ISSN 0040 – 361X

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ 43
ВЫПУСК
2

МОСКВА
«НАУКА» • «ТВП»
1998

Том 43 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
1998

Адрес редакции: 117966, Москва, ГСП-1, ул. Губкина, 8,
тел. 135-23-80; 938-37-98; e-mail:tvp@mi.ras.ru

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г. *Том 43*
Выходит 4 раза в год *Выпуск 2, 1998 год*
Москва • Наука • ТВП *апрель, май, июнь*

 *ВОЛОДИН И. Н.**, *НОВИКОВ Ан. А.**

ЛОКАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ОТНОШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРИ d-ГАРАНТИЙНОМ РАЗЛИЧЕНИИ СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗ[1)]

Последовательный критерий Вальда различения двух простых гипотез $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ с границами A и B используется для различения сложных гипотез $\theta < \theta_0$ и $\theta > \theta_0$, причем параметры θ_1, θ_2, A и B подбираются таким образом, чтобы d-апостериорные вероятности ошибок не превосходили заданных ограничений β_0 и β_1. Исследуется асимптотическое поведение границ A, B и средней длительности наблюдений, когда $\beta = \max\{\beta_0, \beta_1\} \longrightarrow 0$. Проводится асимптотическое ($\beta \to 0$) сравнение $\mathrm{E}_\theta \nu$ с наименьшим фиксированным числом наблюдений, необходимым для различения сложных гипотез с теми же ограничениями β_0, β_1 на d-апостериорные вероятности ошибок. Показано, что минимальный (в окрестности точки $\theta = \theta_0$) выигрыш в средней длительности наблюдений составляет 25%. Таким образом, в d-апостериорном подходе существуют последовательные критерии, которые дают выигрыш в объеме наблюдений при любом значении тестируемого параметра.

Ключевые слова и фразы: различение сложных гипотез, байесовская парадигма, d-апостериорный подход, d-гарантийность, жесткие ограничения на d-риски, регулярные статистические эксперименты, последовательные критерии, средний объем наблюдений, необходимый объем выборки, асимптотическая эффективность, винеровский процесс.

---

*Казанский государственный университет, Кремлевская 18, 420008 Казань, Россия.

[1)]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00396.

1. Введение. Проблема d-гарантийного статистического вывода была сформулирована в конце 70-х годов (см. сообщение [9] и обзор [5] с библиографией по этому вопросу) и применительно к задаче различения сложных гипотез H_0: $\theta \leqslant \theta_0$ и H_1: $\theta > \theta_0$ о параметре θ распределения наблюдаемой случайной величины состоит в следующем. Параметр θ трактуется как реализация случайной величины с некоторым априорным распределением (байесовский подход). Задача состоит в построении критерия, гарантирующего заданные ограничения β_0 и β_1 на d-апостериорные вероятности ошибочных решений (так называемые d-риски): условная вероятность справедливости гипотезы H_i при условии, что принята H_{1-i}, не должна превосходить β_i, $i = 0, 1$; при этом мы стремимся минимизировать среднее число испытаний.

В d-апостериорном подходе проблема гарантийности, в отличие от классического подхода, решается очень просто с помощью так называемой процедуры первого перескока. В контексте задачи различения двух гипотез эта процедура состоит в проведении наблюдений до тех пор, пока апостериорная вероятность справедливости H_0 не выйдет из интервала $(\beta_0,\ 1-\beta_1)$ (см. более подробно об этой процедуре в обзоре [5]). Результаты статистического моделирования показывают, что процедура первого перескока обладает чрезвычайно высокой безусловной вероятностью остановки эксперимента на первом шаге, но в окрестности точки $\theta = \theta_0$ средняя длительность наблюдений $\mathrm{E}_\theta \nu$ неограниченно возрастает, что, по-видимому, говорит о бесконечности $\mathrm{E}_{\theta_0} \nu$. Различные оптимальные свойства этой процедуры получены в [16] в схеме «стягивающихся априори», когда априорное распределение имеет высокую степень концентрации в окрестности граничной точки θ_0. Отметим также работу [23], в которой данная процедура используется для различения гипотез о коэффициенте линейного сноса винеровского процесса вне рамок d-апостериорного подхода, с точки зрения ее оптимальности при функции потерь

$$L(\theta, d;\, t) = I\{\theta \leqslant 0,\, d = 1\} + I\{\theta > 0,\, d = 0\} + c\,\theta^2 t,$$

где $I\{\cdot\}$ — индикаторная функция.

Внимание к процедуре первого перескока связано в первую очередь с тем, что структура его правила принятия решения (принимается та гипотеза, апостериорная вероятность которой превышает определенный уровень) соответствует оптимальному объему наблюдений. Этот общий результат Симушкина [18], касающийся характеризации правил принятия решений d-гарантийных процедур с оптимальной длительностью наблюдений, позволяет строить критерии, соответствующие необходимому объему выборки (НОВ) — наименьшему числу наблюдений, при котором существует критерий, гарантирующий заданные ограничения β_0, β_1 на d-апостериорные вероятности ошибочных решений (d-риски). Асимптотика НОВ в схеме «стягивающихся априори» исследована

в работе авторов [6], а в случае жестких ограничений на d-риски ($\beta = \max(\beta_0, \beta_1) \longrightarrow 0$) — в [8]. Обзор асимптотик НОВ в d-апостериорном подходах содержится в работе авторов [7] (представлено к печати).

Основной результат в рамках d-апостериорного подхода, относящийся к асимптотике НОВ $n^* = n^*(\beta_0, \beta_1)$, состоит в том, что $n^* \sim c\beta^{-2}$ при $\beta \to 0$. Представляет интерес поведение средней длительности наблюдений последовательных d-гарантийных критериев. В сообщении [26] был отмечен следующий результат, носящий эвристический характер.

Рассмотрим задачу различения гипотез H_0 и H_1, когда θ — среднее значение нормального распределения и априорное распределение θ также нормально. Возьмем критерий Вальда различения двух простых гипотез $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ с границами A и B области продолжения эксперимента и, используя приближенные ($\theta_1 - \theta_2 \longrightarrow 0$) формулы для оперативной характеристики, подберем θ_1, θ_2, A и B таким образом, чтобы d-риски этого критерия не превосходили заданных β_0 и β_1. Подобрав постоянные, воспользуемся вальдовской аппроксимацией для $\mathrm{E}_\theta \nu$. Удивительно то, что $\mathrm{E}_\theta \nu \sim c\beta^{-1}$, если $\theta \neq \theta_0$ и $\mathrm{E}_{\theta_0} \nu \sim c\beta^{-2}$. По-видимому, в рамках d-апостериорного подхода существуют последовательные критерии, которые, в отличие от классического (небайесовского) подхода, сокращают на порядок среднюю длительность наблюдений.

Чтобы придать строгость этому эвристическому результату, естественно рассмотреть задачу различения гипотез о коэффициенте θ линейного сноса винеровского процесса. Результаты в этом направлении, подтверждающие качественные выводы сообщения [26], содержатся в первом пункте настоящей работы и представляют развернутое изложение сообщения [4]. Отметим, что правило принятия решения этого критерия имеет структуру оптимального правила с точки зрения d-апостериорного подхода, поскольку семейство распределений винеровского процесса со сносом обладает монотонным (относительно траекторий) отношением правдоподобия (более подробно о структуре оптимальных решающих правил в d-апостериорном подходе к проблеме гарантийности см. [19], а также § 2 обзора [5]).

С учетом всего сказанного имеет смысл рассмотреть критерий Вальда, подбирая две из постоянных θ_1, θ_2, A, B по заданным ограничениям β_0, β_1 на d-риски и оптимизируя длительность наблюдений по оставшимся параметрам. В пунктах 2–4 данной работы мы исследуем асимптотическое поведение характеристик такого критерия, когда $\beta = \max(\beta_0, \beta_1) \longrightarrow 0$. Техника асимптотического анализа та же, что и в статье [8], — по существу накладываются только условия локальной асимптотической нормальности статистического эксперимента (см. [12]). Логарифм отношения правдоподобия заменяется статистикой вклада, которая аппроксимируется винеровским процессом, при этом влияние параметров θ_1 и θ_2 нивелируется (оптимизация по ним невозможна), и асимптотический анализ средней длительности наблюдений $\mathbf{E}_\theta \nu$ проводится лишь в окрестности точки $\theta = \theta_0$. Естественно, при этом $\mathbf{E}_\theta \nu$ имеет порядок β^{-2}, и поскольку НОВ n^* имеет тот же порядок, мы имеем возможность исследовать асимптотическую эффективность $\mathcal{E}(\theta) = \mathbf{E}_\theta \nu / n^*$ при $\beta \to 0$, $\theta - \theta_0 = O(\beta)$.

Оказывается, предельное значение $\mathcal{E}(\theta)$ в точке $\theta = \theta_0$, соответствующее наименьшему выигрышу в средней длительности наблюдений, равно 0.755. Таким образом, в отличие от классического подхода (см. [3]) последовательный критерий *равномерно* лучше критерия, основанного на фиксированном числе наблюдений (см. в связи с этим [11], где решается задача минимизации $\sup_\theta \mathbf{E}_\theta \nu$). Следует отметить также, что в нашем случае $\mathbf{E}_\theta \nu \sim c[\beta(\theta - \theta_0)]^{-1}$, что, по-видимому, говорит об асимптотике $\mathbf{E}_\theta \nu = O(\beta^{-1})$ при θ, далеких от граничной точки θ_0 (см. [26], [4] и пункт 1 настоящей работы). Представляется, что строгое обоснование этого утверждения возможно с помощью техники больших уклонений, развиваемой в [2], или с помощью асимптотических разложений Лотова [15], [24], оправдав возможность почленного интегрирования этих разложений (см. п. 3 данной работы).

2. Различение гипотез о сносе винеровского процесса с жесткими ограничениями на d-риски. Для винеровского процесса с линейным сносом $Z(t) = w(t) + \theta t$, где $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, различаются две гипотезы H_0: $\theta \leqslant 0$ и H_1: $\theta > 0$. Предполагается, что значение θ в эксперименте есть реализация случайной величины ϑ с функцией плотности

$$g(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(\theta - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Рассмотрим оптимальный для данной задачи последовательный критерий с моментом остановки $\tau = \inf\{t \geqslant 0\colon Z(t) \notin (-A, B)\}$. Подберем границы A, B по заданным ограничениям β_0, β_1 на d-риски. Известно [13, § 16.6.4, с. 427], что оперативная характеристика этого критерия

$$L(\theta) = \mathbf{P}_\theta\{Z(\tau) \leqslant -A\} = \frac{1 - e^{-2\theta B}}{e^{-2\theta A} - e^{-2\theta B}}.$$

Поэтому постоянные A и B определяются по заданным β_0 и β_1 из уравнений

$$\mathbf{P}\{\vartheta \leqslant 0 \mid Z(t) \geqslant B\} = \frac{\int_{-\infty}^{0} (1 - L(\theta))\, g(\theta)\, d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} (1 - L(\theta))\, g(\theta)\, d\theta} = \beta_0,$$

$$\mathbf{P}\{\vartheta > 0 \mid Z(t) \leqslant -A\} = \frac{\int_{0}^{\infty} L(\theta)\, g(\theta)\, d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} L(\theta)\, g(\theta)\, d\theta} = \beta_1.$$

Подставляя имеющееся выражение для $L(\theta)$, получаем, что данная система эквивалентна следующей:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-2\theta B} \frac{1 - e^{-2\theta A}}{1 - e^{-2\theta(A+B)}} \exp\left\{ -\frac{(\theta + \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} d\theta = \frac{\Phi(\mu/\sigma) - \beta_1}{1 - \beta_0 - \beta_1}\, \beta_0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-2\theta A} \frac{1 - e^{-2\theta B}}{1 - e^{-2\theta(A+B)}} \exp\left\{ -\frac{(\theta - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} d\theta = \frac{\Phi(-\mu/\sigma) - \beta_0}{1 - \beta_0 - \beta_1}\, \beta_1.$$

Поскольку

$$1 - e^{-2\theta A} \leqslant \frac{1 - e^{-2\theta A}}{1 - e^{-2\theta(A+B)}} \leqslant 1,$$

то асимптотически ($\max(\beta_0, \beta_1) \to 0$) точные (по порядку) верхние границы A и B определяются системой уравнений

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-2\theta B} \exp\left\{ -\frac{(\theta + \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} d\theta = \frac{\Phi(\mu/\sigma) - \beta_1}{1 - \beta_0 - \beta_1}\, \beta_0, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-2\theta A} \exp\left\{ -\frac{(\theta - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} d\theta = \frac{\Phi(-\mu/\sigma) - \beta_0}{1 - \beta_0 - \beta_1}\, \beta_1. \qquad (2)$$

Левая часть (1) равна

$$J_0 = e^{2\mu B + 2\sigma^2 B^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{2\sigma^2 B - \mu}{\sigma} \right) \right],$$

и поскольку

$$1 - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}$$

при любом $x > 0$, то

$$J_0 \leqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}(2\sigma^2 B - \mu)} \exp\left\{ -\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Аналогично устанавливается, что левая часть (2)

$$J_1 \leqslant \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}(2\sigma^2 A - \mu)} \exp\left\{ -\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Таким образом, $A \leqslant c_1/\beta_1$, $B \leqslant c_0/\beta_0$ с некоторыми постоянными c_0, c_1, которые легко находятся из предыдущих неравенств для J_0 и J_1.

Обратимся теперь к асимптотическому анализу средней длительности $\mathbf{E}_\theta \tau$ при $\beta = \max(\beta_0, \beta_1) \longrightarrow 0$. Из [13] имеем

$$\mathbf{E}_\theta \tau = \frac{B e^{\theta(A+B)} + A e^{-\theta(A+B)} - (A + B)\, e^{\theta(B-A)}}{\theta(e^{\theta(A+B)} - e^{-\theta(A+B)})}.$$

Легко видеть, что $\mathrm{E}_\theta\tau \leqslant B/\theta$, если $\theta > 0$, и $\mathrm{E}_\theta\tau \leqslant -A/\theta$, если $\theta < 0$. Так как все полученные границы для A, B, $\mathrm{E}_\theta\tau$ точны по порядку, то $\mathrm{E}_\theta\tau \asymp \beta^{-1}$, если $\theta \neq 0$.

Как следует из результатов [8] в классе моментов остановки $\tau = t = \mathrm{const}$ наименьшее t, гарантирующее существование критерия с заданными β_0 и β_1 имеет порядок β^{-2} при $\beta \to 0$. Таким образом, переход к последовательным процедурам *сокращает на порядок* среднюю длительность наблюдений, если только истинное значение θ не совпадает с границей различаемых гипотез ($\theta \neq 0$). Однако, если $\theta \to 0$ так, что $\theta(A+B) \longrightarrow 0$, то $\mathrm{E}_\theta\tau \sim AB = c\beta^{-2}$. Тем не менее, как будет показано ниже, у последовательных процедур постоянная c перед β^{-2} меньше, чем у процедур с фиксированным объемом наблюдений.

Представляет интерес асимптотическое поведение безусловной средней длительности наблюдений

$$\mathrm{E}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}_\theta\tau g(\theta)\, d\theta.$$

Для простоты рассмотрим случай $\beta_0 = \beta_1 (= \beta)$, $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Тогда $A = B$ и, как было показано выше, $A \asymp \beta^{-1}$.

Предложение 1. *Если $\beta \to 0$, то безусловное среднее*

$$\mathrm{E}\tau = O(\beta^{-1}\ln\beta).$$

Доказательство. В нашем «симметричном» случае

$$\mathrm{E}\tau = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\operatorname{th} A\theta}{\theta} e^{-\theta^2/2} d\theta = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\operatorname{th} t}{t} e^{-t^2/2A^2} dt.$$

Разобъем этот интеграл на три по промежуткам $[0,1]$, $[1,A]$ и $[A,\infty)$. Интеграл по отрезку $[0,1]$ не превосходит

$$\frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{\operatorname{th} t}{t} dt = O(\beta^{-1}).$$

Тот же порядок имеет интеграл по промежутку $[A,\infty)$. Действительно, при $t \in [A,\infty)$ функция $t^{-1}\operatorname{th} t \leqslant A^{-1}$, так что интеграл по этому промежутку не превосходит

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_A^\infty e^{-t^2/2A^2} dt \leqslant 2A = O(\beta^{-1}).$$

Порядок $\mathrm{E}\tau$, указанный в предложении 1, дает интеграл по отрезку $[1,A]$. На этом отрезке функции $\operatorname{th} t$ и $e^{-t^2/2A^2}$ ограничены и отделены от нуля. Поэтому порядок интеграла определяет величина

$$\frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \int_1^A \frac{dt}{t} = O(\beta^{-1}\ln\beta).$$

Таким образом, безусловное среднее длительности наблюдений у последовательного критерия также имеет меньший порядок роста при $\beta \to 0$, чем у любой процедуры, основанной на фиксированном числе наблюдений.

В следующих параграфах мы исследуем асимптотику A, B и средней длительности наблюдений последовательного критерия Вальда в случае дискретного времени. При этом будет использоваться локальная теория аппроксимации логарифма отношения правдоподобия винеровским процессом, что позволит установить асимптотику средней длительности наблюдений только в окрестности границы различаемых гипотез.

3. Последовательный критерий Вальда для различения сложных гипотез: аппроксимация винеровским процессом. Рассматривается задача различения двух сложных гипотез H_0: $\theta \leqslant \theta_0$ и H_1: $\theta > \theta_0$ о скалярном параметре θ, индексирующем семейство распределений $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ наблюдаемой случайной величины X с функцией плотности $f(x \mid \theta)$ относительно некоторой σ-конечной меры μ, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbf{R}$. Предполагается, что значение θ при наблюдении X есть реализация случайной величины ϑ с известным распределением G, имеющем плотность $g(\theta)$ по мере Лебега.

Требуется построить процедуру различения гипотез H_0 и H_1, гарантирующую заданные ограничения β_0 и β_1 на соответствующие d-риски — условные вероятности $\mathrm{P}\{\vartheta \leqslant \theta_0 \mid \text{принята } H_1\}$ и $\mathrm{P}\{\vartheta > \theta_0 \mid \text{принята } H_0\}$. Для этой цели предлагается использовать известный последовательный критерий Вальда различения двух простых гипотез, выбирая параметры, определяющие критерий, таким образом, чтобы выполнялись заданные ограничения β_0, β_1 на указанные условные вероятности.

Пусть θ_1 и θ_2 — две точки из Θ (простые гипотезы) и a, b — некоторые положительные числа. Если наблюдается последовательность $X_1, X_2, \ldots$ независимых копий X, то критерий Вальда определяется моментом остановки

$$\nu = \min\left\{n\colon\ L_n(X^{(n)}) = \sum_1^n \ln\frac{f(X_k \mid \theta_2)}{f(X_k \mid \theta_1)} \notin (-a, b)\right\}$$

и следующим правилом принятия решения: гипотеза H_0: $\theta \leqslant \theta_0$ принимается, если $L_\nu(X^{(\nu)}) \leqslant -a$, а если $L_\nu(X^{(\nu)}) \geqslant b$, то принимается H_1: $\theta > \theta_0$.

Пусть

$$L(\theta) = L(\theta \mid \theta_1, \theta_2, a, b) = \mathrm{P}\{L_\nu(X^{(\nu)}) \leqslant -a \mid \theta\}$$

— оперативная характеристика этого критерия. Постоянные θ_1, θ_2, a и b

d-гарантийного критерия должны удовлетворять неравенствам

$$\mathbf{P}\{\vartheta \leqslant \theta_0 \mid L_\nu(X^{(\nu)}) \geqslant b\} = \frac{\int_{-\infty}^{\theta_0}(1 - L(\theta))\,g(\theta)\,d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}(1 - L(\theta))\,g(\theta)\,d\theta} \leqslant \beta_0,$$
$$\mathbf{P}\{\vartheta > \theta_0 \mid L_\nu(X^{(\nu)}) \leqslant -a\} = \frac{\int_{\theta_0}^{\infty} L(\theta)\,g(\theta)\,d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} L(\theta)\,g(\theta)\,d\theta} \leqslant \beta_1. \tag{3}$$

Поскольку число свободных параметров больше, чем число ограничений, то избыточные параметры могут быть использованы для минимизации некоторых функционалов от $\mathbf{E}_\theta\nu$. Естественно, явные формулы для параметров критерия в общем случае получить невозможно, поэтому мы будем использовать асимптотики $L(\theta)$ и $\mathbf{E}_\theta\nu$ при $\theta_2 - \theta_1 \longrightarrow 0$ (так называемый асимптотический анализ в схеме сближающихся гипотез).

Пусть ε — некоторое малое положительное число. Выберем θ_1 и θ_2 в окрестности граничной точки θ_0, полагая $\theta_i = \theta_0 + \varepsilon u_i$, $i = 1, 2$, $u_2 > 0 > u_1$. При выполнении стандартных условий регулярности статистического эксперимента разложение $\ln f(X_k \mid \theta_0 + \varepsilon u)$ в ряд Тейлора по степеням ε до членов порядка ε^2 дает приближенный ($\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$) последовательный критерий с областью продолжения наблюдений

$$-a < \varepsilon S_n - nI_0\varepsilon^2\,\frac{u_2 + u_1}{2} < b, \tag{4}$$

где

$$S_n = \sum_1^n \frac{\partial \ln f(X_k \mid \theta_0)}{\partial \theta}$$

— так называемая статистика вклада, $I_0 = I(\theta_0)$ — информация по Фишеру в точке θ_0.

Следующий шаг состоит в аппроксимации случайной последовательности $\{\varepsilon S_n - n\varepsilon^2(u_2 + u_1)\,I_0/2,\ n = 1, 2, \ldots\}$ винеровским процессом с линейным сносом в предположении, что $X_1, X_2, \ldots$ — случайная последовательная выборка из распределения с плотностью $f(x \mid \theta_0 + \varepsilon u)$. Для этого потребуется выполнение стандартных условий регулярности статистического эксперимента.

($A1$) Семейство $\mathscr{E} = \{P(\cdot \mid \theta), \theta \in \Theta\}$ распределений наблюдаемой случайной величины регулярно в смысле [12, § 1.7], то есть

а) для μ-п.в. x плотность $f(x \mid \theta)$ есть непрерывная функция на Θ;

б) функция $f^{1/2}(\cdot \mid \theta)$ дифференцируема в каждой точке $\theta \in \Theta$ в $L_2(\mu)$ (имеет конечную информацию Фишера $I(\theta)$ при любом $\theta \in \Theta$);

в) производная в среднем квадратическом функции $f^{1/2}(\cdot \mid \theta)$ непрерывна в $L_2(\mu)$.

Пусть $Z_\varepsilon = Z_\varepsilon(t)$ — ступенчатая функция, принимающая значение εS_n, если $n\varepsilon^2 \leqslant t < (n+1)\varepsilon^2$, $n = 1, 2, \ldots$, и $Z_\varepsilon(t) = 0$ при $0 \leqslant t < \varepsilon^2$. Пусть далее $D[0, T]$ — пространство Скорохода и $\rho(x, y) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T}|x(t) - y(t)|$ — равномерная метрика в этом пространстве для любых $x, y \in D[0, T]$.

Введем винеровский процесс с линейным сносом $Z = Z(t) = \sqrt{I_0}\,w(t) + ut\,I_0$, где $I_0 = I(\theta_0)$, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс. Следующее предложение непосредственно вытекает из теоремы 11 монографии [22].

Предложение 2. *Пусть последовательный случайный выбор X_1, $X_2, \ldots$ осуществляется из распределения $P_\varepsilon = P_{\theta_0 + u\varepsilon}$. При выполнении условий регулярности* (A1) *распределение случайного процесса Z_ε в пространстве $\langle D[0,T], \rho\rangle$ сходится слабо при $\varepsilon \to 0$ к распределению винеровского процесса Z.*

Предложение 2 показывает, что последовательность статистик $\varepsilon S_n - n\varepsilon^2(u_1 + u_2)\,I_0/2$, $n = 1, 2, \ldots$, может быть аппроксимирована винеровским процессом с коэффициентом сноса $(u - (u_1 + u_2)/2)\,I_0$. Как будет видно в дальнейшем (см. «предельную» оперативную характеристику в предложении 3, а также теорему 1), необходимо положить $u_1 + u_2 = 0$ — в противном случае один из d-рисков этого критерия не будет стремиться к нулю ни при каком выборе границ a и b. Этим же обстоятельством объясняется выбор момента остановки при построении последовательного критерия для различения гипотез о коэффициенте сноса винеровского процесса в п. 1 данной статьи. Таким образом, асимптотическое решение нашей задачи игнорирует выбор θ_1 и θ_2 как дополнительных параметров для оптимизации момента остановки.

4. Аппроксимация границ для области продолжения; асимптотическая d-гарантийность последовательного критерия. Итак, рассмотрим последовательный критерий с моментом остановки

$$\nu_\varepsilon = \min\{n\colon \varepsilon S_n \notin (-a, b)\}. \tag{5}$$

Вывод приближенных формул для границ a и b начнем с аппроксимации оперативной характеристики последовательного критерия с моментом остановки (5). Из предложения 2 немедленно следует

Предложение 3. *При выполнении условия* (A1) *для оперативной характеристики $L_\varepsilon(\theta)$ последовательного критерия с моментом остановки ν_ε справедливо асимптотическое* ($\varepsilon \to 0$) *представление*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon(\theta_0 + u\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}_\varepsilon\{\varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \leqslant -a\} = \mathbf{P}\{Z(\tau) \leqslant -a\}$$
$$= \frac{1 - e^{-2ub}}{e^{2ua} - e^{-2ub}}, \tag{6}$$

где $Z(t) = \sqrt{I_0}\,w(t) + utI_0$ и момент остановки $\tau = \inf\{t\colon Z(t) \notin (-a, b)\}$.

Доказательство. Пусть A — множество функций из $D[0, T]$, которые впервые выходят из полосы $\{(x, y)\colon -a < y < b\}$ через нижнюю границу $-a$. В силу теоремы 2.1 главы 1 [1] для доказательства (6) достаточно показать, что $\mathbf{P}\{Z(\cdot) \in \partial A\}$, где ∂A — граница множества A в равномерной метрике (см. предложение 2). Однако этот факт установлен в работе [25] при доказательстве теоремы 2 (с. 123). Наконец, последнее равенство в (6), дающее формулу для предельной оперативной характеристики, содержится в справочнике [13].

Для того, чтобы последовательный критерий с моментом остановки ν_ε удовлетворял заданным ограничениям β_0, β_1 на соответствующие d-риски, необходимо выполнение неравенств

$$\mathbf{P}\{\vartheta \leqslant \theta_0 \mid \varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \geqslant b\} \leqslant \beta_0, \qquad \mathbf{P}\{\vartheta > \theta_0 \mid \varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \leqslant -a\} \leqslant \beta_1,$$

левые части которых записываются через интегралы от оперативной характеристики $L_\varepsilon(\theta)$ по аналогии с (3). Наша ближайшая задача — исследовать асимптотическое ($\varepsilon \to 0$) поведение этих интегралов:

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\theta_0} \big(1 - L_\varepsilon(\theta)\big)\, g(\theta) d\theta, \qquad J_1 = \int_{\theta_0}^{\infty} L_\varepsilon(\theta)\, g(\theta)\, d\theta. \tag{7}$$

Для этого нам потребуется наложить дополнительные условия на функции плотности f и g.

($A2$) Существуют такие функция $\lambda(u, \varepsilon)$ и число ε_0, что при любых $u \neq 0$ и $a > 0$

$$\mathbf{E}_\varepsilon \exp\left\{ -\operatorname{sgn}(u)\, \lambda(u, \varepsilon)\, \varepsilon\, \frac{\partial \ln f(X \mid \theta_0)}{\partial \theta} \right\} < 1 \tag{8}$$

и при $M \to \infty$

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \int_{\{|u|>M\}} e^{-\lambda(u,\varepsilon)a} g(\theta_0 + u\varepsilon)\, du \longrightarrow 0. \tag{9}$$

Эти условия, несмотря на кажущуюся сложность, достаточно просто проверяются для наиболее распространенных параметрических семейств. Так, для экспоненциального семейства с функцией плотности $f(x \mid \theta) = \exp\{T(x)\theta + \mu(\theta) + h(x)\}$ условие (8) выполняется при $\lambda(u, \varepsilon) = |u|$, если информация по Фишеру $I(\theta) > 0$ при всех θ. Действительно, легко проверить, что при таком выборе λ левая часть (8) равна $\exp\{\mu(\theta_0 + u\varepsilon) - \mu(\theta_0) - u\varepsilon\mu'(\theta_0)\} = \exp\{\mu''(\theta_{cp})(u\varepsilon)^2/2\}$. Поскольку $\mu''(\theta) = -I(\theta) < 0$, то условие (8) выполняется при $u \neq 0$. Условие (9) в этом случае имеет вид

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \int_{\{|u|>M\}} e^{-|u|a} g(\theta_0 + u\varepsilon)\, du \longrightarrow 0, \quad M \to \infty,$$

и выполняется, если, например, плотность g — ограниченная функция.

Условия (8) и (9) обеспечивают равномерную сходимость интегралов J_0 и J_1 (см. формулы (7)).

Лемма 1. *При выполнении условий* ($A2$)

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \int_{\{u>M\}} \mathbf{P}_\varepsilon\{\varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \leqslant -a\}\, g(\theta_0 + u\varepsilon)\, du = 0,$$

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \int_{\{u<-M\}} \mathbf{P}_\varepsilon\{\varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \geqslant b\}\, g(\theta_0 + u\varepsilon)\, du = 0.$$

Доказательство проведем для первого равенства, второе доказывается аналогично.

В силу неравенства Чебышева для любого $\lambda > 0$

$$\mathbf{P}_\varepsilon\{\varepsilon S_{\nu_\varepsilon} < -a\} \leqslant e^{-\lambda a} \mathbf{E}_\varepsilon \exp\{-\lambda\varepsilon S_{\nu_\varepsilon}\}. \tag{10}$$

Покажем, что при выборе $\lambda = \lambda(u, \varepsilon)$ из условий ($A2$) последовательность $\{\exp\{-\lambda\varepsilon S_n\},\ n = 1, 2, \ldots\}$ образует супермартингал относительно последовательности σ-алгебр $\mathscr{F}_n$, порожденных случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$, и вероятностью $\mathbf{P}_\varepsilon^n$. Действительно, в силу условия (9) при $\lambda = \lambda(u, \varepsilon)$ условное математическое ожидание

$$\mathbf{E}_\varepsilon\big\{ \exp\{-\lambda\varepsilon S_n\} \mid \mathscr{F}_{n-1} \big\} = \exp\{-\lambda\varepsilon S_{n-1}\}\, \mathbf{E}_\varepsilon \exp\left\{ -\lambda\varepsilon\, \frac{\partial \ln f(X_n \mid \theta_0)}{\partial \theta} \right\} < \exp\{-\lambda\varepsilon S_{n-1}\}.$$

Воспользуемся теперь известной теоремой Дуба (см. [20, с. 477, гл. 7, § 2, теорема 1]) о сохранении свойства мартингальности при замене времени на случайный момент остановки. В силу этой теоремы

$$\mathbf{E}_\varepsilon \exp\{-\lambda\varepsilon S_{\nu_\varepsilon}\} \leqslant \mathbf{E}_\varepsilon \exp\{-\lambda\varepsilon S_1\}, \tag{11}$$

если выполняются два условия

$$\mathbf{E}_\varepsilon \exp\{-\lambda\varepsilon S_{\nu_\varepsilon}\} < \infty \quad \text{и} \quad \liminf_{n\to\infty} \int_{\{\nu_\varepsilon>n\}} \exp\{-\lambda\varepsilon S_n\}\, dP_\varepsilon = 0.$$

Первое из этих условий имеет место, так как при $u \neq 0$

$$\mathbf{E}_\varepsilon \exp\{-\lambda\varepsilon S_{\nu_\varepsilon}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_\varepsilon \left[\exp\{-\lambda\varepsilon S_n\}\, I_{\{\nu=n\}}\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathbf{E}_\varepsilon \exp\{-\lambda\varepsilon S_1\}\right]^n < \infty,$$

где последнее неравенство выполняется в силу (8). Что же касается второго условия, то

$$\int_{\{\nu_\varepsilon>n\}} \exp\{-\lambda\varepsilon S_n\}\, dP_\varepsilon = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{\{\nu_\varepsilon=k\}} \exp\{-\lambda\varepsilon S_n\}\, dP_\varepsilon \leqslant \exp\{\lambda a\}\, \mathbf{P}_\varepsilon\{\nu_\varepsilon > n\} \longrightarrow 0$$

в силу конечности момента остановки ν_ε, которая следует из стандартных в данной ситуации рассуждений (см. [3], а также доказательство предложения 4 ниже).

Итак, оба условия теоремы Дуба выполняются, и поэтому в силу (10), (11), а также условия (8)

$$\mathbf{P}_\varepsilon\{\varepsilon S_{\nu_\varepsilon} < -a\} \leqslant e^{-\lambda a}\mathbf{E}_\varepsilon \exp\{\lambda\varepsilon S_1\} < e^{-\lambda a},$$

откуда

$$\sup_{\varepsilon>0}\int_{\{u>M\}} \mathbf{P}_\varepsilon\{\varepsilon S_{\nu_\varepsilon} \leqslant -a\}\, g(\theta_0+u\varepsilon)\,du$$
$$\leqslant \sup_{\varepsilon>0}\int_{\{u>M\}} \exp\{-\lambda(u,\varepsilon)a\}\, g(\theta_0+u\varepsilon)\,du \longrightarrow 0$$

при $M\to\infty$ в силу условия (9).

Доказанная лемма позволяет находить асимптотическое поведение интегралов J_0 и J_1 с помощью подстановки в (7) вместо $L_\varepsilon(\theta)$ ее асимптотического представления (6).

Предложение 4. *Пусть выполняются условия* (A1)–(A2) *и* $g(\theta)$ *непрерывна в точке* $\theta=\theta_0$. *Тогда*

$$J_0 = \varepsilon g(\theta_0)\int_0^\infty \frac{1-e^{-2ua}}{e^{2ub}-e^{-2ua}}\,du + o(\varepsilon), \tag{12}$$

$$J_1 = \varepsilon g(\theta_0)\int_0^\infty \frac{1-e^{-2ub}}{e^{2ua}-e^{-2ub}}\,du + o(\varepsilon). \tag{13}$$

Доказательство. Сделаем замену $\theta=\theta_0+u\varepsilon$ в интеграле J_0:

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\theta_0}\big(1-L_\varepsilon(\theta)\big)\,g(\theta)\,d\theta = \varepsilon\int_{-\infty}^{0}\big(1-L_\varepsilon(\theta_0+u\varepsilon)\big)\,g(\theta_0+u\varepsilon)\,du$$
$$=\varepsilon\int_{-\infty}^{0}\mathbf{P}_\varepsilon\{\varepsilon S_\nu > b\}\,g(\theta_0+u\varepsilon)\,du.$$

В силу предложения 3 и непрерывности $g(\theta)$ в точке θ_0 подынтегральная функция сходится к пределу $(e^{2ua}-1)(e^{2ua}-e^{-2ub})^{-1}g(\theta_0)$, и лемма 1 обеспечивает возможность перехода к пределу при $\varepsilon\to 0$ под знаком интеграла. Поэтому

$$J_0 = \varepsilon g(\theta_0)\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{2ua}-1}{e^{2ua}-e^{-2ub}}\,du + o(\varepsilon),$$

и замена u на $-u$ дает интеграл в (12).

Аналогично доказывается представление (13).

Обратимся теперь к выводу асимптотических формул для a и b, когда ограничения β_0 и β_1 стремятся к нулю с одинаковой скоростью: $\beta_0=\varepsilon b_0$, $\beta_1=\varepsilon b_1$, где b_0 и b_1 — фиксированные положительные числа и $\varepsilon\to 0$.

Определение. Критерий φ_ε с решающей функцией δ_ε называется асимптотически ($\varepsilon\to 0$) d-гарантийным, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{P}\{\vartheta\leqslant\theta_0\mid\delta_\varepsilon=d_1\}\,\beta_0^{-1}\leqslant 1,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{P}\{\vartheta>\theta_0\mid\delta_\varepsilon=d_0\}\,\beta_1^{-1}\leqslant 1.$$

Более подробно о вопросе d-гарантийности см. [5].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A2), $g(\theta)$ *непрерывна в точке* θ_0, $g_0=g(\theta_0)>0$ *и* $\beta_i<G_i$, $i=0,1$, *где* $G_0=\mathbf{P}\{\vartheta\leqslant\theta_0\}$, $G_1=1-G_0$. *Тогда критерий с моментом остановки* $\nu=\min\{n\colon S_n\leqslant -A$ *или* $S_n\geqslant B\}$, *где* A *и* B — *решение системы уравнений*

$$\begin{aligned} g_0\int_0^\infty \frac{1-e^{-2uA}}{e^{2uB}-e^{-2uA}}\,du &= \frac{G_1-\beta_1}{1-\beta_0-\beta_1}\,\beta_0,\\ g_0\int_0^\infty \frac{1-e^{-2uB}}{e^{2uA}-e^{-2uB}}\,du &= \frac{G_0-\beta_0}{1-\beta_0-\beta_1}\,\beta_1 \end{aligned} \tag{14}$$

асимптотически ($\max\{\beta_0,\beta_1\}\longrightarrow 0$) *$d$-гарантиен.*

Доказательство. Последовательный критерий с моментом остановки ν_ε будет d-гарантийным, если выбрать границы a и b из условия (см. (3), (8))

$$\frac{J_0}{J_0+G_1-J_1}\leqslant\beta_0,\qquad \frac{J_1}{J_1+G_0-J_0}\leqslant\beta_1.$$

Подставим вместо J_0 и J_1 их асимптотические выражения (12) и (13) и сделаем замену $u\varepsilon=t$ в обоих интегралах. Если теперь положить $A=a/\varepsilon$, $B=b/\varepsilon$, то получим утверждение теоремы.

Замечание 1. Интеграл

$$I(A,B)=\int_0^\infty \frac{1-e^{-2uA}}{e^{2uB}-e^{-2uA}}\,du$$

выражается через ψ-функцию Эйлера

$$I(A,B)=\frac{1}{2(A+B)}\left[\psi(1)-\psi\left(\frac{B}{A+B}\right)\right], \tag{15}$$

где $\psi(1)=-\mathbf{C}\approx -0.577216$, $\mathbf{C}$ — постоянная Эйлера (см. [10, с. 319, 3.311.11]). Используя известное разложение ψ-функции (см. [10, с. 975, 8.362.1])

$$\psi(x) = -\mathrm{C} - \frac{1}{x} + x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(x+k)},$$

получаем удобную в вычислительном отношении систему уравнений, определяющую границы A и B:

$$\frac{1}{B} - \frac{B}{A+B}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(B+k(A+B))} = \frac{2\beta_0(G_1-\beta_1)}{g(\theta_0)(1-\beta_0-\beta_1)},$$
$$\frac{1}{A} - \frac{A}{A+B}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(A+k(A+B))} = \frac{2\beta_1(G_0-\beta_0)}{g(\theta_0)(1-\beta_0-\beta_1)}.$$

Из этой же системы легко видеть, что $A = O(\beta_1^{-1})$ и $B = O(\beta_0^{-1})$ при $\beta_0 \to 0$ и $\beta_1 \to 0$.

5. Асимптотика средней длительности наблюдений. Изучим теперь поведение $\mathbf{E}_\theta\nu$ в окрестности точки $\theta = \theta_0$.

Предложение 5. *При выполнении условия (A1) распределение нормированного момента остановки $\varepsilon^2\nu_\varepsilon$ слабо сходится к распределению момента остановки $\tau = \inf\{t\colon Z(t) \notin (-a,b)\}$ винеровского процесса $Z(t)$, если $\theta = \theta_0 + u\varepsilon$ и $\varepsilon \longrightarrow 0$. Кроме того, имеет место асимптотическое представление*

$$\mathbf{E}_\varepsilon\nu_\varepsilon = \varepsilon^{-2}\mathbf{E}\tau + o(\varepsilon^{-2}). \tag{16}$$

Доказательство. Так как $\varepsilon^2\nu_{\varepsilon,T} = \min\{T, \varepsilon^2\nu_\varepsilon\}$ есть непрерывный в метрике ρ (см. предложение 1) функционал на пространстве $D[0,T]$, то $\varepsilon^2\nu_{\varepsilon,T} \Rightarrow \tau_T = \min\{T,\tau\}$, $\varepsilon \longrightarrow 0$, в силу предложения 2.

Покажем теперь, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$

$$\sup_{\varepsilon<\varepsilon_0}\mathbf{P}_\varepsilon\{\varepsilon^2\nu_\varepsilon > T\} \longrightarrow 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{\tau > T\} \longrightarrow 0,$$

если $T \to \infty$. То, что $\mathbf{P}\{\tau > T\} \longrightarrow 0$ при $T \to \infty$ — известный факт (см., например, [13, § 16.6.4, с. 426–427]), а для вероятности $\mathbf{P}_\varepsilon\{\varepsilon^2\nu_\varepsilon > T\}$ получим экспоненциальную (по T) равномерную (по ε) оценку, используя стандартный для данной ситуации метод разбиения суммы случайных величин на «пачки» растущего ($\varepsilon \to 0$) размера (см. [3, п. 1 приложений, с. 202–203]):

$$\mathbf{P}_\varepsilon\{\varepsilon^2\nu_\varepsilon > T\} \leqslant \mathbf{P}_\varepsilon\left\{-a < \varepsilon S_{[k\varepsilon^{-2}]} < b,\ k = 1,2,\ldots,[T]\right\}$$
$$\leqslant \mathbf{P}_\varepsilon^{[T]}\left\{-a-b < \varepsilon S_{[\varepsilon^{-2}]} < a+b\right\}.$$

Поскольку (см. доказательство предложения 2)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{P}_\varepsilon\{-a-b < \varepsilon S_{\varepsilon^{-2}} < a+b\} = \Phi\left(\frac{a+b-uI_0}{\sqrt{I_0}}\right) - \Phi\left(\frac{-a-b-uI_0}{\sqrt{I_0}}\right)$$
$$= q < 1,$$

то для любого q_1 с $q < q_1 < 1$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что

$$\sup_{\varepsilon<\varepsilon_0}\mathbf{P}_\varepsilon\{\varepsilon^2\nu_\varepsilon > T\} < q_1^{[T]} \longrightarrow 0 \tag{17}$$

при $T \to \infty$.

Таким образом, $\varepsilon^2\nu_\varepsilon \Rightarrow \tau$, если $\theta = \theta_0 + u\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$.

В силу экспоненциальности оценки (17) семейство $\varepsilon^2\nu_\varepsilon$ равномерно интегрируемо, откуда немедленно следует сходимость $\varepsilon^2\mathbf{E}_\varepsilon\nu_\varepsilon \longrightarrow \mathbf{E}\tau$ при $\varepsilon \to 0$, что эквивалентно (16).

Обратимся теперь к критерию с моментом остановки ν (см. теорему 1) и сформулируем окончательный результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (A1), (A2), априорная плотность $g(\theta)$ непрерывна и положительна в точке θ_0, $\beta = \max\{\beta_0, \beta_1\} \longrightarrow 0$, A, B — решение системы (14). Тогда*

$$\mathbf{E}_\theta\nu = \frac{B\,e^{(\theta-\theta_0)(A+B)} + A\,e^{-(\theta-\theta_0)(A+B)} - (A+B)\,e^{(\theta-\theta_0)(B-A)}}{(\theta-\theta_0)\,I_0\left(e^{(\theta-\theta_0)(A+B)} - e^{-(\theta-\theta_0)(A+B)}\right)}$$
$$+\, o(\beta^{-2}), \tag{18}$$

если $\theta - \theta_0 = O(\beta)$.

Доказательство немедленно следует из теоремы 1, предложения 4, а также известных формул для среднего значения момента выхода винеровского процесса из полосы $(-a,b)$ (см., например, [13, § 16.6.4, с. 426–427]).

Замечание 2. Полезно иметь в виду следующие довольно точные неравенства для главного члена $\mu(\theta)$ асимптотики (18):

$$\mu(\theta) \leqslant \begin{cases} B(\theta-\theta_0)^{-1}I_0^{-1}, & \text{если } \theta > \theta_0,\\ -A(\theta-\theta_0)^{-1}I_0^{-1}, & \text{если } \theta < \theta_0.\end{cases}$$

Замечание 3. В случае экспоненциального семейства рассматриваемый критерий совпадает с последовательным критерием отношения правдоподобия Вальда для двух простых гипотез (см., например, [21]) и поэтому к $\mathbf{E}_\theta\nu$ применимы асимптотические (A, $B \to \infty$) формулы Лотова [15], [24]. Если $\theta = \theta_0$, то, как легко видеть, формулы из [24] и формула (18) дают один и тот же результат: $\mathbf{E}_\theta\nu \sim AB/I_0$.

Естественно сравнить полученную асимптотику средней длительности наблюдений последовательного критерия с асимптотикой необходимого объема выборки, найденной в [8]. Рассмотрим только «симметричный» случай $G(\theta_0) = 0.5$, $\beta_0 = \beta_1 (= \beta)$. Тогда правые части формул (14) равны $\beta/2$ и поскольку $\psi(1) - \psi(\frac{1}{2}) = 2\ln 2$ (см. [10, с. 959, 8.366]), то $A = B = (g_0 \ln 2)/\beta$ (см. (15)). Следовательно,

$$\mathbf{E}_\theta\nu \sim \frac{1}{(\theta-\theta_0)\,I_0}\frac{e^{(\theta-\theta_0)A} - e^{-(\theta-\theta_0)A}}{e^{(\theta-\theta_0)A} + e^{-(\theta-\theta_0)A}}\frac{g_0\ln 2}{\beta}$$
$$= \frac{g_0\ln 2}{\beta(\theta-\theta_0)\,I_0}\,\mathrm{th}\left(\frac{g_0(\theta-\theta_0)\ln 2}{\beta}\right).$$

Как следует из [8] в этом случае для d-гарантийного различения гипотез H_0 и H_1 необходимый объем выборки $n^* \sim 2g_0^2/(\pi I_0\beta^2)$, так что асимптотическая эффективность

$$\mathscr{E}(\lambda) = \lim_{\beta\to 0}\frac{\mathbf{E}_\theta\nu}{n^*} = \frac{\pi\ln 2}{2g_0\lambda}\,\mathrm{th}(\lambda g_0\ln 2),$$

где $\lambda = \lim_{\beta\to 0}(\theta-\theta_0)/\beta$. Предельное ($\lambda\to 0$) значение асимптотической эффективности, соответствующее ее максимуму, равно

$$\mathscr{E}(0) = \frac{\pi\ln^2 2}{2} \approx 0.755.$$

Напомним, что в классическом подходе при различении двух простых гипотез $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta_1$ средний объем выборки $\mathbf{E}_\theta\nu$ критерия Вальда при некоторых $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$ превосходит объем выборки критерия Неймана–Пирсона с теми же ограничениями на вероятности ошибок (см. [14], [11]). Полученный результат говорит о том, что в d-апостериорном подходе существуют последовательные критерии, которые дают выигрыш в объеме наблюдений при любом значении тестируемого параметра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
2. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. — Труды института математики СО РАН, 1993, т. 19, с. 1–222.
3. *Вальд А.* Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960, 328 с.
4. *Володин И. Н., Каштанова Е. К.* Асимптотическое поведение среднего объема выборки в последовательном критерии Вальда с жесткими ограничениями на d-риски. — В сб.: Вторая Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Тезисы докладов. М.: ТВП, 1995, с. 39–40.
5. *Володин И. Н., Новиков Ан. А., Симушкин С. В.* Гарантийный статистический контроль качества: апостериорный подход. — Обозрение прикладной и промышленной математики, 1994, т. 1, в. 2, с. 1–32.
6. *Володин И. Н., Новиков Ан. А., Симушкин С. В.* Асимптотика необходимого объема выборки при d-гарантийном различении двух гипотез. — Изв. вузов, сер. математика, 1983, № 11, с. 59–66.

7. *Volodin I. N., Novikov An. A.* Asymptotics of the necessary sample size in testing parametric hypotheses: d-posterior approach. — Math. Methods Statist., vol. 7, № 1, 1998, pp. 111–121.
8. *Володин И. Н., Новиков Ан. А.* Асимптотика необходимого объема выборки при жестких ограничениях на d-риск. — В сб.: Актуальные вопросы современной математики. Сборник научных трудов. Т. 1. Новосибирск: НИИ МИОО НГУ, 1995, с. 52–59.
9. *Володин И. Н., Симушкин С. В.* О d-апостериорном подходе к проблеме гарантийности статистического вывода. — III международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов, т. 1, Вильнюс, 1981, с. 101–102.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962, 1100 с.
11. *Драгалин В. П., Новиков Ан. А.* Асимптотическое решение задачи Кифера–Вейса для процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., т. 32, в. 4, с. 679–690.
12. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.
13. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике, изд. 2-е. М.: Наука, 1985, 640 с.
14. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979, 408 с.
15. *Лотов В. И.* Об асимптотическом поведении характеристик последовательного критерия отношения правдоподобия. — Теория вероят. и ее примен., 1985, т. 30, № 1, с. 164–169.
16. *Новиков Ан. А.* Асимптотическая оптимальность последовательного d-гарантийного критерия. — Теория вероят. и ее примен., 1987, т. 32, в. 2, с. 387–391.
17. *Руссас Дж.* Контигуальность вероятностных мер. М.: Мир, 1975, 254 с.
18. *Симушкин С. В.* Оптимальный объем выборки при d-гарантийном различении гипотез. — Изв. вузов, сер. математика, 1982, № 5, с. 47–52.
19. *Симушкин С. В.* Эмпирический d-апостериорный подход к проблеме гарантийности статистического вывода. — Изв. вузов, сер. математика, 1983, № 11, с. 42–58.
20. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.
21. *Berk R. H.* Locally most powerfull tests. — Ann. Statist., 1975, v. 3, p. 373–381.
22. *Greenwood P. E., Shiryaev A. N.* Contiguity and the statistical invariance principle. New York: Gordon and Breach, 1985.
23. *Lerche H. R.* Boundary crossing of brownian motion. — Lect. Notes Statist., vol. 40, Berlin: Springer-Verlag, 1986.
24. *Lotov V. I.* On the results of asymptotic analysis for the random walks with two-sided boundary. — Probab. Theor. Math. Statist., Proceedings of the 5th Japanese–USSR Symposium, Kyoto, 1986, (Lect. Notes Math., Vol. 1299) Berlin: Springer-Verlag, 1988, p. 267–273.
25. *Stadje W.* Asymptotic efficiency of sequential testing using error sums. — Sankhyā, Ser. A, 1984, v. 46, p. 117–134.
26. *Volodin I. N.* Necessary sample size for guaranteed (by L. N. Bolshev) discrimination of hypotheses. — In: Fifth International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics: Abstracts of Communications. Vilnius: Inst. Math. Cybern., 1989, v. II, p. 218–219.

Поступила в редакцию
26.VIII.1996