

En los modelos de segundo orden, además de modificar la ecuación de continuidad, es necesario incluir un término de aceleración $A(x,t)$ que represente únicamente la velocidad promedio con la cual los vehículos entran o salen de un circuito. De esta forma, la ecuación de movimiento descrita por Navier-Stokes para fluidos incompresibles en una dimensión, base de la dinámica de velocidad en el modelo de Kerner-Konhäuser, se establece como:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - V}{\tau} - \frac{\Theta}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + A(x,t), \tag{3.4}$$

donde $A(x,t)$ describe el cambio de la velocidad local $V(x,t)$ donde existen rampas. Treiber *et al.* (2013) calcula $A(x,t)$ suponiendo que la velocidad de aquellos autos que ingresan a la autopista es menor a la velocidad local $V_{rmp} < V$, donde V_{rmp} es constante. Por otro lado, aquellos autos que quieran abandonar del circuito deberán desacelerar en promedio hasta alcanzar la velocidad V_{rmp} antes de salir [6]. Treiber propone entonces el término $A(x,t)$

de la siguiente forma:

$$A(x,t) = \frac{V_{rmp} - V(x,t)}{\rho(x,t)}|\nu(x,t)|. \tag{3.5}$$

Es preferible trabajar el modelo de segundo orden en su forma conservativa debido a que existen métodos numéricos rigurosos para resolver numéricamente este tipo de problemas como lo es el esquema conservativo de Lax-Wendroff. Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} P &= \rho\Theta - \eta\frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= \Theta\frac{\partial \rho}{\partial x} - \eta\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde Θ y η son constantes y representa la varianza de la velocidad promedio y η es un término difusivo. Partiendo de la ecuación (3.4) se tiene,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho}{\rho}\frac{V_e(\rho) - V}{\tau} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho}(V_{rmp} - V)|\nu(x,t)|,$$

$$\rho\frac{\partial V}{\partial t} + \rho V\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + (V_{rmp} - V)|\nu(x,t)|,$$

$$\begin{aligned} -\rho V\frac{\partial V}{\partial x} - V^2\frac{\partial \rho}{\partial x} + V\nu(x,t) + \rho\frac{\partial V}{\partial t} + 2\rho V\frac{\partial V}{\partial x} + V^2\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} &= ... \\ = \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right) + (V_{rmp} - V)|\nu(x,t)| + V\nu(x,t). \end{aligned}$$

Por la ecuación de continuidad ($\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V}{\partial x} = \nu(x,t)$) tenemos lo siguiente:

$$V\frac{\partial \rho}{\partial t} = V\nu(x,t) - V\frac{\partial \rho V}{\partial x} = V\nu(x,t) - V\rho\frac{\partial V}{\partial x} - V^2\frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Así,

$$V\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial V}{\partial t} + 2\rho V\frac{\partial V}{\partial x} + V^2\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right) + (V_{rmp} - V)|\nu(x,t)| + V\nu(x,t),$$

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V^2 + P\right) = \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right) + (V_{rmp} - V)|\nu(x,t)| + V\nu(x,t),$$

y finalmente,

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V^2 + P\right) = z(x,t), \tag{3.7}$$

$$z(x,t) = \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right) + (V_{rmp} - V)|\nu(x,t)| + V\nu(x,t).$$

De esta manera se obtiene la dinámica de velocidades en su forma conservativa.

3.3.1. Solución numérica del modelo de segundo orden con rampas de entrada y salida de autos

Se considera el mismo escenario descrito en el ejemplo anterior, el cual consta de un circuito con un sólo carril de periferia L con rampas de entrada y salida de autos. Para analizar la sensibilidad de los parámetros ρ_e y $q_{rmp}^{e,s}$ se proponen varios experimentos cuyas soluciones deberán satisfacer lo que intuitivamente se esperaría al variar la cantidad de autos que entran con respecto a los que salen.

Ejemplo 4 *En este problema se observan las soluciones obtenidas por el método de Lax-Wendroff para un circuito con rampas haciendo uso de la relación fundamental propuesta por Kerner-Kornhäuser. Es de utilidad comparar los resultados obtenidos en el* ***Ejemplo 2*** *del capítulo anterior para el cual se resuelve el mismo problema pero sin rampas de autos. Se considera inicialmente el mismo flujo para la rampa de entrada como la de salida de autos y está dado por* $q_{rmp}^{e,s} = q_{rmp} = 600[veh/hr]$. *Se resolverá a continuación la siguiente ecuación:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho V \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V^2 + \boldsymbol{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu(x,t) \\ z(x,t) \end{pmatrix}, \quad x \in (-12, 12) \tag{3.8}$$

donde,

$$\nu(x,t) = q_{rmp}\left(Exp\left(-\frac{(x+8)^2}{\sigma}\right) - Exp\left(-\frac{(x-8)^2}{\sigma}\right)\right), \quad \sigma > 0,$$

$$z(x,t) = \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right) + (V_{rmp} - V)|\nu(x,t)| + V\nu(x,t).$$

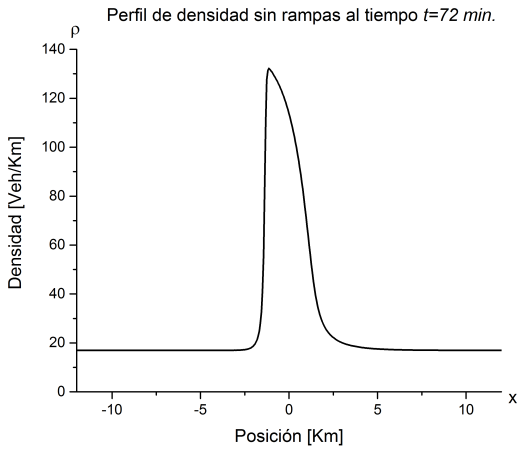

Figura 3.3: Perfil de densidad para $\rho_e = 28[veh/km]$ (Ejemplo 2)

Se consideran las condiciones de frontera periódicas,

$$\rho(-12,t) = \rho(12,t), \quad V(-12,t) = V(12,t),$$

con $\Theta = (45[km/hr])^2$, $\eta = 600[km/hr]$, $V_{rmp} = 15[km/hr]$, $\sigma = 0.015$ *y* $\tau = 30[seg]$ *como tiempo de relajación. Las rampas de entrada y salida de autos están localizadas en* $x_e = -8$, $x_s = 8$. *El término* $V_e(\rho)$ *es como se describe en el diagrama fundamental propuesto por Kerner-Konhäuser con* $\rho_{max} = 140[veh/km]$ *y* $V_{max} = 120[km/hr]$. *La condición inicial está dada por:*

$$\rho(x,0) = \rho_e + 8Cosh^{-2}(2(x - x_0)) - 4Cosh^{-2}(2(x - x_1)),$$

$$\rho(x,0)V(x,0) = \rho_e V_e(\rho_e),$$

donde, $x_0 = -6$,$x_1 = 6$ *y* $\rho_e = 28[veh/km]$.

Dada la existencia de un término difusivo se seleccionó $h = 0.03$ y $\Delta t = h^2/5$.

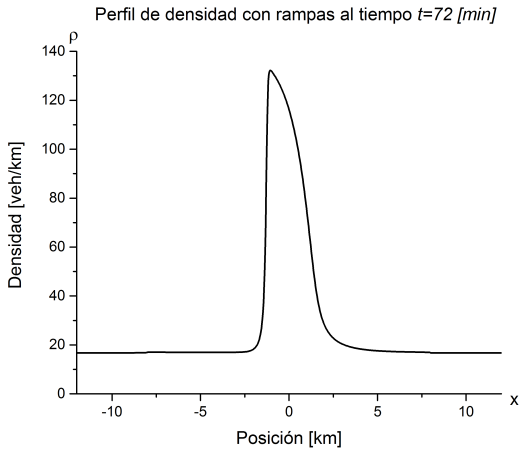

Figura 3.4: Perfil de densidad para $\rho_e = 28[veh/km]$. (Ejemplo 4)

Se puede observar (ver Figura (3.4)) que las soluciones para el modelo de segundo orden con rampas y sin rampas cualitativamente son casi idénticas. Las diferencias se encuentran en el ligero aumento en la densidad dentro del intervalo $-8 \leq x \leq 8$.

Para observar si las soluciones cualitativamente se preservan en problemas con rampas y sin rampas de automóviles, se propone aumentar la densidad inicial y perturbar una condición inicial constante como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 *Se considera el ejemplo planteado inicialmente con la siguiente condición inicial:*

$$\rho(x,0) = \rho_e + 4Sen\left(\frac{\pi x}{3}\right),$$

$$\rho(x,0)V(x,0) = \rho(x,0)V_e(\rho(x,0)),$$

Es notable ver con este ejercicio (ver Figura 3.5) que la solución es estable para $\rho_e = 20[veh/km]$ cuando se consideran los parámetros propuestos en el ejemplo anterior. A diferencia de cuando no se consideran las rampas (ver Figura 2.4), se observa un ligero aumento en la densidad dentro de

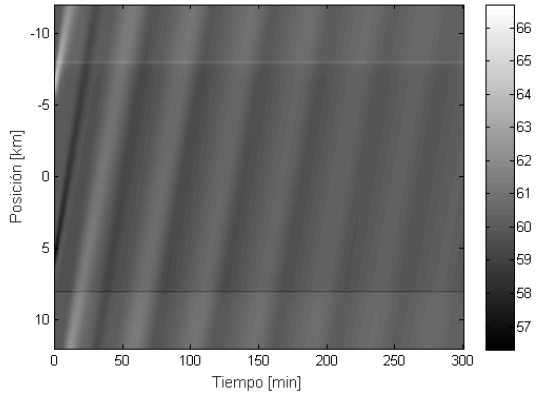

Figura 3.5: Perfil de densidad para $\rho_e = 20[veh/km]$. (Ejemplo 5)

estas, donde $-8 \leq x \leq 8$, sin embargo no es suficiente para formar un cúmulo de densidad. Es posible verificar que el resultado es similiar cuando $\rho_e = 65[veh/km]$.

3.3.2. Experimentos

Con el propósito de encontrar más evidencia numérica de la formación de cúmulos de densidad utilizando este modelo con rampas y para observar diferentes comportamientos de las soluciones, a continuación se propone una serie de experimentos en los cuales se varía la densidad ρ_e y el flujo de entrada y salida de autos a diferentes tasas. Considere el siguiente problema cuya condición inicial para la densidad es constante.

Problema 1

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho V \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V^2 + \boldsymbol{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu(x,t) \\ z(x,t) \end{pmatrix}, \quad x \in (-12, 12)$$

$$\rho(-12,t) = \rho(12,t), \quad V(-12,t) = V(12,t),$$

$$\nu(x,t) = q^e_{rmp} Exp\left(-\frac{(x+8)^2}{\sigma}\right) - q^s_{rmp} Exp\left(-\frac{(x-8)^2}{\sigma}\right),$$

$$z(x,t) = \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right) + (V_{rmp} - V)|\nu(x,t)| + V\nu(x,t).$$

$$\rho(x,0) = \rho_e, \quad \rho(x,0)V(x,0) = \rho_e V_e(\rho_e),$$

$\Theta = (45[km/hr])^2$, $\eta = 600[km/hr]$, $V_{rmp} = 15[km/hr]$, $\sigma = 0.015$ *y* $\tau = 30[seg]$.

Los resultados se presentan conforme cada experimento, variando únicamente la densidad inicial ρ_e y los flujos en las rampas $q^{e,s}_{rmp}$. Los problemas se resuelven utilizando el esquema numérico de Lax-Wendroff con $h = 0.03$ y $\Delta t = h^2/5$.

Experimento 3 *Se considera el problema planteado anteriormente cuya condición inicial es:*

$$\rho(x,0) = \rho_e = 28[veh/km], \quad q^e_{rmp} = q^s_{rmp} = 600[veh/hr]$$

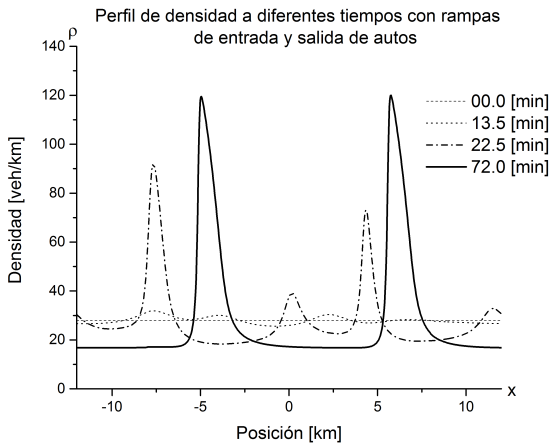

Figura 3.6: Perfil de densidad. $\rho_e = 28[veh/km]$ (Exp. 3)

En un escenario dónde no existieran rampas de autos, se tiene que la solución de este problema está dado por $\rho = \rho_e$ y $\rho V = \rho_e V_e(\rho_e)$. Sin embargo, en este ejercicio se demuestra que el hecho de considerar las rampas de entrada y salida de autos perturba el flujo vehicular de manera suficiente para ocasionar, en este experimento, dos cúmulos de densidad.

Experimento 4 *Se considera el problema planteado anteriormente con los siguientes parámetros:*

$$\rho(x,0) = \rho_e = 28[veh/km], \quad q^e_{rmp} = 1800[veh/hr] \quad q^s_{rmp} = 0[veh/hr]$$

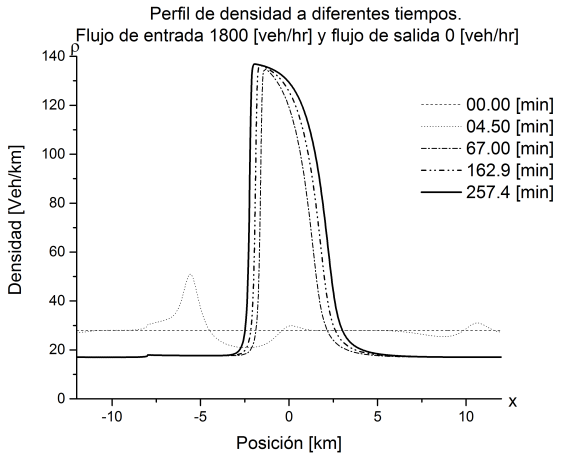

Figura 3.7: Perfil de densidad. $\rho_e = 28[veh/km]$. (Exp. 4)

Debido a que el flujo en la rampa de entrada es mayor que el flujo de salida, existe un aumento en la densidad total del sistema con el paso del tiempo. Se puede observar tanto la formación del cúmulo de densidad como el crecimiento constante del mismo debido a que es mayor el número de autos que ingresan de los que salen (ver Figura 3.7).

Experimento 5 *Se considera el problema planteado anteriormente con la condición inicial homogénea y rampas de entrada y salida de autos*

$$\rho(x,0) = \rho_e = 60[veh/km], \quad q^e_{rmp} = q^s_{rmp} = 450[veh/hr]$$

En este experimento no se presenta ninguna formación de cúmulos de densidad y la solución se mantiene casi homogénea salvo en los puntos donde se encuentran las rampas de entrada y de salida. Esto indica que las condiciones para formarse un cúmulo de densidad no son las adecuadas a pesar de existir una perturbación en el flujo homogéneo y es probablemente debido a que los conductores no tienen espacio suficiente para acelerar o frenar por lo que se mantienen en velocidad casi constante.

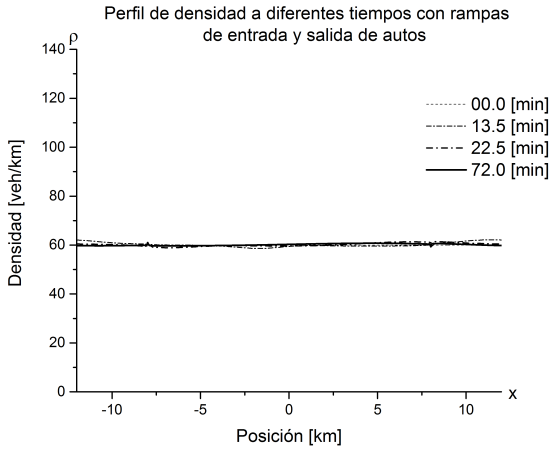

Figura 3.8: Perfil de densidad. $\rho_e = 60[veh/km]$. (Exp. 5)

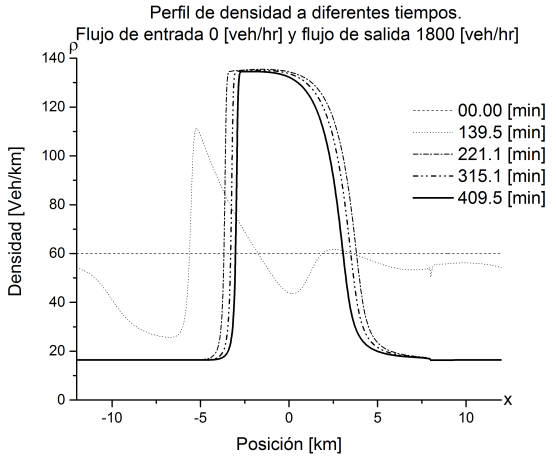

Figura 3.9: Perfil de densidad. $\rho_e = 60[veh/km]$. (Exp. 6)

Experimento 6 *Se considera el problema planteado anteriormente con la condición inicial homogénea y solamente una rampa de salida.*

$$\rho(x,0) = \rho_e = 60[veh/km], \quad q^e_{rmp} = 0[veh/hr] \quad q^s_{rmp} = 1800[veh/hr]$$

Con este experimento resulta evidente (ver Figura (3.9)) que existen condiciones necesarias para formación del cúmulo de densidad y que no sólo se basan en la perturbación en la densidad homogénea. El efecto de sólo considerar la salida de autos se refleja en la alteración en la velocidad local de aquellos conductores que aún permanecen dentro del circuito provocando una formación de un cúmulo de densidad y, aunque este disminuye con respecto el tiempo, se mantiene en el circuito por varias horas.

3.4. Cambio en el número de carriles de un circuito

Los cuellos de botella en una autopista pueden ser generados por varias situaciones: rampas de autos, accidentes, construcciones, etc., por lo que existe un interés en modelar los efectos en el flujo vehicular debido al cambio en el número de carriles. Para modelar este tipo de escenarios se utiliza el modelo de Kerner-Konhäuser, el cual se modifica para cuando existe un cambio en el número de carriles para después estudiar numéricamente la sensibilidad de los parámetros iniciales en las soluciones obtenidas. En general se considera un circuito de varios carriles sin rampas de autos con una reducción en el número de carriles en una cierta región. Matemáticamente podemos representar esta situación en la ecuación de continuidad como lo propone Treiber *et al.* [6] de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} + \frac{\partial Q_{tot}}{\partial x} = 0, \tag{3.9}$$

donde el subíndice *tot* se refiere a la densidad total como a flujo total que se definen por

$$\rho = \frac{\rho_{tot}}{I(x)}, \quad Q = \frac{Q_{tot}}{I(x)},$$

donde $I(x)$ es una función diferenciable que describe la transición en el número de carriles en ciertas secciones del circuito. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de continuidad (3.9) se obtiene

$$\frac{\partial I(x)\rho}{\partial t} + \frac{\partial I(x)Q}{\partial x} = 0,$$

$$I(x)\frac{\partial \rho}{\partial t} + I(x)\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{dI(x)}{dx} = 0,$$

entonces, la densidad y el flujo por carril satisfacen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V}{\partial x} = -\frac{\rho V}{I(x)} \frac{dI(x)}{dx}.$$

Para el modelo de segundo orden, utilizando la ecuación de continuidad anterior, se tiene que la ecuación de velocidad se escribe como:

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V^2 + P\right) = \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right) - \frac{\rho V^2}{I(x)} \frac{dI(x)}{dx}.$$

Una vez planteado el modelo consideramos, para el siguiente problema y los experimentos que se mencionan a continuación, un circuito de $24[km]$ de periferia el cual consta de un sólo carril y en cierta región supondremos que existe una ampliación a dos carriles por unos cuantos kilómetros para después reducirse nuevamente a un sólo carril. Para no afectar la regularidad del problema, proponemos usar una función $I(x)$ que sea continuamente diferenciable y consistente de la siguiente manera:

$$I(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [-12,-2] \cup [2,12] \\ -16x^3 - 84x^2 - 144x - 79 & si \quad x \in [-2,-1.5] \\ 2 & si \quad x \in [-1.5,1.5] \\ 16x^3 - 84x^2 + 144x - 79 & si \quad x \in [1.5,2] \end{cases}.$$

Problema 2 *Para el modelo de segundo orden con variación en el número de carriles, se consideran distintas densidades iniciales:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho V \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V^2 + \boldsymbol{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho V}{I(x)}\frac{dI(x)}{dx} \\ \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right) - \frac{\rho V^2}{I(x)}\frac{dI(x)}{dx} \end{pmatrix},$$

$$\rho(-12,t) = \rho(12,t), \quad V(-12,t) = V(12,t),$$

con $\Theta = (45km/hr)^2$, $\eta = 600[km/hr]$ *y* $\tau = 30[seg]$ *como tiempo de relajación. El término* $V_e(\rho)$ *es como se describe en el diagrama fundamental propuesto por Kerner-Konhäuser (1.7) con* $\rho_{max} = 140[veh/km]$ *y* $V_{max} = 120[km/hr]$. *La condición inicial por carril y la condición de frontera están dadas por,*

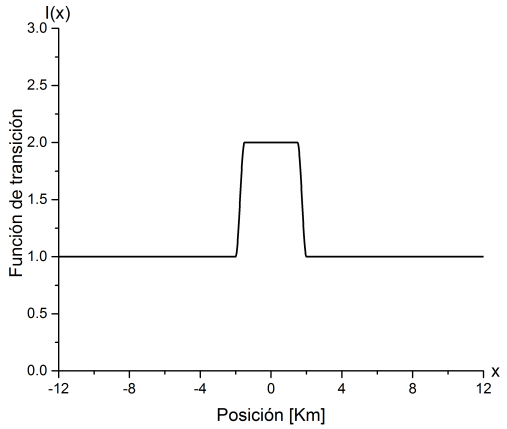

Figura 3.10: Perfil de la función $I(x)$.

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_e & si \quad x \in [-12,-2] \cup [2,12] \\ \frac{\rho_e}{-16x^3-84x^2-144x-79} & si \quad x \in [-2,-1.5] \\ \frac{\rho_e}{2} & si \quad x \in [-1.5,1.5] \\ \frac{\rho_e}{16x^3-84x^2+144x-79} & si \quad x \in [1.5,2] \end{cases},$$

$$\rho(x,0)V(x,0) = \rho(x,0)V_e(\rho(x,0)),$$

donde la condición inicial está propuesta de esta forma para distribuir de manera uniforme la densidad inicial ρ_e por carril utilizando la función de transición $I(x)$. A continuación se hicieron una serie de experimentos variando ρ_e. Para el esquema numérico de Lax-Wendroff se utilizó $h = 0.03$ y $\Delta t = h^2/10$.

Experimento 7 *Se considera el problema planteado anteriormente con* $\rho_e = 25[veh/km]$ *y se muestran las gráficas obtenidas a diferentes tiempos para observar la evolución de la solución numérica:*

En este ejercicio para $\rho_e = 25[veh/km]$ podemos observar un aumento de la densidad en $1.5 < x < 2$ como la disminución de la cantidad de autos en

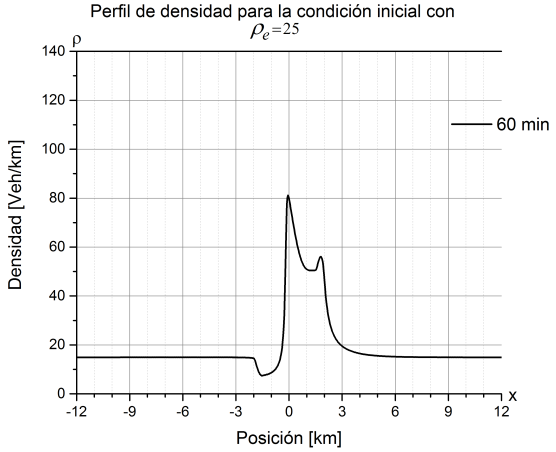

Figura 3.11: Perfil de densidad. (Exp. 7)

$-2 < x < -1.5$. Para $t = 60[min]$ se ha generado un cúmulo de densidad dentro del intervalo $x \in [-2, 2]$ el cual permanece inmóvil indicando que se ha llegado a una solución estacionaria.

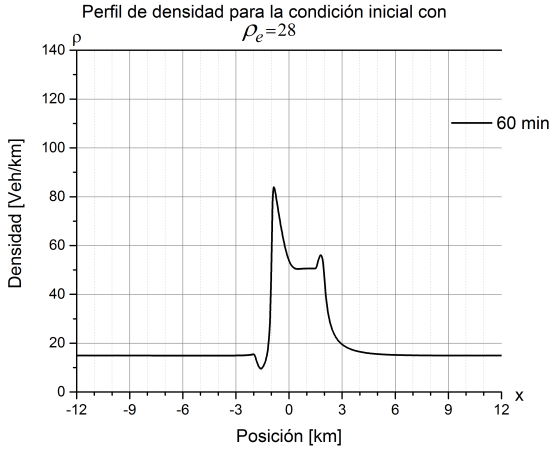

Figura 3.12: Perfil de densidad. (Exp. 8)

Experimento 8 *Se considera el problema planteado anteriormente con* $\rho_e = 28[veh/km]$ *como un ligero aumento para la condición inicial. Se muestran a continuación los resultados obtenidos. Se utiliza* $h = 0.03$ *y* $\Delta t = h^2/25$ *para resolver numéricamente el problema.*

Si bien cualitativamente los resultados son muy parecidos para $\rho_e = 25[veh/km]$ y $\rho_e = 28[veh/km]$, los resultados muestran un considerable aumento en el cúmulo de densidad el cual permanece estacionario dentro de $x \in [-2, 2]$.

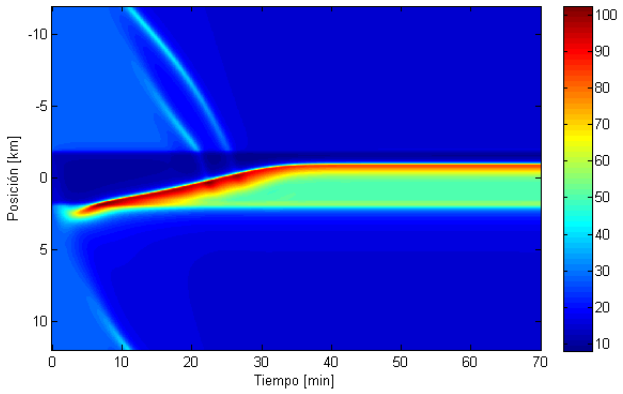

Figura 3.13: Perfil de densidad $\rho_e = 28[veh/km]$. (Exp. 8)

De manera consecuente, se presentan los distintos perfiles de velocidad (ver Figura 3.14)para cada experimento donde se observa un decaimiento en la velocidad promedio en donde se formaron los cúmulos de densidad.

Experimento 9 *Se pretende seguir aumentando la condición inicial* $\rho_e > 28[veh/km]$ *para observar lo que puede llegar a suceder cuando la base del cúmulo de densidad sea más grande que el intervalo donde se amplían los carriles. Considere el problema planteado anteriormente con* $\rho_e = 38[veh/km]$, $h = 0.01$ *y* $\Delta t = h^2/5$.

Para $\rho_e = 38[veh/km]$ se tienen varios cúmulos de densidad que se han generado de forma casi inmediata, los cuales se propagan en dirección al flujo y se concentran dentro del intervalo $x \in [-2, 2]$ (ver Figura 3.15). El cúmulo de densidad central crece al transcurrir el tiempo y se puede observar como

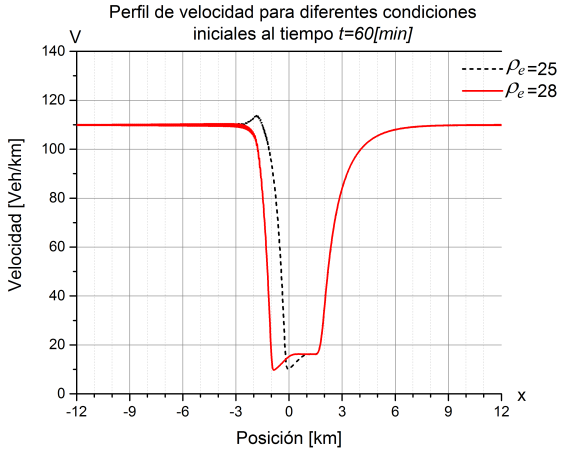

Figura 3.14: Perfil de velocidad para distintas condiciones iniciales.

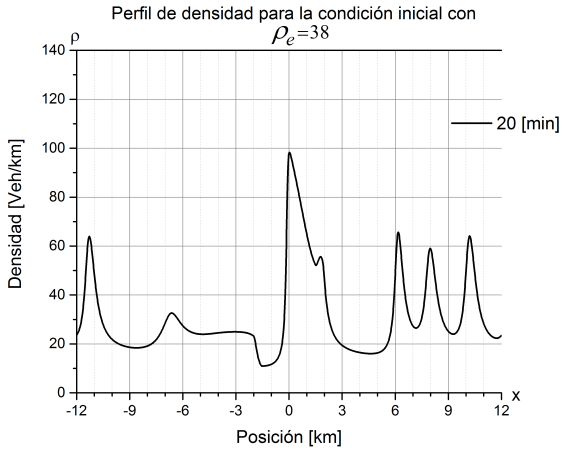

Figura 3.15: Perfil de densidad. (Exp. 9)

se desprende periódicamente otro cúmulo de densidad que viaja en sentido opuesto al flujo reduciendo su tamaño hasta detenerse a cierto tiempo e inmediatamente comienza a viajar nuevamente en dirección al flujo hasta unirse al cúmulo de densidad en la parte central (ver Figura 3.17). Se concluye que el sistema entra en un ciclo, repitiendo el mismo patrón descrito

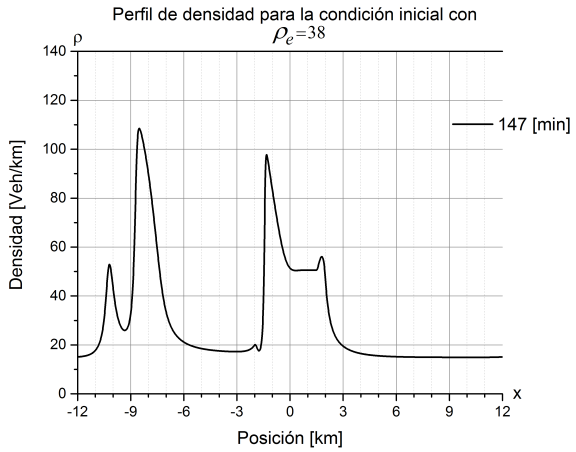

Figura 3.16: Perfil de densidad. (Exp. 9)

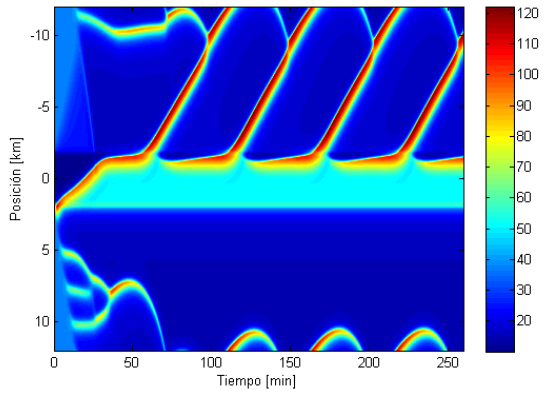

Figura 3.17: Perfil de densidad para $\rho_e = 38[veh/km]$. (Exp. 9)

anteriormente. Este tipo de fenómeno fue descrito por Lee *et al.* (1998) como "recurring humps". Lee obtiene este fenómeno bajo el esquema de considerar una autopista con únicamente una rampa de entrada de autos utilizando el modelo propuesto por Kerner-Konhäuser junto con condiciones en la frontera abiertas y la relación fundamental $V_e(\rho) = (1 - \rho/\rho_m)/(1 + E(\rho/\rho_m)^4)$. En este trabajo, considerando el modelo de segundo orden propuesto por Treiber

et al. para adecuarlo a la modelación del flujo vehicular con rampas junto con la relación fundamental de Kerner-Konhäuser, se pudo replicar el mismo patrón del tráfico congestionado. Más aún, Lee *et al.* (1998) demuestra que este tipo de patrones son el origen de transición entre el flujo libre y el flujo sincronizado descritos en la teoría de tres fases del flujo vehicular.

3.5. Modelo de tráfico vehicular en un circuito con rampas y cambio en el número de carriles

En este capítulo se han mostrado varios modelos que se han propuesto para el problema del tráfico vehicular. A continuación se muestra una combinación de estos con el objetivo de tener un modelo con la capacidad de simular un circuito con rampas y con un cambio en el número de carriles en un circuito. Para este modelo se consideran rampas puntuales nuevamente de manera que se tiene,

$$\nu(x,t) = q^e_{rmp} Exp\left(-\frac{(x-x_e)^2}{\sigma}\right) - q^s_{rmp} Exp\left(-\frac{(x-x_s)^2}{\sigma}\right)$$

donde q_{rmp} es el flujo en las rampas. Además, considerando un cambio en el número de carriles para cierta sección del circuito, la ecuación de continuidad se escribe como

$$\frac{\partial I(x)\rho}{\partial t} + \frac{\partial I(x)Q}{\partial x} = \nu(x,t).$$

Y desarrollando la derivada parcial se tiene que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V}{\partial x} = \frac{\nu(x,t)}{I(x)} - \frac{\rho V}{I(x)}\frac{dI(x)}{dx}.$$

Finalmente bajo hipótesis de Treiber [6] la ecuación de la dinámica de velocidad local (utilizando el mismo proceso que en 3.7) se escribe como:

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V^2 + P\right) = z(x,t) - \frac{\rho V^2}{I(x)}\frac{dI(x)}{dx},$$

donde,

$$z(x,t) = \frac{\rho}{\tau}\left(V_e(\rho) - V\right) + (V_{rmp} - V)|\nu(x,t)| + V\nu(x,t).$$

La relación fundamental $V_e(\rho)$ se considera como la propuesta por Kerner y Konhäuser (1.7) y $V_{rmp} \geq 0$ es un parámetro de la velocidad en las rampas.

Problema 3

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho V\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho V\\ \rho V^2+\boldsymbol{P}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\nu(x,t)}{I(x)}-\frac{\rho V}{I(x)}\frac{dI(x)}{dx}\\ z(x,t)-\frac{\rho V^2}{I(x)}\frac{dI(x)}{dx}\end{pmatrix},\quad x\in(-12,12)$$

$$\rho(-12,t)=\rho(12,t),\quad V(-12,t)=V(12,t),$$

$q^{e,s}_{rmp}=1800[veh/hr]$, $\Theta=(45[km/hr])^2$, $\eta=600[km/hr]$, $V_{rmp}=15[km/hr]$, $\sigma=0.005$ *y* $\tau=30[seg]$. *Se considera* $I(x)$ *y la condición inicial* $\rho(x,0)$ *y* $\rho(x,0)V(x,0)$ *del problema anterior.*

Los resultados se presentan conforme cada experimento, variando ρ_e y manteniendo la posición de las rampas de entrada y salida fijas, $x_e=-8$ y $x_s=8$. Se utiliza el esquema numérico de Lax-Wendroff con $h=0.01$ y $\Delta t=h^2/5$.

Experimento 10 *Considere el problema anterior con* $\rho_e=28[veh/km]$.

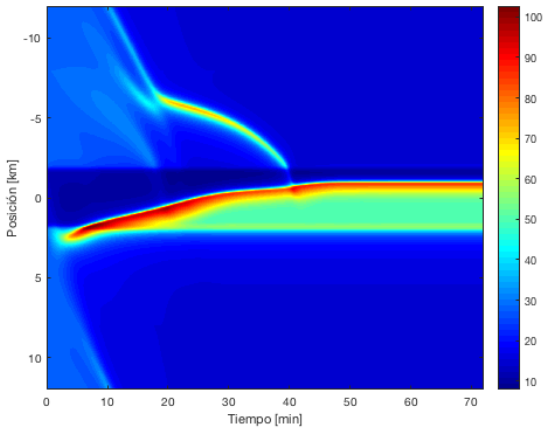

Figura 3.18: Perfil de densidad para $\rho_e=28[veh/km]$. (Exp. 10)

Como se había visto anteriormente cuando se considera solo el cambio en el número de carriles, se forma un cúmulo de densidad dentro de la región $-2\leq x\leq 2$ el cual permanece inmóvil (ver Figura 3.13).

Sin embargo, cuando se consideran rampas de entrada y salida de autos, se puede observar que se forma otro cúmulo de densidad el cual se propaga en dirección a la región donde se encuentra la ampliación de carriles para después ser absorbido.

Experimento 11 *Dado que una solución es perturbada al considerar rampas de entrada y salida de autos, a continuación se propone utilizar el problema anterior con* $\rho_e = 38[veh/km]$. *En este experimento se utilizó* $h = 0.008$ *y* $dt = h^2/3$ *para el esquema de Lax-Wendroff.*

Cabe mencionar que para el Experimento 9 se observa la formación de un cúmulo de densidad aproximadamente en $x = -10[km]$ el cual permanece casi en la misma posición por varios minutos (ver Figura 3.17); sin embargo, si bien el patrón del fenómeno llamado "recurring hump" (Lee *et al.* (1998)) es emergente también para el experimento 11 , se observa en este escenario la formación de un cúmulo de densidad que se propaga como una onda viajera hasta cuando $t = 70[min]$ aproximadamente, pues, a partir de este momento, aparece el patrón de "recurring hump" (ver Figura 3.19).

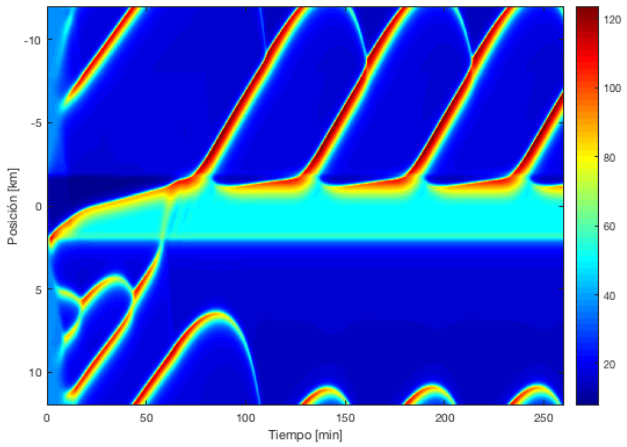

Figura 3.19: Perfil de densidad para $\rho_e = 38[veh/km]$. (Exp. 11)

Capítulo 4

Modelación de flujo vehicular: Teoría de tres fases.

El modelo de segundo orden de Kerner-Könhauser es capaz de reproducir varios patrones empíricos del tráfico congestionado. Sin embargo, el mismo Kerner (Kerner *et al.*, 1997, 2006) expone que el tráfico congestionado a su vez se divide en dos fases a las cuales les llama flujo sincronizado[1] y cúmulos de densidad móviles[2]. Como consecuencia, en la literatura se ha propuesto la teoría del flujo vehicular de tres fases y según la teoría moderna del tráfico vehicular, los cúmulos de densidad son el resultado de una inestabilidad en el flujo libre (F) y corresponden a los cúmulos de densidad móviles (J) (ver [20]). Se ha demostrado que modelos basados en el diagrama fundamental solo producen la transición F→J, así, el modelo de segundo orden de Kerner-Könhauser está limitado por su incapacidad de reproducir el flujo sincronizado debido a que está basado en el diagrama fundamental (1.7). Otro inconveniente es que este modelo produce soluciones homogéneas para densidades altas, lo cual no es realista. Es por esto que es necesario tomar en cuenta nuevos enfoques macroscópicos y proponer nuevos modelos con la capacidad de reproducir patrones de flujo sincronizado (ver [17]).

En trabajos recientes, A.R Méndez y R.M. Velasco desarrollaron un modelo a partir de modelos cinéticos utilizados en la teoría de gases. En su propuesta observaron numéricamente el flujo sincronizado, transiciones entre los tipos

[1]Cúmulos de densidad que permanecen fijos precedido de una disminución abrupta de la velocidad promedio.

[2]Cúmulos de densidad que se propagan con velocidad promedio constante.

de flujo y los cúmulos de densidad móviles, al trabajar con dos tipos de conductores; uno más agresivo que el otro.

En este capítulo se expondrá el trabajo que han realizado con el objetivo de replicar los resultados que han obtenido.

4.1. Flujo sincronizado y cúmulos de densidad móviles.

El flujo sincronizado y los cúmulos de densidad móviles son fenómenos definidos con base en criterios macroscópicos de carácter empírico que se describen continuación (ver [7]):

- Cúmulos de densidad móviles: Este tipo de fenómenos dentro del tráfico congestionado están delimitados por regiones con cambios bruscos en el gradiente de la densidad, en los cuales la velocidad promedio de los conductores disminuye o aumenta dependiendo si estos se incorporan o se separan del cúmulo en sí. Un cúmulo de densidad móvil se define como aquel cúmulo de densidad que se propaga a lo largo del flujo con velocidad promedio constante.

- Flujo sincronizado: En contraste con los cúmulos de densidad móviles, el flujo sincronizado se define como aquel cúmulo de densidad cuya velocidad promedio en la región donde los conductores se separan del cúmulo de densidad es variable. La posición del cúmulo permanece constante y viene precedido de una disminución abrupta de la velocidad.

Estas definiciones están asociadas por el comportamiento en la región del cúmulo de densidad cuyo gradiente disminuye abruptamente.

4.2. Un modelo del tráfico con dos clases de vehículos diferentes

Es claro que se han podido simular transiciones del flujo libre al flujo congestionado. Tomando en cuenta la teoría de tres fases propuesta por Kerner se

presenta el problema de simular transiciones entre flujo libre a flujo sincronizado y del flujo sincronizado a los cúmulos de densidad móviles. Los modelos bajo el enfoque de la teoría cinética de gases se han desarrollado a partir de 1971 con el trabajo de Prigogine quien plantea una ecuación cinética, análoga a la ecuación cinética en la teoría de gases descrita por Boltzmann, para describir el comportamiento de una función de distribución vehicular. El desarrollo de modelos macroscópicos para el tráfico vehicular surge a partir de las ideas del trabajo de Paveri-Fontana [17].

Con base en estas ideas, A.R. Méndez y R.M Velasco, proponen para describir al flujo sincronizado un modelo donde coexisten dos tipos de conductores entremezclados, unos más agresivos que otros, en una autopista homogénea (Velasco y Marques Jr.,2005; Méndez y Velasco 2008; Marques Jr. y Méndez, 2013). El comportamiento de los vehículos se describe por medio de funciones de distribución $f_i(x, v_i, t), \quad i = a, b$ donde $f_i(x, v_i, t)dxdv_i$ describe la cantidad de autos de la clase-i en el intervalo $(x, x+dt)$ con velocidad (v_i, v_i+dv_i) al tiempo t [17]. Estas funciones satisfacen las ecuaciones cinéticas reducidas de Paveri-Fontana (Velasco y Marques Jr., 2005), las cuales describen la evolución de las interacciones en las funciones de distribución a lo largo del tiempo considerando tanto la velocidad instantánea como la velocidad deseada por los automóviles [18].

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v_i}\left[\left(\frac{W_i(x, v_i, t) - v_i}{\tau_i}\right) f_i\right] = \sum_{j=a,b} Q_{i,j}, \tag{4.1}$$

las interacciones binarias entre las clases de vehículos se debe al término:

$$Q_{i,j} = (1-p)\int_0^\infty f_i(v) f_j(w)(w-v)dw,$$

donde p es la probabilidad de que los autos de una clase rebasen a los vehículos de la otra o de la misma clase. Por otro lado $W_i(x, v_i, t)$ representa la velocidad individual promedio deseada la cual debe modelarse como función de la velocidad instantánea de los conductores (v_i). Tomando en cuenta la agresividad de los conductores se propone,

$$W_i(x, v_i, t) = w_i v_i, \quad w_i > 1,$$

donde w_i es un parámetro que depende de la agresividad y/o de las condiciones de tráfico a lo largo de la autopista [17]. Las variables macroscópicas

para este modelo están definidas de la siguiente manera.

$$\rho_i = \int_0^\infty f_i dv_i, \tag{4.2}$$

$$\rho = \sum_i \rho_i, \tag{4.3}$$

$$\rho_i V_i = \int_0^\infty f_i v_i dv_i, \tag{4.4}$$

$$\rho V = \int_0^\infty v_a f_a dv_a + \int_0^\infty v_b f_b dv_b, \tag{4.5}$$

donde ρ_a, ρ_b representan las densidades de cada clase de autos con velocidad promedio V_a, V_b respectivamente. Además, ρ es la densidad total del sistema y V es la velocidad baricéntrica. Para las funciones de distribución se imponen como condiciones de frontera

$$\lim_{v_i \to 0} f_i(x, v_i, t) = 0,$$

$$\lim_{v_i \to \infty} f_i(x, v_i, t) = 0, \quad i = a, b.$$

Si además se asume que la probabilidad de rebasar p es la misma para todos los vehículos y es independiente de la clase, se pueden simplificar los términos que representan las interacciones binarias entre los vehículos. La solución homogénea del estado estacionario para el sistema (4.1) está dada por [17]:

$$f_{ie}(v_i) = \frac{\rho_{ie}\alpha_i}{\Gamma(\alpha_i)V_e} \left(\frac{\alpha_i v_i}{V_e}\right)^{\alpha_i - 1} Exp\left[-\frac{\alpha_i v_i}{V_e}\right], \tag{4.6}$$

con

$$\alpha_i = \frac{\tau_i(1-p)}{w_i - 1}\rho_e V_e \quad i = a, b$$

donde $\Gamma(\alpha_i)$ es la función Gamma y α_i es una constante adimensional que depende de los parámetros del modelo (τ_i, w_i, p) y los valores homogéneos del estado estacionario (ρ_e, V_e).

4.3. Ecuaciones macroscópicas

El modelo macroscópico de tráfico vehicular se puede obtener con base en las ecuaciones de transporte como se describe a continuación. Sea $\Psi(x, v_i, t)$ una función de velocidad, la ecuación de transporte está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_i \cdot (\Psi)_i + \frac{\partial}{\partial x}\rho_i \cdot (v_i\Psi)_i - \rho_i \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + v_i\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{W_i(v_i) - v_i}{t_i}\frac{\partial \Psi}{\partial v_i}\right)_i = \sum_j (1-p)\int_0^\infty \Psi(v_i)\int_0^\infty f_i(v_i)f_j(w_j)(w_j - v_i)dw_j dv_i, \tag{4.7}$$

donde,

$$\rho_i(x,t)\cdot(\Psi(x,v_i,t))_i = \int_0^\infty \Psi(x,v_i,t)f_i(x,v_i,t)dv_i.$$

Cuando $\Psi(x, v_i, t) = 1$ se pueden obtener las ecuaciones que describen la tasa de cambio en las densidades para cada clase de vehículo. Utilizando las definiciones (4.2) y (4.4) tenemos,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_i \cdot (\Psi)_i = \frac{\partial \rho_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\rho_i \cdot (v_i\Psi)_i = \frac{\partial \rho_i v_i}{\partial x}.$$

Desarrollando el lado derecho de la ecuación (4.7),

$$\sum_j (1-p)\int_0^\infty\int_0^\infty f_i(v_i)f_j(w_j)(w_j - v_i)dw_j dv_i =$$

$$(1-p)\sum_j\left(\int_0^\infty f_i(v_i)dv_i\int_0^\infty f_j(w_j)dw_j - \int_0^\infty f_i(v_i)v_i dv_i\int_0^\infty f_j(w_j)dw_j\right) =$$

$$(1-p)\sum_j \rho_i\rho_j V_j - \rho_i V_i\rho_j = (1-p)\rho_i\left(\sum_j \rho_j V_j - V_i\rho_j\right).$$

Entonces cuando $\Psi(x, v_i, t) = 1$ se tiene que la ecuación (4.7) es igual a

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i V_i}{\partial x} = (1-p)\rho_i\left(\sum_j \rho_j V_j - V_i\rho_j\right), \quad i = a, b. \tag{4.8}$$

Además,

$$\sum_j \rho_j V_j - V_i\rho_j = \rho_a V_a - V_i\rho_a + \rho_b V_b - V_i\rho_b = \rho V - V_i(\rho_a + \rho_b) = \rho(V - V_i).$$

Cabe señalar que las ecuaciones (4.8) no son ecuaciones de conservación,

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial \rho_a V_a}{\partial x} = (1-p)\rho_a\rho(V - V_a),$$
$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \frac{\partial \rho_b V_b}{\partial x} = (1-p)\rho_b\rho(V - V_b),$$

la fuente (sumidero) de una clase es el sumidero (fuente) de la otra; en cambio, la densidad total ρ sí satisface la ecuación de conservación:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_a + \rho_b) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_a V_a + \rho_b V_b) = (1-p)(\rho_a\rho(V - V_a) + \rho_b\rho(V - V_b)),$$

$$= (1-p)\rho(\rho_a V - \rho_a V_a + \rho_b V - \rho_b V_b)),$$

$$= (1-p)\rho(\rho V - \rho_a V_a - \rho_b V_b)) = 0,$$

es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V}{\partial x} = 0.$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen cuando $\Psi(x, v_i, t) = v_i$ considerando las siguientes definiciones:

$$\gamma_i = \frac{w_i - 1}{\tau_i},$$
$$p_i(x,t) = \int_0^\infty f_i v_i^2 dv_i,$$
$$\rho_i(x,t)\theta_i(x,t) = \int_0^\infty f_i(v_i - V_i)^2 dv_i.$$

Para el primer término de la ecuación (4.7) observamos lo siguiente:

$$\frac{\partial \rho_i \cdot (v_i)_i}{\partial t} = \frac{\partial \rho_i V_i}{\partial t} = \rho_i \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial \rho_i}{\partial t}.$$

De la ecuación (4.8) despejamos $\frac{\partial \rho_i}{\partial t}$ y lo sustituimos en la ecuación anterior.

$$\frac{\partial \rho_i \cdot (v_i)_i}{\partial t} = \rho_i \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \left[(1-p)\rho_i \left(\sum_j \rho_j V_j - \rho_j V_i \right) - \frac{\partial \rho_i V_i}{\partial x} \right],$$

$$= \rho_i \frac{\partial V_i}{\partial t} + (1-p)\rho_i V_i \left(\sum_j \rho_j V_j - \rho_j V_i \right) - V_i \frac{\partial \rho_i V_i}{\partial x}.$$

Para el segundo término se tiene,

$$\frac{\partial \rho_i \cdot (v_i^2)}{\partial x} = \frac{\partial p_i}{\partial x}.$$

Para el último término del lado izquierdo de la ecuación (4.7) con $\Psi = v_i$ se deduce que

$$-\rho_i \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{W_i(v_i) - v_i}{t_i} \frac{\partial \Psi}{\partial v_i} \right)_i \Bigg|_{\Psi = v_i} = -\int_0^\infty f_i \left(\frac{w_i v_i - v_i}{\tau_i} dv_i \right),$$

$$= -\frac{w_i - 1}{\tau_i} \int_0^\infty f_i v_i dv_i = -\gamma_i \rho_i V_i.$$

De manera similar evaluamos $\Psi = v_i$ para el término del lado derecho de la ecuación de transporte.

$$\sum_j (1-p) \int_0^\infty \Psi(v_i) \int_0^\infty f_i(v_i) f_j(w_j)(w_j - v_i) dw_j dv_i \Big|_{\Psi = v_i} =$$

$$(1-p) \sum_j \left(\int_0^\infty f_i(v_i) v_i dv_i \int_0^\infty f_j(w_j) w_j dw_j - \int_0^\infty f_i(v_i) v_i^2 dv_i \int_0^\infty f_j(w_j) dw_j \right),$$

$$= (1-p) \sum_j \left(\rho_i V_i \rho_j V_j - p_i \rho_j \right).$$

Entonces se tiene que para la ecuación (4.7),

$$\rho_i \frac{\partial V_i}{\partial t} + (1-p)\rho_i V_i \left(\sum_j \rho_j V_j - \rho_j V_i \right) - V_i \frac{\partial \rho_i V_i}{\partial x} + \frac{\partial p_i}{\partial x} - \gamma_i \rho_i V_i =$$

$$(1-p)\sum_j \left(\rho_i V_i \rho_j V_j - p_i \rho_j\right).$$

despejando,

$$\rho_i \frac{\partial V_i}{\partial t} - V_i \frac{\partial \rho_i V_i}{\partial x} + \frac{\partial p_i}{\partial x} - \gamma_i \rho_i V_i =$$

$$(1-p)\left(\sum_j \left(\rho_i V_i \rho_j V_j - p_i \rho_j\right) - \rho_i V_i \left(\sum_j \rho_j V_j - \rho_j V_i\right)\right),$$

dividiendo por ρ_i,

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} - \frac{V_i}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i V_i}{\partial x} + \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial p_i}{\partial x} - \gamma_i V_i =$$

$$(1-p)\left(\frac{1}{\rho_i}\sum_j \left(\rho_i V_i \rho_j V_j - p_i \rho_j\right) - V_i \left(\sum_j \rho_j V_j - \rho_j V_i\right)\right),$$

desarrollando los términos,

$$= (1-p)\left(V_i \sum_j \rho_j V_j - \frac{p_i}{\rho_i}\sum_j \rho_j - V_i \sum_j \rho_j V_j + V_i^2 \sum_j \rho_j\right),$$

$$= (1-p)\left(\sum_j \rho_j \left(V_i^2 - \frac{p_i}{\rho_i}\right)\right) = (1-p)\left(V_i^2 - \frac{p_i}{\rho_i}\right)\left(\sum_j \rho_j\right),$$

en donde

$$\sum_j \rho_j = \rho,$$

y finalmente,

$$= -(1-p)\left(\frac{p_i}{\rho_i} - V_i^2\right)\rho.$$

Por otro lado tenemos que

$$\rho_i \theta_i = \int_0^\infty f_i (v_i - V_i)^2 dv_i = \int_0^\infty \left(f_i v_i^2 - 2 f_i v_i V_i + f_i V_i^2\right) dv_i,$$

$$= p_i - 2\rho_i V_i^2 + \rho_i V_i^2 = p_i - \rho_i V_i^2,$$

así,

$$\theta_i = \frac{p_i}{\rho_i} - V_i^2.$$

Por lo tanto la ecuación (4.7) con $\Psi = v_i$ se desarrolla como,

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} - \frac{V_i}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i V_i}{\partial x} + \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial p_i}{\partial x} - \gamma_i V_i = -(1-p)\rho\theta_i, \quad i = a, b. \tag{4.9}$$

Donde $p_i(x,t)$ es la presión del tráfico y $\theta_i(x,t)$ es la varianza de la velocidad de cada clase de vehículo. Es claro que el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales dadas por (4.8) y (4.9) no forman un sistema cerrado. Un método descrito en [17] para cerrar el sistema, y plantearlo sólo con las variables de densidad y velocidad, consiste en maximizar un funcional que describe la entropía de información propuesta por Shannon utilizando la solución homogénea (4.6) como referencia,

$$S[f] = \sum_i \int_0^\infty f_i ln\left(\frac{f_i}{f_{ie}}\right).$$

El funcional se puede maximizar utilizando multiplicadores de Lagrange [17]

$$f_i^{(0)}(x, v_i, t) = \frac{\rho_i(x,t)\alpha_i}{\Gamma(\alpha_i)V_i(x,t)}\left(\frac{\alpha_i v_i}{V_i(x,t)}\right)^{\alpha_i - 1} Exp\left[-\frac{\alpha_i v_i}{V_i(x,t)}\right].$$

Después, bajo ciertas hipótesis comunes en la teoría cinética para considerar efectos disipativos [17], la solución de la ecuación reducida de Paveri-Fontana se expresa como una expansión infinita de términos, los cuales cuantifican la desviación de la distribución de orden cero por medio de gradientes presentes en el sistema (Chapman y Cownling, 1970). De esta manera podemos expresar la solución de (4.1) como

$$f_i(x, v_i, t) = f_i^{(0)}(x, v_i, t)\left[1 + \phi_i(x, v_i, t)\right],$$

donde $\phi_i(x, v_i, t)$ es la desviación de la función de distribución a partir de la aproximación local $f^{(0)}(x, v_i, t)$. Para expresar la función de distribución local en términos de las variables de densidad y velocidad, es necesario que satisfaga ciertas condiciones de compatibilidad [17].

$$\rho_i(x,t) = \int_0^\infty f_i^{(0)}(x, v_i, t)dv_i = \int_0^\infty f_i(x, v_i, t)dv_i,$$

$$\rho_i(x,t)V_i(x,t) = \int_0^\infty v_i f_i^{(0)}(x,v_i,t)dv_i = \int_0^\infty v_i f_i(x,v_i,t)dv_i.$$

De esta manera la función ϕ_i se encuentra restringida por

$$\int_0^\infty \phi_i f_i^{(0)} dv_i = 0,$$

$$\int_0^\infty v_i \phi_i f_i^{(0)} dv_i = 0, \quad i = a, b.$$

La primera aproximación a la desviación ϕ_i, se obtiene al suponer interacciones análogas a la mezcla de gases descritas en (Fernández y Marques Jr. 2005) y resolviendo las ecuaciones reducidas de Paveri-Fontana utilizando la función de distribución local $f_i^{(0)}$. Esta primera aproximación se denota por $f_i^{(1)}(x, v_i, t)$ y describe la presión del tráfico y la varianza de la velocidad con respecto las variables de densidad, velocidad promedio y el gradiente de la velocidad promedio [17].

$$p_i^{(1)} = \rho_i V_i^2 + \rho_i \theta_i^{(1)},$$

$$\rho_i \theta_i^{(1)} = \frac{\rho_i V_i^2}{\alpha_i}\left[1 - \frac{2(\alpha_i+1)}{\sigma_i \alpha_i}\frac{\partial V_i}{\partial x}\right],$$

donde σ_i es un parámetro de relajación colectiva. Desarrollando los términos en la ecuación (4.9) y utilizando las ecuaciones anteriores obtenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{V_i}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i V_i}{\partial x} &= -\frac{V_i}{\rho_i}\left(\rho_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + V_i \frac{\partial \rho_i}{\partial x}\right), \\ &= -V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} - \frac{V_i^2}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i}{\partial x}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial p_i}{\partial x} &= \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i V_i^2 + \rho_i \theta_i^{(1)}\right), \\ &= \frac{1}{\rho_i}\left(2\rho_i V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + V_i^2 \frac{\partial \rho_i}{\partial x} + \frac{\partial \rho_i \theta_i^{(1)}}{\partial x}\right), \\ &= 2V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{V_i^2}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i}{\partial x} + \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i \theta_i^{(1)}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.9),

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} - V_i\frac{\partial V_i}{\partial x} - \frac{V_i^2}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i}{\partial x} + 2V_i\frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{V_i^2}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i}{\partial x} + \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i\theta_i^{(1)}}{\partial x} = \gamma_i V_i - (1-p)\rho\theta_i^{(1)},$$

y finalmente,

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i\frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i\theta_i^{(1)}}{\partial x} = \gamma_i V_i - (1-p)\rho\theta_i^{(1)}. \tag{4.11}$$

De esta manera se tiene el siguiente sistema de EDP utilizando las ecuaciones (4.8) y (4.11).

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial \rho_a V_a}{\partial x} = (1-p)\rho_a\rho_b\left(V_b - V_a\right),$$

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \frac{\partial \rho_b V_b}{\partial x} = (1-p)\rho_a\rho_b\left(V_a - V_b\right),$$

$$\frac{\partial V_a}{\partial t} + V_a\frac{\partial V_a}{\partial x} + \frac{1}{\rho_a}\frac{\partial \rho_a\theta_a^{(1)}}{\partial x} = \gamma_a V_a - (1-p)\rho\theta_a^{(1)},$$

$$\frac{\partial V_b}{\partial t} + V_b\frac{\partial V_b}{\partial x} + \frac{1}{\rho_b}\frac{\partial \rho_b\theta_b^{(1)}}{\partial x} = \gamma_b V_b - (1-p)\rho\theta_b^{(1)}.$$

Para reducir la cantidad de ecuaciones se utiliza un método iterativo propuesto por (Medeiros-Kremer, 2010). Este proceso asume que la función de distribución $f_i^{(0)}$ hace contribuciones directas en las variables macroscópicas de manera que $p_i^{(0)} = \rho_i V_i^2(\alpha_i+1)/\alpha_i$ y $\theta_i^{(0)} = V_i^2/\alpha_i$ [17]. Partiendo de la ecuación (4.9), observamos lo siguiente:

$$\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial p_i}{\partial x} = \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i (V_i^{(0)})^2\frac{(\alpha_i+1)}{\alpha_i}\right),$$

$$= \frac{1}{\rho_i}\left(\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}\right)\left(2\rho_i V_i^{(0)}\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x} + (V_i^{(0)})^2\frac{\partial \rho_i}{\partial x}\right),$$

$$= 2\left(\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}\right)V_i^{(0)}\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x} + \frac{(V_i^{(0)})^2}{\rho_i}\left(\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}\right)\frac{\partial \rho_i}{\partial x}.$$

Sustituyendo en (4.9) y utilizando la relación 4.10,

$$\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial t} - V_i^{(0)}\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x} - \frac{(V_i^{(0)})^2}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i}{\partial x} + 2\left(\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}\right)V_i^{(0)}\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x} + ...$$

$$... + \frac{(V_i^{(0)})^2}{\rho_i}\left(\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i}\right)\frac{\partial \rho_i}{\partial x} - \gamma_i V_i^{(0)} = -(1-p)\rho\frac{(V_i^{(0)})^2}{\alpha_i},$$

entonces,

$$\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial t} + \left(\frac{2\alpha_i+2}{\alpha_i} - 1\right)V_i^{(0)}\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x} + \frac{(V_i^{(0)})^2}{\rho_i}\left(\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i} - 1\right)\frac{\partial \rho_i}{\partial x} =$$

$$= \gamma_i V_i^{(0)} - (1-p)\rho\frac{(V_i^{(0)})^2}{\alpha_i},$$

y finalmente,

$$\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial t} + \left(\frac{\alpha_i+2}{\alpha_i}\right)V_i^{(0)}\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x} + \frac{(V_i^{(0)})^2}{\alpha_i\rho_i}\frac{\partial \rho_i}{\partial x} = \gamma_i V_i^{(0)} - (1-p)\rho\frac{(V_i^{(0)})^2}{\alpha_i}. \quad (4.12)$$

Sin embargo, se tiene conocimiento que este tipo de ecuaciones no describen de manera suficiente a un sistema y por eso es necesario calcular las desviaciones correspondientes en la velocidad [17].

$$\hat{V}_i = V_i - V_i^{(0)}, \quad (4.13)$$

y la varianza de la velocidad se propone como,

$$\theta_i^{(1)} = \frac{V_i^2}{\alpha_i}\left(1 - \Gamma_i\frac{\partial V_i}{\partial x}\right),$$

donde α_i y $\Gamma_i = 2(\alpha_i+1)/\sigma_i\alpha_i$ son consideradas como constantes. Utilizando la ecuación (4.13) en las ecuaciones (4.11) y (4.12).

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i\frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i\theta_i^{(1)}}{\partial x} = \gamma_i V_i - (1-p)\rho\theta_i^{(1)}$$

Por un lado se tiene que,

$$\frac{\partial(\hat{V}_i + V_i^{(0)})}{\partial t} + (\hat{V}_i + V_i^{(0)})\frac{\partial(\hat{V}_i + V_i^{(0)})}{\partial x} + ...$$

$$... + \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial \rho_i}{\partial x}\left(\frac{(\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2}{\alpha_i}\right)\left(1 - \Gamma_i \frac{\partial V_i}{\partial x}\right) - \gamma_i \hat{V}_i - \gamma_i V_i^{(0)},$$

$$= \frac{\partial \hat{V}_i}{\partial t} + \left(\hat{V}_i + V_i^{(0)}\right)\frac{\partial (\hat{V}_i + V_i^{(0)})}{\partial x} + ...$$

$$... + \frac{1}{\rho_i \alpha_i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_i (\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2 - V_i^2 \rho_i \Gamma_i \frac{\partial V_i}{\partial x}\right]\right) + \frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial t} - \hat{V}_i \gamma_i - V_i^{(0)} \gamma_i,$$

$$= \frac{\partial \hat{V}_i}{\partial t} + \left(\hat{V}_i + V_i^{(0)}\right)\frac{\partial (\hat{V}_i + V_i^{(0)})}{\partial x} + \frac{1}{\rho_i \alpha_i}\frac{\partial \rho_i (\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2}{\partial x} - ...$$

$$... - \frac{\Gamma_i}{\rho_i \alpha_i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i (\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2 \frac{\partial (\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2}{\partial x}\right) + \frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial t} - \hat{V}_i \gamma_i - V_i^{(0)} \gamma_i,$$

$$= \frac{\partial \hat{V}_i}{\partial t} - \frac{\Gamma_i}{\rho_i \alpha_i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i (\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2 \frac{\partial (\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2}{\partial x}\right) + \left(\hat{V}_i + V_i^{(0)}\right)\frac{\partial (\hat{V}_i + V_i^{(0)})}{\partial x} + ...$$

$$... + \frac{1}{\rho_i \alpha_i}\frac{\partial \rho_i (\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2}{\partial x} - \left(\frac{\alpha_i + 2}{\alpha_i}\right) V_i^{(0)} \frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x} - \frac{(V_i^{(0)})^2}{\alpha_i \rho_i}\frac{\partial \rho_i}{\partial x} + ...$$

$$... + \gamma_i V_i^{(0)} - (1-p)\rho \frac{(V_i^{(0)})^2}{\alpha_i} - \hat{V}_i \gamma_i - V_i^{(0)} \gamma_i,$$

Entonces, utilizando la relación (4.13) en la ecuación (4.11) tenemos que

$$\frac{\partial \hat{V}_i}{\partial t} - \frac{\Gamma_i}{\rho_i \alpha_i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i (\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2 \frac{\partial (\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2}{\partial x}\right) + \hat{V}_i \frac{\partial (\hat{V}_i + V_i^{(0)})}{\partial x} + V_i^{(0)} \frac{\partial \hat{V}_i}{\partial x} + ...$$

$$... + \frac{1}{\rho_i \alpha_i}\left[\frac{\partial \rho_i (\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2}{\partial x} - (V_i^{(0)})^2 \frac{\partial \rho_i}{\partial x} - 2\rho_i V_i^{(0)} \frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x}\right] = \hat{V}_i \gamma_i - (1-p)\left[\rho \theta_i^{(1)} - \rho \frac{(V_i^{(0)})^2}{\alpha_i}\right],$$

Desarrollando uno de los términos de la ecuación anterior,

$$\frac{1}{\rho_i\alpha_i}\left[\frac{\partial\rho_i(\hat{V}_i+V_i^{(0)})^2}{\partial x}-(V_i^{(0)})^2\frac{\partial\rho_i}{\partial x}-2\rho_iV_i^{(0)}\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x}\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho_i\alpha_i}\left[2(\hat{V}_i+V_i^{(0)})\rho_i\frac{\partial(\hat{V}_i+V_i^{(0)})}{\partial x}+(\hat{V}_i+V_i^{(0)})^2\frac{\partial\rho_i}{\partial x}-(V_i^{(0)})^2\frac{\partial\rho_i}{\partial x}-2\rho_iV_i^{(0)}\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x}\right],$$

$$=\frac{1}{\rho_i\alpha_i}\left[2\hat{V}_i\rho_i\frac{\partial\hat{V}_i}{\partial x}+2\hat{V}_i\rho_i\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x}+2V_i^{(0)}\rho_i\frac{\partial\hat{V}_i}{\partial x}+(\hat{V}_i)^2\frac{\partial\rho_i}{\partial x}+2\hat{V}_iV_i^{(0)}\frac{\partial\rho_i}{\partial x}\right].$$

Observamos lo siguiente:

$$\frac{1}{\alpha_i\rho_i}\frac{\partial\rho_i(\hat{V}_i^{\,2}+2\hat{V}_iV_i^{(0)})}{\partial x}=...$$

$$...=\frac{1}{\rho_i\alpha_i}\left[2\hat{V}_i\rho_i\frac{\partial\hat{V}_i}{\partial x}+2\hat{V}_iV_i^{(0)}\frac{\partial\rho_i}{\partial x}+\hat{V}_i^{\,2}\frac{\partial\rho_i}{\partial x}+2\rho_i\frac{\partial\hat{V}_iV_i^{(0)}}{\partial x}\right],$$

y además,

$$2\rho_i\frac{\partial\hat{V}_iV_i^{(0)}}{\partial x}=2\hat{V}_i\rho_i\frac{\partial\hat{V}_i}{\partial x}+2\hat{V}_i\rho_i\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x}.$$

En consecuencia tenemos que,

$$\frac{\partial\hat{V}_i}{\partial t}-\frac{\Gamma_i}{\rho_i\alpha_i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i(\hat{V}_i+V_i^{(0)})^2\frac{\partial(\hat{V}_i+V_i^{(0)})^2}{\partial x}\right)+\hat{V}_i\frac{\partial(\hat{V}_i+V_i^{(0)})}{\partial x}+V_i^{(0)}\frac{\partial\hat{V}_i}{\partial x}+...$$

$$...+\frac{1}{\alpha_i\rho_i}\frac{\partial\rho_i(\hat{V}_i^{\,2}+2\hat{V}_iV_i^{(0)})}{\partial x}=\hat{V}_i\gamma_i-(1-p)\rho\left[\theta_i^{(1)}-\frac{(V_i^{(0)})^2}{\alpha_i}\right].$$

Del lado derecho de la ecuación se obtiene lo siguiente

$$\hat{V}_i\gamma_i-(1-p)\rho\left[\theta_i^{(1)}-\frac{(V_i^{(0)})^2}{\alpha_i}\right]=...$$

$$...=\hat{V}_i\gamma_i-(1-p)\rho\left[\frac{(\hat{V}_i+V_i^{(0)})^2}{\alpha_i}\left(1-\Gamma_i\frac{\partial(\hat{V}_i+V_i^{(0)})}{\partial x}\right)-\frac{(V_i^{(0)})^2}{\alpha_i}\right],$$

y desarrollando como agrupando términos se puede concluir que

$$= \hat{V}_i\gamma_i - \frac{1-p}{\alpha_i}\rho\left(\hat{V}_i{}^2 + 2\hat{V}_i V_i^{(0)}\right)\left[1 - \Gamma_i\frac{\partial(\hat{V}_i + V_i^{(0)})}{\partial x}\right] + \frac{1-p}{\alpha_i}\rho(V_i^{(0)})^2\Gamma_i\frac{\partial(\hat{V}_i + V_i^{(0)})}{\partial x}.$$

Finalmente se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{\partial\hat{V}_i}{\partial t} - \frac{\Gamma_i}{\rho_i\alpha_i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i(\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2\frac{\partial(\hat{V}_i + V_i^{(0)})^2}{\partial x}\right) + ...$$

$$... + \hat{V}_i\frac{\partial(\hat{V}_i + V_i^{(0)})}{\partial x} + V_i^{(0)}\frac{\partial\hat{V}_i}{\partial x} + \frac{1}{\alpha_i\rho_i}\frac{\partial\rho_i(\hat{V}_i{}^2 + 2\hat{V}_i V_i^{(0)})}{\partial x} = ...$$

$$... = \hat{V}_i\gamma_i - \frac{1-p}{\alpha_i}\rho\left(\hat{V}_i{}^2 + 2\hat{V}_i V_i^{(0)}\right)\left[1 - \Gamma_i\frac{\partial(\hat{V}_i + V_i^{(0)})}{\partial x}\right] + ...$$

$$... + \frac{1-p}{\alpha_i}\rho(V_i^{(0)})^2\Gamma_i\frac{\partial(\hat{V}_i + V_i^{(0)})}{\partial x}. \tag{4.14}$$

Utilizando el proceso de iteración de Maxwell, se puede obtener a partir de la ecuación (4.14) lo siguiente [17]

$$0 = \gamma_i\hat{V}_i - 2(1-p)\rho\hat{V}_i V_i^{(0)}\frac{1}{\alpha_i} + (1-p)\rho(V_i^{(0)})^2\left[\frac{\Gamma_i}{\alpha_i}\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x}\right],$$

de tal manera que podemos despejar la desviación de la velocidad de orden cero

$$\hat{V}_i = -\frac{\rho(V_i^{(0)})^2\Gamma_i}{\left[\rho_e V_e - 2\rho V_i^{(0)}\right]}\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x}, \tag{4.15}$$

donde la velocidad promedio para cada clase de automovilista está dada por (4.13), además $V_i^{(0)} = V_e(\rho_i)$ debido a que es el término que más aporta la dinámica de velocidad [17] y se obtiene por medio de la relación fundamental de Kerner-Konhäuser. Por otro lado, α_i y Γ_i son parámetros libres del modelo donde Γ_i es un parámetro de relajación y α_i está relacionada con el parámetro de agresividad w_i.

4.4. Resultados numéricos

Para presentar la capacidad de este modelo para describir la transición de las tres fases se presentan los siguientes ejemplos [17]. Dado un circuito cerrado homogéneo de longitud fija sin rampas de entrada y salida de autos, el modelo que describe el flujo vehicular para dos tipos de conductores con distinta agresividad al conducir, en su forma dimensional, está dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Q(u)}{\partial x} = S(u), \quad x \in (0, L)$$

donde,

$$u = \begin{pmatrix} \rho_a \\ \rho_b \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_a \\ Q_b \end{pmatrix} \quad y \quad S = \begin{pmatrix} (1-p)\eta\rho_a\rho_b(V_b - V_a) \\ (1-p)\eta\rho_a\rho_b(V_a - V_b) \end{pmatrix},$$

donde $Q_i = \rho_i V_i$ para $i = a, b$. Las variables adimensionales del problema son: $\hat{t} = t/\tau$, $\hat{x} = x/(V_{max}\tau)$, $\hat{\rho} = \rho/\rho_{max}$ y $\hat{V} = V/V_{max}$. Para este ejercicio se considera $\rho_{max} = 140[veh/km]$, $V_{max} = 120[veh/km]$, $\tau = 30[seg]$, $\eta = \tau\rho_{max}V_{max}$, $\Gamma_a = 0.012$, $\Gamma_b = 0.05$, $L = 12[km]$, $\alpha_a = 120$, $\alpha_b = 100$. Se resuelve numéricamente la ecuación anterior por medio del esquema numérico de Lax-Wendroff, utilizando $h = L/950$ y $\Delta t = h/10$, con diferentes condiciones iniciales para simular las tres fases del flujo vehicular.

4.4.1. Flujo libre

Como primer ejemplo, se expone este ejercicio para verificar que el modelo es capaz de representar el flujo libre dados ciertas condiciones. Considerando el problema planteado anteriormente con $\hat{\rho_e} = 0.2$ junto con la siguiente condición inicial:

$$\rho_a(x, 0) = \hat{\rho_e}\left(0.45 + 0.05sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right),$$

$$\rho_b(x, 0) = \hat{\rho_e}\left(0.55 + 0.05sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right).$$

Debido a que el parámetro $\Gamma_b > \Gamma_a$, esto nos indica que los conductores de la clase b son más agresivos que aquellos de la clase a. La condición inicial propone que las densidades de los conductores de las dos clases sean casi

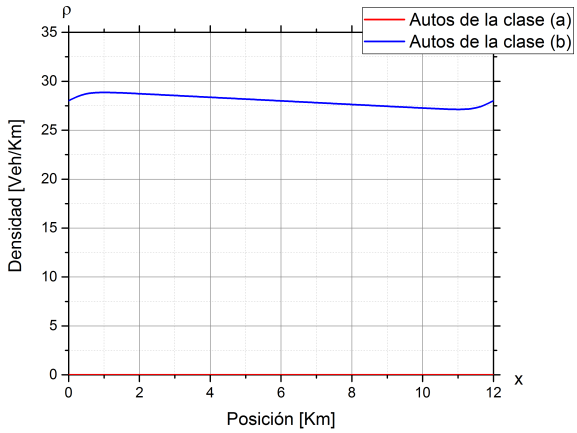

Figura 4.1: Perfil de densidad. $\hat{\rho}_e = 0.2$

iguales en un principio. Sin embargo se observa que la clase de conductores menos agresiva disminuye en su densidad con el paso del tiempo, hasta que la totalidad de conductores pertenece a la clase más agresiva. Bajo estas condiciones se tiene flujo libre debido a la ausencia de cúmulos de densidad en todo el circuito a partir del tiempo $t = 30[min]$. Con base en otras simulaciones, intercambiando la densidad de autos de las distintas clases, se demuestra que solamente una de estas prevalece y que además la agresividad no juega un papel importante en la adaptación de los automovilistas sino la cantidad de autos por cada clase al inicio de la simulación (ver [17]).

4.4.2. Transición del flujo libre al flujo sincronizado

Para simular este tipo de transición, es necesario utilizar condiciones especiales cuyo análisis detallado se puede encontrar en [17]. Consideremos el problema anterior con la siguiente condición inicial:

$$\rho_a(x,0) = \hat{\rho}_e \left(0.85 + 0.1sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right),$$

$$\rho_b(x,0) = \hat{\rho}_e \left(0.15 + 0.1sin\left(\frac{2\pi x}{L} + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

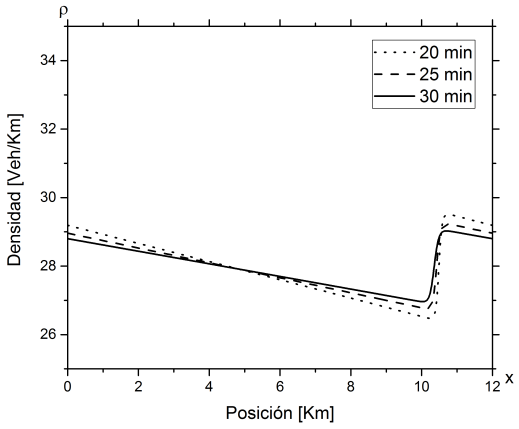

Figura 4.2: Gradiente de densidad. $\hat{\rho_e} = 0.2$

Se puede observar la formación de un cúmulo de densidad alrededor del punto $x = 11[km]$ que se mantiene a lo largo del tiempo. El cambio brusco de la densidad afecta directamente a la velocidad promedio en esa región y así se concluye que, bajo las condiciones que se establecieron previamente, se tiene la presencia de flujo sincronizado a partir del flujo libre.

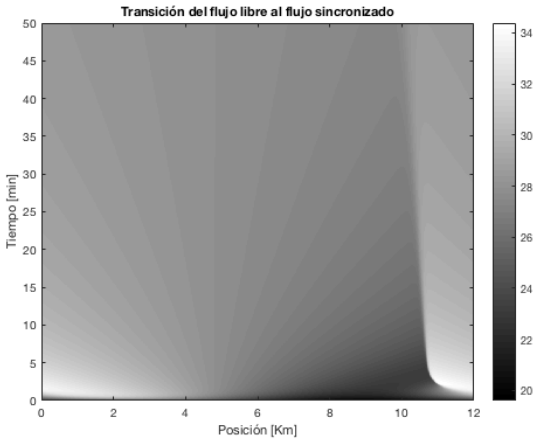

Figura 4.3: Gradiente de densidad. $\hat{\rho_e} = 0.2$

4.4.3. Transición del flujo sincronizado al flujo congestionado

El modelo también tiene la capacidad de reproducir el flujo congestionado a partir del flujo sincronizado. Para observar esta transición se considera la siguiente condición inicial con $\hat{\rho}_e = 0.22$,

$$\rho_a(x,0) = 0.55\hat{\rho}_e \left[1 + 0.1\left(Cosh^{-2}\left(\frac{x-6}{0.5}\right) - Cosh^{-2}\left(\frac{x-7}{0.5}\right)\right)\right],$$

$$\rho_b(x,0) = 0.45\hat{\rho}_e \left[1 + 0.1\left(Cosh^{-2}\left(\frac{x-6}{0.5}\right) - Cosh^{-2}\left(\frac{x-7}{0.5}\right)\right)\right].$$

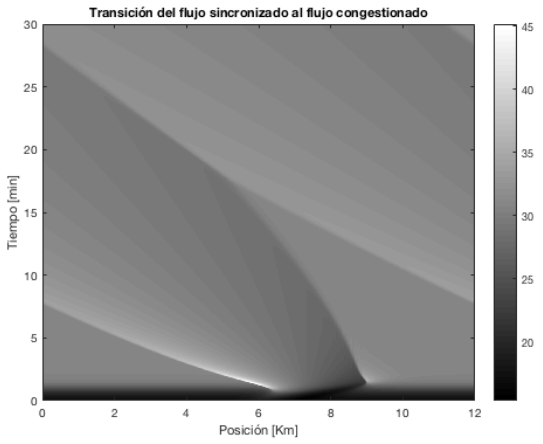

Figura 4.4: Gradiente de densidad. $\hat{\rho}_e = 0.2$

El perfil de densidad para la condición inicial tiene dos cúmulos a diferentes densidades. Aquel cuya densidad es mayor se propaga como una solución de tipo de onda viajera mientras el otro, de densidad menor, permanece fijo en los primeros dos minutos de simulación lo cual indica la presencia de flujo sincronizado. Para $t = 18[min]$ finalmente se observa la transición del flujo sincronizado al flujo congestionado.

4.4.4. Flujo congestionado

Para mostrar la capacidad del modelo de simular el tráfico congestionado se propone la siguiente condición inicial con $\hat{\rho}_e = 0.32$

$$\rho_a(x,0) = 0.8\hat{\rho}_e \left[1 + 0.05\left(Cosh^{-2}\left(\frac{x-6}{0.5}\right) - Cosh^{-2}\left(\frac{x-7}{0.5}\right)\right)\right],$$

$$\rho_b(x,0) = 0.2\hat{\rho}_e \left[1 + 0.05\left(Cosh^{-2}\left(\frac{x-6}{0.5}\right) - Cosh^{-2}\left(\frac{x-7}{0.5}\right)\right)\right].$$

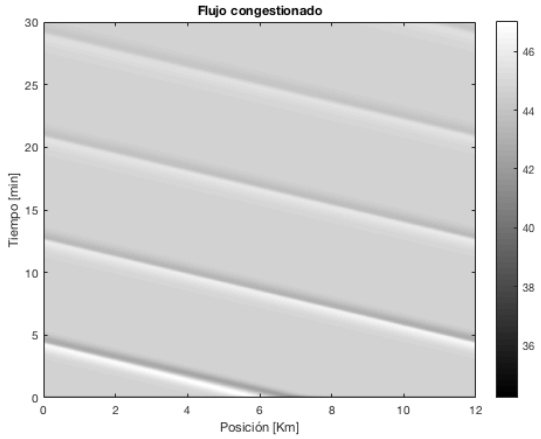

Figura 4.5: Gradiente de densidad. $\hat{\rho}_e = 0.32$

Es evidente que para este ejercicio existe la presencia de un cúmulo de densidad móvil el cual se propaga como solución de tipo de onda viajera.

Conclusiones

Es evidente la importancia del uso de datos experimentales para el estudio del tráfico vehicular. Desafortunadamente este tipo de datos no siempre pueden ser inferidos solamente bajo hipótesis y formulaciones matemáticas, pero el uso de ajustes numéricos es suficiente para comenzar a desarrollar modelos y entender los diversos patrones emergentes del tráfico vehicular.

De las diferentes maneras de abordar problemas de este tipo, la modelación por medio del uso de ecuaciones diferenciales parciales resulta una herramienta útil por su capacidad de describir cualitativamente fenómenos junto con la facilidad para ajustar términos necesarios en las ecuaciones y mejorar el desempeño de un modelo. El análisis de Fourier para el modelo de tráfico vehicular propuesto por Kerner y Konhäuser, uno de los más utilizados en la actualidad, brinda información valiosa para determinar la estabilidad de soluciones por medio de una correlación entre la varianza promedio y la densidad del sistema. De esta manera es posible inferir el comportamiento local para determinados parámetros, aportando un claro panorama al momento de proponer experimentos y observar las diferentes capacidades que este modelo ofrece.

Los efectos que se producen en las autopistas cuando se consideran rampas de entradas y salidas de autos, como un cambio en el número de carriles, enriquecen los modelos de manera que es posible formular hipótesis nuevas y diseñar autopistas para evitar problemas de tráfico congestionado. Sin embargo, numéricamente se ha demostrado que incluir rampas o cambiar el número de carriles o combinar estas dos propiedades en un circuito, las soluciones pueden ser muy complejas e incluso cabe la posibilidad de la aparición de patrones emergentes locales como se expone en el último experimento del capítulo 3. La interpretación de este tipo de fenómenos se debe de hacer

con suma cautela ya que no se cuentan con experimentos reales que puedan corroborar las simulaciones. Como por ejemplo, de la simulación del modelo de segundo orden de Kerner y Konhäuser en un circuito homogéneo con una densidad alta de autos por kilómetro se puede concluir que la distribución de los autos es homogénea, lo cual no es realista (ver [20]).

El modelo propuesto por Kerner y Konhäuser, análogo a la teoría de flujos compresibles, ha tenido resultados satisfactorios cuando se consideran solamente dos posibles fases del tráfico vehicular. Pero su incapacidad de modelar el flujo sincronizado, debido a que está limitado por el diagrama fundamental (1.7) (ver [20]), y algunas transiciones del tráfico cuando el circuito es homogéneo, ha dado lugar a la investigación de nuevos modelos, que si bien siguen siendo macroscópicos, estos son basados en la teoría cinética de gases.

En el trabajo reciente de R.M. Velasco y A.R Méndez, se ha propuesto un modelo con la capacidad de describir los tres diferentes estados y sus diferentes transiciones descritas en la teoría de tres fases del tráfico vehicular dentro de un circuito homogéneo. Esto es posible debido a que se consideran dos grupos de conductores con diferente agresividad al conducir, a diferencia de considerar los conductores como un fluido compresible. La complejidad de este modelo resulta en un sistema con cuatro ecuaciones diferenciales parciales, que determinan las interacciones y la densidad relativa entre los dos grupos al paso del tiempo, las cuales al ser tratadas bajo un proceso iterativo (Medeiros-Kremer,2010) se reducen a tan solo dos ecuaciones diferenciales parciales en su forma conservativa que pueden resolverse utilizando el método numérico de Lax-Wendroff. Sin embargo, aún con las capacidades que ofrece este modelo, es necesario trabajar para incluir términos para que dentro de un circuito este considere rampas de entrada y salida de autos como cuando el número de carriles es variable.

Bibliografía

[1] J. Delgado, P. Saavedra, R.M. Velasco. *Modelación matemática del flujo vehicular. Publicaciones C.B.I. UAM. [2012].*

[2] B. D. Greenshields. *in Proc Highway Res. Board 14 448. (1935).*

[3] B.S. Kerner, P. Konhäuser. *Cluster effect in initially homogeneous traffic flow, Phys. Rev. E 48 R2335-R2338. (1993).*

[4] Logan,J.David *An introduction to nonlinear partial differential equations. Second edition. Pure and Applied Mathematics (Hoboken). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, [2008]. xiv+397 pp. ISBN: 978-0-470-22595-035-01.*

[5] Guenther, Ronald B.; Lee, John W *Partial differential equations of mathematical physics and integral equations. Corrected reprint of the 1988 original. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, [1996]. xii+562 pp. ISBN: 0-486-68889-5 (Reviewer: E. Kreyszig) 35-01 (45-01).*

[6] Martin Treiber; Arne Kesting *Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation. ISBN:978-3-642-32459-8 (Print) 978-3-642-32460-4 (Online).*

[7] Kerner BS. *Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control: The Long Road to Three-Phase Traffic Theory. 1. Aufl. ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; [2009].*

[8] Kerner, B. S. *The physics of traffic: empirical freeway pattern features, engineering applications, and theory. Springer. [2012].*

[9] Kerner BS, Konhäuser P, Schilke M. *Deterministic spontaneous appearance of traffic jams in slightly inhomogeneous traffic flow. Physical Review E. 1995;51(6):6243-6.*

[10] Helbing D. *Traffic and related self-driven many-particle systems. Reviews of Modern Physics. (2001);73(4):1067-141.*

[11] Prigogine I, Andrews FC. *A Boltzmann-Like Approach for Traffic Flow. Operations Research. (1960);8(6):789-97.*

[12] Lee HY, Lee H-, Kim D. *Origin of Synchronized Traffic Flow on Highways and Its Dynamic Phase Transitions. Physical Review Letters. (1998);81(5):1130-3.*

[13] Lee HY, Lee HW, Kim D. *Dynamic states of a continuum traffic equation with on-ramp. Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics. (1999);59(5 Pt A):5101-11.*

[14] Helbing D, Treiber M. *Jams, Waves, and Clusters. Science. (1998);282(5396):2001-3.*

[15] Helbing D, Treiber M. *Gas-Kinetic-Based Traffic Model Explaining Observed Hysteretic Phase Transition. Physical Review Letters. (1998);81(14):3042-5.*

[16] LeVeque, R. J., & Leveque, R. J. *Numerical methods for conservation laws (Vol. 132). Basel: Birkhäuser. (1992).*

[17] A.R. Méndez, & R.M. Velasco. *The onset of traffic phases in highways: A two vehicle-class macroscopic model. IJPAM: Volume 112, No. 3 (2017), pages: 531-556.*

[18] Velasco RM, Marques J, W. *Navier-Stokes-like equations for traffic flow. Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics. 2005;72(4 Pt 2):046102. (2005).*

[19] Sugiyama, Y., Nakayama, A., Fukui, M., Hasebe, K., Kikuchi, M., Nishinari, K., ... & Yukawa, S. *Traffic and Granular Flow 03. (2005).*

[20] Velasco, R. M., & Saavedra, P. *Clusters in Macroscopic Traffic Flow Models. (2012).*