КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ

ISBN 5-900975-27-4

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

Выпуск 23

ИЗДАТЕЛЬСТВО КАЗАНСКОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

КАЗАНЬ – 2001

УДК 519.6
ББК 22.193+22.311
И89

Печатается по рекомендауии Редакционно-издательского
Совета факультета ВМК Казанского государственного университета

Научный редактор - профессор Лапин А.В.
Составитель - доцент Задворнов О.А.
Рецензенты - профессор Ляшко А.Д., доцент Стребков Е.В.

И89 Исследования по прикладной математике и информатике.
Сборник научных статей. - Выпуск 23. - Казань: Издательство Казанского математического общества, 2001. - 164 с.

ISBN 5-900975-27-4

В сборник включены статьи, посвященные актуальным вопросам прикладной математики и информатики, таким, как численные методы решения задач математической физики, математическое моделирование механических, физических и экономических процессов, методы оптимизации, математическая статистика.

Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области прикладной математики.

УДК 519.6
ББК 22.193+22.311

ISBN 5-900975-27-4

УДК 519.68

ПОСТАНОВКА И ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК С НЕВЫПУКЛЫМ ДОСТИЖИМЫМ МНОЖЕСТВОМ[1)]

И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов, В.В. Бандеров
Казанский государственный университет

1. Введение

Рассматривается плоская задача об определении положения равновесия мягкой оболочки, закрепленной по краям и находящейся под воздействием массовых сил и следящей поверхностной нагрузки и ограниченной препятствием. Деформации и перемещения оболочки допускаются конечными. Построение и исследование математической модели аналогичной задачи без препятствия или с плоским препятствием изучались в работах [1] - [3], где математически задачи формулировались в виде уравнений с псевдомонотонными операторами в банаховых пространствах или же в виде соответствующих вариационных неравенств на выпуклых замкнутых множествах. В настоящей работе предполагается, что поверхность препятствия задается непрерывно-дифференцируемой вогнутой функцией. Это приводит к появлению невыпуклого множества допустимых положений оболочки, и задачу приходится формулировать в виде квазивариационного (см. [4]) неравенства. Доказана теорема существования решения этого квазивариационного неравенства.

2. Постановка задачи

Уравнение равновесия мягкой бесконечно длинной цилиндрической оболочки, закрепленной по краям и находящейся под воздействием массовых сил и следящей поверхностной нагрузки описывается следующей

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00616)

меньшей концентрации η^* в системе возникает анизотропная фаза (аналогичный результат для модели Онзагера получен в [4]).

В результате вычисления свободной энергии на каждой из ветвей f_i $(i = 0, 1, 2)$ оказалось, что точка η^* является точкой потери устойчивости для изотропной фазы: при $\eta < \eta*$ устойчива изотропная фаза, а при $\eta > \eta^*$ - анизотропная фаза с ориентационной плотностью f_2.

Литература

1. **П.Ж. Де Жен.** Физика жидких кристаллов. - М.: Мир, 1977, 400 с.
2. **R.F. Kayser, H.J. Raveche.** Bifurcation in Onsager's model of the isotropic-nematic transition // Phys. Rev., 1978, V.A17, № 6, P.2067-2072.
3. **Л.Д. Эскин.** Уравнение Онзагера как уравнение Ляпунова-Шмидта // Известия вузов.Матем., 1998, № 8, С. 71-78.
4. **J.D.Parsons.** Nematic ordering in a system of rods // Phys. Rev. A., 1979, V.19, № 1, P. 1225-1230.
5. **Л.Д.Эскин.** Об интегральном уравнении теории фазовых переходов в системе магнитных стержней // Теорет. и матем. физика, 1996, Т.109, № 3, С. 427–440.
6. **Л.Д. Эскин.** Об интегральном уравнении, описывающем фазовые переходы в системе магнитных стержней // Функц. анализ и его прилож., 1999, Т.33, № 1, С. 92–95.
7. **М.М. Вайнберг, В.А.Треногин.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений. - М.: Наука, 1969, 528 с.
8. **Л.Д. Эскин.** Об интегральном уравнении, описывающем ориентационные фазовые переходы в модели Парсонса // Изв. вузов. Матем., 1999, № 10. С.63–72.
9. **И.С.Градштейн, И.М.Рыжик.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: ГИФМЛ, 1962, 1100 с.
10. **Н.Я.Виленкин.** Специальные функции и теория представлений групп. - М.: Наука. 1965, 588 с.

УДК 519.958

АСИМПТОТИКА НЕОБХОДИМОГО ОБЪЕМА ВЫБОРКИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО АСИМПТОТИЧЕСКИ НОРМАЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

И.Н. Володин, Ан.А. Новиков, M.J. Tec-Canché

Казанский государственный университет,

Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa, México

Исследуется асимптотическое поведение необходимого объема выборки при d-гарантийном различении сложных гипотез и при более общих предположениях о локальной асимптотической нормальности статистического эксперимента; ранее, в работе [1] аналогичная задача решалась в рамках стандартных условий регулярности статистического эксперимента (см., напр., [2], §7, стр. 93).

Пусть $H_0 : \theta \in \Theta_0 = \{\theta \leqslant \theta_0\}$ и $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \{\theta > \theta_0\}$ - две гипотезы о скалярном параметре θ распределения P_θ компонент случайной выборки $X^{(n)} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из этого распределения. Предположим, что P_θ имеет плотность вероятности $f(x \,|\, \theta)$ относительно некоторой σ-конечной меры μ на измеримом пространстве значений наблюдаемой случайной величины, в то время как значение параметра $\theta \in \Theta \subseteq \mathrm{R}$ является реализацией случайной величины ϑ с априорным распределением, имеющим плотность вероятности $g(\theta)$, $\theta \in \Theta$ относительно меры Лебега.

Статистический критерий $\varphi_n = \varphi_n(X^{(n)})$ называется d-гарантийным уровня (β_0, β_1), если

$$\mathbf{P}(\vartheta \in \Theta_0 \,|\, \text{принята } H_1) = \frac{\mathbf{E}\,\varphi_n \mathrm{I}(\vartheta \in \Theta_0)}{\mathbf{E}\varphi_n} \leqslant \beta_0,$$

$$\mathbf{P}(\vartheta \in \Theta_1 \,|\, \text{принята } H_0) = \frac{\mathbf{E}(1-\varphi_n)\mathrm{I}(\vartheta \in \Theta_1)}{\mathbf{E}(1-\varphi_n)} \leqslant \beta_1,$$

где β_0, β_1, $0 < \beta_0 < 1$, $0 < \beta_1$ – заданные уровни d-апостериорных вероятностей ошибок, $\mathrm{I}(A)$ – индикатор события A.

Необходимый объем выборки (НОВ) $n^* = n^*(\beta_0, \beta_1)$ определяется как минимальный объем выборки n, для которого существует d-гарантийный критерий $\varphi_n = \varphi_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ уровня (β_0, β_1).

Как показано С.В. Симушкиным (см. [3]) критерий $\varphi_n(X^{(n)})$, соответствующий НОВ, основан на статистике $T_n = T_n(X^{(n)}) = \mathbf{P}\{\vartheta \in \Theta_0 \,|\, X^{(n)}\}$ и имеет форму

$$\varphi_n = \varphi_n(X^{(n)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } T_n < c, \\ \gamma, & \text{если } T_n = c, \\ 0, & \text{если } T_n > c. \end{cases}$$

Если $H_n(t \,|\, \theta) = \mathbf{P}\{T_n < t \,|\, \theta\}$ - функция распределения статистики T_n, то оперативная характеристика критерия φ_n имеет вид

$$L_n(c, \gamma \,|\, \theta) = \mathbf{E}_\theta(1 - \varphi_n(X^{(n)})) = 1 - H_n(c\theta) + (1-\gamma)[\,H_n(c) - H_n(c-0) \,|\, \theta)\,].$$

Тогда, в терминах L_n, НОВ $n^*(\beta_0, \beta_1)$ определяется как такое минимальное n, что для некоторых постоянных $c \in [0,1]$ и $\gamma \in [0,1]$ имеют место соотношения:

$$R_0(n, c, \gamma) = \frac{\int_{\Theta_0}(1 - L_n(c, \gamma|\theta))g(\theta)d\theta}{\int_\Theta(1 - L_n(c, \gamma|\theta))g(\theta)d\theta} = \beta_0,$$

$$R_1(n, c, \gamma) = \frac{\int_{\Theta_1} L_n(c, \gamma|\theta)g(\theta)d\theta}{\int_\Theta L_n(c, \gamma|\theta)g(\theta)d\theta} \leqslant \beta_1.$$

Константы c, γ, соответствующие $n^*(\beta_0, \beta_1)$, обозначим через $c^* = c^*(\beta_0, \beta_1)$, $\gamma^* = \gamma^*(\beta_0, \beta_1)$.

Предполагается, что априорные вероятности $G_i = \mathbf{P}(\vartheta \in \Theta_i) > \beta_i, i = 0, 1$, поскольку в противном случае d-гарантийное решение может быть принято без проведения наблюдений (см. [2]).

В работе [3] было исследовано асимптотическое поведение НОВ $n^*(\beta_0, \beta_1)$, при $\beta_0, \beta_1 \to 0$, в случае регулярности статистического эксперимента. Цель данной работы - исследовать асимптотику НОВ в более общем случае, когда, вообще говоря, не предполагается регулярность статистического эксперимента. Вместо этого потребуем, чтобы для эксперимента выполнялось условие локальной асимптотической

нормальности (ЛАН). В частности, этот случай включает "почти гладкие" эксперименты, рассмотренные, например, в [1].

Пусть

$$Z_\theta^n(u) = \prod_{i=1}^n \frac{f(X_i|\theta + u\varepsilon(n))}{f(X_i|\theta)}$$

отношение правдоподобия, в котором $\varepsilon(n) \to 0$ - некоторая "нормализующая" последовательность. Предположим также, что выполняются следующие условия (см. [2], глава 2, стр. 167).

(N1). Для любого компактного множества $K \subset \Theta$ и любой последовательности $u_n \to u$ имеет место стохастическое представление $Z_{\theta_n}(u_n) = \exp\{\xi_n u - u^2/2 + \psi_n(\theta_n, u_n)\}$, где $\mathcal{L}(\xi_n |\, \mathrm{P}_{\theta_n}) \to \mathcal{N}(0,1)$ и для любого $\varepsilon > 0$ вероятность $\mathrm{P}_{\theta_n}(|\psi_n(\theta_n, u_n)| > \varepsilon) \to 0$, когда $n \to \infty$.

(N2.) Для любого компакта $K \subset \Theta$

$$\sup_{\theta \in K} \sup_{\substack{|u|<R \\ |v|<R}} |\, u - v\,|^{-\beta}\, \mathrm{E}_\theta |\, Z_{n,\theta}^{1/2}(u) - Z_{n,\theta}^{1/2}(v)\,|^2 < B(1 + R^a).$$

(N3). Для любого компакта $K \subset \Theta$ имеет место неравенство $\sup_{\theta \in K} \mathrm{E}_\theta Z_{n,\theta}^{1/2}(u) < \exp\{-g_n(|u|)\}$, где $g_n(y)$ - такая монотонно возрастающая функция, что $\lim_{\substack{y\to\infty \\ n\to\infty}} y^N \exp\{-g_n(y)\} = 0$ для любого $N > 0$.

Сделаем также несколько предположений, касающихся параметрического пространства и априорного распределения.

(C1). Параметрическое пространство Θ является компактным.

(C2). Априорная плотность вероятности $g(\theta)$ непрерывна в точке θ_0 и $g(\theta_0) > 0$.

(C3). Точка θ_0 является внутренней точкой параметрического пространства Θ.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (N1)–(N3), (C1)–(C3). Если $\beta_0, \beta_1 \to 0$ таким образом, что $\beta_0/\beta_1 \to r$, $0 < r < \infty$, то для $G_0/G_1 \neq r$ $\varepsilon(n^*(\beta_0, \beta_1)) \sim (\beta_0 G_1 - \beta_1 G_0)/(g(\theta_0)\Phi^{-1}(c))$ и $c^*(\beta_0, \beta_1) \to c$, где c является корнем уравнения*

$$\frac{rG_1}{G_0} = \frac{\phi(\Phi^{-1}(c)) - (1-c)\Phi^{-1}(c)}{\phi(\Phi^{-1}(c)) + c\Phi^{-1}(c)}, \tag{1}$$

в котором $\Phi(\cdot)$ *– функция распределения, а* $\phi(\cdot)$ *– функция плотности стандартного нормального закона; в случае* $G_0/G_1 = r$ $\varepsilon(n^*(\beta_0,\beta_1)) \sim \beta_0 G_1\sqrt{2\pi}/g(\theta_0)$. *Если* $\beta_0/\beta_1 \to 0$, *то* $c^*(\beta_0,\beta_1) \to 0$, *и* $\varepsilon(n^*(\beta_0,\beta_1))/\beta_1 \to 0$, $\varepsilon(n^*(\beta_0,\beta_1))/\beta_0 \to \infty$. *Аналогично, если* $\beta_1/\beta_0 \to 0$, *то* $c^*(\beta_0,\beta_1) \to 1$ *и* $\varepsilon(n^*(\beta_0,\beta_1))/\beta_1 \to \infty$, $\varepsilon(n^*(\beta_0,\beta_1))/\beta_0 \to 0$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *При выполнении условий (N1)-(N3) оперативная характеристика критерия* φ_n *имеет следующее асимптотическое* ($n \to \infty$) *представление:* $L_n(c,\gamma\,|\,\theta_0+\lambda\varepsilon(n)) = 1-\phi(\lambda+\phi^{-1}(c))+o(1)$, *каково бы ни было* $\lambda \in \mathrm{R}$.

Доказательство. В обозначениях $\theta_n = \theta_0+\lambda\varepsilon(n)$ апостериорная вероятность

$$T_n = \frac{\int_{\Theta_0} f_n(X^{(n)}\,|\,\theta)g(\theta)d\theta}{\int_{\Theta} f_n(X^{(n)}\,|\,\theta)g(\theta)d\theta}$$

после замены $\theta = \theta_n + u\varepsilon(n)$ приобретает вид

$$T_n = \frac{\int_{U_{0n}} Z^n_{\theta_n}(u)g(\theta_n+u\varepsilon(n))du}{\int_{U_n} Z^n_{\theta_n}(u)g(\theta_n+u\varepsilon(n))du}, \tag{2}$$

где $U_{0n} = \{u : \theta_n + u\varepsilon(n) \in \Theta_0\}$, $U_n = \{u : \theta_n + u\varepsilon(n) \in \Theta\}$.

Аналогично доказательству теоремы 10.2 из [2], глава 1 (см. формулу (10.9)) представим T_n в форме $T_n = \hat{T}_n(M) + \gamma_n(M)$, где

$$\hat{T}_n(M) = \frac{\int_{-M}^{-\lambda} Z^n_{\theta_n}(u)du}{\int_{-M}^{M} Z^n_{\theta_n}(u)du},$$

а $\gamma_n(M) \to 0$ по P_{θ_n}-вероятности при $M \to \infty$ равномерно по $n > n_0$ для некоторого $n_0 \geqslant 1$.

В силу условия (N1) и теоремы 22 из Приложения 1 монографии [2] отношение интегралов (2) сходится ($n \to \infty$) по P_{θ_n}-распределению к

$$\hat{T}(M) = \frac{\int_{-M}^{-\lambda} \exp\{u\xi - u^2/2\}du}{\int_{-M}^{M} \exp\{u\xi - u^2/2\}du},$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Поэтому, выбирая M достаточно большим и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем предельное выражение для распределения T_n:

$$\lim_{n\to\infty} H_n(t\,|\,\theta_n) = \lim_{n\to\infty} P_{\theta_n}(\hat{T}_n(M)+\gamma_n(M) < t) = P(\hat{T}(\infty) < t) = P(\phi(-\lambda-\xi) < t) = \phi(\lambda+\phi^{-1}(t)).$$

Поскольку последнее выражение является непрерывной функцией t, легко видеть, что для любого t величина скачка $H_n(t) - H_n(t-0) \to 0$, когда $n \to \infty$, так что

$$\lim_{n\to\infty} L_n(c,\gamma\,|\,\theta_n) = \lim_{n\to\infty}(1 - H_n(c|\theta_n)) = 1-\phi(\lambda+\phi^{-1}(c)).$$

Следовательно, константа рандомизации γ не влияет на асимптотику оперативной характеристики критерия φ_n. ■

Лемма 2. *При выполнении условий (N1)-(N3) и* $M \to \infty$

$$\sup_n \int_{U_n^M} \mathbf{P}(T_n > c\,|\,\theta_n)g(\theta_0+\lambda\varepsilon(n))d\lambda \to 0,$$

где $U_n^M = \{\lambda : \theta_0 + \lambda\varepsilon(n) \in \Theta_1; \lambda > M\}$, *и*

$$\sup_n \int_{U_n^{-M}} \mathbf{P}(T_n \leqslant c\,|\,\theta_n)g(\theta_0+\lambda\varepsilon(n))d\lambda \to 0,$$

где $U_n^{-M} = \{\lambda : \theta_0 + \lambda\varepsilon(n) \in \Theta_0; \lambda < -M\}$.

Доказательство. Докажем только первое из соотношений, второе доказывается аналогично.

В силу неравенства Чебышева $\mathrm{P}_\theta(T_n > c) \leqslant \mathrm{E}_\theta T_n/c$, так что

$$J(M) = \int_{U_n^M}[1 - H_n(c\,|\,\theta_n)]g(\theta_n)d\lambda \leqslant \frac{1}{c}\int_{U_n^M} \mathrm{E}_{\theta_n}T_n g(\theta_n)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{c}\int_{U_n^M} g(\theta_n)\int_{X^{(n)}} f_n(x^{(n)}\,|\,\theta_n)\frac{\int_{\Theta_0} f_n(x^{(n)}\,|\,t)g(t)dt}{\int_{\Theta} f_n(x^{(n)}\,|\,t)g(t)dt}d\mu_n(x^{(n)})d\lambda.$$

Делая замену переменной $t = \theta_n + u\varepsilon(n)$ (сравните с заменой (2)) в правой части последнего неравенства, получаем

$$\frac{1}{c}\int_{U_n^M} g(\theta_n)d\lambda \int_{X^{(n)}} f_n(x^{(n)}\,|\,\theta_n)\frac{\int_{U_{0n}} Z^n_{\theta_n}(u)g(\theta_n+u\varepsilon(n))du}{\int_{U_n} Z^n_{\theta_n}(u)g(\theta_n+u\varepsilon(n))du}d\mu_n(x^{(n)}).$$

По аналогии с доказательством Теоремы 10.2 главы 1 монографии [2], введем систему подмножеств Γ_H множества U_n, полагая $\Gamma_H = [H-1, H) \cap U_n$ для $H = -M, -M-1, \ldots$. В силу леммы 5.2 главы 1 из [2] существуют такие постоянные $b > 0$ и $B > 0$, что

$$\mathrm{E}_{\theta_n} Q_H \leqslant B(1 + |H|^B)\exp\{-bg_n(H)\},$$

где

$$Q_H = \frac{\int_{\Gamma_H} Z^n_{\theta_n}(u)g(\theta_n + u\varepsilon(n))du}{\int_{U_n} Z^n_{\theta_n}(u)g(\theta_n + u\varepsilon(n))du}.$$

Теперь для интеграла $J(M)$ получаем следующую оценку сверху:

$$J(M) \leqslant \frac{1}{c}\int_{U_n^M} g(\theta_0 + \lambda\varepsilon(n)) \sum_k \mathrm{E}_{\theta_n} Q_{-M-k} d\lambda,$$

где суммирование распространяется на все $k \geqslant 0$ для которых $\Gamma_{-M-k} \neq \emptyset$, и поэтому

$$J(M) \leqslant \frac{B}{C}\sum_{k=0}^{\infty}(1 + (M+k)^B)\exp\{-bg_n(M+k)\} \to 0,$$

когда $M \to \infty$ (см. условие (N3)). ■

Теперь изучим асимптотику интегралов в числителе (2).

Лемма 3. *При выполнении условий (N1)-(N3), (C1) и (C2) для любой последовательности $c_n \to c$, $0 < c < 1$, и для любого $\gamma_n \in [0, 1]$*

$$J_{1,n} = \int_{\Theta_1} L_n(c_n, \gamma_n \,|\, \theta)g(\theta)d\theta \sim$$

$$\sim \varepsilon(n)g(\theta_0)[\phi(\Phi^{-1}(c)) - (1-c)\Phi^{-1}(c)] = \varepsilon(n)q_1(c) \qquad (3)$$

и

$$J_{0,n} = \int_{\Theta_0}(1 - L_n(c_n, \gamma_n|\theta))g(\theta)d\theta \sim$$

$$\sim \varepsilon(n)g(\theta_0)[\phi(\Phi^{-1}(c)) + c\Phi^{-1}(c)] = \varepsilon(n)q_0(c) \qquad (4)$$

при $n \to \infty$. Если $c_n \to 0$, то

$$J_{1,n}/\varepsilon(n) \to \infty, \quad J_{0,n}/\varepsilon(n) \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (5)$$

Если $c_n \to 1$, то

$$J_{1,n}/\varepsilon(n) \to 0, \quad J_{0,n}/\varepsilon(n) \to \infty, \quad n \to \infty. \qquad (6)$$

Доказательство. Сначала докажем (3) и (4), когда $c_n \equiv c$, $0 < c < 1$. Поскольку

$$\varepsilon^{-1}(n)J_{1,n} = \int_{U_{1,n}} L_n(c, \gamma_n \,|\, \theta_n)g(\theta_0 + \lambda\varepsilon(n))d\lambda, \qquad (7)$$

где $U_{1,n} = \{\lambda : \theta_0 + \lambda\varepsilon(n) \in \Theta_1\}$ и $L_n(\theta_0 + \lambda\varepsilon(n))g(\theta_0 + \lambda\varepsilon(n)) \to \Phi(-\lambda - \Phi^{-1}(c))g(\theta_0)$ с $\lambda \in r$ (см. лемму 1), достаточно обосновать возможность перехода к пределу при $n \to \infty$ под знаком интеграла в правой части (7). Это обеспечивается равномерной интегрируемостью $L_n(c, \gamma_n \,|\, \theta_0 + \lambda\varepsilon(n))g(\theta_0 + \lambda\varepsilon(n))$, которая доказана в лемме 2. Следовательно,

$$J_1 = \lim_{n\to\infty} \varepsilon^{-1}(n)J_{1,n} = g(\theta_0)\int_0^{\infty} \Phi(-\lambda - \Phi^{-1}(c))d\lambda,$$

и интегрирование по частям дает

$$J_1 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}g(\theta_0)\int_0^{\infty} \lambda \exp\{-\frac{1}{2}(\lambda + \Phi^{-1}(c))^2\}d\lambda =$$

$$= g(\theta_0)(\phi(\Phi^{-1}(c)) - (1-c)\Phi^{-1}(c)).$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon(n)} J_{1,n} = g(\theta_0)(\phi(\Phi^{-1}(c)) - (1-c)\Phi^{-1}(c)),$$

является непрерывной функцией по c, то легко видеть, что (3) выполняется также для $c_n \to c$, $0 < c < 1$.

Соотношение (4) доказывается аналогично.

Если $c_n \to 0$, то для любого $\delta > 0$ постоянные $c_n < \delta$ при всех достаточно больших n,

$$L_n(c_n, \gamma_n \,|\, \theta) = \mathbf{P}(T_n > c_n \,|\, \theta) + (1-\gamma_n)\mathbf{P}(T_n = c_n \,|\, \theta) \geqslant \mathbf{P}(T_n > \delta \,|\, \theta)$$

и

$$1 - L_n(c_n, \gamma_n \,|\, \theta) \leqslant \mathbf{P}(T_n < c_n \,|\, \theta) + \gamma_n\mathbf{P}(T_n = c_n \,|\, \theta) \leqslant 2P(T_n < \delta \,|\, \theta).$$

Поэтому в силу (3) и (4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon(n)} J_{1,n} \geqslant g(\theta_0)(\phi(\Phi^{-1}(\delta)) - (1-\delta)\Phi^{-1}(\delta)),$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varepsilon(n)}J_{0,n}\leqslant g(\theta_0)(\phi(\Phi^{-1}(\delta))+\delta\Phi^{-1}(\delta)).$$

Выбирая δ произвольно малым, получаем (5). Аналогично доказывается (6). ■

Доказательство теоремы 1. Для любого $n\geqslant 1$ определим c_n и γ_n из уравнения $R_0(n,c,\gamma)=\beta_0$; их существование следует из леммы 2 в [3]. Поскольку рассматриваемый критерий оптимален, $R_1(n,c_n,\gamma_n)$монотонно убывает с ростом n, так что для НОВ $n^*(\beta_0,\beta_1)$ имеет место неравенство

$$R_1(n^*,c_{n^*},\gamma_{n^*})\leqslant\beta_1<R_1(n^*-1,c_{n^*-1},\gamma_{n^*-1}),$$

которые определяют его однозначно.

Пусть $\{(\beta_{0k},\beta_{1k}),\ k\geqslant 1\}$ - некоторая последовательность ограничений на d-риски, для которой

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\beta_{0k}}{\beta_{1k}}=r\quad,\quad 0<r<\infty.$$

Без потери общности можно предположить, что обе последовательности β_{0k} и β_{1k} монотонны, так что соответствующая последовательность НОВ $\{n_k=n^*(\beta_{0k},\beta_{1k}),\ k\geqslant 1\}$ не убывает.

Поскольку $0\leqslant c_{n_k}\leqslant 1$ для любого $n\geqslant 1$, то выберем подпоследовательность из этой подпоследовательности (для простоты обозначим ее по-прежнему $\{c_{n_k},\ k\geqslant 1\}$), сходящуюся к некоторому пределу c^*. Докажем, что $0<c^*<1$.

Если, например, $c^*=0$, то

$$\beta_{0k}=R_0(n_k,c_{n_k},\gamma_{n_k})=\frac{J_{0,n_k}}{J_{0,n_k}+G_1-J_{1,n_k}}\geqslant J_{0,n_k},\tag{8}$$

$$\beta_{1k}\geqslant R_1(n_k,c_{n_k},\gamma_{n_k})=\frac{J_{1,n_k}}{J_{1,n_k}+G_0-J_{0,n_k}}\geqslant J_{1,n_k},\tag{9}$$

и по Лемме 3

$$r=\lim_{k\to\infty}\frac{\beta_{0k}}{\beta_{1k}}\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{J_{0,n_k}/\varepsilon(n_k)}{J_{1,n_k-1}/\varepsilon(n_k)}\frac{(J_{1,n_k}+G_0-J_{0,n_k})}{(J_{0,n_k}+G_1-J_{1,n_k})}=0,$$

что противоречит условию $r>0$. Аналогично доказывается, что $c^*<1$.

Теперь имеем

$$\beta_{0k}=R_0(n_k,c_{n_k},\gamma_{n_k})=\frac{J_{0,n_k}}{J_{0,n_k}+G_1-J_{1,n_k}}\sim\varepsilon(n_k)g(\theta_0)\frac{q_0(c^*)}{G_1}\tag{10}$$

и

$$R_1(n_{k-1},c_{n_k-1},\gamma_{n_k-1})>\beta_{1k}\geqslant R_1(n_k,c_{n_k},\gamma_{n_k})\sim\varepsilon(n_k)g(\theta_0)\frac{q_1(c^*)}{G_0},\tag{11}$$

где c_{n_k-1} и γ_{n_k-1} определяются из уравнения

$$R_0(n_k-1,c_{n_k-1},\gamma_{n_k-1})=\beta_{0k}.$$

Из (10) следует, что для любого предела c любой подпоследовательности $\{c_{n_k-1}\}$

$$\varepsilon(n_k)\frac{q_0(c^*)}{G_1}\sim\varepsilon(n_k-1)g(\theta_0)\frac{q_0(c)}{G_1},$$

и, следовательно, $q_0(c^*)=q_0(c)$, откуда $c=c^*$ и $\lim_{k\to\infty}c_{n_k-1}=c^*$.

Теперь из (11) имеем

$$\beta_{1k}<R_1(n_{k-1},c_{n_k-1},\gamma_{n_k-1})\sim\varepsilon(n_k-1)g(\theta_0)\frac{q_1(c^*)}{G_0}$$

и в силу (11) $\beta_{1k}\sim\varepsilon(n_k)g(\theta_0)\frac{\varphi_1(c^*)}{G_0}$, так что

$$r=\lim_{k\to\infty}\frac{\beta_{0k}}{\beta_{1k}}=\frac{q_0(c^*)}{q_1(c^*)}\frac{G_0}{G_1},$$

и это соотношение определяет c^* единственным образом. Поэтому $\lim_{k\to\infty}c_{n_k}=c$, где c есть корень уравнения (1).

Если $r\neq G_0/G_1$, то из (10) имеем

$$\beta_{0k}G_1-\beta_{1k}G_0\sim\varepsilon(n_k)g(\theta_0)(q_0(c)-q_1(c))=\varepsilon(n_k)g(\theta_0)\Phi^{-1}(c),$$

что завершает доказательство в случае $r\neq G_0/G_1$.

Если $r=G_0/G_1$, то (см. (1)) $c=1/2$, и из (10) получаем

$$\varepsilon(n_k)\sim\beta_{0k}\frac{G_1}{g(\theta_0)q_0(\frac{1}{2})}=\beta_{0k}\frac{G_1\sqrt{2\pi}}{g(\theta_0)},$$

что завершает доказательство первого утверждения теоремы 1.

Если $\beta_{0k}/\beta_{1k} \to 0$, то, очевидно, $\lim_k c_{n_k} = 0$, и из (5), (8) и (9) имеем

$$\frac{\beta_{0k}}{\varepsilon(n_k)} \to 0, \quad \frac{\beta_{1k}}{\varepsilon(n_k)} \to \infty.$$

Случай $\beta_1/\beta_0 \to 0$ рассматривается аналогично. ■

Условия (N1)-(N3) выполняются, в частности, для регулярных семейств распределений при некоторых дополнительных предположениях (см., например, §3 главы 3 монографии [2]). В этом случае асимптотика НОВ, полученная в [1] (теорема 2), является, очевидно, частным случаем теоремы 1.

Другой пример выполнения условий (N1)-(N3) дает случай "почти гладких" плотностей (см. [2], §5, глава 2). Выполнение условий N1-N4 в [2], по существу совпадающих с нашими (N1)-(N3), в этом случае проверяется в [2], §3, глава 3.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1),(2) §5, главы 2 в [2], а также условия (C1)-(C3). Если $\beta_0, \beta_1 \to 0$ так, что $\beta_0/\beta_1 \to r > 0$, то для $G_0/G_1 \neq r$*

$$n^*(\beta_0,\beta_1) \sim -\frac{(g(\theta_0)\Phi^{-1}(c))^2 B}{4(\beta_0 G_1 - \beta_1 G_0)^2 \ln \beta_0}, \quad c^*(\beta_0,\beta_1) \to c,$$

где B определяется формулой (2.5.1) в [2], а с является корнем уравнения (1). Если же $G_0/G_1 = r$, то

$$n^*(\beta_0,\beta_1) \sim -\frac{g^2(\theta_0) B}{8\pi \beta_0^2 G_1^2 \ln \beta_0}, \quad c^*(\beta_0,\beta_1) \to \frac{1}{2}.$$

Литература

1. **I.N. Volodin, An.A. Novikov** Asymptotics of the necessary sample size in testing parametric hypotheses: d-posterior approach // Mathematical Methods of Statistics, 1998, v. 7, №1. P. 111-121.
2. **Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.** Асимптотическая теория оценивания. - М.: Наука, 1979, 528 с.
3. **Симушкин С.В.** Эмпирический d-апостериорный подход к проблеме гарантийности статистического вывода // Изв. вузов. Математика, 1983, №11. С 42-58.

УДК 539.3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ УПРУГОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ДЕФЕКТЕ

А.А. Гусенкова

Казанский государственный университет

1. Введение

В данной работе будем рассматривать задачи дифракции упругой гармонической волны на дефекте (разрезе или тонком включении) $\{z = 0,\ \alpha < x < \beta\}$, расположенном на границе раздела двух однородных изотропных упругих сред. Предположим, что объемные силы отсутствуют. Рассмотрим плоскую задачу, когда поле двумерное $(\frac{\partial}{\partial y} = 0)$, опуская временной множитель e^{-ikt}. Падающее поле задано при $z > 0$ и при $z < 0$. Будем искать поле, возникающее при дифракции упругой волны на дефекте.

2. Антиплоская задача дифракции

Как известно (см., напр., [1]), в случае антиплоской деформации при сделанных предположениях для единственной отличной от нуля компоненты $w(\cdot,\cdot)$ вектора смещений имеем уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + k^2(z) w = 0, \ k(z) = \{k_+,\ z > 0;\ k_-,\ z < 0\}. \qquad (1)$$

Для решения задачи дифракции необходимо найти решение уравнения Гельмгольца (1) при $z > 0$ и при $z < 0$ в классе $\tilde{S}'$ уходящих от прямой $z = 0$ в полуплоскости $\{z > 0\}$ и $\{z < 0\}$ решений [2], удовлетворяющее условиям сопряжения на границе раздела сред

$$\frac{\partial w}{\partial z}(x, 0 \pm 0) + \frac{\partial w_0}{\partial z}(x, 0 \pm 0) = 0, \ x \in (\alpha, \beta),$$